IX.

SUR LES FONCTIONS QUI DÉPENDENT D'AUTRES FONCTIONS

«Comptes Rendus Ac. des Sciences», vol, CXLII, 1906, pp. 691–695.

Dans une série de travaux que j'ai publiés il y a déjà quelque temps, j'ai envisagé les quantités qui dependent de toutes les valeurs d'une fonction ou de plusieurs fonctions dans certains domaines.

L'exemple le plus simple qu'on peut donner est celui d'une intégrale définie d'une fonction, car elle dépend des valeurs de la fonction qu'on intègre entre les limites de l'intégrale. Mais un grand nombre d'exemples sont donnés par les questions de Physique mathématique. C'est ainsi que la température dans un point d'un corps dépend de toutes les valeurs de la température au contour du domaine occupé par le corps. Le potentiel d'un fluide homogène et incompressible dans un point déterminé dépend de la forme de la masse fluide et, par suite, si l'équation de la surface du fluide a le second membre nul, le potentiel dépend des valeurs de la fonction qui paraît au premier membre. Il est évident que les fonctions dont nous parlons n'ont rien à faire avec les ordinaires fonctions de fonctions.

J'ai donné des applications de ce concept dans quelques questions d'analyse. J'ai tâché en effet de l'employer dans l'étude des fonctions analytiques de plusieurs variables. Toute opération algébrique ou de dérivation appliquée à ces fonctions conduit à de nouvelles fonctions analytiques, mais les opérations d'intégration nous amènent à des fonctions qui dépendent des contours des domaines d'intégration et par conséquent à des quantités qui dépendent d'autres fonctions.

Lorsqu'on veut étendre les méthodes de HAMILTON et de JACOBI sur les questions de la Mécanique aux systèmes continus et aux problèmes de la Physique mathématique, on est aussi amené d'une manière toute naturelle à ces concepts.

Les problèmes qui présentent le plus d'intérêt sont ceux où les fonctions dont dépendent les quantités qu'on envisage sont inconnues, et il faut les déterminer par des propriétés de ces quantités. Les problèmes du calcul des variations nous en offrent les premiers exemples et aussi les plus simples. Mais il y aussi d'autres questions qui s'y rapportent. Ce sont les problèmes de l'inversion, et en particulier ceux des intégrales définies où les fonctions inconnues paraissent sous les intégrales.

C'est en poursuivant ce but, et en vue du problème général dont j'ai parlé que j'ai étudié il y a quelques années ce problème dans le cas le plus simple possible, celui où le déterminant fondamental est égal à sa diagonale (1). M. FREDHOLM, dans un remarquable travail, a étudié le problème dans le cas où le déterminant est quelconque en arrivant à des résultats du plus grand intérêt et M. HILBERT vient de reprendre la question en y faisant des applications très étendues.

Le concept que nous avons exposé des fonctions qui dépendent d'une autre fonction ou de plusieurs fonctions se rattache directement à la définition de fonctions donnée par Dirichlet. La critique de cette définition a donné lieu à bien des discussions parmi lesquelles celles toutes récentes de M. PIERRE BOUTROUX sont très intéressantes. Il est évident que le concept

(1) *Sulla inversione degli integrali definiti.* «Atti R. Acc. di Torino», 1896, Nota I [in queste «Opere»: vol. secondo, XVIII, pp. 216–225] § 3 et Notes suivantes.

est attaché à celui de loi physique, mais je n'entrerai pas dans cette question, je remarquerai seulement qu'en posant successivement certaines conditions et certaines limitations on peut passer du concept de fonction tel que l'a posé DIRICHLET à celui de fonction analytique. Il est inutile de rappeler ces conditions qui sont bien connues et qui se rapportent à la continuité, à l'existence des dérivées, etc.

On peut proceder de la même manière dans le cas des fonctions qui dépendent de toutes les valeurs d'une fonction ou de plusieurs fonctions.

Envisageons le cas le plus simple, celui d'une quantité F qui dépend des valeurs d'une fonction continue $f(x)$ définie pour les valeurs de x comprises entre a et b. Il n'y a pas de difficulté à étendre le concept de continuité à la variable F. Supposons maintenant qu'on parte d'une fonction initiale $f(x)$ et qu'on la change en la remplaçant par $f(x) + \varepsilon\varphi(x)$ où ε est une quantité infiniment petite. On peut tâcher de calculer la variation de F.

