SUL TEOREMA DI ESISTENZA DELLE FUNZIONI ABELIANE

Come è ben noto, condizione necessaria e sufficiente perchè il quadro di numeri

$$\left|\begin{matrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1,2p} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2,2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{p1} & \omega_{p2} & \dots & \omega_{p,2p} \end{matrix}\right| \tag{1}$$

possa pensarsi come la tabella di un sistema di periodi indipendenti per una funzione abeliana a p variabili, cioè per una funzione meromorfa di p variabili $u_1, u_2, \dots, u_p$ $2p$ volte periodica è:

A) che esistano fra le ω_{jk} $\frac{1}{2}p(p-1)$ relazioni del tipo

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{rs}\, \omega_{jr}\, \omega_{ks} = 0 \qquad (j, k = 1, 2, \dots, p; j < k), \tag{2}$$

essendo le c_{rs} dei numeri interi legati dalla relazione

$$c_{rs} + c_{sr} = 0\,; \tag{3}$$

B) che indicati con $\Omega_j\,(j = 1, 2, \dots, 2p)$ i $2p$ periodi di una combinazione lineare omogenea qualunque

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p$$

delle variabili $u_1, u_2, \dots, u_p$, corrispondenti ai $2p$ sistemi di periodi costituenti la tabella (1), e posto

$$\Omega_j = \xi_j + i\eta_j \qquad (i = \sqrt{-1}) \tag{4}$$

con le ξ_j e η_j reali, si abbia sempre

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{rs}\,\xi_r\,\eta_s > 0 \tag{5}$$

o sempre [1]

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{rs}\,\xi_r\,\eta_s < 0\,. \tag{6}$$

Di queste due condizioni la B) non è molto maneggevole e non sempre è adatta alle applicazioni; e infatti i signori BAGNERA e DE FRANCHIS nelle loro belle ricerche sulle superficie iperellittiche [2] raggiunsero una grande facilitazione nei loro procedimenti allorchè nella seconda delle due Memorie citate a piè di pagina osservarono che la condizione B), per il caso $p=2$, poteva esser trasformata in un'altra rappresentata da una diseguaglianza contenente soltanto, e in fattori distinti, le c_{rs} e le ω_{jk}; o, più precisamente, le c_{rs} e le parti reali e i coefficienti dell'immaginario delle ω_{jk}.

Ebbene noi vogliamo dimostrare in questa Nota che il teorema dei signori BAGNERA e DE FRANCHIS può estendersi al caso di $p\,(\geq 2)$ qualunque; e la generalizzazione appare tanto più interessante, in quanto che solo per $p=2$ possono essere utilizzati, come appunto hanno fatto i signori BAGNERA e DE FRANCHIS, con ragionamento semplice ed elegante, taluni classici risultati del FROBENIUS.

La proposizione che noi vogliamo stabilire è la seguente.

Si ponga

$$\omega_{jk} = \alpha_{jk} + i\beta_{jk} \qquad (i=\sqrt{-1})$$

con le α_{jk} e β_{jk} reali e si considerino i due determinanti

$$\begin{vmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1,2p} \\ c_{21} & 0 & c_{23} & \cdots & c_{2,2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{2p,1} & c_{2p,2} & c_{2p,3} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \tag{7}$$

(1) Ordinariamente si parla soltanto della diseguaglianza (5), poichè, ove occorra, cambiando il segno a tutte le c_{rs} si può ottenere che la (6) si converta nella (5).

(2) G. BAGNERA e M. DE FRANCHIS: *a*) *Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti* [Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, serie III, tomo XV (1908), pp. 251-343]; *b*) *Le nombre ϱ de* M. PICARD *pour les surfaces hyperelliptiques et pour les surfaces irrégulières de genre zéro* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXX (2° semestre 1910), pp. 185-238].

e

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1,2p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2,2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \alpha_{p3} & \cdots & \alpha_{p,2p} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \cdots & \beta_{1,2p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \cdots & \beta_{2,2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{p1} & \beta_{p2} & \beta_{p3} & \cdots & \beta_{p,2p} \end{vmatrix}$$

dei quali il primo è, per quanto sappiamo, emisimmetrico.

Poi, indicata con

$$j_1\,,\; j_2\,,\; \dots,\; j_{2l} \qquad\qquad (1 \leq l \leq p)$$

una serie di indici distinti estratti dalla successione

$$1,\; 2,\; \dots,\; 2p$$

e ordinati per grandezza crescente, si chiami

$$P_{j_1 j_2 \cdots j_{2l}}$$

lo pfaffiano del determinante emisimmetrico formato dalle righe e dalle colonne del determinante (7) *aventi i n. d'ordine* $j_1\,, j_2\,, \dots, j_{2l}$; *e*

$$\delta_{j_1 j_2 \cdots j_{2l}}$$

il minore che si ottiene da (8) *considerando le righe e le colonne coi n. d'ordine rispettivi* $1\,, 2\,, \dots, l\,, p+1\,, p+2\,, \dots, p+l$; *e* $j_1\,, j_2\,, \dots$ $\dots, j_{2l}$.

