BREVI CENNI DI FOTOGRAMMETRIA TEORICA

Le teorie fotogrammetriche, per quanto di formazione recente, hanno raggiunto, sotto la pressione delle esigenze pratiche, un così ampio sviluppo che non possono trovar posto adeguato in un corso di geometria descrittiva. D'altro canto i procedimenti grafici, per le forti difficoltà a cui spesso vanno incontro e per la mancanza di una corrispondente teoria razionale degli errori, non hanno nella fotogrammetria, di fronte all'uso del calcolo e di appositi strumenti, importanza preponderante; cosicchè la fotogrammetria ha forse parentela più stretta con la geodesia che con la geometria descrittiva.

Pure il suo problema fondamentale è di natura strettamente geometrica, e talune sue considerazioni sono particolarmente adatte a mettere in chiaro rilievo teorie classiche di geometria descrittiva; quindi non è da meravigliarsi se nei trattati ove questa scienza viene esposta con qualche ampiezza si va facendo qua e là alla parte teorica della fotogrammetria un posto più o meno largo.

Scopo di questa breve pubblicazione è appunto quello di fissare le linee principali degli argomenti fotogrammetrici che verranno svolti nel corso libero di geometria descrittiva che terrò qui a Palermo nell'imminente anno accademico.

Al contrario di quel che sarà fatto nell'esposizione orale, sorvoleremo qui su quelle parti della materia che han trovato ampia trattazione in libri notissimi del Koppe, dello Steiner e dello Schilling (1), e ci fermeremo invece con maggiore attenzione sopra il

(1) Koppe, *Die Photogrammetrie oder Bildmesskunst*, (Weimar. 1889); Steiner, *Die Photographie im Dienste des Ingenieurs; ein Lehrbuch der Photogrammetrie* (Wien, 1893); Schilling, *Ueber die Anwendungen der darstellenden Geometrie insbesondere über die Photogrammetrie* (Leipzig und Berlin, 1904).

teorema fondamentale della fotogrammetria teorica enunciato da tempo dal FINSTERWALDER (1), per apportarvi qualche utile complemento.

Come è noto, il fatto, che una figura dello spazio è determinata (non individuata) a meno di una similitudine quando se ne conoscano quattro prospettive, fu collegato dal FINSTERWALDER all'altro che date nello spazio quattro coppie generiche di rette incidenti vi è soltanto un numero finito di coniche che si appoggino ad esse in punti distinti.

Di questo numero, evidentemente inferiore a quello classico del LÜROTH (2) relativo alle coniche appoggiate a otto rette *generiche* dello spazio, il FINSTERWALDER trascurò la determinazione precisa, reputando giustamente che esso rimanesse sempre troppo elevato per poter sperare che il teorema in discorso potesse dar luogo a utili applicazioni pratiche; ma, dal punto di vista teorico, a noi non è parso del tutto privo di interesse di calcolarlo effettivamente per dare al risultato del FINSTERWALDER una formulazione più precisa.

Nel seguito si troverà infatti stabilito che:

La forma di una figura dello spazio di cui siano note quattro prospettive può determinarsi (senza far distinzione tra elementi reali ed immaginari) *in 40 maniere distinte*;

e a questo risultato, come a quello già citato del LÜROTH, che ci è necessario utilizzare, perverremo senza uscire dai limiti ordinari della geometria proiettiva e descrittiva. Noi, cioè, non faremo ricorso, nè ai metodi della geometria numerativa che qui condurrebbero allo scopo assai rapidamente, nè, come il LÜROTH, al principio di corrispondenza di JONQUIÈRES-CHASLES, che, per quanto elementare, non trova posto nelle consuete trattazioni di geometria proiettiva e descrittiva.

I

Generalità.

1. Il problema fondamentale della fotogrammetria consiste nello stabilire fino a qual punto è possibile ricostruire una figura F di

(1) FINSTERWALDER, *Die geometrische Grundlagen der Photogrammetrie* (Jahresb. der Deuts. Mathem. Verein., VI, 2).

(2) LÜROTH, *Ueber die Anzahl der Kegelschnitte, welche acht Gerade im Raume schneiden* (Crelle's Journal, Bd. 68, 1868).

cui siano assegnate una o più prospettive, e, ove sia possibile, nell'assegnare le costruzioni grafiche che fanno passare da queste prospettive alle immagini di F sopra due dati piani ortogonali.

Per risolvere le due questioni in cui questo problema si scinde giova premettere alcune definizioni che ci permetteranno di esser brevi e precisi.

2. Come è noto, quando di una figura F si fa la prospettiva F' da un centro O_1 sopra un quadro π_1, si chiama *punto principale* il piede H_1 della perpendicolare condotta da O_1 sopra π_1; *orizzonte*, l'intersezione h di π_1 col piano orizzontale passante per O_1 e *distanza principale* o semplicemente *distanza* un segmento d che sia uguale ad $O_1 H_1$.

