SOPRA UNA CERTA CLASSE DI VARIETÀ RAZIONALI

1. È ben noto che una V_3^4 di S_6 la quale sia tagliata da ogni S_5 in una superficie di Veronese è necessariamente un cono [1].

Per alcune mie ricerche ho dovuto occuparmi di una questione analoga a quella cui si riferisce questo teorema; e allora ne ho trovato una dimostrazione assai semplice che mi ha fatto vedere come esso fosse suscettibile di una grande generalizzazione.

Scopo di questa breve Nota è appunto l'esposizione del teorema generale.

2. Sia F la superficie d'ordine n^2 di $S_{\frac{1}{2}n(n+3)}$, che è rappresentata sul piano dal sistema lineare di tutte le curve d'ordine n, e sia $C^{n(n-1)}$ una sua curva d'ordine $n(n-1)$ avente per immagine una curva piana d'ordine $n-1$.

È chiaro che $C^{n(n-1)}$ *appartiene* a un $S_{\frac{1}{2}n(n+3)-3}$ e che ogni iperpiano per $C^{n(n-1)}$ seca ulteriormente F in una curva (razionale normale) d'ordine n appoggiata in $n-1$ punti a $C^{n(n-1)}$; quindi la suddetta rappresentazione di F può considerarsi come ottenuta semplicemente per proiezione.

3. Ciò premesso, sia $V_3^{n^2}$ una varietà (a tre dimensioni) di $S_{\frac{n(n+3)}{2}+1}$ che da ogni iperpiano sia tagliata in una superficie del tipo ora considerato.

Dico che $V_3^{n^2}$ è necessariamente un cono.

Infatti sia F una sua sezione iperpiana generica e $C^{n(n-1)}$ una delle sue curve d'ordine $n(n-1)$, e dallo spazio α di $C^{n(n-1)}$ proiet-

[1] Segre, *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXI (1885). pp. 95-115]; o anche Bertini, *Introduzione alla geometria projettiva degli iperspazi con appendice sulle curve algebriche e loro singolarità* (Pisa, Enrico Spoerri, 1907), p. 321 e p. 342.

tiamo $V_3^{n^2}$ sopra un S_3. La proiezione risulterà generalmente biunivoca, le immagini delle sezioni iperpiane passanti per $C^{n(n-1)}$ saranno i piani dell' S_3 rappresentativo, e l'immagine di una sezione iperpiana generica [che ha $n(n-1)$ punti comuni con $C^{n(n-1)}$] sarà una superficie dell'ordine $n^2 - n(n-1) = n$.

Ora $V_3^{n^2}$ (che per il ragionamento fatto è razionale) è normale al pari di F, quindi il sistema lineare $|\varphi|$ delle immagini delle sue sezioni iperpiane è un sistema lineare completo di superficie d'ordine n che stacca sopra ogni piano dello spazio rappresentativo il sistema lineare di *tutte* le curve d'ordine n.

Segue che $|\varphi|$ non può avere altri elementi base che punti isolati, e di tali punti ne deve esistere certo almeno uno, O, perchè altrimenti $|\varphi|$ sarebbe il sistema di *tutte* le superficie d'ordine n dello spazio rappresentativo e avrebbe una dimensione superiore a $\frac{1}{2}n(n+3)+1$; quindi lo spazio β congiungente α con O contiene una superficie Φ di $V_3^{n^2}$, perchè ogni iperpiano per β taglia ulteriormente $V_3^{n^2}$ in una superficie d'ordine inferiore ad n^2.

Ora si osservi che gli ∞^2 punti di $V_3^{n^2}$ infinitamente vicini a un punto A di $C^{n(n-1)}$ hanno per immagini i punti di una retta a e che la retta a al variare di A sopra la $C^{n(n-1)}$ descrive *la* superficie d'ordine $n-1$, φ', che costituisce il *resto* rispetto a $|\varphi|$ dei piani dello spazio rappresentativo. D'altra parte i punti di a, mediante la proiezione da α, vengono ad essere riferiti proiettivamente ai piani del fascio che sta nell' S_3 tangente alla $V_3^{n^2}$ in A ed ha per asse la retta tangente in A alla $C^{n(n-1)}$ (per modo che ogni punto di a rappresenta i punti di un intorno *piano* di $V_3^{n^2}$ relativo ad A), dunque la retta a passa costantemente per O (immagine del piano tangente in A alla superficie Φ) e la curva intersezione di φ' con una superficie generica φ di $|\varphi|$ si spezza in $n(n-1)$ rette; cioè, nelle $n(n-1)$ rette che rappresentano i punti di $V_3^{n^2}$ infinitamente vicini agli $n(n-1)$ punti ove la sezione iperpiana che ha per immagine φ incontra la curva $C^{n(n-1)}$. Segue che φ' è un cono col vertice in O e che $|\varphi|$ è un sistema di monoidi col punto $(n-1)$-plo in O e col cono tangente fisso φ'.

Di qua si trae subito che $V_3^{n^2}$ è un cono (1).

(1) A questa conclusione avremmo potuto arrivare assai più rapidamente, se non avessimo voluto presentare il ragionamento in maniera da renderne immediata la generalizzazione di cui si parla nel n. 4.

4. I ragionamenti fatti, come il lettore scorge subito, si estendono immediatamente. Così si vedrà, come al n. 2, che la $V_r^{n^r}$ di $S_{\binom{n+1}{r}-1}$ rappresentata sopra un S_r dal sistema di *tutte* le forme d'ordine n è proiettata biunivocamente dallo spazio di una sua $V_{r-1}^{(n-1)n^{r-1}}$ che abbia per immagine una forma generica d'ordine $n-1$ dello spazio rappresentativo e che tale proiezione dà luogo appunto alla considerata rappresentazione di $V_r^{n^r}$; e poi imitando il ragionamento del n. 3 si perverrà a dimostrare che ogni $V_{r+1}^{n^r}$ di $S_{\binom{n+r}{r}}$ avente per sezioni iperpiane delle cosiffatte $V_r^{n^r}$ è necessariamente un cono.

Segue allora il teorema generale:

Se le sezioni iperpiane di una $V_{r+i}^{n^r}$ di $S_{\binom{n+r}{r}+i-1}$ con gli $S_{\binom{n+r}{r}-1}$ dello spazio ambiente sono delle $V_r^{n^r}$ rappresentate sopra un S_r dal sistema lineare di tutte le sue forme d'ordine n, necessariamente quella $V_{r+i}^{n^r}$ è un S_{i-1}-cono proiettante dal suo vertice una cosiffatta $V_r^{n^r}$.

Palermo, 7 agosto 1909.