SULLE VARIETÀ A QUATTRO DIMENSIONI DI S_r ($r \geq 9$) I CUI S_4 TANGENTI SI TAGLIANO A DUE A DUE

In una Nota, comparsa già in questi Rendiconti [1], ho determinate tutte le V_3 non coniche di S_r ($r \geq 7$) i cui S_3 tangenti si tagliano a due a due (in punti); qui pongo e, in gran parte, risolvo la questione analoga per le varietà a quattro dimensioni di S_r con $r \geq 9$.

Per intender chiaro sotto quali restrizioni questo lavoro risolve il problema che mi sono proposto, giova esporne in breve le linee generali.

Liberato il terreno dalle V_4 di S_r, con $r \geq 8$, i cui S_4 tangenti si tagliano a due a due in rette (n. 1), si considerano quelle di S_r, con $r \geq 9$, i cui S_4 tangenti si tagliano a due a due in un punto e si dimostra (n. 2) che l'S_8 il quale contenga due S_4 tangenti a una di queste V_4 contiene anche quelli ad essa tangenti in altri infiniti punti. Ora questi punti possono formare sulla V_4 una varietà a tre dimensioni Φ, una superficie Σ oppure una linea λ: corrispondentemente le V_4 si dicono di 1ª, 2ª e 3ª specie (n. 4). La determinazione delle V_4 di 2ª specie sembra che offra difficoltà gravi, poichè, ad es., nel caso che le superficie Σ siano riducibili nessun teorema può utilizzarsi per decidere in quante maniere diverse possa avvenire lo spezzamento. Quindi è che intorno alle V_4 di 2ª specie io mi limito a dar dei teoremi che, pur chiarendo la questione e facendone intravedere la soluzione generale, non riescono a trattarla in modo esauriente.

[1] Scorza, *Determinazione delle varietà a tre dimensioni di S_r ($r \geq 7$) i cui S_3 tangenti si tagliano a due a due* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXV (1º sem. 1908), pp. 193-204].

Invece per le V_4 di 1ª e 3ª specie arrivo a caratterizzarle tutte (n. 9 e 25) valendomi della teoria dei sistemi lineari sopra una varietà algebrica e, per le ultime, della circostanza che esse contengono un sistema ∞^6 di coniche così che per ogni loro coppia di punti passa una ed una sola conica. Inoltre la natura dei ragionamenti è tale da mostrare come i risultati ottenuti possano estendersi, almeno per la maggior parte, alle varietà (di *prima* e *ultima* specie) a un numero qualunque di dimensioni, e quindi differisce sostanzialmente da quella dei ragionamenti adoperati nella mia Nota sulle V_3.

Chiuderò queste poche parole d'introduzione osservando come le proprietà di geometria proiettiva iperspaziale espresse, per le superficie, da un teorema del prof. DEL PEZZO e per le varietà a tre o quattro dimensioni dalle mie ricerche qui pubblicate si traducono facilmente in proprietà dei sistemi lineari di forme appartenenti a spazi a 2, 3 o 4 dimensioni.

Si osservi infatti che se, per applicare i risultati di questo lavoro, si considera entro uno spazio a quattro dimensioni un sistema lineare di forme $|V_3|$ irriducibile, semplice, di dimensione $r > 4$, esso può riguardarsi come il sistema rappresentativo di una V_4 razionale di un S_r, e si osservi ancora che le forme del sistema $|V_3|$ aventi un punto doppio in un punto A' dello spazio rappresentativo sono le immagini delle sezioni della V_4 ottenute con gli iperpiani passanti per l'S_4 che la tocca nel punto A avente per immagine A'. Segue che il ricercare le V_4 di S_r, con $r \geq 9$, i cui S_4 tangenti si tagliano a due a due in un punto comprende come caso particolare la ricerca dei sistemi lineari $|V_3|$ di un S_4 di dimensione $r \geq 9$ per le cui forme accade che l'imposizione di due punti doppi in due punti generici dell'S_4 equivalga a 9 condizioni anzi che a 10; quindi, esclusi da questi sistemi lineari quelli rappresentanti coni, e distinti i sistemi lineari in *specie* affatto analogamente a quanto abbiamo detto per le V_4, i teoremi dimostrati in questo lavoro potranno considerarsi come teoremi relativi alle varie *specie* di tali sistemi lineari. In particolare il risultato che si trova al n. 25 di questo lavoro darà il teorema:

Si abbia in un S_4 un sistema lineare di forme irriducibile, semplice, di dimensione $r \geq 9$ (non rappresentativo di un cono) e si supponga che per le sue forme l'imposizione di due punti doppi in due punti generici dello spazio ambiente equivalga a 9 condizioni anzi che a 10. Allora una forma del sistema lineare che abbia due tali punti doppi ne ammette necessariamente infiniti altri, e, se ne ammette precisamente ∞^1, può sempre ridursi, mediante una conveniente trasforma-

zione cremoniana, a un sistema lineare di quadriche o a un sistema lineare di forme quartiche con retta tripla o, con una rigata-base ellittica del 6⁰ *ordine (che può degenerare) avente in o una retta tripla e, se occorre, con altri elementi base.*

E nello stesso modo alcuni dei risultati della Nota già citata daranno il teorema:

Se per le superficie di un sistema lineare irriducibile, semplice, di dimensione $r \geq 7$ (non rappresentativo di un cono) dello spazio ordinario l'imposizione di due punti doppi in due punti generici equivale a 7 condizioni anzi che a 8, una superficie del sistema che abbia due punti doppi ne ha necessariamente infiniti altri; e se ne ha precisamente ∞^1, il sistema può ridursi per trasformazioni cremoniane a un sistema lineare di quadriche o al sistema delle superficie cubiche con un punto base doppio P e una cubica gobba base (che può degenerare) passante per P.

§ 1.

1. Sia, ora e nel seguito, V_4^n una varietà irriducibile, non conica, d'ordine n e dimensione 4, di S_r $(r \geq 9)$ i cui S_4 tangenti si taglino a due a due.

Si vede subito che essi non possono tagliarsi che in rette o punti: ma poichè la determinazione delle V_4 di S_r $(r \geq 8)$ i cui S_4 tangenti si tagliano a due a due in rette è stata già da me effettuata nella Nota di cui è stato già discorso, così faccio senz'altro l'ipotesi che gli S_4 tangenti della V_4^n si taglino a due a due in un punto.

Segue, allora, che un iperpiano passante per l'S_4 α, tangente alla V_4^n in un suo punto generico A, taglia la V_4^n in una V_3^n che, al variare dell'iperpiano intorno ad α, descrive un sistema lineare ∞^{r-5} di V_3^n irriducibili o spezzate in una parte fissa contenuta in α e in una parte residua variabile irriducibile (1). Infatti, se, prescin-

(1) Se una V_4^n di S_r $(r \geq 6)$ è tagliata da ogni suo S_4 tangente in una V_3, un S_{r-2} generico la taglia in una superficie che da ogni suo piano tangente è tagliata in una linea, ossia (per essere $r-2 \geq 4$) in una superficie rigata. {Vedi Enriques, *Sulla massima dimensione dei sistemi lineari di curve di dato genere appartenenti ad una superficie algebrica* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXIX (1894), pp. 275-296], n. 1}. Ciò significa che V_4^n è una ∞^1 di S_3 e quindi la seconda alternativa del testo non può verificarsi che quando V_4^n consta di ∞^1 S_3.

dendo dalla eventuale parte fissa della V_3^n situata in α, la parte residua V_3^m $(m \leq n)$ fosse riducibile, la V_3^m non potrebbe contenere una parte fissa e quindi dovrebbe necessariamente comporsi di un certo numero k di V_3 variabili in un fascio, cioè *ogni* iperpiano passante per α e per un punto della V_4^n dovrebbe contenere (almeno) la V_3 del fascio passante per questo punto. Ma allora la V_4^n consterebbe di ∞^1 V_3 situate in ∞^1 S_5 uscenti da α e l'S_4 che la tocca in un suo punto generico B, stando nell'S_6 tangente al cono formato da questi ∞^1 S_5 lungo un suo spazio generatore, taglierebbe α secondo un piano contrariamente all'ipotesi fatta. Notisi, ancora, che α e una V_3^m generica del sistema sopra considerato non possono stare in un $S_{r-\delta}$ con $\delta > 1$, perchè ove ciò fosse, si potrebbe condurre almeno un iperpiano per α, V_3^m e un punto ulteriore della V_4^n; ciò che è assurdo, la V_3^m e l'eventuale V_3 comune ad α e alla V_4^n costituendo insieme una V_3 d'ordine complessivo n.

2. Ora nell'S_{r-1} contenente α e la V_3^m immaginiamo di tagliare quest'ultima con tutti gli S_{r-2} uscenti da α. Poichè nessuno di essi contiene la V_3^m, avremo su questa un sistema lineare ∞^{r-6} di V_2^m che o saranno irriducibili o si spezzeranno in una parte fissa contenuta in α e in una parte variabile irriducibile.

Infatti ove questa parte variabile fosse ulteriormente riducibile essa si comporrebbe di V_2 variabili in un fascio, ogni S_{r-2} per α e per un punto della V_3^m conterrebbe la V_2 del fascio passante per quel punto e la V_3^m consterebbe di ∞^1 V_2 situate in S_5 passanti per α. Ma allora la V_4^n risulterebbe di ∞^2 V_2 situate in S_5 passanti per α, l'S_4 tangente alla V_4^n in un punto B si troverebbe con α in uno stesso S_7 tangente lungo un suo spazio generatore al cono formato da questi ∞^2 S_5 e taglierebbe α in una retta, il che, sempre, è contrario all'ipotesi fatta.

Ciò posto, diciamo, V_2^p $(p \leq m)$ la parte variabile irriducibile delle sezioni di V_3^m con un S_{r-2} (del considerato S_{r-1}) passante per α e appartenente (si vede subito) insieme con α *proprio* ad un S_{r-2} e seghiamola con gli S_{r-3} dell'S_{r-2} uscenti da α. Per una importante osservazione del prof. BERTINI [1], il sistema delle linee che così si

[1] BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, con appendice sulle curve algebriche e loro singolarità* (Pisa, Enrico Spoerri, 1907) pag. 316; vedi anche SCORZA, loc. cit., ove si fa *in extenso* per le V_3 il ragionamento che qui è soltanto accennato per le V_4.

otterrà, spogliato, se occorre, delle parti fisse contenute in α, sarà certo riducibile e si comporrà delle linee λ di un fascio situate a ϱ a ϱ $(\varrho \geq 1)$ in S_5 uscenti da α.

Ciò porta che la V_4 consta di ∞^3 linee λ situate a ϱ a ϱ in S_5 uscenti da α, ossia che la V_4 sta sopra il cono a 8 dimensioni col vertice α formato da questi ∞^3 S_5. Ma allora l'S_8 tangente al cono lungo un suo spazio generatore contiene tutti gli S_4 tangenti a V_4 nei punti delle ϱ linee λ appartenenti a un S_5 per α, e si ha il teorema:

Gli S_4 tangenti alla V_4^n nei suoi due punti generici A e B (incontrandosi in un punto) stanno in un S_8, il quale contiene gli S_4 tangenti alla V_4^n nei punti delle sue ϱ linee λ situate nell'S_5 che congiunge B (o A) con l'S_4 tangente in A (o in B).

Può darsi naturalmente che un S_8 il quale contenga due S_4 tangenti generici della V_4^n ne contenga ∞^s con $s > 1$, ma non insistiamo più oltre su questa osservazione perchè vi si tornerà in seguito con ogni desiderabile chiarezza.

3. Per ora preferiamo occuparci del caso in cui la V_4^n è una ∞^1 di S_3 e così verranno facilitate alcune discussioni ulteriori.

Se la V_4^n è una ∞^1 di S_3, l'$S_4\,\alpha$, che la tocca nel suo punto generico A, contiene l'S_3 generatore α' che vi passa, e un S_5 che contenga α e un altro punto generico B di V_4^n conterrà una linea di V_4^n passante per B. Ora, o tale linea è una curva appoggiata a tutti gli spazi generatori della V_4^n, o è una retta contenuta nell'S_4 generatore β' che passa per B. La prima alternativa è da escludere perchè altrimenti gli S_5 passanti per α e per quattro punti generici B_1, B_2, B_3, B_4 di β' conterrebbero quattro curve appoggiate a ciascuno degli S_3 della V_4^n in un gruppo di punti *appartenente* a quell'S_3 (come i punti $B_1, \ldots, B_4$ appartengono a β'), e la V_4^n starebbe al più nell'S_8 contenente quei quattro S_5; resta pertanto la seconda, la quale porta subito alla conclusione che β' si appoggia ad α in un punto, e questo punto è quello ove α taglia l'S_4, β, tangente alla V_4^n in B. Ma allora come β', anche α' passa pel punto $\alpha\beta$ e gli S_3 della V_4^n si tagliano a due a due in un punto (e in un punto solo, se, come supponiamo, gli S_4 tangenti non si tagliano a due a due che in un punto).

Ora si osservi che gli ∞^1 S_3 della V_4^n non possono appoggiarsi ad uno qualunque di essi in uno stesso punto, perchè altrimenti la V_4^n sarebbe un cono: quindi in ogni S_3 generatore si avrà una linea μ luogo dei punti di appoggio degli altri S_3 su di esso, e le linee μ si taglieranno a due a due in *un* punto.

Se le linee μ sono rette, esse non possono passare per uno stesso punto, quindi giacciono necessariamente in uno stesso piano e la V_4^n consta di ∞^1 S_3 appoggiati secondo rette ad un piano fisso.

Se le linee μ sono linee piane (non rette) i piani che le contengono, tagliandosi a due a due in un punto e non potendo passare per uno stesso punto, nè potendo tagliare in rette un piano fisso (chè altrimenti si ricadrebbe nel caso della V_4^n con ∞^1 S_3 appoggiati secondo rette a un piano fisso e allora le μ sarebbero rette) apparterranno a un S_4 o al più ad un S_5 [1].