Se si pone

$$\Delta_l = (-1)^{\frac{l(l-1)}{2}} \Sigma\, P_{j_1 j_2 \cdots j_{2l}}\, \delta_{j_1 j_2 \cdots j_{2l}} \qquad (l = 1\,, 2\,, \dots, p),$$

dove il sommatorio si intende esteso a tutte le possibili serie $j_1\,, j_2\,, \dots$ $\dots, j_{2l}$ *soddisfacenti alle restrizioni indicate più sopra, la condizione* B) *può esser sostituita dalle seguenti* $p-1$ *diseguaglianze*

$$\Delta_2 > 0\,,\;\; \Delta_1\,\Delta_3 > 0\,,\;\; \Delta_4 > 0\,,\;\; \Delta_1\,\Delta_5 > 0\,, \dots;$$

delle quali l'ultima è

$$\Delta_p > 0 \quad o \quad \Delta_1 \Delta_p > 0$$

secondo che p è pari o dispari [1].

1. Indicato con μ un qualsivoglia numero complesso, chiamiamo $\bar{\mu}$ il numero complesso coniugato; allora da

$$\Omega_j = \xi_j + i\eta_j$$

si trae

$$\bar{\Omega}_j = \xi_j - i\eta_j\,,$$

e quindi

$$\xi_j = \frac{1}{2}(\Omega_j + \bar{\Omega}_j)\,, \qquad \eta_j = \frac{1}{2i}(\Omega_j - \bar{\Omega}_j)\,.$$

Segue che

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{rs}\,\xi_r\,\eta_s = \frac{1}{4i}\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{rs}\,(\Omega_r + \bar{\Omega}_r)\,(\Omega_s - \bar{\Omega}_s)\,,$$

ossia che

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{rs}\,\xi_r\,\eta_s = -\frac{1}{2i}\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{rs}\,\Omega_r\,\bar{\Omega}_s\,,$$

una volta che, in base all'ipotesi (3) fatta sulle c_{rs}, si ha evidentemente

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{rs}\,\Omega_r\,\Omega_s = \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{rs}\,\bar{\Omega}_r\,\bar{\Omega}_s = 0$$

e

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{rs}\,\bar{\Omega}_r\,\Omega_s = -\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{rs}\,\Omega_r\,\bar{\Omega}_s.$$

(1) Di questo teorema sono in possesso fin dal gennaio u. s. ma la via che allora avevo scelta per dimostrarlo non solo rendeva necessarie delle ricerche un pò minute d'indole aritmetica, di cui una parte è stata raccolta nella mia Nota: *Osservazioni varie sulla teoria delle sostituzioni e sulle partizioni dei numeri interi in numeri interi* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXVI (2º semestre 1913), pp. 163-170], ma portava anche tanto in lungo la dimostrazione che ho preferito attendere a pubblicare il teorema quando fossi riuscito a darne una dimostrazione più semplice. E quella che pubblico ora mi sembra la più diretta e la più semplice possibile.

Osservisi, per il confronto di questo teorema con quello dei signori Bagnera e de Franchis, che essi indicano con δ ciò che secondo le nostre notazioni è da indicarsi con $-P_{1234}$.

D'altro canto

$$\Omega_r \overline{\Omega}_s = \sum_{j,k}^{1\ldots p} \omega_{jr} \overline{\omega}_{ks} \lambda_j \overline{\lambda}_k,$$

dunque

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{rs} \xi_r \eta_s = -\frac{1}{2i} \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} \sum_{j,k}^{1\ldots p} c_{rs} \omega_{jr} \overline{\omega}_{ks} \lambda_j \overline{\lambda}_k .$$

Poniamo

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{rs} \xi_r \eta_s = \sum_{j,k}^{1\ldots p} A_{jk} \lambda_j \overline{\lambda}_k ,$$

cioè

$$A_{jk} = -\frac{1}{2i} \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{rs} \omega_{jr} \overline{\omega}_{ks} ; \tag{9}$$

sarà

$$A_{kj} = -\frac{1}{2i} \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{rs} \omega_{kr} \overline{\omega}_{js} = +\frac{1}{2i} \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{rs} \overline{\omega}_{jr} \omega_{ks} = \overline{A}_{jk} ;$$

quindi *l'espressione*

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{rs} \xi_r \eta_s$$

non è altra cosa che una forma Hermitiana nelle variabili $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $\ldots, \lambda_p$ (e nelle loro coniugate $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_p$).

