L'intégration des fonctions sommables

(Suite) [1]).

Par

Stefan Kempisty (Wilno).

VI. L'intégrale (A) de M. Denjoy.

1. Dans la note citée au debut de ce mémoire M. Denjoy donne la définition suivante de l'integrale (A) [2]).

En se servant des maximums et des minimums d'épaisseur relatifs aux nombres positifs α et β, tels que $\alpha + \beta < 1$ (v. § 6 du chap. I de ce mémoire), il forme des sommes supérieures et inférieures analogues à celles de Riemann. Dans nos notations ce seront:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i' \, |I_i|, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i' \, |I_i|,$$

pour une division $I_1, I_2, \ldots I_i, \ldots I_n$ de l'intervalle (a, b).

La limite commune de ces sommes, indépendante de α et de β, pour les divisions dont les normes tendent vers zéro, est, d'après M. Denjoy, l'*intégrale* (A) de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b).

2. L'étude des intégrales extrêmes approximatives, nous a conduit, indépendamment de la définition de M. Denjoy, à la notion de l'intégrale approximative [3]).

Nous allons voir que les deux procédés d'intégration sont equivalents.

Supposons en effet que la fonction $f(x)$ soit intégrable approximativement dans (a, b). Nous avons donc, d'après le § 4 du chap. IV pour l'intégrale approximative de f, l'égalité suivante:

---

[1]) Voir t. VIII, p. 226, Errata: p. 228 à la fin du § 3 ajouter „pour deux valeurs A et B au moins"; p. 237, § 3 v. 27 „$\frac{1}{\lambda}$" au lieu de „$\frac{1}{2-\lambda}$".

[2]) Sur l'intégration riemanienne, Comptes Rendus, t. 169, 1919, p. 220.

[3]) Un procédé d'intégration des fonctions mesurables; Comptes Rendus, t. 180, 1925, p. 812.

$$(A)\int_a^b f(x)\,dx = (\lambda)\int_a^b f(x)\,dx = (\mu)\int_a^b f(x)\,dx\,,$$

quel que soit λ et μ entre 0 et 1.

Par suite l'intégrale approximative de $f(x)$ est égale à la limite commune des sommes:

$$\sum_{i=1}^{n} m(f, I_i, \lambda)\,|I_i|, \quad \sum_{i=1}^{n} M(f, I_i, \lambda)\,|I_i|,$$

la norme de la division tendant vers zéro.

Or, en vertu du § 6 du chap. 1, nous avons, pour $\lambda = 1 - \alpha$ et $\mu = 1 - \beta$,

$$m(f, I_i, \lambda) = M'_i, \quad M(f, I_i, \mu) = m'_i,$$

donc la fonction $f(x)$ est intégrable (A) et les deux intégrales de f sont égales entre elles.

Inversement quand la fonction f est intégrable au sens (A), son intégrale (A) est égale à la limite de la somme $\sum_{i=1}^{n} m(f, I_i, \lambda)\,|I_i|$, pour $\lambda = 1 - \alpha$, donc à l'intégrale à densité λ près, quelque soit λ, et par suite à l'intégrale approximative.

Ainsi *l'intégrabilité approximatixe est equivalente à l'intégrabilité au sens* (A) *et les deux intégrales sont égales entre elles.*

3. Comme, d'après le § 4 du chap. IV, toute fonction sommable est intégrable approximativement, nous avons en même temps établi que toute fonction sommable est intégrable au sens (A), ce qui avait été signalé par M. Denjoy dans sa note.

Le théorème inverse est supposé probable par M. Denjoy. Cette hypothèse n'est pas encore verifiée [1]), mais nous pouvons établir que la fonction, dont la valeur absolue est intégrable approximativement, doit être necessairement sommable.