Nel primo caso la V_4^n è una ∞^1 di S_3 situati in ∞^1 S_5 uscenti da un S_4 e rientra in una classe di varietà che troveremo più innanzi; ma, in entrambi i casi, il modo più generale di costruire una V_4^n del tipo considerato è quello di prendere in un S_r $(r > 8)$ di dimensione elevata quanto si vuole una curva ad esso appartenente e riferita biunivocamente ai piani di una ∞^1 contenuta in un S_4 o in un S_5 dell'S_r e di congiungere mediante S_3 i punti della curva coi piani omologhi della ∞^1; si otterrà una V_4^n a S_4 tangenti mutuamente secantisi sempre che si supponga che i piani di quella ∞^1 si taglino a due a due in un punto. Se la ∞^1 appartiene a un S_4, allora essa è affatto generica, se appartiene a un S_5 dovrà invece essere scelta opportunamente; potrà essere formata, per es., da ∞^1 piani tangenti ad una superficie di VERONESE o dai piani di ∞^1 coniche di tale superficie.

Se infine le linee μ sono curve sghembe, allora quattro S_3 generici α, β, γ δ, della V_1^n tagliano sopra un altro S_3 della V_4^n quattro punti indipendenti, quindi tutti gli S_3 della V_4^n appartengono allo spazio S_r che contiene α, β, γ e δ.

Segue che $r \leq 9$; ma per le ipotesi nostre, non può essere $r < 9$, dunque $r = 9$ e la V_4^n si compone degli ∞^1 S_3 di ∞^1 curve sghembe ordinarie costituenti sopra una certa superficie di un S_9 un sistema ∞^1 di grado 1.

Che di tali V_4^n esistano realmente si dimostra subito con esempi effettivi. Si prenda, per es., la V_2^9 di S_9 rappresentata su un piano dal sistema lineare di tutte le cubiche; essa contiene una rete omaloidica di cubiche gobbe che hanno per immagini le rette del piano rappre-

[1] BERTINI, loc. cit., pag. 316.

sentativo, quindi una ∞^1 qualunque di queste cubiche gobbe dà con gli S_3 che le contengono una V_n^n del tipo voluto.

Per avere un altro esempio, si prenda la V_3^8 di S_9 rappresentata sullo spazio ordinario dal sistema di tutte le quadriche, o, come diremo, la V_3^8 di VERONESE (¹); gli S_3 tangenti di queste V_3^8 si tagliano a due a due in un punto, quindi una loro qualsiasi ∞^1 dà luogo a una V_4^n con S_4 tangenti a due a due secantisi in un punto. In questo caso (e qualcosa di analogo vale in un esempio precedente) la superficie su cui si trovano le linee μ rappresenta biunivocamente le coppie di punti di una certa curva gobba dell'S_3 rappresentativo, e precisamente di quella curva i cui punti rappresentano, nel solito modo ben noto, gli ∞^1 S_3 tangenti della V_3^8 che si son presi a considerare (²).

4. In virtù della discussione precedente possiamo limitarci a considerare d'ora innanzi le V_4^n a S_4 tangenti mutuamente secantisi che non sono coni e non contengono ∞^1 S_3.

Si è dimostrato che l'S_8 contenente due S_4 tangenti di una V_4^n contiene anche gli S_4 tangenti alla V_4^n in infiniti altri punti (siano o no questi S_4 tutti distinti fra di loro): il luogo dei punti di contatto di questi S_4 potrà essere una varietà a tre dimensioni, una superficie, oppure una linea, e, come vedremo, tutte queste ipotesi sono realmente legittime; quindi per chiarezza distingueremo in *specie* le V_4^n di cui dobbiamo ancora occuparci, chiamando una V_4^n di 1ª, 2ª o 3ª specie secondo che il luogo di quei punti di contatto è

(¹) Per brevità e per evidenti ragioni di analogia chiameremo *varietà di* VERONESE le $V_r^{2^r}$ di $S_{\frac{r(r+3)}{2}}$ rappresentate sopra un S_r dal sistema di tutte le quadriche.

(²) Non crediamo inutile osservare incidentalmente come gli spazi rappresentativi delle varietà di VERONESE forniscano una costruzione geometrica diretta e semplicissima di varietà rappresentanti quelle delle coppie di punti di varietà qualsiansi. Così, ad es., per costruire un modello proiettivo della varietà delle coppie di punti di una curva di genere p (non iperellittica), si supponga che questa sia la C^p_{2p-2} di S_{p-1} e si consideri la superficie che nell'$S_{\frac{(p-1)(p+2)}{2}}$ delle quadriche inviluppo dell'S_{p-1} rappresenta le quadriche inviluppo spezzate nelle coppie di punti della C^p_{2p-2}. Così per $p=3$ si ottiene una superficie normale dell'S_5 del 16⁰ ordine a sezioni iperpiane del genere 15, con ∞^1 quartiche piane costituenti un sistema di grado 1 e indice 2. La corrispondenza stabilita fra due quartiche del sistema da tutte le altre è una corrispondenza proiettiva, ecc.

rispettivamente una varietà tridimensionale, una superficie o una linea.

Giova osservare, prima d'andare innanzi, che una V_4^n la quale consti di ∞^1 S_3 a due a due secantisi in un punto è, in generale, una V_4^n di 2ª specie.

Infatti è chiaro che, per una tale V_4^n, l'S_4 ad essa tangente in un punto A dell'S_3 generatore α' la tocca anche in tutti i punti della retta congiungente A col punto ove α' è tagliato dallo spazio generatore infinitamente vicino [1]; d'altra parte, l'S_5 contenente quell'S_4 e un punto B dell'S_3 generatore β' taglia β' nella retta congiungente B col punto $\alpha'\beta'$, dunque l'S_8 che contiene gli S_4 tangenti a V_4^n in A e in B contiene (almeno) anche gli S_4 tangenti a V_4^n in tutti i punti della retta $B.\alpha'\beta'$ e (per ragioni di simmetria) della retta $A.\alpha'\beta'$, e il luogo dei relativi punti di contatto è costituito dai due piani che congiungono rispettivamente queste rette coi punti ove β' e α' sono tagliati dagli S_3 generatori ad essi infinitamente vicini.

Si vede così che le V_4^n composte di ∞^1 S_3 sono della 2ª specie e (tenendo le notazioni dell'introduzione) a superficie Σ spezzate in piani appartenenti a uno stesso sistema ∞^3, cioè nei piani delle ∞^1 stelle ordinarie ciascuna delle quali è contenuta in uno spazio generatore ed ha ivi per centro il punto ove esso è tagliato da quello infinitamente vicino.

§ 2.

Le V_4^n di 1ª specie.

5. Consideriamo una V_4^n di 1ª specie e, se già non si trova in un S_9, proiettiamovela da punti esterni; allora se immaginiamo di tagliarla con un iperpiano generico, cioè con un S_8, otterremo in

[1] Si tenga presente che in una V_k formata di ∞^1 S_{k-1} gli S_k tangenti nei vari punti di un S_{k-1} generatore formano sempre un sistema lineare entro un determinato S_{k+l} $(l \leq k-1)$ e che ogni S_k tangente a V_k in un punto la tocca nei punti di un S_{k-l-1} dell'S_{k-1} generatore passante per quel punto, il detto S_{k-l-1} contenendo l'S_{k-l-2} secondo cui si intersecano lo spazio generatore considerato e quello ad esso infinitamente vicino. Cfr. Severi, *Sulle intersezioni delle varietà algebriche e sopra i loro caratteri e singolarità proiettive* [Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, serie 2ª, t. LII (1902), pp. 61-118], pag. 70 in nota.

questo una V_3^n tale che l'S_7 contenente due suoi S_3 tangenti generici ne conterrà infiniti altri, il luogo dei punti di contatto essendo una superficie φ. Al variare dei punti di contatto della coppia di S_3 che la determina, la superficie φ descrive un sistema ∞^2, il quale o:

a) è una rete, se la superficie generica φ è irriducibile, o

b) è composto di gruppi di m $(m \geq 2)$ superficie φ_1 variabili in un fascio $\{\varphi_1\}$ (razionale o no) (1).

Senza fare per il momento alcuna distinzione fra le due ipotesi, sia α' l'S_3 tangente alla V_3^n in un suo punto generico A e si proietti la V_3^n da α' sopra un S_4 che non lo tagli. La proiezione potrà non riuscire biunivoca, ma l'immagine della V_3^n sarà sempre una V_3^*, cioè una varietà a tre dimensioni, perchè altrimenti l'S_4 congiungente α' con un punto B di V_3^n conterrebbe almeno una linea della V_3^n passante per B e allora l'S_3 tangente alla V_3^n in B taglierebbe α'; ciò che è impossibile, se, come supponiamo, gli S_4 tangenti alla V_4^n non si incontrano a due a due che in *un* punto. Gli S_3 tangenti alla V_3^* sono le intersezioni dell'S_4, su cui si fa la proiezione, con gli S_7 che uscendo da α' toccano *altrove* la V_3^n; ma un tale S_7 tocca la V_3^n in altri ∞^2 punti costituenti una superficie φ, dunque la V_3^* è tale che un S_3 il quale la tocchi in un punto la tocca in altri ∞^2. Segue che la V_3^* è luogo di ∞^1 S_2 e ciascuno di questi S_2 sarà proiezione (semplice o multipla):

nell'ipotesi *a*) di una superficie φ uscente da A;

nell'ipotesi *b*) della parte *variabile* di una superficie φ uscente da A, ossia di un gruppo di $m-1$ superficie φ_1.

Ciò posto discutiamo separatamente le due ipotesi.

6. *Ipotesi a*). Sia irriducibile la superficie φ passante pei due punti A e B, che per brevità di discorso chiameremo φ_{ab}, e siano α' e β' gli S_3 tangenti alla V_3^n in questi punti; per il ragionamento precedente φ_{ab} deve stare in due S_6 con α' e β' rispettivamente e questi due S_6 non possono coincidere perchè altrimenti α' e β' si taglierebbero in un punto, dunque la superficie φ_{ab} appartiene al più ad un S_5. D'altra parte essa non può appartenere a uno spazio di meno che cinque dimensioni perchè altrimenti i suoi piani tangenti si taglierebbero a due a due e altrettanto avverrebbe per gli S_3 tangenti della V_3^n, dunque appartiene proprio a un S_5.

(1) Si noti che la superficie generica φ non può essere un piano, nè spezzarsi in un gruppo di piani, poichè V_4^n *non* è una ∞^1 di S_3.

Allora torniamo a considerare la proiezione V_3^* di V_3^n fatta da α' sopra un S_4 e osserviamo che l'$S_4 \equiv \alpha' B$ taglia l'S_5 della superficie φ_{ab} in un S_3 (determinato dal punto B e dal piano tangente a φ_{ab} in A contenuto in α) dunque esso taglia φ_{ab} fuori di α' in un gruppo di un certo numero s di punti. Questi s punti si proiettano in un sol punto della V_3^*, quindi la proiezione di V_3^n riesce s-pla e non più che s-pla, altrimenti un piano della V_3^* rappresenterebbe una superficie della V_3^n di cui una superficie φ sarebbe soltanto una parte e uno stesso S_7 toccherebbe la V_3^n oltre che nei punti di una superficie φ in altri punti ancora.

Ora noi vogliamo dimostrare che la V_3^* è necessariamente composta di ∞^1 piani uscenti da una stessa retta r: per questo basterà far vedere che si arriva a un assurdo se si suppone che quei piani non abbiano alcun punto comune oppure un sol punto comune.

Diciamo infatti nel 1° caso γ l'ordine della curva i cui piani e i cui S_3 osculatori dànno rispettivamente gli S_2 della V_3^* e gli S_3 che la toccano lungo i suoi piani; tale curva è razionale al pari del fascio delle superficie φ uscenti da A, dunque, se diciamo $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)$ uno qualunque dei suoi rami singolari e intendiamo che nelle formule seguenti il sommatorio si estenda a tutti i rami singolari, il suo primo rango è (1)

$$n_1 = 2(\nu - 1) - \Sigma(\alpha - 1),$$

il secondo rango è

$$n_2 = 3(\nu - 2) - \Sigma(2\alpha + \alpha_1 - 3),$$

e la classe è

$$n_3 = 4(\nu - 3) - \Sigma(3\alpha + 2\alpha_1 + \alpha_2 - 6);$$

cioè l'ordine ϱ della V_3^* sarà dato da

$$\varrho = n_2 = 3(\nu - 2) - \Sigma(2\alpha + \alpha_1 - 3),$$

e per un suo punto qualunque passeranno $n_3 - 2$ iperpiani che la toccheranno lungo piani *diversi* da quello che passa per il punto considerato.

(1) Bertini, loc. cit., pag. 403.

Ma si osservi che, se si conduce per α' un S_6 generico, questo taglia V_3^n fuori di α' in una curva irriducibile C (avente per immagine sulla V_3^* una sua sezione piana generica) sulla quale gli iperpiani uscenti da α' taglieranno una $g^2_{\varrho s}$ composta con la g^1_s tagliata dal fascio delle superficie φ, e che un iperpiano per α' il quale tocchi V_3^n secondo una superficie φ determina su C un gruppo della $g^2_{\varrho s}$ composto di un gruppo della g^1_s contato due volte e di $\varrho - 2$ gruppi residui. Segue che gli iperpiani, passanti per un punto generico P di C (e quindi generico di V_3^n) e tangenti alla V_3^n lungo una superficie φ uscente da A ma non passante per P, sono tanti quanti sono i gruppi della $g^2_{\varrho s}$ che contengono il gruppo della g^1_s passante per P e poi un *altro* gruppo della g^1_s contato due volte, cioé sono $2(\varrho - 2)$. Ma il numero di questi iperpiani è pure $n_3 - 2$, dunque

$$n_3 - 2 = 2(\varrho - 2),$$

cioè, sostituendo:

$$4(\nu - 3) - \Sigma(3\alpha + 2\alpha_1 + \alpha_2 - 6) - 2 = 2[3(\nu - 2) - \Sigma(2\alpha + \alpha_1 - 6)] - 4,$$

e di qui si ricava

$$\Sigma(\alpha - 1) = 2(\nu - 1) + \Sigma(\alpha_2 + 5),$$

ossia:

$$\Sigma(\alpha - 1) > 2(\nu - 1),$$

ciò che è evidentemente assurdo (perchè n_1 risulterebbe negativo).