2. In base a questa osservazione, la condizione B) può esser sostituita dalle diseguaglianze atte ad esprimere che la forma Hermitiana

$$\sum_{j,k}^{1\ldots p} A_{jk} \lambda_j \overline{\lambda}_k \tag{10}$$

è definita (positiva o negativa).

Ora se si pone

$$\varepsilon_h = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1h} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2h} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{h1} & A_{h2} & \ldots & A_{hh} \end{vmatrix} \qquad (h = 1, 2, \ldots, p)$$

la forma Hermitiana (10) è definita positiva quando (e solo quando)

$$\varepsilon_1 > 0 , \quad \varepsilon_2 > 0 , \quad \varepsilon_3 > 0 , \quad \ldots , \quad \varepsilon_p > 0$$

ed è definita negativa quando (e solo quando) (1)

$$\varepsilon_1 < 0\,,\quad \varepsilon_2 > 0\,,\quad \varepsilon_3 < 0\,,\quad \ldots,\quad (-1)^p\,\varepsilon_p > 0\,,$$

dunque perchè essa sia definita (positiva o negativa) occorre e basta che sia (2)

$$\varepsilon_2 > 0\,,\quad \varepsilon_1\,\varepsilon_3 > 0\,,\quad \varepsilon_4 > 0\,,\quad \varepsilon_1\,\varepsilon_5 > 0\,, \ldots$$

Segue che la nostra proposizione sarà dimostrata appena si sia fatto vedere che

$$\varepsilon_h = \Delta_h \qquad\qquad (h = 1\,, 2\,, \ldots, p)\,.$$

3. Il ragionamento che sarà fatto nel n. successivo per dimostrare che $\varepsilon_h = \Delta_h$ è indipendente da qualsiasi ipotesi particolare su h; pure, per chiarirne l'essenza, è bene trattar prima a parte i casi di $h = 1$ ed $h = 2$.

Per $h = 1$ si ha:

$$\varepsilon_1 = A_{11} = -\frac{1}{2i}\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{rs}\,\omega_{1r}\,\overline{\omega}_{1s} = -\frac{1}{2i}\sum_{r,s}^{1\ldots 2p}{}' c_{rs}\,(\omega_{1r}\,\overline{\omega}_{1s} - \omega_{1s}\,\overline{\omega}_{1r})\,,$$

dove l'apice apposto al simbolo dell'ultimo sommatorio sta ad indicare che r ed s variano fra $1\,, 2\,, \ldots, 2p$ in modo che sia sempre soddisfatta la diseguaglianza $r < s$.

Ora

$$\omega_{1r}\,\overline{\omega}_{1s} - \omega_{1s}\,\overline{\omega}_{1r} = -2i\,(\alpha_{1r}\,\beta_{1s} - \alpha_{1s}\,\beta_{1r})\,,$$

dunque

$$\varepsilon_1 = \sum_{r,s}^{1\ldots 2p}{}' c_{rs}\,(\alpha_{1r}\,\beta_{1s} - \alpha_{1s}\,\beta_{1r})\,.$$

(1) Per quanto mi risulta questo teorema non è stato mai esplicitamente enunciato; comunque fra le tante dimostrazioni che potrebbero darsene mi permetto di richiamare l'attenzione del lettore su quella contenuta nella mia Nota: *Sopra una certa classe di determinanti e sulle forme Hermitiane,* che comparirà in uno dei prossimi fascicoli del Giornale di Matematiche di Battaglini.

(2) Non è inutile far avvertire che per il caso $p = 2$ la condizione

$$\varepsilon_2 > 0$$

comprende l'altra espressa da

$$\varepsilon_1 \neq 0\,.$$

Infatti

$$\varepsilon_2 = A_{11}\,A_{22} - A_{12}\,A_{21} = \varepsilon_1\,A_{22} - A_{12}\,\overline{A}_{12}$$

ed $A_{12}\,\overline{A}_{12}$ non può esser negativo.

Ma il secondo membro di questa eguaglianza quando si adoperino i simboli definiti nell'introduzione può scriversi

$$\Sigma\, P_{rs}\, \delta_{rs}\,,$$

quindi è chiaro che

$$\varepsilon_1 = \Delta_1\,.$$

Passiamo al caso $h = 2$.