VII. **Les propriétés de l'intégrale approximative.**

Les intégrales des fonctions d'intervalle g et G définies par les égalités:

---

[1]) Pendant la correction des epreuves M. Denjoy vient de publier dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (t. 193, p. 693) une note contenant la démonstration du théorème inverse.

$$g(f, I, \lambda) = m(f, I, \lambda)\,|I|,$$
$$G(f, I, \lambda) = m(f, I, \lambda)\,|I|,$$

jouissent des propriétés fondamentales de l'intégrale au sens de M. Burkill. En premier lieu elles sont additives en tant que fonctions d'intervalles. C'est à dire, en posant

$$s(f, K, \lambda) = \int\limits_K g(f, I, \lambda),$$

$$S(f, K, \lambda) = \int\limits_K G(f, I, \lambda)$$

et en divisant l'intervalle K en deux intervalles contingus K_1 et K_2, nous avons

$$s(f, K, \lambda) = s(f, K_1, \lambda) + s(f, K_2, \lambda),$$
$$S(f, K, \lambda) = S(f, K_1, \lambda) + S(f, K_2, \lambda).$$

De plus, quand l'intégrale $s(f, K, \lambda)$ resp. $S(f, K, \lambda)$ existe, il en est de même des intégrales $s(f, K_1, \lambda)$ et $s(f, K_2, \lambda)$ resp. des intégrales $S(f, K_1, \lambda)$ et $S(f, K_2, \lambda)$.

Lorsque la fonction est intégrable à densité λ près dans l'intervalle K, c'est à dire lorsque

$$s(f, K, \lambda) = S(f, K, \lambda) = (\lambda)\int\limits_K f(x)\,dx,$$

elle est intégrable à densité λ près dans K_1 et K_2 et nous avons

$$(\lambda)\int\limits_K f(x)\,dx = (\lambda)\int\limits_{K_1} f(x)\,dx + (\lambda)\int\limits_{K_2} f(x)\,dx$$

Si la fonction $f(x)$ est intégrable approximativement dans K, elle est intégrable à densité λ près quel que soit λ dans cet intervalle. Par suite, elle est approximativement intégrable dans K_1 et K_2 et nous avons

$$(A)\int\limits_K f(x)\,dx = (A)\int\limits_{K_1} f(x)\,dx + (A)\int\limits_{K_2} f(x)\,dx.$$

Alors *l'intégrale approximative de $f(x)$ dans l'intervalle K est une fonction additive d'intervalle.*

2. L'intégrale approximative est aussi additive par rapport à la fonction intégrée.

En effet il est facile de voir que:

$$m(f_1, I, \lambda) + m(f_2, I, \lambda) \leqslant m(f_1 + f_2, I, 2\lambda),$$
$$M(f_1 + f_2, I, 2\lambda) \leqslant M(f_1, I, \lambda) + M(f_2, I, \lambda),$$

donc

$$g(f_1, I, \lambda) + g(f_2, I, \lambda) \leqslant g(f_1 + f_2, I, 2\lambda),$$
$$G(f_1 + f_2, I, 2\lambda) \leqslant G(f_1, I, \lambda) + G(f_2, I, \lambda).$$

Par suite, en vertu du théorème 2.6 de M. Burkill [1]), nous avons

$$\underline{s}(f_1, K, \lambda) + \underline{s}(f_2, K, \lambda) \leqslant \underline{s}(f_1 + f_2, K, 2\lambda),$$
$$\overline{S}(f_1 + f_2, K, 2\lambda) \leqslant \overline{S}(f_1, K, \lambda) + \overline{S}(f_2, K, \lambda).$$

Quand f_1 et f_2 sont intégrables à densité λ près, leur somme est intégrable à densité λ près et, en posant $K = (a, b)$, on a

$$(\lambda)\int_a^b f_1(x)\,dx + (\lambda)\int_a^b f_2(x)\,dx = (2\lambda)\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dx.$$

Lorsque f_1 et f_2 sont intégrables à densité λ près quel que soit λ, il en est de même de leur somme. Donc, en faisant tendre λ vers zéro, nous avons

$$(A)\int_a^b f_1(x)\,dx + (A)\int_a^b f_2(x)\,dx = (A)\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dx.$$