La conoscenza del punto H_1 e della distanza d serve a fissare la posizione del quadro π_1 rispetto al centro di proiezione; invece la conoscenza del punto H_1, della distanza d e dell'orizzonte h serve a fissare non solo la posizione del quadro rispetto al centro, ma anche la sua inclinazione sopra un piano orizzontale.

Noi diremo (col FINSTERWALDER) che gli elementi H_1 e d costituiscono l'*orientazione interna* di F' e (con lo SCHILLING) che gli elementi H_1, d ed h costituiscono la *prima orientazione* di F.

3. Un'altra nozione importante in questo ordine di ricerche è quella di *fulcro*, introdotta dallo HAUCK in una serie di memorie inserite nel Giornale di CRELLE (Bd. 95, 97, 98, 108, 111, 128).

Supponiamo di voler rappresentare i punti dello spazio mediante le loro proiezioni fatte dai due centri O_1 e O_2 sopra i due quadri π_1 e π_2. Allora chiameremo *fulcro* di π_1 la proiezione O_2' di O_2 fatta da O_1 sopra π_1 e *fulcro* di π_2 la proiezione O_1'' di O_1 fatta da O_2 sopra π_2.

Naturalmente O_2' e O_1'' non sono altra cosa che le intersezioni dei piani π_1 e π_2 con la retta $O_1 O_2$.

Se P è un punto generico dello spazio e P', P'' sono le sue immagini su π_1 e π_2, il piano dei raggi proiettanti $O_1 P$ e $O_2 P$ contiene la retta $O_1 O_2$ e le rette $O_2' P'$ e $O_1'' P''$; dunque quest'ultime due si tagliano in un punto della intersezione dei due quadri.

Questa osservazione, che è la generalizzazione immediata di quella che stabilisce nel metodo di MONGE la relazione intercedente fra l'icnografia e l'ortografia di uno stesso punto, può enunciarsi dicendo che:

Se si proiettano i punti di π_1 e π_2 immagini di uno stesso punto dello spazio dai fulcri rispettivi O'_2 e O''_1 si ottengono intorno a O'_2 e O''_1, due fasci di raggi proiettivi.

Questo teorema, quando siano note le immagini F' ed F'' di una figura generica F dello spazio, permette di caratterizzare i fulcri di π_1 e π_2 indipendentemente dalle posizioni relative dei centri di proiezione e dei quadri.

E infatti se dopo aver eseguite le proiezioni di F da O_1 e O_2 sopra π_1 e π_2, i piani π_1 e π_2 si spostano comunque nello spazio, per desumere dalla conoscenza di F' ed F'' le posizioni dei fulcri O'_2 e O''_1 basta proporsi la ricerca dei punti di π_1 e π_2 da cui le coppie di punti corrispondenti di F' ed F'' vengono proiettate secondo coppie di raggi omologhi di due fasci proiettivi.

Tale ricerca è stata trattata con tutt'altro scopo dallo STURM nelle sue notissime memorie sul *problema della proiettività* e dà luogo, da sola, a un gran numero di questioni interessanti: ma qui basterà limitarsi ai seguenti cenni.

4. Si supponga in primo luogo di conoscere in F' e in F'' le proiezioni P'_i e $P''_i (i = 1, \dots 6)$ di sei punti P_i di F e si supponga inoltre che i quattro punti P_1, P_2, P_3, e P_4 di F si trovino in uno stesso piano α.

Se chiamiamo R_5 l'intersezione del raggio $O_2 P_5$ col piano α, l'immagine di R_5 su π_2 è P''_5; quindi la proiezione R'_5 di R_5 su π_1 sarà il punto corrispondente a P''_5 nella collineazione fissata tra i due piani π_1 e π_2 dalle quattro coppie di punti omologhi (P'_i, P''_i) per $i = 1, 2, 3, 4$. Trovato il punto R'_5, basta congiungerlo con P'_5 per avere nella retta $P'_5 R'_5$ (l'immagine su π_1 della retta $O_2 P_5$, cioè) una retta contenente il fulcro O'_2.

Un'altra retta per il fulcro O'_2 può ottenersi servendosi del punto P_6 e quindi O'_2 è determinato.

Per trovare, dopo ciò, il fulcro O''_1 basta scambiare nella costruzione indicata l'ufficio dei centri O_1 e O_2; ma volendo si può anche utilizzare il problema che ora passiamo ad esporre, conosciuto nella fotogrammetria sotto il nome di *problema dei cinque punti*.

5. Può darsi che dei due fulcri O'_2 e O''_1 uno, per es. O'_2, sia dato oppure sia stato già determinato: allora per trovare O''_1 basta conoscere in F' ed F'' le proiezioni P'_i e P''_i di soli cinque punti P_i di $F (i = 1, \dots 5)$.

