UN PROBLEMA SUI SISTEMI LINEARI DI CURVE APPARTENENTI A UNA SUPERFICIE ALGEBRICA

1. Sia dato sopra una superficie algebrica F un sistema lineare di curve (algebriche) $|C|$, semplice, irriducibile (tolte, se occorre, le eventuali parti fisse) e di dimensione $r > 4$. Esso può servire a trasformare birazionalmente la F in una superficie F' di un S_r su cui il sistema $|C'|$ trasformato di $|C|$ sia tagliato dagli iperpiani e le curve C' corrispondenti alle curve di $|C|$ dotate di punto doppio (fuori degli eventuali punti-base) siano quelle tagliate dagli iperpiani tangenti.

Da questa osservazione segue senz'altro che l'imporre a una curva di $|C|$ un punto doppio in un punto generico di F è condizione tripla e che se l'imporre a una curva di $|C|$ due punti doppi in due punti *generici* di F equivale ad h condizioni con $h < 6$, due piani tangenti generici di F' dovranno esser situati in un S_{h-1} e quindi tagliarsi in un S_{5-h}. Ora è noto che, se i piani tangenti di una superficie di S_r con $r > 4$ si tagliano a due a due, essi non possono tagliarsi che in punti e la superficie o è un cono o è una superficie di VERONESE [1]; dunque:

Se una superficie algebrica F contiene un sistema lineare di curve $|C|$, semplice, irriducibile (a meno, se mai, di componenti fisse) e di dimensione $r > 4$, tale che l'imposizione di due punti doppi in due punti generici di F prefissati equivalga sempre ad h condizioni con $h < 6$, necessariamente $h = 5$ e la superficie F è trasformabile birazionalmente in un cono (di genere $p \geq 0$). Quanto al sistema $|C|$ esso è in un caso di dimensione 5, grado 4, genere 0 ed è riducibile a

(1) Vedi BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi.* (Pisa, Spoerri, 1907), pag. 315 e 316.

quello delle coniche di un piano; in tutti gli altri, $|C|$ contiene un sistema lineare ∞^{r-1} composto (quando siano tolte le parti fisse) di una involuzione in un fascio $|C_1|$ (razionale o no) le cui curve C_1 unisecano le C.

In particolare si deduce che se $|C|$, ferme restando le altre ipotesi, è un sistema di curve piane, esso può sempre ridursi mediante una trasformazione cremoniana al sistema ∞^5 di tutte le coniche, oppure a un sistema di curve di un certo ordine n con un punto $(n-1)$plo e ivi tutte le tangenti fisse.

2. Ora per la superficie di VERONESE è noto che un iperpiano bitangente è addirittura un iperpiano tangente doppio, che tocca, cioè, la superficie in tutti i punti di una conica; quindi nel sistema $|C|$ del primo caso del teorema precedente l'imposizione di due punti doppi porta con sè l'esistenza di altri ∞^1 punti doppi. Sorge pertanto spontanea la questione di decidere se possa esistere sopra una superficie algebrica un sistema lineare di curve (semplice, irriducibile, a meno di eventuali componenti fisse) di dimensione $r > 5$, tale che una sua curva la quale debba passare doppiamente per due punti generici della superficie si spezzi in una curva contata due volte e, se occorre, in una parte residua, *senza che però le condizioni imposte da quei due punti doppi si riducano a meno di 6 condizioni indipendenti.*

Quanto è stato detto al principio di questa Nota, mostra che il problema ora posto equivale all'altro:

Determinare le superficie di S_r, con $r > 5$, per le quali accade che l'S_5 contenente i due piani che le toccano in due punti generici contenga anche quelli che le toccono in altri ∞^1 punti; ed è appunto questo il problema che qui ci proponiamo di risolvere.

3. Se F è una sviluppabile (in particolare, un cono) di S_r $(r > 5)$, un piano tangente generico la tocca in tutti i punti di una sua generatrice; quindi l'S_5 che la tocca in due punti generici la tocca anche in tutti i punti di una curva spezzata in due rette.

Vediamo se, escluso questo caso, possa darsi che una superficie F di S_r $(r > 5)$ sia una rigata e che l'S_5 ad essa tangente in due punti generici la tocchi in tutti i punti di una curva passante per essi: tale curva sarà sempre spezzata in generatrici, perchè ove ciò non fosse l'S_5 toccherebbe la rigata in tutti i punti di una curva i-secante $(i \geq 1)$ le generatrici e quindi conterrebbe, contro l'ipotesi, tutta la rigata.

Come è noto, i piani tangenti a una rigata non sviluppabile nei punti di una sua generatrice stanno in un S_3; quindi, se F è una rigata per la quale valga la proprietà in discorso, gli S_3 contenenti i fasci di piani che la toccano nei punti delle sue generatrici staranno a due a due in un S_5 e quindi si taglieranno a due a due in un S_ε con $\varepsilon \geqq 1$.