Se, per ovviare all'assurdo cui siamo pervenuti, si suppone che la V_3^* sia un cono avente per vertice *un punto* O e quindi proiettante da O una certa sviluppabile ordinaria, dicendo ancora ν l'ordine dello spigolo di regresso di questa sviluppabile, e mantenendo ai simboli il significato precedente, l'ordine della V_3^* sarà

$$\varrho = 2(\nu - 1) - \Sigma(\alpha - 1),$$

la classe sarà

$$3(\nu - 2) - \Sigma(2\alpha + \alpha_1 - 3),$$

e allora il ragionamento precedente condurrà all'uguaglianza

$$\nu + \Sigma(\alpha_1 - 1) = 0,$$

che è parimenti assurda.

Si conclude dunque che la V_3^* è un cono avente per vertice una retta, ossia che gli S_7 tangenti alla V_3^n lungo le superficie φ uscenti da A passano *tutte* per uno stesso S_5, costituendo nella ∞^2 degli iperpiani uscenti da questo S_5 una ∞^1 *irriducibile*.

La varietà ∞^2 degli S_7 tangenti alla V_3^n lungo le varie superficie φ si trasforma allora, per dualità nell'S_8, in una superficie con ∞^2 curve piane *irriducibili*, cioè in una superficie appartenente al più ad un S_5 e coincidente, ove appartenga a un S_5, con la superficie di VERONESE. Ora che gli S_7 tangenti alla V_3^n lungo le superficie φ passino tutti per uno stesso S_i con $2 < i < 5$ è impossibile, perchè se fosse $i = 4$ gli S_3 tangenti della V_3^n, venendo a trovarsi ciascuno in uno stesso S_5 con questo S_i, si taglierebbero a due a due in rette; e, se fosse $i = 3$, gli S_3 tangenti della V_3^n si appoggerebbero all'S_i in rette, la V_3^n (si vede subito) si comporrebbe di ∞^1 superficie ϑ situate in S_4 uscenti dall'S_i e ogni superficie φ si spezzerebbe in superficie ϑ; dunque quegli S_7 passan tutti per uno stesso piano δ e nella stella dell'S_8 avente per centro δ costituiscono la varietà degli iperpiani tangenti doppi di un cono proiettante da δ una superficie di VERONESE.

Inoltre gli S_3 tangenti alla V_3^n nei vari suoi punti si appoggiano tutti a δ perchè ciascuno di essi viene a trovarsi con δ in un S_5, dunque ogni S_3 che congiunga δ con un punto generico della V_3^n ne contiene una curva (¹) e il risultato della proiezione di V_3^n da δ sopra un S_5 è una superficie con ∞^2 iperpiani (S_4) tangenti in infiniti punti ciascuno, cioè una superficie di VERONESE.

Si conclude che nell'ipotesi *a*) ogni sezione iperpiana della V_4^n è contenuta in un cono proiettante da un piano una superficie di VERONESE e che, quindi (²), la V_4^n stessa è contenuta in un cono proiettante da un S_3 una superficie di VERONESE.

7. *Ipotesi b*). In questo caso gli S_3 tangenti alla V_3^n nei punti di una superficie φ_1 debbono trovarsi in uno stesso iperpiano con quelli tangenti alla V_3^n nei punti di una qualsiasi altra superficie φ_1, quindi se diciamo S_δ lo spazio cui *appartengono* i primi, gli iperpiani per S_δ, dando origine sulla V_3^n a un sistema lineare di superficie contenente (parzialmente o totalmente) ogni superficie φ_1 contata due volte, debbono formare un sistema lineare almeno dop-

(¹) Cfr. il ragionamento fatto al n. 1.

(²) Cfr. SCORZA, loc. cit., n. 6, *a*).

piamente infinito, e quindi $\delta \leq 5$. Ma non può essere $\delta = 3$, perchè altrimenti gli S_3 tangenti lungo una superficie φ_1 coinciderebbero e questa sarebbe un piano, dunque sono possibili soltanto le alternative:

α) $$\delta = 5\,,$$

β) $$\delta = 4\,.$$

α) Se $\delta = 5$, riprese le notazioni e le costruzioni del n. 5, la V_3^* risulta una ∞^1 di piani con ∞^1 S_3 che la toccano lungo di essi e questi S_3, non essendo altra cosa che le tracce (sullo spazio di V_3^*) degli S_7 tangenti a V_3^n nei punti della superficie φ_1, φ_{1a}, passante per A e di altre $m-1$ superficie φ_1 variabili, passeranno tutti per la retta r che è traccia dell'S_5 contenente gli S_3 tangenti a V_3^n nei punti della superficie φ_{1a}. Ma allora V_3^* consta di ∞^1 piani uscenti da r e, come un S_3 dello spazio di V_3^* uscente da r taglia V_3^* in un gruppo di piani, così un S_7 dello spazio della V_3^n, uscente dall'S_5 degli S_3 tangenti a V_3^n nei punti della superficie φ_{1a}, taglia la V_3^n stessa in una superficie spezzata nella φ_{1a} contata due volte e in un certo numero $\sigma - 2$ di superficie φ_1, residue, e quindi, variando l'S_7 intorno all'S_5 si otterrà nell'ente $\infty^1\,\{\varphi_1\}$ una g_σ^2 con un elemento doppio fisso in φ_{1a}.

Un'altra g_σ^2 si otterrà partendo dalla superficie φ_{1b}; ma queste due g_σ^2 hanno in comune un gruppo corrispondentemente all'S_7 che tocca V_3^n lungo φ_{1a} e lungo φ_{1b}, dunque *appartengono* a una certa g_σ^{2+t} con $t > 0$, e i gruppi di superficie di questa g_σ^{2+t} sono tutti contenuti totalmente nel sistema delle sezioni iperpiane di V_3^n. Ora si ripeta per ogni superficie φ_1 il ragionamento fatto per φ_{1a} e φ_{1b}; si arriverà a trovare una $g_\sigma^{r'}$ nel fascio $\{\varphi_1\}$ tale, che la superficie spezzata in quelle di un suo gruppo qualunque costituisce una sezione iperpiana della V_3^n. La dimensione r' di questa g_σ è certo non minore di 4, potendosi avere in essa un gruppo che abbia due elementi doppi in due qualunque superficie di $\{\varphi_1\}$; ma non può essere neppure maggiore di 4, perchè altrimenti esisterebbero ∞^1 S_7 tangenti a V_3^n lungo due superficie φ_1 scelte a piacere, dunque è proprio $r' = 4$.

Le sezioni iperpiane della V_3^n spezzate nelle superficie φ_1 dei vari gruppi della $g_\sigma^{r'}$ costituiscono allora un sistema lineare ∞^4 subordinato a quello (∞^8) delle sezioni iperpiane, dunque gli iperpiani che le contengono passano tutti per uno stesso S_3, δ, e la V_3^n consta di ∞^1 superficie situate in ∞^1 S_4 uscenti da δ.

Ciò porta che la V_4^n consta di ∞^1 V_3 situate in S_5 passanti per uno stesso S_4, cioè sta sopra un cono avente questo S_4 per vertice.

β) In questo caso ogni superficie φ_1 sta nell'S_4 contenente gli S_3 tangenti alla V_3^n nei suoi punti e, d'altra parte, segue dal n. 5 che essa sta in un S_6 con l'S_4 analogo relativo a un'altra qualunque superficie φ_1, dunque poichè questo S_6 non può contenere quell'S_4 (altrimenti gli S_3 tangenti di V_3^n si taglierebbero a due a due) segue che ogni superficie φ_1 appartiene a un S_3 (1).

Ora si osservi che l'S_4, σ_a, contenente gli S_3 tangenti alla V_4^n nei punti della superficie φ_{1a} del fascio $\{\varphi_1\}$, e l'S_3, τ_b, della superficie φ_{1b}, stando in un S_6, si tagliano in una retta, e che d'altra parte σ_a e l'S_4, σ_b, avente per φ_{1b} significato analogo a quello che ha σ_a per φ_{1a}, stando in uno stesso S_7 e *non* in uno spazio di dimensione inferiore si tagliano pur essi in una retta e in una retta soltanto, dunque questa retta coincide con l'intersezione di σ_a e τ_b, e, per conseguenza, anche con l'intersezione di σ_b e τ_a, detto, naturalmente, τ_a lo spazio cui appartiene φ_{1a}.

Ciò porta che τ_a e τ_b si tagliano in una retta, ossia gli S_3 contenenti le varie superficie φ_1 si tagliano a due a due in una retta.

Ora si considerino lo spazio τ_a e le rette che su di esso vengono a segnare gli altri spazi analoghi τ_b, τ_c, ...

Se tali rette *non* coincidono, è certo che esse non possono formare nè una rigata, nè un cono; poichè nel primo caso due generiche fra esse sarebbero sghembe e l'S_5 contenente due generici spazi τ conterrebbe tutti gli altri, cioè la V_3^n, e nel secondo caso tre generiche di esse apparterrebbero a un S_3 e l'S_6 contenente tre spazi generici τ conterrebbe tutti gli altri, cioè la V_3^n; quindi bisogna concludere che τ_b, τ_c, ... tagliano τ_a in rette di uno stesso piano π_a, che τ_a, τ_c, ... tagliano τ_b in rette di uno stesso piano π_b, etc. I piani π_a, π_b, π_c, ... si tagliano poi a due a due in una retta, dunque o passano per la stessa retta o stanno in uno stesso S_3; e per conseguenza si conclude che:

o gli spazi τ_a, τ_b, τ_c, ... passano per una stessa retta d,

o gli spazi τ_a, τ_b, τ_c, ... tagliano in piani un S_3 fisso ω.

La seconda alternativa conduce a una V_3^n formata da ∞^1 superficie situate in S_4 per ω, cioè a una V_3^n del tipo incontrato precedentemente, dunque come caso nuovo non resta che la V_3^n compo-

(1) Si rammenti che una superficie φ_1 non può essere un piano.

sta di ∞^1 superficie situate in S_3 per una stessa retta d, la quale conduce a una V_4^n composta di ∞^1 V_3 situate in S_4 passanti per uno stesso piano δ.

8. Esaminando i tipi di V_4^n incontrati nella discussione precedente, si vede facilmente se essi diano o no delle V_4^n di 1ª specie.

Infatti se, in primo luogo, una V_4^n sta sopra un cono V_6^n proiettante da un S_3, δ, una superficie di Veronese, gli S_4 ad essa tangenti in due suoi punti generici stanno nei due S_6 tangenti in quegli stessi due punti al cono V_6^4; e poichè questi due S_6 si tagliano in un S_4, in un punto di questo S_4 si incontreranno i due S_4 tangenti alla V_4^n. Di più tutti gli S_6 tangenti a V_6^4 lungo gli S_4 generatori di uno dei suoi ∞^2 coni quadrici V_5^2 stanno in uno stesso S_8, dunque a un tale S_8 appartengono gli S_4 tangenti a V_4^n nei punti della V_3 in cui essa vien tagliata da uno di quei coni, e la V_4^n è realmente di 1ª specie.

Se, in secondo luogo, V_4^n consta di ∞^1 V_3 situate in S_5 per un S_4, δ, essa sta sopra un cono V_6 avente per vertice δ e gli S_6 tangenti a V_6 lungo i suoi spazi generatori, passando per δ, stanno a due a due in un S_8, così si conclude che V_4^n è ancora di 1ª specie, i suoi S_4 tangenti tagliandosi a due a due in un punto di δ.

Ma non può dirsi altrettanto se V_4^n consta di ∞^1 V_3 situate in S_4 per uno stesso piano π. Infatti in questo caso gli S_4 tangenti della V_4^n continuano a tagliarsi a due a due in punti situati su π, ma la V_4^n non risulta in generale di 1ª specie, poichè gli ∞^1 S_4 per π formano un cono V_5 i cui S_5 tangenti nei punti di uno stesso S_4 costituiscono un fascio in un certo S_6 [vedi nota (1) a pag. 259] e gli S_6 che così vengono ad ottenersi, tagliandosi in generale solo in π, non appartengono a due a due a un S_8. Appartengono invece a due a due a un S_8 due qualunque degli S_5 tangenti al cono V_5 e allora, poichè ciascuno di essi tocca V_5 nei punti di un S_3 uscente da π, cioè contiene gli S_4 tangenti a V_4^n nei punti della superficie in cui questo S_3 taglia una delle ∞^1 V_3 di V_4^n, si conclude che in questo caso la V_4^n è, in generale, soltanto della 2ª specie. Ma per circostanze particolari, può la V_4^n risultare anche di prima specie; per es. basta, perchè ciò accada, che il cono V_5 ammetta lungo ogni suo S_4 uno stesso S_5 tangente.

Noi non ci fermiamo a considerare sotto quali condizioni (necessarie e sufficienti) le V_4^n di questo terzo tipo risultano di 1ª specie, poichè a noi, più che la enumerazione dei vari tipi possibili delle singole specie di V_4^n, interessa la determinazione di tutti i possibili tipi di V_4^n a S_4 tangenti mutuamente secantisi.

9. Nei n. precedenti di questo paragrafo si è sempre supposta uguale a 9 la dimensione dello spazio ambiente in cui è immersa la V_4^n, ma si vede facilmente con un ragionamento già fatto altrove [1], che le cose dette reggono qualunque sia la dimensione $r > 9$ dello spazio ambiente e quindi possiamo raccogliere i risultati fin qui ottenuti enunciando il teorema:

Ogni V_4^n di 1ª specie è necessariamente:

a) una V_4 situata sopra un cono V_6^4 proiettante da un S_3 una superficie di VERONESE *(e in tal caso appartiene a un S_9), oppure*

b) una V_4 costituita da ∞^1 V_3 situate in ∞^1 S_5 passanti per uno stesso S_3, o infine

c) una (particolare) V_4 costituita da ∞^1 V_3 situate in ∞^1 S_4 per uno stesso piano.