Qui si ha, col solito significato del simbolo Σ',

$$\varepsilon_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} \sum\limits_{r,s}^{1\ldots 2p}{}' c_{rs}(\omega_{1r}\overline{\omega}_{1s} - \omega_{1s}\overline{\omega}_{1r}) & \sum\limits_{r,s}^{1\ldots 2p}{}' c_{rs}(\omega_{1r}\overline{\omega}_{2s} - \omega_{1s}\overline{\omega}_{2r}) \\ \sum\limits_{t,v}^{1\ldots 2p}{}' c_{tv}(\omega_{2t}\overline{\omega}_{1v} - \omega_{2v}\overline{\omega}_{1t}) & \sum\limits_{t,v}^{1\ldots 2p}{}' c_{tv}(\omega_{2t}\overline{\omega}_{2v} - \omega_{2v}\overline{\omega}_{2t}) \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4} \sum_{r,s}^{1\ldots 2p}{}' \sum_{t,v}^{1\ldots 2p}{}' c_{rs}\, c_{tv} \begin{vmatrix} \omega_{1r}\overline{\omega}_{1s} - \omega_{1s}\overline{\omega}_{1r} & \omega_{1r}\overline{\omega}_{2s} - \omega_{1s}\overline{\omega}_{2r} \\ \omega_{2t}\overline{\omega}_{1v} - \omega_{2v}\overline{\omega}_{1t} & \omega_{2t}\overline{\omega}_{2v} - \omega_{2v}\overline{\omega}_{2t} \end{vmatrix}.$$

D'altra parte, in virtù delle (2) si ha

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p}{}' \sum_{t,v}^{1\ldots 2p}{}' c_{rs}\, c_{tv}\, (\omega_{1r}\,\omega_{2s} - \omega_{1s}\,\omega_{2r})\,(\overline{\omega}_{1t}\,\overline{\omega}_{2v} - \overline{\omega}_{1v}\,\overline{\omega}_{2t}) = 0\,,$$

dunque, se indichiamo con Q_{rstv} il determinante del 2^0 ordine che appare nel penultimo sommatorio, possiamo anche scrivere:

$$\varepsilon_2 = -\frac{1}{4} \sum_{r,s}^{1\ldots 2p}{}' \sum_{t,v}^{1\ldots 2p}{}' c_{rs}\, c_{tv}\, [Q_{rstv} - (\omega_{1r}\,\omega_{2s} - \omega_{1s}\,\omega_{2r})\,(\overline{\omega}_{1t}\,\overline{\omega}_{2v} - \overline{\omega}_{1v}\,\overline{\omega}_{2t})]\,.$$

Il coefficiente *complessivo* di $c_{rs}\, c_{tv}$ (¹) nello sviluppo del 2^0 membro di questa uguaglianza è la somma dell'espressione chiusa qui sopra tra parentesi quadre e di quella che se ne ottiene scambiando r con t ed s con v, oppure è la metà di questa somma secondo che la coppia $r\,s$ è o no distinta dalla coppia $t\,v$; ma una tal somma è lo sviluppo del determinante

$$D_{rstv} = \begin{vmatrix} \omega_{1r} & \omega_{1s} & \omega_{1t} & \omega_{1v} \\ \overline{\omega}_{1r} & \overline{\omega}_{1s} & \overline{\omega}_{1t} & \overline{\omega}_{1v} \\ \omega_{2r} & \omega_{2s} & \omega_{2t} & \omega_{2v} \\ \overline{\omega}_{2r} & \overline{\omega}_{2s} & \overline{\omega}_{2t} & \overline{\omega}_{2v} \end{vmatrix}$$

(¹) Si ricordi che si deve supporre $r < s$ e $t < v$.

che è nullo se anche uno solo degli indici r, s è uguale a uno degli indici t e v, dunque quel coefficiente complessivo può considerarsi come dato in ogni caso da D_{rstv}, e per conseguenza

$$\varepsilon_2 = -\frac{1}{4} \Sigma'' c_{rs} c_{tv} D_{rstv}, \tag{11}$$

dove i due apici apposti al simbolo del sommatorio stanno a significare che esso si estende a tutte le quadruple $rstv$ di indici distinti scelti fra gli indici $1, 2, \ldots, 2p$, per le quali si ha $r < s$ e $t < v$, due di tali quadruple essendo da riguardarsi come identiche allorchè differiscono soltanto per l'ordine delle coppie rs e tv.