Ainsi *la somme de deux fonctions intégrables approximativement dans un intervalle K, est intégrable approximativement et l'intégrale de cette somme est égale à la somme des intégrales des fonctions données.*

3. Il est facile de voir que l'intégrale approximative jouit encore des propriétés suivantes:

$$(A)\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)\,dx;$$

---

[1]) Functions of intervals, Proc. Lond. Math. Soc. (2) v. 22 p. 282.

$$(A)\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0, \text{ pour } f(x) \geqslant 0 \text{ et } a < b;$$

$$(A)\int_0^1 dx = 1.$$

Or nous allons établir dans le chapitre suivant que, si la fonction $f_n(x)$ tend en croissant vers la fonction $f(x)$, l'intégrale approximative de $f_n(x)$ tend vers celle de $f(x)$. Ainsi l'intégrale approximative vérifie toutes les six conditions qui déterminent l'intégrale lebesguienne d'une fonction mesurable bornée dans un intervalle [1]. Il s'en suit que, pour les fonctions mesurables bornées, l'intégrale approximative est équivalente à celle de M. Lebesgue, ce qui était d'ailleurs établi, par un autre voie, au § 4 et 6 du chap. III de ce mémoire.

Il est évident que les raissonnements de ce chapitre peuvent être étendus à l'intégrale approximative d'une fonction de plusieurs variables.

VIII. Les fonctions sommables.

1. Dans le § 4 du chap. IV nous avons établi que toute fonction sommable est intégrable approximativement. Nous allons maintenant voir que le théorème inverse est vrai pour les fonctions non négatives.

En effet soit $f(x)$ une fonction non négative et intégrable approximativement dans un intervalle (a, b).

Posons

$$f^N(x) = \min\{f(x), N\}$$

et considérons une division $I_1, I_2, \ldots I_i, \ldots I_n$ de (a, b).

Soit ensuite

$$E = E_x[f(x) > M(f, I_i, \lambda)].$$

D'après la définition de la borne supérieure à densité λ près (§ 1 du chap. 1),

$$|I_i E| \leqslant \lambda |I_i|.$$

Lorsqu'on a

$$M(f, I_i, \lambda) < N$$

[1]) H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration, Paris 1904, p. 98—9.

l'ensemble E est égal à l'ensemble

$$E_x[f^N(x) > M(f, I_i, \lambda)]$$

et, en appliquant la formule de la moyenne à l'intégrale lebesguienne, nous avons

$$\int_{I_i E} f^N(x)\,dx \leqslant N\lambda\,|I_i|.$$

Il en résulte que

$$\int_a^b f^N(x)\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{n} M(f, I_i, \lambda)\,|I_i| + N\lambda(b-a) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} G(f, I_i\lambda) + N\lambda(b-a),$$

quels que soient λ et N.

La fonction f étant par hypothèse intégrable approximativement dans (a, b), nous obtenons, en faisant décroître la norme de la division vers zéro, l'inégalité suivante

$$\int_a^b f^N(x)\,dx \leqslant (A)\int_a^b f(x)\,dx + N\lambda(b-a),$$

quel que soit λ entre 0 et 1. Par suite

$$\int_a^b f^N(x)\,dx \leqslant (A)\int_a^b f(x)\,dx < +\infty,$$

quel que soit N, c'est à dire la fonction f est sommable dans (a, b).

Ainsi *toute fonction non négative, intégrable approximativement est sommable.*

2. *Si la valeur absolue d'une fonction est intégrable approximativement, la fonction est sommable*, puisque sa valeur absolue est sommable d'après ce que nous venons d'établir.

Pour vérifier l'hypothèse de M. Denjoy, d'aprés laquelle toute fonction intégrable approximativement est sommable, il suffit donc de montrer qu'une fonction mesurable ne peut être intégrable approximativement sans que sa valeur absolue soit intégrable approximativement.