E infatti da una parte deve essere

$$O_1''(P_1''\,P_2''\,P_3''\,P_4'') \overline{\wedge}\, O_2'(P_1'\,P_2'\,P_3'\,P_4'),$$

cioè O_1'' deve trovarsi sopra una certa conica (ben determinata) passante per P_1'', P_2'', P_3'' e P_4''; dall'altra deve essere

$$O_1''(P_1''\,P_2''\,P_3''\,P_5'') \overline{\wedge}\, O_2'(P_1'\,P_2'\,P_3'\,P_5')$$

cioè O_1'' deve trovarsi sopra una cert'altra conica (ben determinata) passante per P_1'', P_2'', P_3'', P_5''; quindi O_1'' coincide col punto ove queste coniche si tagliano fuori dei punti P_1'', P_2'', e P_3''.

Questo punto poi, come è ben noto dalla Geometria proiettiva, può determinarsi linearmente in maniera semplice.

6. Un altro caso (di grande importanza teorica, ma di nessun interesse pratico) in cui si può procedere alla determinazione dei fulcri è quello in cui siano assegnate in F' ed F'' le proiezioni P_i' e P_i'' di sette punti $P_i (i = 1, \dots 7)$ di F.

E difatti in seguito alle ricerche citate dello STURM esistono, nelle ipotesi fatte, soltanto tre coppie di punti $O_{2,j}'$ e $O_{1,j}''$ $(j=1, 2, 3)$ tali che si abbia

$$O_{2,j}'(P_1'\,P_2' + \dots P_7') \overline{\wedge}\, O_{1,j}''(P_1''\,P_2'' \dots P_7'')$$

e quindi la coppia dei fulcri non può che coincidere con una di queste.

Qui non possiamo fermarci a riprodurre il ragionamento dello STURM: osserviamo soltanto che la scelta della coppia dei fulcri fra le tre coppie $O_{2,j}'\,O_{1,j}''$ non può, in generale, effettuarsi se non si conoscono le proiezioni P_8' e P_8'' di un ottavo punto P_8 di F.

7. La nozione di *fulcro*, illustrata fin qui nel caso particolare di due proiezioni, può estendersi al caso in cui di una figura F si facciano le proiezioni da un numero qualunque di centri $O_1, O_2, \dots, O_n$ sopra un egual numero di quadri $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$.

Stavolta si avranno sopra ogni quadro $n - 1$ fulcri che saranno le intersezioni del quadro considerato con i raggi proiettanti dal centro corrispondente gli $n - 1$ centri rimanenti. Se si chiama $O_j^{(i)}$ l'intersezione di π_i con la retta $O_i\,O_j (i \neq j)$, per le coppie di fulcri del tipo $O_j^{(i)}\,O_i^{(j)}$ sussisteranno come è chiaro tutte le considerazioni precedenti.

Fra i casi in cui $n > 2$, quello più interessante — a cui lo Hauck ha dedicato le memorie citate più sopra — si presenta per $n = 3$. Esso conduce alla risoluzione più rapida del problema che consiste nel *determinare la proiezione di una figura da un centro dato sopra un piano assegnato quando siano note le proiezioni della stessa figura da due altri centri dati sopra due quadri assegnati.*

E infatti diciamo O_1, O_2, O_3 i tre centri, π_1, π_2, π_3 i quadri rispettivi e t_{ij} la retta secondo cui si tagliano π_i e π_j: poi supponiamo che del punto obbiettivo P siano note le proiezioni P' e P'' sopra π_1 e π_2 e si voglia quella, P''', fatta da O_3 sopra π_3.

Le rette $O_3' P'$ e $O_1''' P'''$ debbono tagliarsi sopra t_{13}, dunque il punto P''' deve intanto trovarsi sopra una retta che si può costruire. Ma le rette $O_3'' P''$ e $O_2''' P'''$ debbono tagliarsi sopra t_{23}, quindi il punto P''' deve trovarsi sopra un'altra retta nota. Segue che il punto P''' è pienamente individuato.

Qui si è ragionato sui piani $\pi_1 \pi_2 \pi_3$ considerandoli nelle loro posizioni effettive; ma nel disegno, supposto per es. di assumere come piano π_3 il foglio sul quale si eseguono le costruzioni, si immagina di tagliare il triedro $\pi_1 \pi_2 \pi_3$ lungo la costola t_{12} e poi di adagiare, al solito modo, i piani π_1 e π_2 sopra π_3.

Crediamo inutile qui entrare in dettagli d'indole pratica; piuttosto osserveremo come questa costruzione raccolga sotto di sè come casi particolari un buon numero di costruzioni fondamentali della geometria descrittiva.

Così si riportano ad essa quelle che insegnano nel metodo di Monge a mutare uno dei piani di proiezione, a dedurre dall'icnografia e dall'ortografia di una figura F la sua proiezione su un piano di profilo, oppure a dedurre dagli stessi dati la prospettiva di F da un punto assegnato sopra il piano orizzontale; etc., etc.

II

Intorno alla prima orientazione di una data prospettiva.

8. Quando di una figura F dello spazio è assegnata una sola prospettiva F', fatta sopra un piano π_1 da un centro (ignoto) O_1, la conoscenza di peculiari particolarità geometriche di F può guidare alla determinazione più o meno completa, della prima orientazione di F'.