Siano j_1, j_2, j_3, j_4 quattro indici scelti fra $1, 2, \ldots, 2p$ pei quali si abbia

$$j_1 < j_2 < j_3 < j_4.$$

Allora nel sommatorio del secondo membro della (11) compaiono i termini

$$c_{j_1j_2} c_{j_3j_4} D_{j_1j_2j_3j_4} + c_{j_1j_3} c_{j_2j_4} D_{j_1j_3j_2j_4} + c_{j_1j_4} c_{j_2j_3} D_{j_1j_4j_2j_3}; \tag{12}$$

ma

$$D_{j_1j_3j_2j_4} = - D_{j_1j_2j_3j_4}, \quad D_{j_1j_4j_2j_3} = D_{j_1j_2j_3j_4},$$

e inoltre, per le posizioni fatte nell'introduzione

$$c_{j_1j_2} c_{j_3j_4} - c_{j_1j_3} c_{j_2j_4} + c_{j_1j_4} c_{j_2j_3} = P_{j_1j_2j_3j_4},$$

dunque la somma (12) può scriversi

$$P_{j_1j_2j_3j_4} D_{j_1j_2j_3j_4}.$$

Di qua, osservando che, per le solite posizioni,

$$D_{j_1j_2j_3j_4} = 4\delta_{j_1j_2j_3j_4},$$

si trae finalmente, come volevasi,

$$\varepsilon_2 = - \Sigma P_{j_1j_2j_3j_4} \delta_{j_1j_2j_3j_4} = \Delta_2.$$

4. Dimostriamo ora che

$$\varepsilon_h = \Delta_h \qquad (h = 3, 4, \ldots, p).$$

Ricordando il significato di ε_h e sostituendo alle A_{jk} i loro valori dati dalla (9) si trae

$$(13)\quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_h = (-1)^h \dfrac{1}{2^h\, i^h} \Sigma' \, c_{r_1 s_1} c_{r_2 s_2} \dots c_{r_h s_h} \times \\ \times \begin{vmatrix} \omega_{1r_1}\overline{\omega}_{1s_1} - \omega_{1s_1}\overline{\omega}_{1r_1} & \omega_{1r_1}\overline{\omega}_{2s_1} - \omega_{1s_1}\overline{\omega}_{2r_1} & \dots & \omega_{1r_1}\overline{\omega}_{hs_1} - \omega_{1s_1}\overline{\omega}_{hr_1} \\ \omega_{2r_2}\overline{\omega}_{1s_2} - \omega_{2s_2}\overline{\omega}_{1r_2} & \omega_{2r_2}\overline{\omega}_{2s_2} - \omega_{2s_2}\overline{\omega}_{2r_2} & \dots & \omega_{2r_2}\overline{\omega}_{hs_2} - \omega_{2s_2}\overline{\omega}_{hr_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{hr_h}\overline{\omega}_{1s_h} - \omega_{hs_h}\overline{\omega}_{1r_h} & \omega_{hr_h}\overline{\omega}_{2s_h} - \omega_{hs_h}\overline{\omega}_{2r_h} & \dots & \omega_{hr_h}\overline{\omega}_{hs_h} - \omega_{hs_h}\overline{\omega}_{hr_h} \end{vmatrix}, \end{array} \right.$$

dove Σ' sta per

$$\sum_{r_1 s_1}^{1\dots 2p}{}' \; \sum_{r_2 s_2}^{1\dots 2p}{}' \dots \sum_{r_h s_h}^{1\dots 2p}{}' .$$

Consideriamo il determinante che comparisce sotto il segno di sommatorio nel secondo membro della (13) e che per brevità chiameremo $Q_{r_1 s_1 \dots r_h s_h}$; e poniamolo a raffronto col determinante

$$D_{r_1 s_1 \dots r_h s_h} = \begin{vmatrix} \omega_{1r_1} & \omega_{1s_1} & \omega_{1r_2} & \omega_{1s_2} & \dots & \omega_{1r_h} & \omega_{1s_h} \\ \overline{\omega}_{1r_1} & \overline{\omega}_{1s_1} & \overline{\omega}_{1r_2} & \overline{\omega}_{1s_2} & \dots & \overline{\omega}_{1r_h} & \overline{\omega}_{1s_h} \\ \omega_{2r_1} & \omega_{2s_1} & \omega_{2r_2} & \omega_{2s_2} & \dots & \omega_{2r_h} & \omega_{2s_h} \\ \overline{\omega}_{2r_1} & \overline{\omega}_{2s_1} & \overline{\omega}_{2r_2} & \overline{\omega}_{2s_2} & \dots & \overline{\omega}_{2r_h} & \overline{\omega}_{2s_h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{hr_1} & \omega_{hs_1} & \omega_{hr_2} & \omega_{hs_2} & \dots & \omega_{hr_h} & \omega_{hs_h} \\ \overline{\omega}_{hr_1} & \overline{\omega}_{hs_1} & \overline{\omega}_{hr_2} & \overline{\omega}_{hs_2} & \dots & \overline{\omega}_{hr_h} & \overline{\omega}_{hs_h} \end{vmatrix}.$$

Si scomponga la matrice di $D_{r_1 s_1 \dots r_h s_h}$ in h matrici rettangolari formate dalle colonne 1ª e 2ª, 3ª e 4ª, . . . , $(2h-1)^{\text{ma}}$ e $2h^{\text{ma}}$; e si immagini di sviluppare $D_{r_1 s_1 \dots r_h s_h}$ per prodotti di minori (di 2º ordine) contenuti in queste matrici secondo la regola generale di LAPLACE.