§ 3.

LE V_4^n DI 2ª SPECIE.

10. Passiamo alla considerazione delle V_4^n di 2ª specie, cioè supponiamo che l'S_8 contenente gli S_4 α e β, tangenti alla V_4^n in due suoi punti generici A e B contenga addirittura gli S_4 tangenti alla V_4^n nei punti di una superficie Σ passante per A e B; al variare di A e B, Σ descriverà un sistema ∞^4 tale che per ogni coppia di punti della V_4^n passerà una sola superficie del sistema.

Se si taglia la V_4^n che, per il momento, supponiamo immersa in un S_9, con un iperpiano generico, si ottiene in questo una V_3^n con ∞^4 linee σ, sezioni delle superficie Σ, tali che l'S_7 contenente i due S_3 tangenti alla V_3^n in due suoi punti generici contiene anche tutti quegli altri i cui punti di contatto sono situati sulla linea σ che vi passa: quindi, se proiettiamo la V_3^n dall'S_3 α' che la tocca in un punto A sopra un S_4, otteniamo in questo una V_3^* tale che l'S_3 che la tocca in un punto la tocca in altri ∞^1. Ma allora questi punti sono situati sopra una retta, e quindi, se la linea σ generica uscente da V è irriducibile, essa sta in un S_5 con l'S_3 α' tangente a V_3^n in un punto generico A della linea stessa.

(1) SCORZA, loc. cit., n. 7.

Ora si possono fare due ipotesi diverse, cioè:

a) le superficie Σ (e le linee σ) sono irriducibili, oppure

b) le superficie Σ (e le linee σ) si spezzano in parti; per chiarezza giova dunque discuterle separatamente.

11. *Ipotesi a*). Se le linee σ sono irriducibili, la linea σ che passa per i due punti generici A e B di V_3^n sta in un S_5 con l'S_3 α' tangente alla V_3^n in A e sta pure in un S_5 con l'S_3 β' tangente alla V_3^n in B; questi due S_5 sono distinti e non possono appartenere a uno spazio con meno di sette dimensioni, perchè altrimenti α' e β' si taglierebbero in un punto, dunque la linea σ o è piana o appartiene ad un S_3. Il supporre σ piana porterebbe alla conclusione che α' e β' si taglierebbero nel punto ove si tagliano le tangenti di σ in A e B, dunque σ è necessariamente una linea sghemba ordinaria, e le superficie Σ appartengono a spazi a quattro dimensioni.

Ora sulle superficie Σ possono farsi due ipotesi distinte, può darsi, cioè, che:

a') due superficie Σ generiche non abbiano punti (variabili) comuni, oppure che

a'') due superficie Σ generiche abbiano dei punti (variabili) comuni.

Nel caso *a'*), poi, due superficie Σ generiche uscenti da uno stesso punto P di V_3^n dovranno avere una linea in comune e questa linea appartenendo a due S_4 sarà:

a_1') una curva sghemba ordinaria, o

a_2') una curva piana, o

a_3') una linea retta.

Discutiamo separatamente questi vari casi.

a_1') Gli S_4 delle ∞^2 superficie Σ che passano per un punto generico A della V_4^n si tagliano a due a due in un S_3, dunque — non potendo stare in un S_5 — passano tutti per uno stesso S_3, cioè le superficie Σ che passano per A contengono tutte una certa linea sghemba l passante per A.

Al muoversi di A, la linea l descrive un sistema ∞^3 tale che per ogni punto della V_4^n passa una linea del sistema, e, se si considerano le due linee del sistema che passano per due punti generici della V_4^n, la superficie Σ che passa per questi due punti conterrà le due linee. Ciò porta che gli S_3 delle ∞^3 linee l si tagliano a due a due in piani, cioè che passano tutti per lo stesso piano ω; e allora, poichè un S_4 che ne contenga due qualunque deve contenerne ∞^1, si conclude che gli ∞^3 S_3 in discorso formano, nella stella dell'S_9 ambiente che ha in ω il centro, un sistema lineare, ossia che la V_4^n appartiene al più a un S_7. Questo risultato mostra che il caso a_1') è da escludere.

a_2') Gli S_4 di due superficie Σ generiche, Σ_1 e Σ_2, passanti per un punto generico A della V_4^n si tagliano in un piano π che contiene una curva l per A appartenente a Σ_1 e Σ_2. Ora, o Σ_1 è tagliata da tutte le altre superficie Σ uscenti da A nella stessa curva piana l o la linea l varia al variare di Σ_2 intorno ad A.

Se la linea l variasse, si avrebbero almeno ∞^1 curve piane sopra Σ_1 uscenti da A, cioè in totale ∞^2 curve piane sopra Σ_1; quindi Σ_1 ammetterebbe una rete di coniche (infatti si esclude subito l'ipotesi che le ∞^2 curve piane siano spezzate in rette) e sulla V_4^n si avrebbe un tal sistema (∞^6) di coniche che per ogni coppia di punti della V_4^n ne passerebbe una. Ma allora, presi due punti generici della V_4^n, A e B, e detti α e β gli S_4 ivi tangenti a V_4^n, α e β dovrebbero giacere negli S_8 tangenti alla V_4^n nei punti delle ∞^1 superficie Σ uscenti dalla conica di V_4^n congiungente i punti A e B; quindi α e β apparterebbero al più a un S_7 e si taglierebbero in una retta.

Possiamo pertanto limitarci alla prima ipotesi, cioè possiamo supporre che le superficie Σ passanti per A contengano *tutte* una stessa curva l per A, e che, per conseguenza, la V_4^n si componga di ∞^3 linee l situate in ∞^3 piani μ di cui ne passa uno per ogni punto della V_4^n.

La superficie Σ che passa pei punti generici A e B di V_4^n contiene le linee l che passano per essi e i loro piani μ_a, μ_b; quindi due piani μ generici si tagliano almeno in un punto.

Supponiamo, se è possibile, che due piani μ generici si taglino soltanto in un punto; allora poichè essi non possono appartenere tutti a un S_4 o ad un S_5 segue che o passano per uno stesso punto o tagliano in rette un piano fisso (¹). Ma si vede facilmente che entrambe queste alternative sono da escludersi.

Infatti se i piani μ si tagliassero a due a due in un solo punto, l'S_4 della superficie Σ della V_4^n, passante per due punti generici di essa, sarebbe l'S_4 dei due piani μ contenenti quei punti, e poichè ogni superficie Σ risulta di ∞^1 linee l, si avrebbe che l'S_4 contenente due piani μ dovrebbe contenerne altri ∞^1. Allora si prendano

(¹) Cfr. BERTINI, loc. cit.

quattro punti generici A, B, C, D della V_4^n e i quattro piani μ che li contengono, μ_a, μ_b, μ_c, μ_d, e sia τ lo spazio cui appartengono e la cui dimensione sarà ≤ 8: giaceranno in τ non solo le superficie Σ che contengono le coppie di punti A, B e C, D (superficie che, per brevità di discorso, indicheremo con Σ_{ab} e Σ_{cd} rispettivamente), ma anche ogni superficie Σ, Σ_{xy}, congiungente un punto X di Σ_{ab} con un punto Y di Σ_{cd}, poichè una qualunque di queste verrà ad avere con ciascuna delle superficie Σ_{ab} e Σ_{cd} una curva piana in comune e quindi l'S_4 che la contiene verrà ad avere due piani (1) in comune con τ, ossia giacerà in τ. Tenendo fermo il punto X e facendo variare il punto Y sopra Σ_{cd}, la superficie Σ passante per X ed Y assumerà ∞^1 posizioni diverse e riempirà una $V_3^{(x)}$ e questa $V_3^{(x)}$ non conterrà della superficie Σ_{ab} che *la* linea l passante per X: quindi infine facendo variare X sopra Σ_{ab} si avranno ∞^1 $V_3^{(x)}$ distinte e situate tutte in τ. Ma questo è assurdo, se, come si è supposto, la V_4^n è irriducibile e appartiene a un S_9.

Si conclude che i piani μ si tagliano a due a due in rette, ossia, poichè non possono appartenere ad un S_3, che passano tutti per la stessa retta a.

Dalla retta a la V_4^n si proietta evidentemente sopra un S_7 in una V_3^*, la quale, corrispondentemente alle ∞^4 superficie Σ di V_4^n contenute in spazi a quattro dimensioni, conterrà ∞^4 linee piane, passandone una per ogni coppia di suoi punti. Ma allora queste linee sono coniche, e, per quanto abbiamo dimostrato nella Nota più volte citata, la V_3^* è a curve sezioni ellittiche e, più precisamente, o è una certa V_3^6 (di ENRIQUES) razionale normale o è proiezione sull'S_7 che la contiene della V_3^8 di VERONESE razionale, normale in un S_9. Dunque la V_4^n è situata sopra un cono avente per vertice la retta a e proiettante da questa retta una V_3^* (di S_7) razionale, a curve sezioni ellittiche, di ordine $m = 6$, 7 o 8.

a_3') Per discutere questo caso con tutta chiarezza giova premettere la dimostrazione di alcuni lemmi.

Sia data in un S_4 una rigata non sviluppabile e siano a e b due sue generatrici generiche. I piani tangenti alla rigata nei punti di b formano un fascio contenuto in un S_3 che si appoggia ad a

(1) Notisi che questi due piani, per la genericità dei punti X ed Y non possono avere che *un* punto comune, poichè questo accade quando, per es., X coincide con A ed Y coincide con C.

in un punto; questo punto congiunto con b dà luogo a un piano tangente alla rigata in un certo punto G di b. Se al variare di a il punto G non muta, tutte le generatrici della rigata debbono appoggiarsi al piano che la tocca in G [1]; e così tutte le generatrici debbono appoggiarsi a un certo piano che la tocca in un punto G' di a; questi due piani tangenti hanno comuni i due punti (distinti) ove essi tagliano a e b rispettivamente, e perciò se la rigata *appartiene* all'S_4 le generatrici debbono tutte appoggiarsi alla comune intersezione dei piani e la rigata deve possedere una direttrice rettilinea.

Viceversa è chiaro che, se la rigata ha una direttrice rettilinea d, il punto G di b è il punto ove b si appoggia alla direttrice e quindi non muta.

In tal caso si vede ancora che, se n è l'ordine della rigata, p il genere ed r l'ordine di molteplicità della direttrice d, gli iperpiani che passano per la generatrice a e per d tagliano sulla ∞^1 delle generatrici della rigata una g^1_{n-r-1} con $2(n+p-r-2)$ elementi doppi; tale è dunque il numero delle generatrici della rigata per le quali accade che i piani tangenti alla rigata nei loro punti si appoggino tutti alla generatrice a.

Il numero $2(n+p-r-2)$ è zero sol quando sia $n+p= =r+2$; ma d'altra parte, potendosi sempre mandare un iperpiano per la direttrice d e per due generatrici, si ha $n \geq r+2$, dunque quel numero è zero solo quando sia $p=0$ ed $n=r+2$; ossia quando la rigata è razionale e giace sopra un cono quadrico avente per vertice la direttrice.

Concludiamo col

LEMMA I. — *Data una rigata non sviluppabile appartenente ad un S_4 vi sono sempre su di essa ∞^1 punti, costituenti una curva, tali che i piani tangenti in essi alla rigata si appoggino a una sua generatrice generica. Questa curva si spezza nella direttrice e in un gruppo di generatrici quando la rigata abbia una direttrice rettilinea, il gruppo di generatrici venendo a mancare solo quando la rigata sia razionale e sia proiettata dalla sua direttrice secondo un cono quadrico* [2].

[1] Può darsi che il punto G risulti un punto multiplo della rigata, ma in tal caso, data la genericità di b, esso appartiene a una linea s-pla della superficie ed è s-planare; quindi ha sempre senso il parlare del piano tangente alla rigata nel punto G relativo alla falda della superficie cui appartiene b.

[2] Questo lemma, necessario in una prima redazione diversa dall'attuale,

Per stabilire il secondo lemma, prendiamo a considerare una congruenza di rette nello spazio ordinario e supponiamo che essa ammetta un sistema ∞^1 di sviluppabili d'*indice* maggiore di 2, ossia tale che per ogni retta della congruenza passino *più* di due sviluppabili appartenenti alla congruenza medesima (è noto che ogni congruenza ammette un sistema ∞^1 di sviluppabili d'indice 2).

Se, al solito modo, rappresentiamo le rette dello spazio ordinario sui punti di una quadrica M_4^2 dell'S_5, le rette della congruenza verranno a corrispondere ai punti di una superficie F situata sulla M_4^2 e le rigate sviluppabili della congruenza avranno per immagini le linee C di un sistema ∞^1 situato sopra F e d'indice $\nu > 2$.

Ora il supporre che una rigata del nostro S_3 sia sviluppabile significa supporre che ogni sua generatrice taglia quella infinitamente vicina nel punto O ove essa tocca lo spigolo di regresso, e quindi il fascio di raggi avente per centro O e per piano il piano tangente alla sviluppabile lungo la generatrice ha a comune con la rigata due raggi infinitamente vicini, cioè la linea che rappresenta la rigata sulla M_4^2 ha per tangente in ogni suo punto una retta che *appartiene* alla M_4^2. Segue che in ogni punto di F le tre rette tangenti alle tre linee C che vi passano stanno sulla M_4^2: ma allora addirittura tutti i piani tangenti della superficie F debbono stare sulla M_4^2 e (per evidenti ragioni di continuità) appartenere a uno stesso dei due sistemi che la quadrica contiene. D'altra parte i piani della quadrica appartenenti a uno stesso sistema si tagliano a due a due in un punto, quindi o quella superficie *appartiene* all'S_5 ed è una superficie di Veronese o appartiene al più ad un S_4. La prima alternativa è da escludere perchè i piani tangenti di una superficie di Veronese riempiono una $M^3{}_4$ e non una M_4^2; resta pertanto la seconda, e l'S_4 che (al più) contiene la superficie F dovendo contenerne i piani tangenti taglierà la quadrica M_4^2 in una quadrica specializzata. Ciò significa che la congruenza appartiene certamente a un complesso lineare speciale, ossia che le sue rette si appoggiano tutte a una retta fissa; e allora perchè *ogni* sua rigata risulti sviluppabile (corrispondentemente al fatto che *tutte* le linee di F hanno ormai per tangenti rette della

non occorre più che in parte per quel che segue: in ogni modo l'ho lasciato intatto perchè chiarisce il risultato cui si perviene intorno alle Σ anche nel caso che siano rigate.