Supponiamo per es. che *F sia un parallelepipedo rettangolo con la base orizzontale e che π_1 sia un piano verticale.*

Allora in F', le immagini delle quattro costole di F parallele a π_1 saranno quattro rette fra loro parallele (ortogonali all'orizzonte di F' da determinare) e le immagini delle altre due quaterne di costole parallele di F saranno date da due quaterne di rette in generale concorrenti. Se diciamo Q'_1 e Q'_2 i punti di concorso di quest'ultime quaterne è chiaro che la retta $Q'_1\,Q'_2$ coincide col cercato orizzonte di F' ed è chiaro che questa osservazione *non* cade in difetto se dei due punti Q'_1 e Q'_2 uno risulta improprio.

Ma non basta. Se Q'_1 e Q'_2 sono entrambi propri la circonferenza di diametro $Q'_1\,Q'_2$ costituisce un luogo geometrico per il ribaltamento su π_1 del centro di proiezione, mentre se Q'_1 è proprio e Q'_2 è improprio, Q'_1 è addirittura il punto principale e la perpendicolare all'orizzonte in Q'_1 è ancora un luogo geometrico per il ribaltamento del centro di proiezione.

9. Segue da ciò che nelle ipotesi fatte la prima orientazione di F' non è del tutto determinata; e che per trovarla occorre fare su F qualche altra ipotesi complementare.

Così se la base di F è quadrata e Q'_2 è improprio le immagini delle diagonali della base in discorso tagliano l'orizzonte nei due cosiddetti *punti di distanza* D_1 e D_2 e il segmento che uno qualunque di essi determina con Q'_1 (cioè col punto principale) dà la distanza. Che se invece la base di F è sempre un quadrato, ma Q'_2 è proprio, le immagini delle solite diagonali tagliano l'orizzonte negli estremi di un diametro di una seconda circonferenza contenente il ribaltamento del centro di proiezione: quindi tale ribaltamento, il punto principale e la distanza sono ancora perfettamente determinati.

Un altro caso più generale e praticamente interessante è quello in cui la base di F è un rettangolo con dimensioni aventi un rapporto conosciuto.

Allora la forma della base di F è senz'altro nota, quindi è noto l'angolo sotto cui si tagliano le sue due diagonali. E di qua segue ancora la possibilità di indicare un altro luogo geometrico per il ribaltamento del centro di proiezione: esso è la circonferenza capace dell'angolo in discorso costruita sul segmento intercettato sull'orizzonte dalle immagini delle dette diagonali.

Possiamo pertanto asserire che:

La prima orientazione dell'immagine verticale F' di F si può senz'altro determinare quando F sia un parallelepipedo rettangolo con base orizzontale di forma nota.

10. La determinazione della prima orientazione di F' diviene assai rapida quando, rimanendo sempre ferma l'ipotesi che F sia un parallelepipedo rettangolo con base orizzontale, si supponga che π_1 non sia verticale, nè parallelo ad alcuno spigolo di F.

Allora le immagini delle tre quaterne di costole parallele di F sono tre quaterne di rette concorrenti e i tre punti di concorso di quest'ultime determinano su π_1 un triangolo (acutangolo), di cui un lato (ben determinato) dà l'orizzonte di F', l'ortocentro dà il *punto principale*, e i due segmenti staccati su una qualunque delle altezze dall'ortocentro hanno per media proporzionale la *distanza*. Inoltre è facile determinare graficamente l'inclinazione del quadro sul piano orizzontale.

La teoria ben nota dell'assonometria ortogonale ci permette di sorvolare su spiegazioni minute delle cose ora asserite, quindi possiamo enunciare che:

La prima orientazione dell'immagine F' di F si può senz'altro determinare quando F sia un parallelepipedo rettangolo con base orizzontale e con le costole oblique tutte al piano di F'.

11. I risultati ora raggiunti per quanto teoricamente possano apparire troppo particolari sono invece nella pratica assai interessanti. Basta pensare alla frequenza con cui la forma parallelepipeda si presenta negli edifizi, nei monumenti, nei mobili, negli *interni* di stanze, saloni o gallerie etc., etc.

E del resto nulla vieta, nel prendere una prospettiva di una figura qualunque di prendere insieme anche quella di un oggetto a forma di un parallelepipedo rettangolo o addirittura di un cubo associato a bella posta con essa.

In questo consiste anzi il cosiddetto *metodo dell'oggetto di paragone* (*Vergleichsobject*).

12. Fin qui per determinare la prima orientazione di F' ci siamo valsi di proprietà geometriche di F (o di un oggetto associato ad F), ma, per quanto su questo riguardo non ci si possa estendere, non vogliamo tralasciare di far conoscere che a tale determinazione si può procedere per via più comoda adoperando con opportuni accorgimenti gli apparecchi fotografici che ricorrono nella pratica della fotogrammetria.