Dico in primo luogo che ogni termine del determinante $Q_{r_1 s_1 \ldots r_h s_h}$ è un termine dello sviluppo di $D_{r_1 s_1 \ldots r_h s_h}$ così ottenuto.

Per comodità di scrittura poniamo

$$\omega_{k r_k} \overline{\omega}_{j s_k} - \omega_{k s_k} \overline{\omega}_{j r_k} = a_{kj} \,,$$

cioè indichiamo con a_{kj} l'elemento di $Q_{r_1 s_1 \ldots r_h s_h}$ che trovasi nella k^{ma} riga e nella j^{ma} colonna; allora un termine di $Q_{r_1 s_1 \ldots r_h s_h}$ sarà del tipo

$$(14) \qquad (-1)^j \, a_{1 j_1} \, a_{2 j_2} \ldots a_{h j_h} \,,$$

dove j è la classe della sostituzione

$$(15) \qquad \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \ldots & j_h \\ 1 & 2 & \ldots & h \end{pmatrix}.$$

Che il termine (14), astrazion fatta dal segno, comparisca nello sviluppo di $D_{r_1 s_1 \ldots r_h s_h}$ è evidente; quindi tutto si riduce a far vedere che esso vi appare con lo stesso segno.

Se nel prodotto (14), di cui ogni fattore è un binomio, si suppone di considerare il prodotto parziale formato coi primi termini dei binomi in discorso, si trova che questo è

$$(-1)^j \, T = (-1)^j \, \omega_{1 r_1} \overline{\omega}_{j_1 s_1} \, \omega_{2 r_2} \overline{\omega}_{j_2 s_2} \ldots \omega_{h r_h} \overline{\omega}_{j_h s_h} \,.$$

Ora il segno di cui è affetto T nello sviluppo ordinario di $D_{r_1 s_1 \ldots r_h s_h}$ è dato appunto, come subito si vede, da $(-1)^j$, dove j è la classe della sostituzione (15), dunque la nostra asserzione è pienamente giustificata.

In secondo luogo si osservi che il valore di $D_{r_1 s_1 \ldots r_h s_h}$ non muta se due qualunque delle coppie $r_1 \, s_1 \,, r_2 \, s_2 \,, \ldots, r_h \, s_h$ si scambiano fra loro; quindi lo sviluppo di $D_{r_1 s_1 \ldots r_h s_h}$, ottenuto nel modo indicato più sopra, può immaginarsi come decomposto in tante somme parziali di prodotti di minori del 2^0 ordine ognuna delle quali sia tale che tutti i suoi termini possano dedursi da uno qualunque di essi effettuando su questo una qualunque permutazione fra le coppie $r_1 \, s_1 \,, r_2 \, s_2 \,, \ldots, r_h \, s_h$.

Un insieme di queste somme parziali sarà costituito da $Q_{r_1 s_1 \ldots r_h s_h}$ e dai determinanti che risultano da $Q_{r_1 s_1 \ldots r_h s_h}$ scambiando fra loro le coppie $r_1 \, s_1 \,, \ldots, r_h \, s_h$; esso, si vede subito, contiene tutti e soli i termini del nostro sviluppo di $D_{r_1 s_1 \ldots r_h s_h}$ che si ottengono prendendo in ciascuna delle matrici più sopra indicate un minore che sia formato da una riga di posto dispari e da una riga di posto pari.

Se si immagina di prescindere nello sviluppo di $D_{r_1 s_1 \dots r_h s_h}$ da questo insieme di termini, quello dei termini rimanenti sarà sempre costituito da somme parziali del tipo considerato e in queste singole somme *ogni termine sarà un prodotto di h minori delle nostre matrici dei quali uno almeno sarà formato con due righe di posto pari o con due righe di posto dispari.*

Una di queste somme sarà per es. quella formata dal prodotto

$$(16)\quad -(\omega_{1r_1}\,\omega_{2s_1} - \omega_{1s_1}\,\omega_{2r_1})\,(\overline{\omega}_{1r_2}\,\overline{\omega}_{2s_2} - \overline{\omega}_{1s_2}\,\overline{\omega}_{2r_2})(\overline{\omega}_{3r_3}\,\overline{\omega}_{3s_3} - \omega_{3s_3}\,\overline{\omega}_{3r_3})\dots$$
$$\dots(\omega_{hr_h}\,\overline{\omega}_{hs_h} - \omega_{hs_h}\,\overline{\omega}_{hr_h})$$

e da tutti quelli che se ne ottengono scambiando fra loro in tutte le maniere possibili le coppie $r_1\, s_1, \dots, r_h\, s_h$.