M_4^2) occorre [1] che le rette della congruenza si taglino a due a due, cioè occorre che la congruenza sia un piano rigato oppure una stella.

Proiettando, se occorre, in uno spazio ordinario si vede subito che questa conclusione è indipendente dall'ipotesi che la congruenza sia contenuta in un S_3, solo che si parli di rette passanti per uno stesso punto anzi che di stella, se la dimensione dello spazio ambiente supera 3, dunque:

LEMMA II. — *Se una congruenza di rette di S_r ammette un sistema ∞^1 di sviluppabili di indice maggiore di 2, necessariamente la congruenza è costituita dalle rette di un piano o da rette uscenti da uno stesso punto* [2].

Di qui deduciamo facilmente il

LEMMA III. — *Se in un sistema ∞^3 di rette appartenente a uno spazio S_r esiste un sistema ∞^4 di rigate sviluppabili tale che per due rette generiche del primo sistema passi sempre almeno una rigata del secondo, necessariamente il sistema ∞^3 si compone di rette uscenti da uno stesso punto (e quindi $r \geq 4$).*

Infatti rappresentiamo le rette di S_r mediante i punti di una M_{2r-2} di uno $S_{\binom{n+1}{2}-1}$ alla maniera di GRASSMANN: le rette del sistema ∞^3 saranno rappresentate dai punti di una V_3 e le rigate sviluppabili da ∞^4 linee C situate sulla V_3, di cui ne passerà almeno una per ogni coppia di punti della V_3. Come prima, tenendo presente che alle rette di un fascio dello S_r corrispondono sempre sulla M_{2r-2} i punti di una retta [3], si conclude che le linee C hanno

[1] Le tangenti di una curva *gobba* non possono infatti appoggiarsi tutte ad una stessa retta, poichè altrimenti i piani per questa retta taglierebbero sulla curva una g^1 con infiniti punti multipli.

[2] Una dimostrazione di questo teorema coi metodi della geometria differenziale si trova in: DINI, *Lezioni di Analisi infinitesimale* (Pisa, Stab. Tipografico Succ. Fratelli Nistri, 1907), vol. I, n. 525 e 526, pag. 685 e seg.

Quanto alla dimostrazione del testo si noti che essa è assolutamente generale e non valida soltanto per le congruenze algebriche, poichè, come il prof. CASTELNUOVO mi faceva cortesemente osservare, il teorema che « l'unica superficie non conica di S_r ($r > 4$) a piani tangenti mutuamente secantisi è la superficie di VERONESE » sta anche quando non si ponga *a priori* la condizione dell'algebricità della superficie, poichè il sistema dei piani tangenti essendo definito da una condizione algebrica (quella d'esser costituito da piani appoggiati ad altri in punti) è certo un sistema algebrico.

[3] Cfr. BEPPO LEVI, *Sulla varietà delle corde di una curva algebrica* [Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, serie II, t. XLVIII (1898), pp. 83-142], n. 23, II.

per tangenti in tutti i loro punti delle rette situate sulla M_{2r-2}; e poichè per ogni coppia di punti della V_3 passa almeno una linea C, per ogni retta tangente alla V_3 in un suo punto qualunque A esisterà almeno una linea C che la tocchi in A, e quindi gli S_3 tangenti alla V_3 nei suoi vari punti saranno tutti situati sulla M_{2r-2}, cioè *ogni* rigata del sistema ∞^3 sarà una sviluppabile e lo stesso avverrà per *ogni* congruenza estratta dal sistema ∞^3. Ma allora per il Lemma precedente il sistema ∞^3, essendo costituito di rette a due a due incidenti e non potendo essere un piano rigato, consta di rette passanti per uno stesso punto.

Ed ora torniamo alla nostra V_4^n ed osserviamo che, nel caso in discussione, le superficie Σ che escono da uno stesso punto A, dovendo secarsi a due a due in una retta, debbono passar tutte per una medesima retta uscente da A, poichè altrimenti ognuna di esse conterrebbe infinite rette per A; dunque le superficie Σ sono rigate, la V_4^n consta di ∞^3 rette di cui ne passa una per ogni punto della V_4^n e la superficie Σ che passi per due punti A e B contiene le rette di questa ∞^3 uscenti da A e da B. Per brevità di discorso, diciamo Λ il sistema delle rette di V_4^n.

Si osservi in primo luogo che le superficie Σ non possono esser coni, e nemmeno possono essere sviluppabili, perchè ove ciò fosse, per il Lemma III, la V_4^n sarebbe un cono, quindi se chiamiamo Σ_{ab} la superficie Σ passante pei due punti generici A, B di V_4^n e contenente le relative rette a, b di Λ, Σ_{ab} sarà una rigata non sviluppabile. Per quanto sappiamo, esiste allora su b un punto G tale che il piano ivi tangente a Σ_{ab} si appoggi ad a, e questo punto G è *generico* su b se Σ_{ab} non ammette una direttrice rettilinea o se, pur ammettendo una tal direttrice, non accade che comunque vari a, e quindi Σ_{ab}, sempre tal direttrice venga a passare per uno stesso punto G di b. Escludendo per un momento questo caso, osserviamo che G essendo generico su b è generico anche su V_4^n e quindi esiste un S_4 tangente alla V_4^n in G; e allora si conclude che a si appoggia a tale S_4, cioè si appoggia all'S_δ cui appartengono gli S_4 tangenti alla V_4^n nei vari punti di b. Tale S_δ, essendo contenuto in tutti gli ∞^2 iperpiani (S_8) che toccano ciascuno la V_4^n lungo una superficie Σ contenente la retta b, non può avere la dimensione superiore a 6, dunque abbiamo $4 \leq \delta \leq 6$; e d'altra parte i due S_δ (certo distinti) relativi, nel modo che si è detto, alle due rette a e b appartengono all'S_8 che tocca la V_4^n nei punti della superficie Σ_{ab}.

Ora l'osservazione precedente mostra che tutte le rette di A si appoggiano a ciascuno degli spazi S_δ relativi alle singole rette di A; se dunque esse si appoggiassero anche a due soli di questi in punti distinti, giacerebbero tutte nell'S_8 che li contiene. Ciò non potendo accadere, si conclude che le rette di A si appoggiano tutte a uno spazio S_ε comune a tutti i suddetti S_δ, e quindi comune a tutti gli ∞^4 iperpiani dei quali ciascuno tocca la V_4^n in tutti i punti di una superficie Σ. Questi iperpiani non possono formare un sistema lineare perchè altrimenti essi taglierebbero sulla V_4^n un sistema lineare di V_3 in cui la V_3 generica sarebbe dotata di ∞^2 punti doppi variabili in punti semplici della V_4^n, dunque deve essere $\varepsilon \leq 3$.

Alla stessa conclusione si arriva anche se le ∞^2 rigate Σ uscenti da b abbiano per direttrici delle rette uscenti da uno stesso punto G di b; poichè o G è semplice per la V_4^n e allora si può ripetere il ragionamento precedente, o G è singolare per la V_4^n e allora, per non andare incontro a obbiezioni, si può osservare che in tal caso al variare di b nel sistema A il punto G descrive una varietà V_ε di dimensione $\varepsilon \leq 3$ e che presi due punti generici della V_ε e le due (o due) rette di A che ad essi corrispondono, la congiungente dei due punti sarebbe la direttrice della rigata Σ contenente le due rette, e quindi giacerebbe per intero sopra V_ε, perchè ogni suo punto sarebbe il punto di V_ε corrispondente a una certa generatrice della rigata. Ma allora V_ε sarebbe appunto uno spazio lineare di dimensione $\varepsilon \leq 3$ a cui sarebbero appoggiate tutte le rette di A.

E adesso proiettiamo la V_4^n da S_ε sopra un $S_{8-\varepsilon}$. Un $S_{\varepsilon+1}$ proiettante da S_ε una retta generica della V_4^n potrà contenerne altre in numero finito o in numero infinito, ma in quest'ultimo caso non potrà contenerne che ∞^1, poichè in caso contrario la V_4^n risulterebbe di ∞^1 V_3 situate in $S_{\varepsilon+1}$ per S_ε (il che porta necessariamente $\varepsilon=3$, se la V_4^n non è un cono), l'S_4 tangente alla V_4^n in un suo punto generico taglierebbe S_ε in un piano e allora gli S_4 tangenti alla V_4^n si taglierebbero a due a due in rette.

Se l'$S_{\varepsilon+1}$ in discorso contiene ∞^1 rette di A, il risultato della proiezione della V_4^n sopra l'$S_{8-\varepsilon}$ è una superficie F e la V_4^n è contenuta nel cono $V_{\varepsilon+3}$ di vertice S_ε costituito dagli ∞^2 $S_{\varepsilon+1}$ proiettanti le rette di A. Ma allora l'S_4 tangente alla V_4^n in un suo punto generico viene a trovarsi con S_ε in uno stesso $S_{\varepsilon+3}$ e non potendo, per una ragione già assegnata, tagliarlo in più che una retta, *apparterrà* con esso al detto $S_{\varepsilon+3}$. Segue allora che un iperpiano, il quale tocchi V_4^n in due suoi punti A e B e quindi in tutti i punti di una superficie Σ, passando per S_ε, contiene i due $S_{\varepsilon+3}$ tangenti in A e in B al cono $V_{\varepsilon+3}$.

Ora si osservi che le superficie Σ (irriducibili) non possono coincidere con quelle contenute negli $S_{\varepsilon+1}$ proiettanti nè spezzarsi in esse, quindi un iperpiano il quale contenga due $S_{\varepsilon+3}$ tangenti al cono $V_{\varepsilon+3}$ ne contiene ∞^1, cioè un iperpiano il quale contenga gli S_4 tangenti alla V_4^n in due punti, contiene quelli tangenti alla V_4^n in altri ∞^3. Ma allora V_4^n è di 1ª specie, non di 2ª.

Si vede pertanto che, se vogliamo attenerci alle ipotesi fatte, un $S_{\varepsilon+1}$ proiettante una retta generica di A, se pur ne contiene altre, non può contenerne che in numero finito, e che quindi il risultato della proiezione della V_4^n sopra l'$S_{8-\varepsilon}$ è una V_3^*, i cui S_3 tangenti sono le tracce sopra $S_{8-\varepsilon}$ degli $S_{\varepsilon+4}$ tangenti al cono $V_{\varepsilon+4}$ formato dagli $S_{\varepsilon+1}$ proiettanti. Le sezioni iperpiane della V_4^n ottenute con gli iperpiani per S_ε vengono a corrispondere alle sezioni iperpiane della V_3^* e come in quelle ce n'è ∞^4 di cui ciascuna ha una rigata Σ di punti doppi, così fra le sezioni iperpiane della V_3^* ve n'è ∞^4 di cui ciascuna ha una linea doppia. Ciò equivale a dire che gli S_3 tangenti alla V_3^* in due suoi punti generici stanno in un $S_{7-\varepsilon}$ e quindi si tagliano in un $S_{\varepsilon-1}$.

Ora se fosse $\varepsilon = 3$, la V_3^* starebbe in un S_5, i suoi S_3 tangenti si taglierebbero a due a due in piani e gli S_3 del suo spazio la taglierebbero in curve sghembe con le tangenti secantisi a due a due, ciò che è assurdo; se fosse $\varepsilon = 2$ la V_3^* starebbe in un S_6, i suoi S_3 tangenti si taglierebbero a due a due in rette e quindi, o sarebbe un cono formato da ∞^1 piani per una retta o sarebbe un cono proiettante dal suo vertice una superficie di Veronese e in ogni caso la V_4^n sarebbe di 1ª specie; dunque non resta che supporre che sia $\varepsilon = 1$ e allora, come nel caso a_2'), la V_3^* è una V_3 razionale a curve sezioni ellittiche.

L'ipotesi a_3') non dà dunque luogo a V_4^n di tipo diverso da quello già incontrato facendo l'ipotesi a_2').

a'') Per esaurire la discussione dell'ipotesi a) ci resta a fare il caso delle superficie Σ che a due a due si tagliano in punti variabili, cioè quello in cui gli S_4 che le contengono si tagliano a due a due in S_i con $0 \leq i \leq 3$.

Per questo, cominciamo dall'osservare che gli S_4 delle superficie Σ non possono tagliare in spazi a tre dimensioni un S_k, δ, con $k < 8$ e quindi non possono in particolare, passare per uno stesso S_3. Infatti se ciò accadesse, detto X un punto generico della V_4^n

esterno a δ, gli S_4 di tutte le superficie Σ uscenti da X apparterrebbero all'$S_{k+1} \equiv X\delta$ e quindi la V_4^n apparterrebbe al più a un S_8. E neppure possono passare per uno stesso piano ω; perchè altrimenti la proiezione della V_4^n da ω sopra un S_6 sarebbe una V_3^* con ∞^4 rette, cioè un S_3 e la V_4^n apparterrebbe a un S_6.