Su questo proposito rimandiamo il lettore alle pag. 111 e seg. del già citato libro dello SCHILLING: dove si troveranno anche interessanti considerazioni sul problema della ricostruzione di una figura quando ne sia nota una sola prospettiva e la relativa prima orientazione.

Data la grande indeterminatezza del problema generale così formulato, lo SCHILLING è costretto a limitarsi al caso in cui la figura obbiettiva sia un parallelepipedo rettangolo e di un vertice di questo parallelepipedo si conosca anche l'icnografia sopra il piano orizzontale uscente dal centro di proiezione: ma nonostante le eleganti applicazioni che egli ne trae, il problema così limitato non ha questa volta una grande importanza pratica.

III

Determinazione di una figura di cui si conoscano due prospettive orientate.

13. Passiamo ora a considerare il caso in cui di una figura F siano note due prospettive F' ed F'' e le relative orientazioni *interne*, e dimostriamo che in queste ipotesi F può, in generale, riguardarsi come nota a meno di una similitudine.

Infatti immaginiamo F nella sua posizione obbiettiva rispetto ai centri O_1 e O_2 e ai quadri relativi π_1 e π_2; diciamo, poi, H_1 e H_2 i punti principali di π_1 e π_2, O_2' e O_1'' i fulcri, t l'intersezione di π_1 e π_2, e P^* il punto di t ove si incontrano le due rette proiettanti da O_2' e O_1'' rispettivamente le immagini P' e P'', in F' ed F'', di uno stesso punto P di F.

Se F non è una figura troppo particolare (per es. un triangolo), dalla conoscenza di F' ed F'' si potrà dedurre un conveniente numero di coppie di punti, ciascuna delle quali dia le immagini, in F' ed F'', di uno stesso punto di F; quindi potremo riguardar come note non soltanto le orientazioni interne di F' ed F'', ma anche le posizioni dei due fulcri.

Allora nel triedro formato da t, $P^* O_2'$ e $P^* O_1''$ i due diedri aventi per spigoli le rette P^*O_2', P^*O_1'', al pari della faccia

$$O_2' P^* O_1'' = 180^0 - O_1 O_2' P - O_2 O_1'' P''$$

son da considerarsi come conosciuti, e quindi il triedro stesso può esser costruito.

Segue che tutta la figura costituita da O_1, O_2, π_1, π_2 ed F può determinarsi senza ambiguità appena sia nota la distanza effettiva di O_1 e O_2, o, ciò che fa lo stesso, di O_2' e O_1''; per modo che l'asserzione fatta sarà giustificata quando avremo messo in chiaro che il variare della lunghezza di $O'_2 O''_1$ può ritenersi come corrispondente al variare di F per una trasformazione simile.

Infatti sottoponiamo lo spazio a una trasformazione omotetica col centro in O_1 che porti F, π_2 ed O_2 in $\overline{F}$, $\overline{\pi}_2$ ed $\overline{O}_2$. La proiezione di $\overline{F}$ da O_1 sopra π_1 sarà ancora F'; ma la proiezione di $\overline{F}$ da $\overline{O}_2$ sopra $\overline{\pi}_2$ sarà la figura $\overline{F}''$ che risulta da F'' mediante l'omotetia considerata. Trasportando $\overline{\pi}_2$ parallelamente a sè stesso, la figura $\overline{F}''$ muta mantenendosi sempre simile ad F'', quindi è possibile trovare un piano π_2^*, parallelo a $\overline{\pi}_2$ (e π_2), tale che l'immagine di $\overline{F}$ da $\overline{O}_2$ sopra π_2^* sia una figura uguale ad F'' e la distanza di $\overline{O}_2$ da π_2^* sia uguale a quella di O_2 da π_2.

Ciò dimostra appunto che le ∞^1 figure F a cui si perviene con la costruzione indicata più sopra facendo variare la lunghezza del segmento $O'_2 O''_1$ sono le ∞^1 figure F che si ottengono da F mediante una trasformazione omotetica di centro O_1.

14. Una volta che una figura F è, a meno di una similitudine, individuata quando se ne conoscono due prospettive con le relative orientazioni interne, sorge, dopo aver fissata la distanza di due suoi punti o dei centri di proiezione, il problema di costruirne le proiezioni (ortogonali) sopra due piani perpendicolari.

Ma su questo problema non occorre fermarsi; basta osservare che esso rientra nella questione generale trattata dallo HAUCK e riprodotta qui al n. 7.

Del resto chi desideri vedere ampiamente sviluppate le costruzioni può consultare i già citati libri dello SCHILLING (pag. 137) e dello STEINER (pag. 43-45 e pag. 48).

IV

Il teorema fondamentale di Finsterwalder.

15. Una facile considerazione mostra subito, che, per quante prospettive si assegnino di una figura F dello spazio, non è possibile ricostruirne, tutt'al più, che la forma.