Ebbene da ciascuna di queste somme estragghiamo un termine e diciamo

$$H_1,\quad H_2, \dots,\quad H_l, \dots$$

i termini estratti; per fissar le idee possiamo supporre che H_1 sia precisamente il prodotto (16).

In virtù delle (2) e di quelle che ne discendono

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{rs}\,\overline{\omega}_{jr}\,\overline{\omega}_{ks} = 0 \qquad (j, k = 1, 2, \dots p; j < k),$$

scritte sotto la forma

$$\sum_{r.s}^{1\dots 2p}{}' c_{rs}\,(\omega_{jr}\,\omega_{ks} - \omega_{js}\,\omega_{kr}) = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{r,s}^{1\dots 2p}{}' c_{rs}\,(\overline{\omega}_{jr}\,\overline{\omega}_{ks} - \overline{\omega}_{js}\,\overline{\omega}_{kr}) = 0\,,$$

è chiaro intanto che può porsi

$$(17)\qquad \varepsilon_h = (-1)^h \frac{1}{2^h\, i^h} \Sigma'\, c_{r_1 s_1}\, c_{r_2 s_2} \dots$$
$$\dots c_{r_h s_h}\,[Q_{r_1 s_1 \dots r_h s_h} + H_1 + H_2 + \dots + H_l + \dots],$$

poichè ad esempio

$$\Sigma'\, c_{r_1 s_1}\, c_{r_2 s_2} \dots c_{r_h s_h}\, H_1 =$$

$$= -\sum_{r_1 s_1}^{1\dots 2p}{}' c_{r_1 s_1}\,(\omega_{1r_1}\,\omega_{2s_1} - \omega_{1s_1}\,\omega_{2r_1}) \sum_{r_2 s_2}^{1\dots 2p}{}' c_{r_2 s_2}\,(\overline{\omega}_{1r_2}\,\overline{\omega}_{2s_2} - \overline{\omega}_{1s_2}\,\overline{\omega}_{2r_2}) \dots = 0;$$

dunque, *se le coppie* $r_1 s_1 \ldots r_h s_h$ *sono tutte distinte, il coefficiente complessivo di*

$$c_{r_1 s_1} c_{r_2 s_2} \ldots c_{r_h s_h}$$

nello sviluppo finale del sommatorio del secondo membro della (17) *è*

$$D_{r_1 s_1 \ldots r_h s_h};$$

se no, è una conveniente parte aliquota di $D_{r_1 s_1 \ldots r_h s_h}$. Ma poichè questo determinante è nullo appena due degli indici $r_1 s_1 \ldots r_h s_h$ sono uguali, può dirsi che quel coefficiente complessivo è in ogni caso $D_{r_1 s_1 \ldots r_h s_h}$ e possiamo scrivere

$$\varepsilon_h = (-1)^h \frac{1}{2^h i^h} \Sigma'' c_{r_1 s_1} c_{r_2 s_2} \ldots c_{r_h s_h} D_{r_1 s_1 \ldots r_h s_h}, \tag{18}$$

dove i due apici apposti al simbolo del sommatorio stanno a significare che esso deve intendersi esteso a tutte le $2h$-ple $r_1 s_1 r_2 s_2 \ldots r_h s_h$ di indici distinti scelti nella serie $1, 2, \ldots, 2p$, per le quali si ha $r_1 < s_1, r_2 < s_2, \ldots, r_h < s_h$, due di tali $2h$-ple essendo da riguardarsi come identiche allorchè differiscono soltanto per l'ordine delle coppie $r_1 s_1, r_2 s_2, \ldots, r_h s_h$.