Se fosse $\varepsilon = 2$, i piani tangenti di F si taglierebbero a due a due in un punto (sopra gli spazi S_ε) ed F (non potendo essere la superficie di Veronese) sarebbe un cono; dunque $\varepsilon = 1$ e quegli S_3 si tagliano a due a due in una retta.

Se α è uno di tali S_3, è chiaro che le rette segnate su di esso dagli altri S_3 non possono essere differenti e a due a due sghembe; poichè, se ciò fosse, l'S_5 determinato da due S_3 verrebbe a contenere due rette sghembe di un terzo S_3 generico e quindi, insieme con tutti gli S_3, verrebbe a contenere la F; per conseguenza, quelle rette o coincidono tutte in una stessa retta d, o sono distinte e passano per uno stesso punto P o giacciono in uno stesso piano π. Ora è chiaro che se gli ∞^1 S_3 in discorso si tagliassero a due a due in rette *diverse* di π, π sarebbe situato in ciascuno di essi e quindi si cadrebbe in un assurdo già notato, dunque non resta che supporre che quegli S_3 passino tutti per una retta d o per un punto P. In questi casi il risultato della proiezione di F da d o da P (supposto, nel primo, che d non sia una direttrice rettilinea di F) sopra un S_{r-2} o un S_{r-1} è una rigata sviluppabile; e inversamente è chiaro che una rigata dotata di direttrice rettilinea, oppure una rigata le cui rette siano situate negli S_3 o negli S_2 proiettanti da una retta d o da un punto P, rispettivamente, le generatrici di una sviluppabile di un S_{r-2} o di un S_{r-1}, è una rigata della specie voluta.

4. Ciò premesso, osserviamo che se F è una superficie di S_r con $r > 6$, dotata della proprietà in questione, anche la superficie Φ di S_6, che si ottiene da essa per proiezione da punti esterni generici, gode della stessa proprietà: quindi, per compiere la nostra ricerca, potremo partire dalla ipotesi che la superficie di cui si tratta non sia rigata e sia una superficie Φ^n, di ordine n, di S_6.

L'S_5 tangente a Φ^n in due suoi punti generici A e B la tocca per ipotesi, in altri ∞^1 punti costituenti una curva f_{ab} passante per A e B irriducibile o spezzata, ma in ogni caso *non* spezzata in rette. Se, tenendo fermo il punto A, facciamo variare il punto B, la curva f_{ab} descriverà un fascio e se proiettiamo la superficie Φ^n dal piano α che la tocca in A sopra un S_3, il risultato della proiezione sarà una *superficie* (1) Φ^* (semplice o multipla) tale che il piano ad essa tangente in un punto la tocca in altri ∞^1, cioè in tutti i punti dell'immagine di una curva f del fascio considerato. Si conclude che Φ^* è una sviluppabile e che una curva f qualsiasi sta in un S_4 col piano α tangente a Φ^n in un punto A situato su f (2).

Ora si osservi che le linee f costituiscono sulla Φ^n un sistema ∞^2 tale che per due punti generici A e B di Φ^n passa una sola curva del sistema, dunque:

a) o le linee f sono irriducibili e costituiscono una rete;

b) o le linee f si spezzano, ciascuna, in due o più curve f_1 di un fascio (razionale o no) situato sopra Φ^n.

L'ipotesi *b*) si trova già discussa in una mia Nota già pubblicata altrove (3) e porta alla conclusione che (qualunque sia la dimensione $r \geq 6$ dello spazio ambiente) la superficie Φ^n consta di ∞^1 curve situate in piani uscenti da una retta fissa; basterà dunque limitarsi alla considerazione dell'ipotesi *a*) che ivi è discussa soltanto in parte, una discussione completa non essendomi allora stata necessaria per lo scopo che avevo in vista.

In quella Nota io distinguevo il caso in cui la rete ha una serie caratteristica g_n^1 con $n > 1$ dal caso della rete omaloidica; qui farò vedere con un ragionamento totalmente diverso da quello come la conclusione a cui ivi si perviene per $n > 1$ valga anche per il caso della rete omaloidica: così anche la risoluzione del problema posto in quella Nota viene in parte facilitata.

5. Si osservi intanto che, nell'ipotesi *a*), la linea f_{ab} passante per i punti A e B, come sta in un S_4 col piano α tangente a Φ^n in A, così è situata in un S_4 col piano β tangente a Φ^n in B; questi due S_4 sono distinti, poichè α e β *appartengono* a un S_5; dunque la curva f_{ab} (che non è una retta) o è una curva piana o è una curva sghemba ordinaria.