Ora gli S_4 di due superficie Σ generiche avendo a comune un S_i ($i = 1, 2$ perchè il caso $i = 0$ sarà considerato più innanzi, e quello $i = 3$ è ormai inutile considerarlo) stanno in un S_{8-i}; quindi l'S_4 di una terza superficie Σ generica o passa per lo stesso S_i, o, non potendo esser contenuto nell'S_{8-i} dei primi due, e non potendo tagliarlo in un S_3, deve tagliar quei primi due S_4 in due S_i appartenenti a un piano. Si conclude che non può essere $i=2$, e che l'ipotesi $i=1$ porta necessariamente alla conseguenza che le rette in cui si tagliano a due a due gli S_4 delle superficie Σ o coincidono o passano per uno stesso punto. Se coincidono si ricade nel caso a_2'), se passano per uno stesso punto si osservi che gli S_4 di tre superficie Σ generiche stanno al più in un S_8 e che, se l'S_4 di una quarta superficie Σ tagliasse i primi tre in tre rette concorrenti in un punto ma non situate in un piano, la V_4^n apparterrebbe al più a un S_8; dunque, se passano per uno stesso punto e non coincidono, debbono stare in un piano situato negli spazi di tutte le superficie Σ; e questo, come abbiamo visto, è assurdo.

Quanto al caso $i = 0$, sebbene io sia quasi sicuro che anch'esso non può portare a casi nuovi, non sono riuscito a esaurire la discussione; osserverò soltanto che, se pure il caso $i = 0$ è possibile, certo la V_4^n è allora razionale.

Si osservi infatti che, se A è un punto generico della V_4^n, per ogni retta tangente in A alla V_4^n vi è una sola superficie Σ che pure la tocchi in A; quindi il sistema dei piani tangenti in A alle superficie Σ uscenti da A è razionale, potendosi riguardare come ottenuto proiettando da A una ordinaria congruenza del 1° ordine. Segue allora che riferendo biunivoca mentele ∞^2 superficie Σ uscenti da A ai piani di una rete in un S_4 e le ∞^2 superficie Σ uscenti da un altro punto B della V_4^n a un'altra rete di piani dello stesso S_4, si ottiene una rappresentazione biunivoca della V_4^n sopra il detto S_4, quando si stabilisca che ad ogni punto C della V_4^n corrisponda quel punto dell'S_4 ove si tagliano i piani delle due reti corrispondenti alle superficie Σ che congiungono C con A e con B.

12. Nella discussione precedente si era supposto che la varietà V_4^n appartenesse a un S_9, ma risulta subito che le conseguenze a cui siamo pervenuti sono indipendenti dalla dimensione dello spazio ambiente.

Infatti se V_4^n appartiene a un S_r con $r > 9$ ma è di 2ª specie e a superficie Σ irriducibili, la sua proiezione sopra un S_9 da un qualsiasi S_{r-10} è una V_4^* costituita da ∞^3 curve piane situate in piani passanti per una retta d (e questi piani costituiscono un cono razionale a curve sezioni ellittiche) — curve che dànno le superficie Σ^* della proiezione V_4^* — o è (forse) una V_4^* razionale; quindi anche la data V_4^n o sta sopra un cono della specie detta o è razionale.

Possiamo pertanto enunciare il teorema:

Una V_4^n di 2ª specie a superficie Σ irriducibili o sta sopra un cono proiettante da una retta d una V_3, a curve sezioni ellittiche, razionale (e quindi appartiene al massimo a un S_{11}) o (forse) è una varietà non situata sopra un tal cono ma, certamente, razionale.

Notisi che nel 1° caso (se pure, torniamo a ripeterlo, è possibile il 2°) le superficie Σ sono le superficie della V_4^n contenute negli ∞^4 coni quadrici che proiettano dalla retta d le ∞^4 coniche della V_3 a curve sezioni ellittiche; poichè è noto che gli S_3 tangenti a una tale V_3 nei punti di una sua conica giacciono tutti in uno stesso S_6 (¹).

13. *Ipotesi b*). Di questa ipotesi, come abbiamo già detto, non sappiamo indicare una discussione esauriente. Essa si verifica nel caso che la V_4^n consti di ∞^1 S_3 (vedi n. 4) e si verifica anche in un caso che ora studieremo; ma non sappiamo se questi siano i soli casi possibili.

Supponiamo dunque che le superficie Σ si spezzino *ma supponiamo che le parti $\Sigma', \Sigma'', \ldots, \Sigma^{(i)}$ della superficie Σ generica variino in uno stesso sistema ∞^2 di cui passi una sola superficie per ogni punto della V_4^n*; e, tagliata la V_4^n, che per ora consideriamo come immersa in un S_9, con un iperpiano generico, ripetiamo sulla sezione V_3^n e le sue curve σ, sezioni delle superficie Σ, il ragionamento del n. 10.

Risulterà che la parte generica σ' della linea generica σ starà in un S_5 con ogni S_3 tangente alla V_3^n; quindi lo spazio cui σ' appartiene (se σ' non è una retta) non potendo essere un S_5 (altrimenti la V_3^n giacerebbe in questo S_5), e non potendo essere un S_4 (perchè

(¹) SCORZA, loc cit. n. 8 in fine.

altrimenti gli S_3 tangenti della V_3^n lo taglierebbero in piani e si taglierebbero fra di loro a due a due in punti), sarà necessariamente o un S_3 o un S_2. Ma anche di queste due ultime alternative la prima deve essere esclusa.

Infatti, se essa si verificasse, gli S_3 tangenti della V_3^n si appoggerebbero tutti all'S_3 di σ' in rette; così si appoggerebbero in rette all'S_3 di un'altra linea σ'' del sistema ∞^2 cui appartiene σ'; ma due S_3 tangenti della V_4^n *appartengono* a un S_7, quindi in tale S_7 giacerebbero tutte le linee del sistema σ', cioè la V_3^n.

Segue che le linee in cui si spezzano le σ sono curve piane o rette e quindi le superficie $\Sigma', \Sigma'', \ldots$ in cui si spezza la superficie Σ generica della V_4^n sono superficie ordinarie o piani.

Nel primo caso l'S_3 di una Σ', stando in un S_6 con l'S_4 tangente alla V_4^n in un punto qualunque, si appoggia in una retta a ognuno di questi S_4; e allora, perchè l'S_8 contenente due S_4 tangenti alla V_4^n non contenga gli S_3 delle varie superficie Σ', occorre che ognuno di questi tagli i due S_4 tangenti in due rette passanti per il loro punto comune. Si conclude che le rette segnate dagli S_4 tangenti sull'S_3 di una superficie Σ' si tagliano a due a due in un punto; quindi, non potendo esse passare per uno stesso punto, stanno in un medesimo piano δ e la V_4^n si compone di ∞^2 superficie situate in S_3 uscenti da δ.

Anche nel secondo caso è chiaro che i piani Σ' costituenti la V_4^n debbono appoggiarsi in rette a un piano fisso δ; poichè ciascun di essi deve sempre trovarsi in un S_6 con l'S_4 tangente alla V_4^n in un punto qualunque, quindi il punto comune ai due S_4 tangenti alla V_4^n in A e in B deve essere il punto comune ai due piani Σ' passanti per A e B. Ciò significa che i piani Σ' si tagliano a due a due in un punto e allora, non potendo stare in un S_4 o in un S_5 e non potendo passare per uno stesso punto, necessariamente tagliano in rette un piano fisso δ.

Ciò significa che, *nelle ipotesi fatte*, la V_4^n di 2ª specie consta di ∞^2 superficie ordinarie (in particolare, piani) situate in S_3 uscenti da un piano fisso, e una tale conclusione è indipendente (si vede subito) dalla dimensione dello spazio a cui la V_4^n appartiene.

Le V_4^n di questo tipo che sono realmente di 2ª specie, a superficie Σ spezzate, come si verifica in modo immediato, comprendono come caso particolare le V_4^n costituite da ∞^1 V_3 situate in S_4 per uno stesso piano incontrate già al n. 9.

§ 4.

Le V_4^n di 3ª specie.

14. Sia ora V_4^n una varietà di 3ª specie, e sia λ_{ab} il luogo degli ∞^1 punti di contatto degli S_4 tangenti alla V_4^n situati nell'S_8 che congiunge gli S_4, α e β, ad essa tangenti nei punti generici A e B. Può darsi che λ_{ab} si spezzi o sia irriducibile, ma, comunque, l'S_5 che congiunge α con B e che ne contiene certo delle parti irriducibili la contiene addirittura per intero. E infatti, se essa si distribuisse in due o più S_5 uscenti da α, il cono V_8 che proietta da α la V_4^n avrebbe la proprietà che l'S_8 ad esso tangente lungo uno spazio (S_5) generatore lo toccherebbe in altri; ma allora questi altri dovrebbero essere almeno ∞^1 e l'$S_8 \equiv \alpha\beta$ conterrebbe gli S_4 tangenti alla V_4^n in ∞^2 punti almeno.

Segue che λ_{ab}, dovendo trovarsi nell'$S_5 \equiv \alpha B$ e, per la stessa ragione, nell'$S_5 \equiv \beta A$, sta nel piano $A\,B\,.\,\alpha\beta$ secondo cui questi due S_5 si intersecano (1), e quindi è necessariamente una curva del 2° ordine.

Ora per quanto è stato detto precedentemente al n. 3, noi possiamo supporre che λ_{ab} sia irriducibile.

E infatti se λ_{ab} si spezza in due rette a e b uscenti da A e B, al variare del punto B sulla V_4^n la retta a uscente da A o resta ferma o assume ∞^i posizioni diverse con $i = 0, 1, 2$. La prima alternativa porta subito alla conclusione che V_4^n è un cono, in quanto per essa la V_4^n viene ad esser costituita da ∞^3 rette secantisi a due a due, e l'ipotesi $i = 2$ dà che la V_4^n consta di ∞^1 S_3 (2), dunque non resta che supporre che, al mutare di B, a assuma intorno ad A ∞^1 posizioni diverse costituenti un cono γ_a situato nell'S_4 α tangente alla V_4^n in A. Ora gli S_4 tangenti alla V_4^n nei punti di una generatrice generica a di γ_a non possono coincidere con α, perchè ove ciò accadesse α toccherebbe la V_4^n in tutti i punti di γ_a e l'$S_8 \equiv \alpha\,\beta$ conterrebbe gli S_4 tangenti a V_4^n in ∞^2 punti almeno, dunque gli S_4 tangenti a V_4^n nei punti di a appartengono a un S_δ con $\delta > 4$. D'altra parte alla generatrice a debbono ap-

(1) Notisi che i due S_5 non possono tagliarsi in più di un piano, perchè altrimenti α e β si taglierebbero in più di un punto.

(2) Cfr. nota (1) di pag. 254.

poggiarsi ∞^2 delle ∞^3 rette in cui si porta b al variare di B, ossia, se supponiamo la V_4^n proiettata (ove occorra) da punti esterni sopra un S_9, da S_δ escono ∞^2 S_8 secanti V_4^n in una V_3 con una retta variabile di punti doppi in punti semplici di V_4^n, per conseguenza deve essere necessariamente $\delta = 5$. Segue allora che, al variare di b fra le ∞^2 rette appoggiate ad a, il punto $a\,b$ non può variare, perchè altrimenti tale punto essendo generico su a sarebbe generico sulla V_4^n e l'S_4 tangente in esso alla V_4^n verrebbe a trovarsi in un S_5 con ciascuno degli S_4, α e β, tangenti alla V_4^n in A e B, cioè α e β si taglierebbero almeno in un piano; quindi esiste sulla retta a un punto G_a dal quale escono ∞^2 rette della V_4^n.

Al variare di a fra le ∞^4 rette descritte dalla coppia a, b quando A e B variano sulla V_4^n, il punto G_a assume soltanto ∞^2 posizioni diverse e quindi il suo luogo sarà una superficie F a cui i coni γ si appoggeranno secondo curve g. Le curve g, poi, potendo anche definirsi come le tracce su F degli S_4 tangenti a V_4^n, costituiranno sulla superficie F un sistema $\{g\}$ di grado 1, e quindi $\{g\}$ o avrà la dimensione 1 o sarà una rete omaloidica, ma in ogni caso sarà costituito da curve irriducibili (¹), dovendo qui scartarsi senz'altro l'ipotesi che le curve g abbiano delle parti comuni, o, soltanto, dei punti-base.

Poichè le curve g sono ∞^1 o al più ∞^2 e gli S_4 tangenti della V_4^n sono, nel caso che stiamo discutendo, certamente ∞^4, per ogni curva g passeranno ∞^3 o ∞^2 S_4 tangenti alla V_4^n e quindi una tal curva apparterrà al più ad un S_3.

Se le curve g fossero rette, F sarebbe un piano e gli S_4 tangenti alla V_4^n si appoggerebbero secondo rette a un piano fisso. Ma allora un iperpiano generico per F taglierebbe V_4^n in una V_3 con gli S_3 tangenti appoggiati ad F secondo rette, cioè in una V_3 costituita da ∞^1 superficie situate in S_3 per F (²), quindi V_4^n si comporrebbe di ∞^2 superficie situate in S_3 per F e sarebbe di 2ª specie. Per conseguenza dobbiamo supporre che le curve g siano piane o sghembe (ordinarie).

Ciò posto, torniamo a considerare il punto generico di V_4^n, A, e sia g_a la curva secondo cui l'S_4, α, si appoggia ad F, ed a una generatrice generica del cono γ_a proiettante g_a dal punto A. L'S_4,

(¹) Per giustificare questa asserzione basta ripetere qui il ragionamento che il prof. BERTINI fa alla pagina 313 della sua opera citata.

(²) SCORZA, loc. cit., n. 2. Si osservi ancora che i coni γ^a non possono essere piani per un ragionamento analogo ad altro già fatto nel n. 14.