Sous certaines conditions la partie du premier ordre, par rapport à ε, de cette variation, peut s'exprimer par une intégrale définie

$$\varepsilon \int_a^b \varphi(\xi_1)\, F'(\xi_1)\, d\xi_1 .$$

La fonction $F'(\xi_1)$ joue le rôle de première dérivée. Elle est indépendante de $\varphi(\xi)$, mais elle dépend, en général, de toutes les valeurs de $f(x)$ c'est pourquoi on peut tâcher de trouver la variation de $F'(\xi_1)$ lorsqu'on remplace $f(x)$ par $f(x) + \varepsilon\varphi(x)$. Si l'on néglige les parties qui sont infiniment petites d'un ordre supérieur à ε, sous certaines conditions on trouve que cette variation est donnée par

$$\varepsilon \int_a^b \varphi(\xi_2)\, F''(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 .$$

$F''(\xi_1, \xi_2)$ joue le rôle de première dérivée de $F'(\xi_1)$ et de seconde dérivée de F. Elle est indépendante de $\varphi(x)$, mais dépend de toutes les valeurs de $f(x)$. Elle est une fonction symétrique de ξ_1 et ξ_2. On peut aussi calculer la troisième dérivée qui s'exprime par une fonction $F'''(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ symétrique et ainsi de suite.

Cela posé on peut se proposer de développer la valeur de F qui correspond à $f(x) + \varepsilon\varphi(x)$ dans une série de puissances de ε. Sous certaines conditions qui sont semblables à celles qu'on a pour la série ordinaire de Taylor on trouve

$$F = F_0 + \varepsilon \int_a^b \varphi(\xi_1)\, F'(\xi_1)\, d\xi_1 + \frac{1}{2}\, \varepsilon^2 \int_a^b\!\!\int_a^b F''(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2$$

$$+ \frac{1}{3!}\, \varepsilon^2 \int_a^b\!\!\int_a^b\!\!\int_a^b F'''(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\, \varphi(\xi_1)\, \varphi(\xi_2)\, \varphi(\xi_3)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\, \varepsilon^n \int_a^b \cdots \int_a^b F^{(n)}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)\, \varphi(\xi_1)\, \varphi(\xi_2) \cdots \varphi(\xi_n)\, d\xi_1 \cdots d\xi_n + \cdots,$$

où $F^{(n)}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ est une fonction symétrique des n variables $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, indépendante de $\varphi(x)$. Après cela, en faisant $\varepsilon = 1$, on peut éliminer cette quantité.

Il faut remarquer que les fonctions qui dépendent d'une autre fonction et qui ont cette représentation analytique sont tout à fait spéciales et qu'on peut en envisager de plus générales ayant aussi des représentations analytiques. Les différents termes du second membre constituent des fonctions de différents degrés et l'on peut envisager F comme une quantité qui dépend de φ par une relation analytique du même type, par exemple des fonctions transcendantes.

Pour montrer le parti qu'on peut tirer dans certains cas du développement, je vais en faire une application à l'un des problèmes dont j'ai parlé.

Supposons qu'on écrive l'équation suivante

$$\vartheta\psi(x) = \varepsilon\varphi(x)\,\alpha + \varepsilon\int_a^b \varphi(\xi_1)\,F'(\xi_1, x)\,d\xi_1$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon^2\int_a^b\int_a^b F''(\xi_1, \xi_2, x)\,\varphi(\xi_1)\,\varphi(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2 + \cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\varepsilon^n\int_a^b\cdots\int_a^b F^{(n)}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, x)\,\varphi(\xi_1)\cdots\varphi(\xi_n)\,d\xi_1, \cdots, d\xi_n + \cdots,$$

α étant une quantité donnée et $\psi(x)$ étant connue pour les valeurs de x comprises entre a et b, tandis que $\varphi(x)$ est une fonction inconnue.

Le cas le plus simple est celui où $F'', F''', \cdots, F^{(n)}, \cdots$ sont nulles, c'est-à-dire où l'on a

$$\vartheta\psi(x) = \varepsilon\varphi(x)\,\alpha + \varepsilon\int_a^b \varphi(\xi_1)\,F'(\xi_1, x)\,d\xi_1.$$

C'est le cas de l'inversion qui a été envisagé par M. FREDHOLM et par moi-même lorsque la limite supérieure de l'intégrale est égale à x. Dans un cours que je viens de faire à l'Université de Stockholm j'ai montré que l'on peut résoudre le problème général de déterminer $\varphi(x)$. Ce problème correspond à la détermination de la racine d'une équation transcendante et se résout par une simple remarque. Il suffit de développer $\varepsilon\varphi(x)$ suivant les puissances de ϑ en supposant qu'à $\vartheta = 0$ corresponde $\varepsilon = 0$.