(1) Se infatti l'S_3 congiungente α con un punto generico di Φ^n tagliasse Φ^n lungo una curva, i piani tangenti di Φ^n si taglierebbero a due a due e Φ^n non potendo essere la superficie di VERONESE, sarebbe un cono. Del resto vedi anche ENRIQUES, *Sulla massima dimensione*, ecc. (Atti della r. Accad. delle scienze di Torino, gennaio 1894), n. 2.

(2) Se f si spezza, il ragionamento del testo dimostra soltanto che una delle parti di f sta in un S_4 col piano tangente a Φ^n in un punto di una qualunque delle *altre* parti di f; ma non ci siamo trattenuti a far distinzioni perchè risulta poi a *posteriori* che anche quando f si spezza l'asserzione del testo resta vera.

(3) SCORZA, *Determinazione delle varietà*, ecc. (Rendic. del Circ. mat. di Palermo, XXV, 1908), n. 6.

La prima alternativa è da escludere, perchè Φ^n non è un cono e non è la superficie di VERONESE, dunque le curve f sono proprio curve sghembe ordinarie.

Ora torniamo a proiettare la superficie Φ^n dal piano α sopra un S_3 indipendente da α. L'S_3 proiettante da α un punto B della Φ^n, contenendo α, contiene la retta tangente in A alla linea f_{ab} della rete $|f|$ che passa per A e B e quindi taglia lo spazio di f_{ab} in un piano e la linea f_{ab} in $m-2$ punti fuori di A, se m è l'ordine di una curva f generica. Il risultato della proiezione è dunque una sviluppabile Ψ $(m-2)$-pla almeno, le cui generatrici rappresentano le linee f passanti per A.

Per procedere con tutta chiarezza dimostriamo che questa sviluppabile è proprio $(m-2)$-pla e non m'-pla con $m' > m-2$. Infatti, se ciò fosse, l'S_3 di prima, proiettante B, dovrebbe contenere altri punti di Φ^n fuori della linea f_{ab} e, facendo muovere B su f_{ab}, si avrebbe che una stessa generatrice della sviluppabile rappresenterebbe insieme con la linea f_{ab} una ulteriore linea di Φ^n, cioè uno stesso S_5 toccherebbe la Φ^n, contro le ipotesi fatte, lungo una linea f e lungo una linea ulteriore.

Ciò posto, supponiamo, se è possibile, che la sviluppabile Ψ non sia un cono e indichiamo con ϱ il suo grado, con ν l'ordine del suo spigolo di regresso ψ: il genere sarà 0, perchè il fascio delle generatrici rappresenta il fascio (lineare) delle linee f uscenti da A; e quindi ϱ e ν, indicando con $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)$ un ramo singolare della curva, saranno legati dalla relazione:

$$\varrho = 2(\nu - 1) - \Sigma(\alpha - 1) \tag{1}$$

dove la somma si intende estesa a tutti i rami singolari.

La classe μ della sviluppabile, che come è noto è data da [1]

$$\mu = 3(\nu - 2) - \Sigma(2\alpha + \alpha_1 - 3), \tag{2}$$

può calcolarsi anche direttamente nel modo che segue.

Si osservi in primo luogo che se μ è il numero dei piani osculatori di ψ passanti per un punto generico dello spazio di ψ, $\mu - 2$ è il numero di quelli che passano per un punto generico di Ψ e son diversi dal piano ivi tangente a Ψ, ossia $\mu - 2$ sono i piani che passano per un punto generico di Ψ e toccano Ψ lungo rette *non* contenenti quel punto, e $\mu - 2$ sono gli S_5 che passano per un punto generico B di Φ^n e toccano Φ^n lungo linee f uscenti da A ma *non* contenenti B.

(1) Vedi BERTINI, loc. cit. n. 1, pag. 403.

Ora il sistema lineare $|C'|$ delle curve sezioni di Φ^n con gli iperpiani passanti per α è un sistema ∞^3 irriducibile [1], composto con l'involuzione di ordine $m-2$ tagliata su Φ^n dagli S_3 che la incontrano uscenti da α, e la sua serie caratteristica $g^2_{n'}$, composta con la g^1_{m-2} tagliata sulla curva C' generica dal fascio delle f uscenti da A, ha per le posizioni fatte l'ordine:

$$n' = \varrho\,(m-2).$$

Segue che se consideriamo una curva C'_1 delle ∞^2 curve di $|C'|$ che passano per B, un S_5, che tocchi Φ^n lungo una curva f uscente da A, taglia C'_1 in un gruppo della $g^2_{n'}$ composto di un gruppo della g^1_{m-2} contato due volte e di $\varrho-2$ gruppi residui della g^1_{m-2} medesima, e inversamente: quindi, per vedere quanti sono gli S_5 di questa specie che passano per B ma toccano Φ^n lungo linee f non passanti per B, bisognerà vedere quanti sono i gruppi della $g^2_{n'}$ che contengono *semplicemente* il gruppo della g^1_{m-2} passante per B e contengono poi *doppiamente* un *altro* gruppo della g^1_{m-2}. Ora i gruppi della $g^2_{n'}$ che passano per B, tolto il gruppo della g^1_{m-2} per B che hanno in comune, dànno luogo nella ∞^1 razionale che ha per elementi i gruppi della g^1_{m-2} a una $g^1_{\varrho-1}$ con $2\,(\varrho-2)$ elementi doppi; dunque il numero richiesto è $2\,(\varrho-2)$, cioè si ha:

$$\mu = 2\,(\varrho-2)+2 = 2\,(\varrho-1).$$

Si avrà allora, sostituendo per ϱ il valore dato dalla (1) e confrontando con (2),

$$3\,(\nu-2) - \Sigma\,(2\,\alpha+\alpha_1-3) = 4\,(\nu-1) - 2\,\Sigma\,(\alpha-1) - 2,$$

cioè:

$$\nu + \Sigma\,(\alpha_1-1) = 0.$$

L'assurdo a cui siamo pervenuti dimostra che la sviluppabile Ψ deve essere un cono, ossia gli S_5 tangenti a Φ^n lungo le linee f uscenti da A debbono passare non solo per α ma addirittura per uno stesso S_3.

Allora alla ∞^2 degli S_5 tangenti a Φ^n lungo le linee f, contenente ∞^2 gruppi di ∞^1 S_5 passanti per uno stesso S_3, corrisponde per dualità in S_6 una ∞^2 di punti, cioè una superficie, con ∞^2 curve

[1] ENRIQUES, loc. cit. n. 1.

piane irriducibili. Ma questa è una superficie di VERONESE *(appartenente* a un S_5*)*; dunque quegli ∞^2 S_5 passano tutti per uno stesso punto P e nella stella P costituiscono l'insieme degli iperpiani tangenti a un cono V_3^4 ottenuto proiettando da P una superficie di VERONESE.

Questo cono conterrà evidentemente la superficie Φ^n, poichè il risultato della proiezione di Φ^n da P sopra un S_5 sarà appunto una superficie con ∞^2 S_4 tangenti in tutti i punti di una linea (proiezione da P di una linea f), cioè una superficie di VERONESE.

6. Ed ora supponiamo che F sia una superficie non rigata di S_r $(r > 6)$, tale che l'S_5 determinato da due piani tangenti generici ne contenga altri ∞^1, e supponiamo inoltre che la linea costituita dai punti di contatto sia irriducibile. La ∞^2 degli S_5 tangenti doppi di F sarà proiettata da un S_{r-7} generico sopra un S_6 secondo la ∞^2 degli S_5 tangenti doppi di un cono V_3^4 proiettante dal suo vertice una superficie di VERONESE; quindi sarà anch'essa una ∞^2 della stessa specie ed F giacerà sopra un tal cono, cioè apparterrà necessariamente ad un S_6.

7. I ragionamenti qui esposti ci permettono pertanto di enunciare il teorema:

Se una superficie F di S_r $(r > 5)$ gode della proprietà, che l'S_5 ad essa tangente in due suoi punti generici la tocca in altri ∞^1 punti, essa è:

a) una sviluppabile, oppure

b) una rigata le cui rette siano situate negli S_3 o negli S_2 proiettanti da una retta d o da un punto P, rispettivamente, le generatrici di una sviluppabile di un S_{r-2} o di un S_{r-1}; oppure

c) una superficie costituita da ∞^1 curve situate in piani passanti per una retta fissa (in particolare, è una rigata con direttrice rettilinea); oppure

d) una superficie situata sopra un cono proiettante dal suo vertice una superficie di VERONESE *e in quest'ultimo caso appartiene, per conseguenza, a un S_6.*

E inversamente è chiaro che ogni superficie delle specie a), b), c), d) gode della proprietà in discorso.

8. Non vi sarebbe ora nessuna difficoltà a enunciare il teorema in forma invariantiva tenendo di mira il sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane di F anzi che la superficie F, ma ce ne asteniamo perchè

l'enunciato non guadagnerebbe certo in perspicuità e chiarezza. Osserveremo soltanto che nel caso d) le curve f che si staccano (contate ciascuna due volte) dalle curve di $|C|$ dotate di due (e quindi di ∞^1) punti doppi costituiscono una rete autoresidua rispetto a un sistema lineare ∞^5 contenuto nel sistema (∞^6) $|C|$.

Palermo, 20 luglio 1908.