τ, tangente a V_4^n nel punto generico T di a, dovendo trovarsi con α in un S_5 lo taglia in un S_3 e questo S_3 taglia g_a in qualche punto diverso dal punto ove a incontra g_a, quindi se la curva g_t relativa a T fosse diversa da g_a le due curve g_a e g_t avrebbero più di un punto comune. Segue che tutti i punti di γ_a hanno per S_4 tangenti S_4 passanti per g_a e allora, o g_a è sghemba e il punto A al pari di tutti i punti di γ_a deve trovarsi nell'S_3 di g_a e tutto questo S_3 apparterrà a V_4^n, o g_a è piana e l'S_3 proiettante da A il piano di g_a, contenendo pure tutti gli altri coni proiettanti g_a dai punti di γ_a, giacerà per intero sulla V_4^n.

Risulta dunque che V_4^n è composta in ogni caso di ∞^1 S_3 (anche se appartiene ad un S_r con $r > 9$), ma allora essa non è certo di 3ª specie per quel che a suo luogo è stato osservato (n. 4).

Possiamo pertanto ritenere, come si era affermato, che le curve λ siano coniche irriducibili.

15. Sia ora V_4^n una varietà con un sistema (∞^6) di coniche λ, tale che, presi due punti generici A e B della V_4^n, per questi passi una sola conica del sistema, λ_{ab}, e supponiamo di prendere il punto B infinitamente vicino ad A sopra una certa direzione t. Esisterà una ed una sola conica del sistema ∞^6 tangente in A alla retta t e quindi, se facciamo corrispondere ad ogni punto X della V_4^n quel punto dell'S_4 α, tangente alla V_4^n in A, in cui si tagliano le due rette che toccano λ_{ax} in A e in X, otterremo una rappresentazione biunivoca della V_4^n sullo spazio α, nella quale alle ∞^3 coniche della V_4^n uscenti da A vengono a corrispondere le ∞^3 rette della stella A.

Ciò dimostra intanto che la V_4^n è razionale; ma un esame più minuto ci condurrà a una caratterizzazione della V_4^n del tutto precisa.

Si incominci dall'osservare che una sezione iperpiana generica di V_4^n ha per immagine una forma di α di un certo ordine m con un punto $(m-2)$-plo in A, mentre una sezione di V_4^n ottenuta con un iperpiano per α e quindi dotata di un punto doppio in A, contenendo una *congruenza lineare* di coniche uscenti da A, avrà per immagine (prescindendo da eventuali parti fisse) un cono col vertice in A, e precisamente il cono quadrico costituito dalle rette tangenti in A alle coniche della congruenza. Quindi, se diciamo r la dimensione dello spazio ambiente, il sistema rappresentativo delle sezioni iperpiane contiene (totalmente o parzialmente) un sistema lineare ∞^{r-5} di coni quadrici col vertice in A. Segue che $r-5 \leq 9$ cioè $r \leq 14$, e d'altra parte, siccome $r \geq 9$ si ha $r-5 \geq 4$.

Notisi inoltre che noi possiamo benissimo supporre che la V_4^n sia una varietà razionale normale, perchè ove non fosse, la varietà, di cui essa sarebbe proiezione, conterrebbe sempre un sistema ∞^6 di coniche e sarebbe al pari della data una V_4 a S_4 tangenti mutuamente secantisi.

Ora possono darsi due casi; cioè può darsi che delle ∞^3 coniche della V_4^n uscenti da A se ne spezzino in rette

a) soltanto un numero finito,

b) oppure infinite.

16. L'ipotesi *a*) si discute con tutta facilità. Infatti poichè delle coniche uscenti da A se ne spezzano in rette soltanto un numero finito, una retta generica r di α sarà proiettata da A secondo un fascio di rette $(A\, r)$ a cui saranno tangenti in A ∞^1 coniche della V_4^n *tutte* irriducibili, quindi la superficie della V_4^n che esse riempiono sarà rappresentata sul piano $A\, r$ mediante un sistema lineare di curve che (non passando per A) saranno delle coniche. Ciò significa che la retta r incontra soltanto in due punti la forma che rappresenta una sezione iperpiana generica di V_4^n, ossia che V_4^n è rappresentata su α da un sistema lineare di quadriche. Ma allora la V_4^n (essendo normale) o è la V_4^{16} di VERONESE di S_{14} o è una V_4 che se ne ottenga per proiezione da punti ad essa appartenenti; purchè però tale V_4 non possegga che un numero finito di rette per ogni suo punto generico.

17. Per discutere l'ipotesi *b*) si osservi che le infinite (∞^1) rette in cui si spezzano alcune delle coniche uscenti da A costituiscono una superficie base per il sistema lineare ∞^{r-5} di coni quadrici rappresentanti le sezioni iperpiane con un punto doppio in A; quindi, poichè $r-5 \geq 4$ e poichè un sistema lineare di quadriche dello spazio ordinario più che tre volte infinito con una linea base è necessariamente costituito dal sistema delle quadriche passanti per una conica, spezzata o no (senza altri elementi base) o da un sistema di quadriche passanti per una retta con quella sola retta base o con un altro punto base al più, segue che le ∞^1 rette uscenti da A formano o un cono quadrico ordinario γ_a, o un piano π_a oppure il sistema costituito da un piano π_a e da *una* retta l_a fuori di questo piano.

18. Dimostriamo innanzi tutto che la prima alternativa è da escludersi.

Supponiamo infatti che le rette uscenti da A formino un cono quadrico γ_a e consideriamo la varietà $V^{(a)}$ riempita dai coni γ che escono dagli ∞^2 punti di γ_a. È chiaro che $V^{(a)}$ non può coincidere con V_4^n, poichè, se ciò avvenisse, da ogni punto di V_4^n partirebbe una retta appoggiata a γ_a e le curve λ si spezzerebbero in coppie di rette, quindi $V^{(a)}$ è una varietà a tre dimensioni.

Ora è facile vedere che tale $V^{(a)}$ non potendo essere un S_3, sarà una quadrica a tre dimensioni appartenente a un S_4. La cosa è evidente se il cono γ_a è irreduttibile, poichè $V^{(a)}$ sarà allora una V_3 con ∞^3 rette non composta di ∞^1 piani (¹), ma alla stessa conclusione si arriva anche se il cono γ_a si spezza in due piani π_a e π'_a secantisi in una retta uscente da A. Infatti, in tale ipotesi, facendo muovere un punto B su π_a, dei due piani uscenti da B uno coinciderà sempre con π_a, l'altro varierà tagliando sempre π_a secondo una retta e questa retta descriverà un fascio col centro S sulla retta $\pi_a \pi'_a$. Qualcosa di analogo accade quando B si muove su π'_a (o sugli altri piani appoggiati a π_a); cioè il secondo piano uscente da B e diverso da π'_a taglierà π'_a nelle rette di un fascio avente per centro un punto di $\pi_a \pi'_a$ (anzi addirittura il punto S, poichè S è l'unico punto di $\pi_a \pi'_a$ dal quale escono infiniti piani della V_4^n anzi che due). Ciò mostra che tale secondo piano, comunque vari B sugli ∞^1 piani appoggiati a π_a, non può descrivere la V_4^n, per una ragione analoga ad altra già addotta, e allora esso descriverà una V_3 la quale, contenendo due piani per ogni suo punto, è necessariamente un conoproiettante da un punto una quadrica ordinaria.

Segue dunque che nel caso considerato (supposto possibile) la V_4^n risulta di ∞^1 quadriche situate negli ∞^1 S_4 di una V_5^m, razionale normale al pari di V_4^n.

Poichè due punti generici di V_4^n sono sempre congiunti da una conica, segue che la V_5^m deve ammettere infinite coniche direttrici e, come è chiaro, sarà sempre possibile sceglierne cinque, uscenti da uno stesso punto A della V_5^m, per modo che sopra ogni altro S_4 generatore della V_5^m i cinque punti d'appoggio siano indipendenti. Ma allora osservando che cinque coniche siffatte sono contenute in cinque S_6 uscenti dall'S_5 tangente a V_5^m in A si conclude che la

(¹) Cfr. Severi, *Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni, e a' suoi punti tripli apparenti* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XV (1901), pp. 33-51], n. 10.

V_5^m appartiene al più ad un S_{10} ed è dunque (1) o *la* V_5^5 razionale normale di S_9 o *la* V_5^6 razionale normale di S_{10}.

La V_5^5 razionale normale di un S_9 è rappresentata biunivocamente sull'S_5 mediante il sistema lineare delle quadriche passanti per un S_3, τ, e per un punto P, e per due suoi punti qualunque passano ∞^1 coniche riempienti una quadrica (ordinaria) e aventi per immagini un fascio di coniche con un punto base in P e un altro punto base su τ.

Ora se sulla V_5^5 esistesse una V_4^n di 3ª specie, questa avrebbe per immagine nello spazio rappresentativo una V_4^* tale che due suoi punti qualunque A e B sarebbero congiunti a P da un piano secante V_4^* secondo una linea spezzata in una conica (irriducibile) ed, eventualmente, in una parte residua. Ma i piani uscenti da P non possono tagliare tutti V_4^* in linee spezzate, se si esclude che queste linee si spezzino in un gruppo di rette (2), dunque la tagliano in coniche uscenti da P e appoggiate a τ. Ma allora V_4^* è una qua-

(1) Notisi che, se la V_5^m è un cono, due punti generici di V_4^n saranno congiunti da una conica situata in un cono quadrico direttore di V_5^m; quindi la sezione iperpiana generica V_4^m di V_5^m conterrà una conica per ogni coppia di punti della sezione iperpiana di V_4^n che essa contiene. Segue allora, con un ragionamento del tutto analogo a quello fatto per V_5^m che V_4^m appartiene al più ad un S_8 e segue anche che V_5^m, se è un cono, non può avere per vertice che un punto, perchè, se avesse per vertice una retta, si potrebbe ripetere per la sezione di V_5^m ottenuta con un S_{r-2} $(r-2 \geqq 7)$ ciò che si è detto per la sezione iperpiana e si troverebbe che questa dovendo essere una ∞^1 di piani con infinite coniche direttrici sarebbe contenuta al più in un S_6. Tutto ciò dimostra che se V_5^m è un cono essa è la V_5^5 di S_9 che si ottiene proiettando da un punto la V_4^5 razionale normale di S_8; ma tale V_5^5 è rappresentata sull'S_5 da un sistema di quadriche che si ottiene da quello che si considera nel testo per la V_5^5 non conica facendo avvicinare indefinitamente P a τ in una determinata direzione e allora si vede subito che per il caso della V_5^5 conica si può ripetere il ragionamento del testo.

Per le affermazioni tenute qui e nel testo sulla unicità di *specie* delle ∞^1 razionali normali di spazi lineari considerate giova tener presenti le disuguaglianze cui soddisfanno gli ordini delle *varietà minime* di una tale ∞^1. Cfr. BELLATALLA, *Sulle varietà razionali normali composte di ∞^1 spazi lineari* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXVI (1901), pp. 803-833], n. 5.

(2) Una superficie che dagli iperpiani uscenti da un punto del suo spazio sia tagliata in curve spezzate è necessariamente un cono. Cfr. ENRIQUES, *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche* [Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, serie II, t. XLIV (1894), pp. 171-232], n. 1.

drica per P e per τ, cioè la V_4^n è una sezione iperpiana di V_5^5 ed appartiene a un S_8; mentre per noi lo spazio ambiente di una V_4^n ha sempre la dimensione ≥ 9.

La V_5^6 di S_{10} è rappresentata biunivocamente sull'S_5 mediante il sistema lineare delle quadriche passanti per un S_3, τ; e per ogni coppia di punti della V_5^6 passa *una* conica avente per immagine una retta dello spazio rappresentativo.

Allora se sulla V_5^6 esistesse una V_4^n di 3ª specie questa avrebbe per immagine una V_4^* che conterrebbe per intero la retta congiungente due suoi punti generici. Allora V_4^* sarebbe un S_4 e la V_4^n apparterrebbe ad un S_8.

19. Passiamo ora alla considerazione dei casi in cui da ogni punto A di V_4^n escono ∞^1 rette costituenti un piano π_a, trattando per ora insieme il caso in cui da A non escono che le rette di π_a e quello in cui, oltre le rette di π_a, esce da A una retta ulteriore l_a non situata in π_a.

Sia λ_0 una conica generica della V_4^n e sia V_3^x la V_3 riempita dai piani di V_4^n uscenti dai punti di λ_0. La V_3^x è evidentemente contenuta nell'S_8 che passa per gli S_4 tangenti a V_4^n nei punti di λ_0 ed ha in λ_0 una linea direttrice *semplice*: dunque, qualunque sia la dimensione $r \geq 9$ dello spazio ambiente, la V_3^x appartiene certo parzialmente al sistema delle sezioni iperpiane, perchè un S_{r-1} il quale contenga (o, se $r = 9$, coincida con) l'S_8 in discorso taglia la V_4^n in una V_3 con una linea doppia (almeno) in λ_0 (1).

Sia V_3^y una varietà che sommata con V_3^x dia una sezione iperpiana di V_4^n: la varietà $V_3^x + V_3^y$ taglia allora ogni conica λ in due punti complessivamente e, poichè è assurdo supporre che una delle V_3^x, V_3^y non incontri in alcun punto una conica λ generica, segue che ogni conica λ generica taglia in *un* punto la V_3^x e in *un* punto la V_3^y (quindi le parti della sezione iperpiana non possono essere che due e semplici).

Ciò porta che *la* conica λ passante per due punti generici di V_3^x o V_3^y giace in V_3^x o V_3^y rispettivamente e che, per conseguenza, tanto V_3^x quanto V_3^y contengono ∞^4 coniche, passandone *una* per ogni loro coppia di punti.

(1) Giova osservare che un tale S_{r-1} non può tagliare la V_4^n in una V_3 contenente la V_3^x contata due (o più) volte. E infatti in caso contrario la V_4^n sarebbe non di 3ª specie bensì di 1ª specie.

Ora questo basta per riconoscere che l'ordine x della V_3^x è dato da $x = 4$.