Ora evidentemente

$$D_{r_1 s_1 \ldots r_h s_h} = (-1)^{\frac{h(h-1)}{2}} \begin{vmatrix} \omega_{1r_1} & \omega_{1s_1} & \ldots & \omega_{1r_h} & \omega_{1s_h} \\ \omega_{2r_1} & \omega_{2s_1} & \ldots & \omega_{2r_h} & \omega_{2s_h} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_{hr_1} & \omega_{hs_1} & \ldots & \omega_{hr_h} & \omega_{hs_h} \\ \bar{\omega}_{1r_1} & \bar{\omega}_{1s_1} & \ldots & \bar{\omega}_{1r_h} & \bar{\omega}_{1s_h} \\ \bar{\omega}_{2r_1} & \bar{\omega}_{2s_1} & \ldots & \bar{\omega}_{2r_h} & \bar{\omega}_{2s_h} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{\omega}_{hr_1} & \bar{\omega}_{hs_1} & \ldots & \bar{\omega}_{hr_h} & \bar{\omega}_{hs_h} \end{vmatrix} \tag{19}$$

e il determinante che appare nel 2^0 membro della (19) si riduce agevolmente [1] a

$$(-1)^h\, 2^h\, i^h\, \delta_{r_1 s_1 \ldots r_h s_h};$$

dunque

$$\varepsilon_h = (-1)^{\frac{h(h-1)}{2}} \Sigma''\, c_{r_1 s_1}\, c_{r_2 s_2} \ldots c_{r_h s_h}\, \delta_{r_1 s_1 \ldots r_h s_h}.$$

Siano $j_1, j_2, \ldots, j_{2h}$ $2h$ indici scelti fra $1, 2, \ldots, 2p$ pei quali si abbia

$$j_1 < j_2 < j_3 < \ldots < j_{2h}.$$

Indicata con $\varrho_1\,\sigma_1, \varrho_2\,\sigma_2, \ldots, \varrho_h\,\sigma_h$ una qualunque distribuzione in coppie di codesti $2h$ indici, il termine

$$c_{\varrho_1\sigma_1}\, c_{\varrho_2\sigma_2} \ldots c_{\varrho_h\sigma_h}$$

[1] Nel determinante in discorso si aggiunga alla 1^a riga la $(h+1)^{ma}$, alla 2^a riga la $(h+2)^{ma}, \ldots$ alla h^{ma} riga l'ultima. Si vede così che esso si riduce a

$$2^h \begin{vmatrix} \alpha_{1r_1} & \alpha_{1s_1} & \ldots & \alpha_{1r_h} & \alpha_{1s_h} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{hr_1} & \alpha_{hs_1} & \ldots & \alpha_{hr_h} & \alpha_{hs_h} \\ \overline{\omega}_{1r_1} & \overline{\omega}_{1s_1} & \ldots & \overline{\omega}_{1r_h} & \overline{\omega}_{1s_h} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{\omega}_{hr_1} & \overline{\omega}_{hs_1} & \ldots & \overline{\omega}_{hr_h} & \overline{\omega}_{hs_h} \end{vmatrix}.$$

In quest'ultimo determinante si sottragga dalla $(h+1)^{ma}$ riga la 1^a, dalla $(h+2)^{ma}$ riga la $2^a, \ldots$ dall'ultima riga la h^{ma}; esso si convertirà in:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1r_1} & \alpha_{1s_1} & \ldots & \alpha_{1r_h} & \alpha_{1s_h} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{hr_1} & \alpha_{hs_1} & \ldots & \alpha_{hr_h} & \alpha_{hs_h} \\ -i\,\beta_{1r_1} & -i\beta_{1s_1} & \ldots & -i\beta_{1r_h} & -i\beta_{1s_h} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -i\beta_{hr_1} & -i\beta_{hs_1} & \ldots & -i\beta_{hr_h} & -i\beta_{hs_h} \end{vmatrix} = (-1)^h\, i^h\, \delta_{r_1 s_1 \ldots r_h s_h};$$

quindi la nostra affermazione è pienamente giustificata.

apparisce nello *pfaffiano*

$$P_{j_1 j_2 \cdots j_{2h}}$$

affetto dallo stesso segno che si deve attribuire a

$$\delta_{j_1 j_2 \cdots j_{2h}}$$

perchè esso risulti uguale a

$$\delta_{\varrho_1 \sigma_1 \cdots \varrho_h \sigma_h},$$

poichè l'uno e l'altro sono dati dal segno di $(-1)^m$, se m è la classe della sostituzione

$$\begin{pmatrix} \varrho_1 & \sigma_1 & \cdots & \varrho_h & \sigma_h \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_{2h-1} & j_{2h} \end{pmatrix} \text{(1)};$$

dunque, finalmente,

$$\varepsilon_h = (-1)^{\frac{h(h-1)}{2}} \Sigma P_{j_1 j_2 \cdots j_{2h}} \delta_{j_1 j_2 \cdots j_{2h}} = \Delta_h .$$

Cagliari, 10 giugno 1913.

(1) Vedi la mia Nota: *Sui determinanti emisimmetrici d'ordine pari e suoi relativi pfaffiani* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXVI (2° semestre (1913), pp. 171-176].