E infatti, se si fanno le proiezioni di F da un numero qualunque di centri sopra altrettanti quadri, e poi si sottopone tutto lo spazio a una trasformazione per similitudine (di rapporto $k \neq 1$), basta nello spazio trasformato spostare i quadri parallelamente a sè stessi in maniera opportuna, perchè la figura in cui si porta F abbia rispetto alle nuove posizioni di codesti quadri prospettive uguali a quelle di F.

Ma neanche la forma di F può esser ricostruita nei casi in cui si tratti di una figura troppo semplice.

E infatti è noto che un triedro può sempre tagliarsi secondo un triangolo uguale a un triangolo dato, e che un quadrangolo gobbo si può proiettare da certi ∞^1 centri (1) secondo un quadrispigolo capace d'esser tagliato da un piano conveniente in un quadrangolo uguale ad un quadrangolo dato; cosicchè nel caso che F sia un sistema di tre o quattro punti l'assegnarne un numero qualunque di prospettive non vale a imporre ad essa alcuna restrizione.

In virtù di questa osservazione e anche perchè un ragionamento di cui dovremo servirci più avanti riesca conclusivo, noi supporremo d'ora in avanti che F sia un vero e proprio *corpo solido*; con che del resto non facciamo che metterci precisamente dal punto di vista pratico.

16. Ciò posto, facciamo l'ipotesi che due figure F ed f abbiano n prospettive uguali, *con* $n \geq 2$; cioè supponiamo che, costruite le immagini di F da certi centri $O_1, O_2, \ldots, O_n$ sopra i quadri $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ sia possibile trovare altri n punti $o_1, o_2, \ldots, o_n$ che proiettino f mediante stelle di raggi, capaci di esser secate da piani opportuni secondo figure uguali alle immagini di F.

Dicendo omologhi due punti di F ed f quando hanno nelle date prospettive le stesse proiezioni è chiaro che tra F ed f viene fissata una corrispondenza collineare (2); e poichè per le ipotesi fatte esistono infiniti raggi delle stelle proiettanti considerate, che contengono più di un punto di F o f, è chiaro che in questa collineazione, non solo ad F corrisponde f, ma anche alle stelle $O_1, O_2, \ldots, O_n$ corrispondono ordinatamente le stelle $o_1, o_2, \ldots, o_n$. Di più ai raggi che escono da O_i e si appoggiano ai punti ciclici di π_i debbono corrispondere in o_i due raggi (che proiettano i punti ciclici del quadro relativo ad o_i e quindi) che si appoggiano al circolo immaginario all'infinito.

(1) Vedi su questo riguardo alcune utili osservazioni del WAELSCH nel libro dello STEINER a pag. 52.

(2) È bene osservare, per quanto si dice nel seguito, che se F è generica la collineazione in discorso è l'*unica* collineazione che permetta di passare da F a f.

Ora si osservi, come del resto risulterà chiaramente dal seguito, che date j rette dello spazio esistono ∞^{8-j} coniche appoggiate ad esse; per conseguenza, se $n \geq 5$, la collineazione in discorso, dovendo mutare il circolo immaginario all'infinito in una conica secante $2n$ (≥ 10) rette, che già si appoggiano ad esso, lo muterà in sè stesso.

Ma una collineazione che tenga fermo il circolo immaginario all'infinito è una similitudine, dunque:

La forma di una figura dello spazio è pienamente individuata quando se ne conoscono cinque (o più) prospettive.

17. Il ragionamento ora fatto dà luogo come è chiaro a conseguenze assai più ampie di quelle contenute nell'ultimo enunciato.

Infatti, mantenute le notazioni del n. precedente, si osservi che se n è minore di 5, il circolo immaginario all'infinito considerato come appartenente allo spazio di f ha per omologa nello spazio di F una conica appoggiata alle $2n$ rette proiettanti dai centri O_i i punti ciclici dei rispettivi quadri π_i; quindi, se questa conica non coincide col circolo in discorso, può variare in una ∞^{8-2n}. D'altra parte due figure f ed f_1 che si deducano da F mediante due collineazioni portanti una stessa conica nel circolo immaginario all'infinito sono manifestamente simili; dunque possiamo asserire che:

La forma di una figura dello spazio di cui siano assegnate n prospettive ($2 \leq n < 5$) varia in una ∞^{8-2n}; in particolare, se $n = 4$, essa non può essere scelta che in un numero finito di maniere distinte.

Nel paragrafo seguente sarà dimostrato che questo numero è uguale precisamente a 40.

18. Per trovare le 40 forme distinte che può assumere una figura F di cui siano assegnate quattro prospettive F', F'', F''' e F^{IV} (1) basta far ricorso al procedimento, indicato già dal Finsterwalder, che ora passiamo ad esporre.