Infatti se la V_3^x, che è una ∞^1 razionale di piani, non è normale si supponga di considerare la W_3^x normale di cui essa è proiezione da punti esterni: la W_3^x, al pari della V_3^x, conterrà ∞^4 coniche direttrici e l'S_4 congiungente l'S_3 tangente alla W_3^x in un suo punto P con un altro punto generico Q conterrà la conica direttrice di W_3^x passante per P e Q. Tenendo fermo il punto P e facendo assumere a Q tre posizioni indipendenti in un piano della W_3^x, si conclude che lo spazio cui appartengono le tre posizioni corrispondenti dell'S_4 in discorso contiene per intero la W_3^x. Si conclude che W_3^x appartiene al più ad un S_6; per conseguenza la V_3^x, che non può appartenere a uno spazio di meno che sei dimensioni perchè altrimenti i suoi S_3 tangenti si taglierebbero a due a due almeno in rette e altrettanto avverrebbe degli S_4 tangenti alla V_4^n (per ogni coppia di punti della V_4^n passando una V_3^x) coincide con la W_3^x ed è necessariamente una V_3^4 razionale normale di S_6 (non conica).

Per procedere innanzi torniamo a considerare la V_3^4 e la V_3^y uscenti da λ_0. Poichè ogni conica di V_3^4 deve incontrare in un punto la V_3^y è chiaro che l'intersezione comune di V_3^4 e V_3^y deve contenere necessariamente dei punti esterni a λ_0; le coniche di V_4^n congiungenti questi punti coi punti di λ_0 giacciono poi tanto su V_3^4 quanto su V_3^y, dunque V_3^4 e V_3^y si tagliano in una superficie Φ_0 con ∞^2 coniche. Ora sulla V_3^4 esiste *una sola* quadrica e nessuna superficie di VERONESE o proiezione di una tale superficie sopra un S_4, dunque Φ_0 è senz'altro una rigata cubica normale appartenente a un S_4, ed ogni S_{r-1} tangente a V_4^n nei punti di λ_0 tocca V_4^n addirittura nei punti di una rigata cubica normale.

Ciò porta che nel caso che stiamo discutendo non può essere $r - 1 = 8$ e quindi deve essere $r \geq 10$.

Le V_3^4 razionali normali esistenti sulla V_4^n costituiscono una rete e due V_3^4 generiche si tagliano in un piano; dunque tale rete è completa, e poichè rispetto al sistema delle sezioni iperpiane essa è il residuo di una V_3^y, segue che una qualunque di queste deve appartenere a un S_{r-3} con $r - 3 \geq 7$ (¹). Tenendo presente che V_3^y contiene ∞^4 coniche, basta questo per concludere (²) che V_3^y, dovendo

(¹) Si ricordi che la V_4^n si è supposta razionale *normale*.

(²) SCORZA, loc. cit., n. 8.

contenere delle rigate cubiche normali, o è la V_3^6 di ENRIQUES di S_7 o è la V_3^7 di S_8 proiezione della V_3^8 (di S_9) di VERONESE da un suo punto qualunque o è una V_3^7 di S_7 proiezione di una tale V_3^7 di S_8 da un punto esterno, ipotesi quest'ultima che, come ora dimostreremo, deve essere respinta.

20. Supponiamo in primo luogo che le V_3^y siano delle V_3^7 di S_8. Allora lo spazio ambiente è un S_{11}, e poichè il sistema lineare delle V_3^7 è residuo, rispetto a quello (completo) delle sezioni iperpiane, della rete delle V_3^4, si conclude che $| V_3^7 |$ è un sistema lineare ∞^4 *completo*. Sopra ogni V_3^7 il sistema caratteristico di superficie sarà un sistema lineare ∞^3 di superficie con ∞^2 coniche ciascuna, per un ragionamento analogo ad altro già fatto: d'altra parte una V_3^7 di S_8, proiezione della V_3^8 di VERONESE da un suo punto non contiene quadriche, contiene soltanto una rete di rigate cubiche normali, e contiene soltanto un sistema lineare ∞^3 di superficie di VERONESE, dunque son queste le superficie del sistema caratteristico sopra considerato. Ciò dimostra ancora che il sistema $| V_3^7 |$ è omaloidico e può servire a rappresentare biunivocamente la V_4^n (cioè, per essere $y = 7$, la V_4^{11}) sopra un S_4 per modo che le superficie di VERONESE delle V_3^7 siano rappresentate da piani e le coniche da rette.

Si conclude allora che la V_4^{11} è rappresentata sull'S_4 da un sistema lineare di quadriche e quindi è proiezione (da una conica) della V_4^{16} di VERONESE dell'S_{14}.

21. Dimostriamo in secondo luogo che le V_3^y non possono essere delle V_3^7 di S_7 ottenute per proiezione (da un punto esterno) da V_3^7 di S_8.

Infatti se le V_3^y fossero delle V_3^7 di S_7 il loro sistema sulla V_4^n (che sarebbe una V_4^{11} di S_{10}) sarebbe un sistema lineare ∞^3 e sopra ogni V_3^7 il sistema caratteristico sarebbe una rete di superficie, che, per una ragione già detta, sarebbero delle rigate cubiche razionali normali, oppure delle superficie di VERONESE.

La rete delle rigate cubiche normali esistenti sopra ogni V_3^7 della V_4^{11} è ivi segata dalla rete delle V_3^4, quindi, se il sistema caratteristico in discorso fosse costituito da quella rete, per ogni rigata cubica normale di una V_3^7 passerebbero una V_3^4 e ∞^1 V_3^7 della V_4^{11}. Ma allora di queste ∞^1 V_3^7 una si spezzerebbe nella V_3^4 e in una V_3^3 residua, e avremmo una sezione iperpiana spezzata in una parte doppia e in una semplice, mentre abbiamo visto che ciò non può accadere.

Si vede ugualmente che il sistema caratteristico non può essere una rete di superficie di VERONESE estratta dal sistema lineare ∞^3 di superficie di VERONESE che ogni V_3^7 contiene; infatti se ciò avvenisse il sistema caratteristico sopra una V_3^7 avrebbe un punto-base (si pensi che sopra una V_3^7 di S_8 le ∞^3 superficie di VERONESE, che essa contiene, formano un sistema omaloidico), il quale sarebbe un punto-base per il sistema lineare delle V_3^7. Tale punto dovrebbe allora essere un punto-base anche per la rete delle V_3^4 e quindi sopra ognuna di tali V_3^4 il sistema lineare segnatovi dalle V_3^7 si ridurrebbe a una *rete* di V_2^3 (si ricordi che sopra una V_3^4 esiste soltanto un sistema lineare ∞^3 di rigate cubiche normali); ma questo porterebbe ancora a concludere che ogni V_3^4 farebbe parte di una V_3^7 e questo, come abbiamo già visto, non può essere ammesso.

22. Resta dunque da considerare il solo caso in cui le V_3^y sono delle V_3^6 di ENRIQUES di S_7, caso che si presenterà solo quando avvenga che da ogni punto A di V_4^n escano un piano π_a ed una retta l_a non situata in esso, poichè, come è noto, una V_3^6 di ENRIQUES ammette per ogni sua conica *due* rigate cubiche razionali normali.

Allora lo spazio ambiente è un S_{10} e la V_4^n è una V_4^{10}; poi ogni piano della V_4^{10} (facente parte di ∞^1 V_3^4 razionali normali) si appoggia ad ogni V_3^6 secondo una retta e quindi l'S_7 di una V_3^6 proietta gli ∞^2 piani della V_4^{10} secondo gli ∞^2 S_8 di una rete.

Se si considerano le due reti di S_8 proiettanti dagli S_7 di due diverse V_3^6 gli ∞^2 piani della V_4^{10} si ottengono due reti proiettive; perchè un iperpiano uscente dall'S_7 di una delle due V_3^6 taglia ulteriormente la V_4^{10} in una V_3^4 che insieme con l'altra V_3^6 costituisce una nuova sezione iperpiana della V_4^{10}, quindi a un fascio di S_8 della prima rete, corrisponde un fascio di S_8 nella seconda. Considerando allora le quattro reti proiettive che si ottengono proiettando i piani della V_4^{10} dagli spazi di quattro sue V_3^6 generiche si ha che la nostra V_4^{10} è generabile mediante quattro reti proiettive di S_8 aventi per sostegni quattro S_7 generici.

23. Ciò che si è detto fin qui caratterizza pienamente le V_4^n di 3ª specie, ma prima di enunciare in modo definitivo il risultato

ottenuto, giova fermarsi un momento a considerare qualcuna delle proprietà delle V_4^{10} di S_{10} or ora incontrata.

Anzitutto si noti che, se in un S_{11} si considerano quattro piani indipendenti riferiti collinearmente, gli S_3 che congiungono le quadruple di punti omologhi riempiono quella V_5^{10} che, secondo una nota Memoria del prof. SEGRE [1], rappresenta biunivocamente senza eccezione la varietà delle coppie di punti di un S_2 e di un S_3. Tale V_5^{10} contiene ∞^3 S_2 e ∞^2 S_3, l'una schiera di spazi punteggiando proiettivamente due spazi qualunque dell'altra schiera; e contiene anche un sistema lineare ∞^3 di V_4^6 appartenenti ad S_8 e rappresentanti, sempre nel modo indicato dal prof. SEGRE, le varietà delle coppie di punti di due piani. Ora si riconosce facilmente che dagli S_8 di quattro V_4^6 generiche di tale sistema lineare gli ∞^2 S_3 della V_5^{10} vengono proiettati mediante gli S_9 di quattro reti proiettive e che, viceversa, quattro reti proiettive di S_9 in S_{11} generano una V_5^{10} di SEGRE, dunque:

La V_4^{10} di 3ª specie trovata nel n. precedente può ottenersi secando con un iperpiano generico la V_5^{10} del SEGRE; *quindi contiene un sistema di ∞^2 piani e un sistema di ∞^3 rette, per ogni punto della V_4^{10} passando un piano del 1º sistema e una retta del 2º.*

24. La V_4^{10}, sezione della V_5^{10} del SEGRE, è (si riconosce subito) a curve sezioni normali del genere 3; quindi la V_2^{10} che si ottiene tagliandola con un S_8 generico dello spazio ambiente è una superficie razionale (perchè riferibile biunivocamente alla schiera degli ∞^2 S_2 della V_4^{10}) normale a curve sezioni del genere 3. Ma allora tale V_2^{10} è rappresentabile sul piano mediante un sistema lineare di quartiche passanti per sei punti-base [2]; anzi, osservando che una cubica del piano rappresentativo la quale passi pei sei punti-base rappresenta una sestica ellittica normale C^6 (di S_5), e che una sezione iperpiana la quale contenga tale C^6 si spezza in essa e in una residua quartica razionale normale avente con essa tre punti comuni, si conclude che la rappresentazione biunivoca della V_2^{10} sopra un piano può ottenersi semplicemente per proiezione dall' S_5 di questa C^6.

(1) SEGRE, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. V (1891), pp. 192-204].

(2) CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere 3* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXV (1890), pp. 695-715].

Segue che per rappresentare biunivocamente la V_4^{10} sopra un S_4 (e altrettanto potrebbe dirsi per la V_5^{10} del SEGRE) basta proiettarla sopra un tale S_4 dall'S_5 di una sua C^6 ellittica normale: quindi l'immagine di una sezione iperpiana generica sarà una forma quartica, mentre l'immagine di una sezione iperpiana che contenga la C^6 dal cui spazio si fa la proiezione è semplicemente un iperpiano dello spazio rappresentativo.

Per trovare rapidamente la varietà base del sistema lineare rappresentativo, si osservi dapprima che proiettando una V_3^{10} di S_9 (sezione iperpiana della nostra V_4^{10}) dall'S_5 di una sua C^6 ellittica si ottiene come sistema rappresentativo delle sezioni iperpiane un sistema lineare completo di superficie del quart'ordine con sestica base ellittica, φ (perchè ogni punto di φ rappresenta tutti i punti di una retta della V_3^{10} uscente da un punto della C^6). Tale sistema contiene parzialmente quello dei piani dell'S_3 rappresentativo; il *resto* di quest'ultimo rispetto al primo è costituito da una superficie del 3^0 ordine la quale deve esser rigata (perchè deve rappresentare i punti della V_3^{10} infinitamente vicini ai vari punti della C^6) ed ellittica (per la stessa ragione), quindi è un cono cubico ellittico nel cui vertice O la curva φ ha un punto triplo. Allora le superficie del quart'ordine in discorso passano per φ e hanno in O un punto triplo: O è l'immagine di ∞^2 punti della V_3^{10} situati sopra una V_2^6 razionale normale di S_6; le rette per O rappresentano le ∞^2 rette della V_3^{10}, etc. etc.

Tutto ciò dimostra che:

Il sistema rappresentativo delle sezioni iperpiane della V_4^{10} è un sistema di forme quartiche con retta tripla o passanti per una rigata ellittica del 6° ordine avente in o una retta tripla e situata sopra un cono cubico ellittico avente per vertice o.

25. Senza fermarci sullo studio della rappresentazione della V_4^{10}, diversa da quella ora indicata, che si ottiene utilizzando l'osservazione generale del n. 15 (studio che sarà ripreso altrove, insieme con quello della corrispondenza cremoniana stabilita fra due S_4 tangenti generici della V_4^{10} dai punti di appoggio di tutti gli altri), possiamo riassumere nel seguente teorema il risultato ottenuto in quest'ultimo paragrafo:

Ogni V_4^n di 3^a specie si può ottenere per proiezione (da punti esterni o no) dalla V_4^{16} (di S_{14}) di VERONESE *o dalla V_4^{10} (di S_{10}), sezione iperpiana generica della V_5^{10} di* SEGRE *(di S_{11}), a meno che,* *beninteso, essa non coincida con quella* V_4^{16} *o con questa* V_4^{10}. *In tutti i casi la* V_4^n *(è razionale e) può rappresentarsi sopra un* S_4 *mediante un sistema lineare di quadriche oppure mediante un sistema lineare di forme quartiche con retta tripla o, con una rigata-base ellittica del* 6^c *ordine avente in o una retta tripla ed, eventualmente, con altri elementi-base.*

Palermo, 9 settembre 1908.