C'est pourquoi calculons

$$\left\{\frac{d[\varepsilon\varphi(x)]}{d\vartheta}\right\}_{\vartheta=0} = \left\{\frac{d(\varepsilon\varphi)}{d\vartheta}\right\}_0 \quad , \quad \left\{\frac{d^2[\varepsilon\varphi(x)]}{d\vartheta^2}\right\}_{\vartheta=0} = \left\{\frac{d^2(\varepsilon\varphi)}{d\vartheta^2}\right\}_0, \cdots$$

On trouve alors

$$(1) \qquad \psi(x) = \left\{\frac{d[\varepsilon\varphi(x)]}{d\vartheta}\right\}_0 \alpha + \int_a^b \left\{\frac{d[\varepsilon\varphi(\xi_1)]}{d\vartheta}\right\}_0 F'(\xi_1, x)\,d\xi_1.$$

Si nous pouvons invertir cette formule, ce qui arrivera par exemple si le déterminant n'est pas nul, on trouvera

$$(2) \qquad \left\{ \frac{d\,[\varepsilon\varphi\,(x)]}{d\vartheta} \right\}_0 = \beta\psi\,(x) + \int_a^b \psi\,(\eta_1)\,\Phi'\,(\eta_1\,,x)\,dy_1\,.$$

En dérivant une fois encore on a

$$0 = \left\{ \frac{d^2\,\varepsilon\varphi\,(x)}{d\vartheta^2} \right\}_0 \alpha + \int_a^b \frac{d^2\,[\varepsilon\varphi\,(\xi_1)]}{d\vartheta_2}\,\mathrm{F}'\,(\xi_1\,,x)\,d\xi_1$$

$$+ \int_a^b \int_a^b \mathrm{F}''\,(\xi_1\,,\xi_2\,,x) \left\{ \frac{d\,[\varepsilon\varphi\,(\xi_1)]}{d\vartheta} \right\}_0 \left\{ \frac{d\,[\varepsilon\varphi\,(\xi_2)]}{d\vartheta} \right\}_0 d\xi_1\,d\xi_2\,,$$

d'où l'on tire aisément, par la formule (2),

$$\left\{ \frac{d^2\,[\varepsilon\varphi\,(x)]}{d\vartheta^2} \right\}_0 = \int_a^b \int_a^b \Phi''\,(\eta_1\,,\eta_2\,,x)\,\psi\,(\eta_1)\,\psi\,(\eta_2)\,d\eta_1\,d\eta_2\,.$$

De même, on peut calculer $\left\{ \frac{d^3\,[\varepsilon\varphi\,(x)]}{d\vartheta^3} \right\}$ et ainsi de suite, de sorte qu'on aura

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon\varphi\,(x) &= \vartheta\psi\,(x)\,\beta + \vartheta \int_a^b \psi\,(\eta_1)\,\Phi'\,(\eta_1\,,x)\,d\eta_1 \\ &+ \frac{1}{2}\,\vartheta^2 \int_a^b \int_a^b \Phi''\,(\eta_1\,,\eta_2\,,x)\,\psi\,(\eta_1)\,\psi\,(\eta_2)\,d\eta_1\,d\eta_2 + \cdots \\ &+ \frac{1}{n!}\,\vartheta^n \int_a^b \cdots \int_a^b \Phi^{(n)}\,(\eta_1\,,\eta_2\,,\cdots,\eta_n\,,x)\,\psi\,(\eta_1)\cdots\psi\,(\eta_n)\,d\eta\cdots d\eta_n + \cdots \end{aligned} \right.$$

où $\Phi^{(n)}\,(\eta_1\,,\eta_2\,,\cdots,\eta_n\,,x)$ est une fonction symétrique de $\eta_1\,,\eta_2\,,\cdots,\eta_n$. *La solution est donc une fonction de même nature que celle dont on est parti.* Nous n'entrerons pas ici dans les détails relatifs au domaine de convergence, à l'unicité et à la vérification directe de la formule que nous venons de donner, mais elle peut s'étendre à bien d'autres cas de représentations analytiques. C'est pourquoi il faut la regarder comme le premier pas dans cet ordre de recherches. Les quantités ε, ϑ ne sont que des quantités auxiliaires, on peut les faire disparaître dans les formules (1) et (3), en les prenant égales à l'unité.