Mantenute per i centri (incogniti) di proiezione, per i quadri e per i fulcri le solite notazioni, si incominci dal determinare i fulcri

(1) Qui si suppone, beninteso, che le F', F'', F''' ed F^{IV} siano immagini di una figura F *realmente esistente*. In caso contrario prima di porsi alla *ricostruzione* della forma di F bisognerebbe mettersi alla ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti cui debbono soddisfare le immagini date perchè la figura F possa esistere. Tale ricerca può compiersi agevolmente tenendo conto di talune considerazioni delle già citate memorie dello Hauck; ma esce totalmente dal campo della fotogrammetria.

O_2' e O_1'' dei piani π_1 e π_2. Poi, tagliato il fascio proiettante F' da O_2' con una retta qualunque r, si scelga, com'è notoriamente possibile, una retta r' di π_2 che tagli il fascio proiettante F'' da O_1'' in una punteggiata uguale alla punteggiata r.

Allora, se si trasportano nello spazio i piani π_1 e π_2 in modo che nelle loro nuove posizioni π_1^* e π_2^* le punteggiate r ed r' si sovrappongano, e poi si scelgono arbitrariamente sulla retta $O_2' O_1''$ due punti O_1^* e O_2^*, i raggi proiettanti i punti omologhi di F' ed F'' da O_1^* e O_2^* rispettivamente saranno a coppie incidenti e quindi determineranno una figura f avente appunto per immagini F' ed F''.

Ciò posto, si considerino i fulcri O_3' e O_3'', O_4' e O_4'', e si dicano O_3^* e O_4^* i punti ove si intersecano le coppie di rette $O_1^* O_3'$ e $O_2^* O_3''$, $O_1^* O_4'$ e $O_2^* O_4''$; O_3^* e O_4^* saranno i punti corrispondenti a O_3 e O_4 nella solita collineazione che fa passare da F a f, e le stelle che da essi proiettano f risulteranno collineari a quelle proiettanti F da O_3 e O_4.

Ora si considerino i raggi proiettanti da O_1^* i punti ciclici di π_1^*, da O_2^* i punti ciclici di π_2^*, e i raggi di O_3^* e O_4^* (che si possono costruire) corrispondenti a quelli proiettanti da O_3 e O_4 i punti ciclici di π_3 e π_4; poi, in conformità di un teorema che sarà dimostrato più innanzi, si costruiscano le 40 coniche appoggiate (in punti distinti) agli otto raggi così ottenuti.

Le 40 forme richieste saranno quelle delle figure che si ottengono da f per mezzo dei 40 gruppi di collineazioni (a sette parametri ciascuno) che portano ognuna di queste 40 coniche nel circolo immaginario all'infinito.

Infatti se una di queste collineazioni porta f in f_1 e O_i^* in $o_i (i = 1, 2, 3, 4)$, tra F ed f_1 intercederà una collineazione nella quale alle rette proiettanti da O_i i punti ciclici di π_i corrisponderanno rette uscenti da o_i e appoggiate al circolo immaginario all'infinito; quindi le stelle o_i potranno con piani opportuni secarsi secondo figure uguali alle F', F'', F''' ed F^{IV}.

V

Sulle coniche secanti un dato gruppo di rette.

19. Dimostriamo ora il teorema di cui ci siamo valsi nel paragrafo precedente; cioè facciamo vedere che:

Esistono 40 *coniche appoggiate in punti distinti a quattro coppie generiche di rette incidenti.*

Per questo giova tener conto dei risultati ottenuti dal LÜROTH nella sua memoria già citata, ove il problema delle coniche secanti un dato gruppo di rette viene risoluto nell'ipotesi che si tratti di un gruppo assolutamente generico.

Noi non staremo a ripetere tutte le argomentazioni del LÜROTH, fondate da una parte sul principio di corrispondenza di JONQUIÈRES-CHASLES, dall'altra sul teorema di BEZOUT e sulle sue varie interpretazioni geometriche; ci limiteremo soltanto a far vedere che alle conclusioni, cui il LÜROTH arriva per mezzo di quel principio, si può pervenire con eguale facilità adoperando il teorema che dà il grado della rigata costituita dalle rette appoggiate a tre curve sghembe.

Dopo ciò i teoremi del LÜROTH potranno riguardarsi come acquisiti anche per una esposizione che non voglia escir dai limiti ordinari della geometria descrittiva.

20. Il primo problema che il LÜROTH risolve per mezzo del principio di corrispondenza è il seguente:

Sono date tre cubiche gobbe C_1, C_2, C_3 bisecate tutte da una medesima retta a: si tratta di trovare quanti sono i piani per a che secano ulteriormente le tre cubiche in tre punti allineati.

Ora il numero di codesti piani può calcolarsi agevolmente partendo dal fatto che le rette appoggiate alle tre cubiche costituiscono una rigata del grado $2.3.3.3. = 54$ con una generatrice 8-pla nella retta a; quindi un piano generico ϱ per a taglia la rigata fuori di a in una curva γ del 46^{mo} ordine. Tale curva γ ha in ognuno dei punti di appoggio di a con una delle cubiche C_1, C_2 o C_3 un punto quintuplo, poichè da ognuno di essi escono, oltre a, cinque generatrici della rigata, dunque a e γ, fuori di codesti punti non presentano che altre 16 intersezioni. Di queste, 8 provengono dai punti di contatto di ϱ (che è piano tangente ottuplo) con la rigata, e le rimanenti 8 provengono da intersezioni di a con ulteriori generatrici.