Comme, en vertu du § 9 du chap. I,

$$m(f, I, \lambda) = m(f_0, I, \lambda) + m(f^0, I, \lambda),$$

nous avons, en multipliant par $|I|$, l'egalité

$$g(f, I, \lambda) = g(f_0, I, \lambda) + g(f^0, I, \lambda)$$

et par suite

$$\sum_{i=1}^{n} g(f, I_i, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} g(f_0, I, \lambda) + \sum_{i=1}^{n} g(f^0, I, \lambda),$$

Alors, si f et f_0 sont intégrables approximativement, il en est de même de la fonction f^0. Or les fonctions f_0 et $-f^0$ sont non négatives, ils sont donc sommables. Comme la valeur absolue de f est égale à la somme des fonctions f_0 et $-f^0$, elle est aussi sommable.

3. De la sommabilité d'une fonction non négative et intégrable approximativement nous pouvons déduire le théorème signalé dans le § 3 du chapitre précedent sur l'intégrabilité d'une suite monotonne. Nous allons énoncer ce théorème de la manière suivante.

Soit $f(x)$ la limite d'une suite non décroissante de fonctions $f_n(x)$:

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x) \leqslant \ldots \rightarrow f(x).$$

Si $f(x)$ et les fonctions $f_n(x)$ sont intégrables approximativement, nous avons

$$(A)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to\infty} (A)\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

En effet, comme la différence $f - f_n$ est intégrable approximativement (§ 2 du chap. précedent) et non négative, elle doit être sommable et par suite

$$(A)\int_a^b (f - f_n)\,dx = \int_a^b (f - f_n)\,dx,$$

la dernière intégrale étant celle de M. Lebesgue.

Or la suite non croisante

$$f - f_1 \geqslant f - f_2 \geqslant \ldots \geqslant f - f_n \geqslant$$

tend vers zéro.

En appliquant à cette suite le théorème de M. Lebesgue sur l'intégration des suites monotonnes, nous avons

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f - f_n)\,dx = 0.$$

Alors, l'intégrale approximative étant additive par rapport à la fonction intégrée, nous pouvons écrire

$$(A)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}(A)\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Les mêmes proprietés subsistent pour les fonctions de plusieures variables.

IX. Les dérivées de l'intégrale approximative.

1. Considérons un intervalle I qui tend régulièrement vers un point x suivant un paramètre de régularité α, ce que nous avons désigné par

$$I \underset{\alpha}{\to} x.$$

La limite inférieure (supérieure) du quotient

$$\frac{F(I)}{|I|}$$

sera appelée *dérivée inférieure* (*supérieure*) *de paramètre* α de la fonction d'intervalle $F(I)$ au poit x. Nous écrirons

$$\underline{D_x^\alpha} F = \liminf_{\substack{I\to x\\ \alpha}} \frac{F(I)}{|I|},$$

$$\overline{D_x^\alpha} F = \limsup_{\substack{I\to x\\ \alpha}} \frac{F(I)}{|I|}.$$

Quand le paramètre α décroît, la dérivée inférieure ne croît pas et la dérivée supérieure ne décroît pas.

Soient:

$$\underline{D_x} F = \lim_{\alpha\to 0} \underline{D_x^\alpha} F,$$

$$\overline{D_x} F = \lim_{\alpha\to 0} \overline{D_x^\alpha} F$$

les *dérivées extrêmes régulières* de F au point x [1]). On a donc

$$\underline{D_x}F \leqslant \underline{D_x^\alpha}F \leqslant \overline{D_x^\alpha}F \leqslant \overline{D_x}F.$$

Lorsqu'il existe une seule dérivée régulière $D_x F$, il n'existe qu'une seule dérivée à paramètre α et de plus nous avons

$$D_x F = D_x^\alpha F.$$

2. M. Saks définit, dans son mémoire. „Sur les fonctions d'intervalle“ [2]), les dérivées extrêmes qui s'obtiennent du quotient considéré quand l'intervalle I tend vers un de ses points intérieurs, c'est à dire il définit les dérivées extrêmes à paramètre $\frac{1}{2}$.