Segue che il numero dei piani richiesti è appunto 8.

21. Il secondo ed ultimo problema, che il LÜROTH risolve per mezzo del principio di corrispondenza differisce dal precedente per il solo fatto che al posto delle cubiche C_1 e C_2 compaiono due coniche uscenti da uno stesso punto di a; e quindi può risolversi in una maniera analoga a quella ora indicata.

22. Ora ricordiamo che le coniche appoggiate a 8 rette generiche dello spazio sono 92 e che le coniche uscenti da un punto e

appoggiate a 6 rette generiche sono 18. Ciò può enunciarsi dicendo che:

Le ∞^1 *coniche appoggiate a 7 rette generiche* a, b, c, d, e, f, g *dello spazio costituiscono una superficie del* 92^{mo} *ordine avente in* $a, b, \ldots, g$ *7 rette 18-ple.*

Ma allora se consideriamo una ottava retta h appoggiata a g, le coniche appoggiate ad $a, b, \ldots g, h$ *in punti distinti* non saranno 92 ma bensì:

$$92 - 18 = 74.$$

23. Adesso consideriamo un punto P e poi sei rette c, d, e, f, g, h di cui le ultime due siano incidenti. Vogliamo calcolare il numero delle coniche per P, appoggiate a codeste rette in punti distinti.

Da un teorema già ricordato segue che le ∞^1 coniche per P appoggiate a c, d, e, f, g riempiono una superficie del 18^{mo} ordine; ed è facile persuadersi che essa ha in ognuna delle rette c, d, e, f, g una retta quadrupla.

Infatti, le coniche passanti per due punti e appoggiate a tre rette sghembe generiche costituiscono una superficie avente una retta doppia nella congiungente i due punti [1], e secata da ogni piano per codesta congiungente in una conica ulteriore; quindi questa superficie è del 4^0 ordine, e le coniche passanti per due punti e appoggiate a quattro rette generiche sono, come volevasi, quattro.

Ma allora le coniche per P appoggiate a c, d, e, f, g, h in punti distinti sono $18 - 4 = 14$.

24. Dai teoremi ora stabiliti segue che *se si hanno 7 rette nello spazio* b, c, d, e, f, g, h *di cui soltanto le ultime due siano incidenti, le* ∞^1 *coniche appoggiate ad esse in punti distinti riempiono una superficie del* 74^{mo} *ordine con rette 14-ple in* b, c, d, e, f, g.

Per conseguenza *se consideriamo otto rette* $a, b, \ldots, g, h$ *tali che soltanto le prime due* (a *e* b) *e le ultime due* (g *ed* h) *siano incidenti, il numero delle coniche appoggiate ad esse in punti distinti sarà dato da*

$$74 - 14 = 60.$$

25. Ora torniamo a considerare un punto P, due coppie di rette incidenti a, b, e g, h e poi altre due rette generiche e ed f.

[1] Si noti che fra le ∞^1 coniche in discorso ve ne sono appunto due spezzate nella congiungente i due punti e in una trasversale comune delle tre rette sghembe.

Le ∞^1 coniche per P appoggiate ad a, b, e, f, g in punti distinti costituiscono (n. 24) una superficie del 14^{mo} ordine avente in e, f, g, come subito si riconosce, tre rette triple: dunque le coniche passanti per P e appoggiate ad a, b, e, f, g, h in punti distinti sono $14 - 3 = 11$.

Ponendo a raffronto i due ultimi risultati conseguiti, si ha che le coniche appoggiate in punti distinti alle 7 rette a, b, c, e, f, g, h, nell'ipotesi che b ed h incidano rispettivamente a e g, costituiscono una superficie del 60^{mo} ordine con rette 11-ple in c, e ed f.

Ma allora *se delle otto rette* a, b, c, d, e, f, g, h *le rette* b, d *ed* h *incidono rispettivamente* a, c, g, *le coniche appoggiate ad esse in punti distinti sono*

$$60 - 11 = 49 .$$

26. Arrivati a questo punto è inutile ripetere una terza volta il procedimento dei n. 23 e 25 per raggiungere il risultato finale a cui si mira: quindi possiamo asserir senz'altro che *se delle solite otto rette* $a, b, \ldots, g, h$ *le rette* b, d, f, h *incidono rispettivamente le rette* a, c, e, g *le coniche appoggiate ad esse in punti distinti sono* 40.

Notisi che a tutti i numeri cercati in questo paragrafo può anche giungersi partendo da quelli del Lüroth e diminuendoli dei numeri indicanti soluzioni improprie; ma un tal procedimento lascerebbe luogo a dubbi circa la *molteplicità* delle soluzioni escluse.

Palermo, ottobre 1911