Il résulte des théorèmes 6 et 7 de M. Saks que, pour la fonction d'intervalle $F(I)$, intégrable au sens de M. Burkill, nous avons presque partout

$$\underline{D_x^{1/2}}F \leqslant \underline{D_x^{1/2}} \int_K F(I) \leqslant \overline{D_x^{1/2}} \int_K F(I) \leqslant \overline{D_x^{1/2}}F.$$

Or, en se servant de la généralisation dûe a M. Lebesgue du lemme de M. Vitali sur les intervalles, on peut facilement étendre les raisonnement de M. Saks aux dérivées de paramètre quelconque.

Alors, *pour une fonction d'intervalle intégrable au sens de M. Burkill, on a presque partout*

$$\underline{D_x^\alpha}F \leqslant \underline{D_x^\alpha} \int_K F(I) \leqslant \overline{D_x^\alpha} \int_K F(I) \leqslant \overline{D_x^\alpha}F.$$

Donc, en faisant décroitre α vers zéro, nous obtenons l'inégalité

$$\underline{D_x}F \leqslant \underline{D_x} \int_K F(I) \leqslant \overline{D_x} \int_K F(I) \leqslant \overline{D_x}F.$$

En particulier, quand il existe une seule dérivée régulière de F, on a presque partout

$$D_x F = D_x \int_K F(I).$$

---

[1]) J. C. Burkill, loc. cit. p. 294.

[2]) Fundamenta Mathematicae t. X, p. 212—224.

3. En appliquant ces théorèmes à la fonction $g(f, I, \lambda)$ et son intégrale $s(f, K, \lambda)$, nous pouvons écrire

$$\underline{D}_x^\alpha g \leqslant \underline{D}_x^\alpha s \leqslant \overline{D}_x^\alpha s \leqslant \overline{D}_x^\alpha g.$$

Or, d'après la définition de g, nous avons

$$\frac{g(f, I, \lambda)}{|I|} = m(f, I, \lambda)$$

et d'autre part nous avons établi, dans le § 4 du chapitre II, qu'on a en chaque point de continuité approximative de $f(x)$, donc presque partout pour toute fonction mesurable $f(x)$, l'égalité

$$f(x) = \lim_{\substack{I \to x \\ \alpha}} m(f, I, \lambda),$$

quelque soit α et λ entre 0 et 1.

Par conséquent nous avons presque partout

$$f(x) = D_x^\alpha g.$$

Il résulte donc de notre dernière inégalité que l'intégrale $s(f, K, \lambda)$ est dérivable de paramètre α presque partout et qu'on a p. p.

$$D_x^\alpha s = D_x^\alpha g = f(x).$$

Le même raisomnement s'applique à la fonction $G(f, I, \lambda)$ et à son intégrale $S(f, K, \lambda)$; par suite nous avons

$$D_x^\alpha S = D_x^\alpha G = f(x)$$

Comme cela a lieu quel que soit α, on a presque partout

$$D_x s = D_x S = D_x g = D_x G = f(x).$$

Lorsque la fonction $f(x)$ de variable réelle est intégrable à densité λ près, c'est à dire lorsque

$$s(f, K, \lambda) = S(f, K, \lambda) = (\lambda)\int_K f(x)\,dx,$$

nous avons presque partout l'égalité

$$D_x\left\{(\lambda)\int_K f(x)\,dx\right\} = f(x),$$

quel que soit λ. Donc, pour une fonction intégrable approximativement, l'égalité

$$D_x\left\{(A)\int_K f(x)\,dx\right\} = f(x).$$

a lieu presque partout

En autres mots *l'intégrale approximative est une fonction d'intervalle presque partout dérivable régulièrement et sa dérivée régulière est égale p. p. à la fonction intégrée.*

On étend facilement les théorèmes établis dans ce chapitre aux fonctions de plusieures variables.