Die Darboux'sche Eigenschaft der Jacobischen Derivierten.

Von

W. Wilkosz (Krakau).

§ 1.

Betrachten wir eine Abbildung des Gebietes D in n-dimensionalem euklidischem Raume, gegeben durch das System der Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1 \dots x_n) \\ \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ y_n = f_n(x_1 \dots x_n). \end{array}$$

Gesetzt den Fall, dass $P(x_1 \dots x_n)$ irgend ein Punkt des Gebietes D, σ eine beliebige n-dimensionale offene Kugel, die ganz im Gebiete enthalten bleibt, σ' deren Bild ist, verwirklicht durch die Abbildung (1), und $|A|$ immer das äussere (Lebesguesche) Mass der Menge A bezeichnet.

Ferner betrachten wir den Grenzwert:

$$(2) \qquad \lim_{\varrho/0} \frac{|\sigma'|}{|\sigma|} = I(P) \qquad \{\varrho \text{ Radius von } \sigma\}$$

und nehmen folgende 2 Fälle:

1. entweder ist P der Mittelpunkt aller σ, die bei der Bildung von (2) verwendet werden, oder

2. liegt der gegebene Punkt P schlechthin im Innern der Kugel σ; dann werden wir den Grenzwert $J(P)$, vorausgesetzt, dass er existiert, künftighin als Jacobische *sphärische zentrierte* beziehungsweise *nicht-zentrierte* Derivierte bezeichnen.

Solche oder ähnliche Derivierten werden oft betrachtet. Die wichtige Arbeit von St. Banach, die in den Fundamenta Mathematicae Bd. VI (1924) erschienen ist, beschäftigt sich mit den Derivierten, die aber mit Hilfe von n-dimensionalen achsenparallelen Würfeln gebildet sind; trotzdem lassen sich sämtliche Betrachtungen der letztgenannten Arbeit auf unsere sphärischen Derivierten zurückführen. Wir brauchen aber nur wenig davon für unsere Zwecke.

Stellen wir eine Frage folgendermassen:

Vorausgesetzt, dass:

1. Die Funktionen $f_1 \ldots f_n$ stetig im Gebiete D sind,

2. die sphärische Derivierte in jedem Punkte des Gebietes vorhanden ist und einen endlichen Wert besitzt, P und Q zwei Punkte von G sind,

$$J(P) = A, \quad J(Q) = B, \quad A \neq B$$

und C eine Zahl, die zwischen A und B liegt. Gibt es im Gebiete D mindestens einen Punkt X, sodass

$$J(X) = C$$

wäre?

Kurz, wir suchen also nach der Eigenschaft, die im Gebiete der Funktionen von einer Veränderlichen als „Darboux'sche" bezeichnet wird, und für die wir auch in unserem Falle diesen Namen behalten wollen.

Es ist nun interessant, dass die Frage trivial wird, wenn wir in unserer Fragestellung durch die sphärische Derivierte die *zentrierte* verstehen. Betrachten wir die Abbildung der ganzen Ebene, die stetig und dazu *ein-eindeutig* ist gebeben durch:

$$X = x, \quad Y = \begin{cases} 4y \\ 0 \\ 2y \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{cases} y > 0 \\ y = 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

Die Abbildung besitzt in jedem Punkte der Ebene die zentrierte Derivierte und ihr Wert ist gleich:

$$4, \quad 3 \quad \text{oder} \quad 2$$

je nachdem $y \gtreqless 0$ ist.

Wir sehen also, dass für die zentrierte Derivierte die Darboux'sche Eigenschaft selbst im Falle einer umkehrbar eindeutigen stetigen Abbildung keineswegs zutrifft.

Anders verhält sich die Sache im Falle der *nicht-zentrierten* sphärischen Derivierten.

Zweck der jetzigen Arbeit ist nämlich der Beweis des Satzes, dass die *nicht-zentrierte* Derivierte, deren Existenz in jedem Punkte der *stetigen*, *ein-eindeutigen* Abbildung (1) vorausgesetzt wird, die erwünschte Darboux'sche Eigenschaft wirklich besitzt. Ob der Satz auch für die nicht notwendig ein-eindeutigen Abbildungen gilt, konnte ich bis jetzt nicht ganz allgemein beweisen, ich werde vielleicht in einer weiteren Note die Sache näher zu erforschen suchen.

§ 2.

Kehren wir nun zu unserer Abbildung (1) zurück. Wir setzen noch hinzu, dass sie eine *umkehrbar eindeutige* stetige Transformation des Gebietes D in n-dimensionalem Raume vorstellen soll.

Es sei H der Körper aller messbaren Untermengen M von D, die im Gebiete samt ihrer Grenze enthalten sind, und es bezeichne $F(M)$ das äussere Mass von M'

$$F(M) = |M'|.$$

Nebenbei sei bemerkt, dass, wenn M im Borelschen Sinne messbar ist, so ist es auch das Bild von M. Es ist nämlich M', als stetige Transformation einer (B)-messbaren Menge, eine Souslinsche (A)-Menge, die immer im Lebesgueschen Sinne messbar sein muss. Insbesondere ist es der Fall bei der Abbildung der Kugel, die zur Bildung der Derivierten verwendet wird.

Die Funktion $F(M)$ stellt nun eine Mengenfunktion vor, die für alle Mengen des Körpers H definiert, und nachdem die Abbildung als umkehrbar eindeutig vorausgesetzt wurde, sogleich additiv ist, d. h. es ist

$$F\left(\sum_i M_i\right) = \sum_i F(M_i)$$

wenn nur alle M_i und zugleich die Summe $\sum\limits_i M_i$ zu H gehören und die Mengen M_i ohne gemeinsame Punkte sind.

Das nächste Ziel wird es nun sein, die *Totalstetigkeit* der Mengenfunktion $F(M)$ zu zeigen, unter der Voraussetzung, dass für die betrachtete Abbildung die sphärische Derivierte in jedem Punkte des Gebietes D vorhanden ist. Wir verstehen darunter im Einverständnis mit de la Vallée Poussin Folgendes:

Es sei K irgend eine geschlossene beschränkte Untermenge von D un ε eine beliebige positive Zahl: Es sol eine positive Zahl δ existieren, so dass für jede messbare Untermenge M von K die Ungleichheit:

$$F(M) < \varepsilon \quad \text{eine Folge von} \quad |M| < \delta$$

ist. In diesem Falle nennen wir $F(M)$ totalstetig in der Menge K.

Gilt diese Eigenschaft für jede geschlossene beschränkte Untermenge K von D, so sagen wir kurz, es ist $F(M)$ totalstetig in D.

Um die Totalstetigkeit der Funktion $F(M)$ zu zeigen, genügt es nach den Sätzen, von Herrn Banach in seiner Arbeit „Sur les lignes rectifiables..." [1]) zu beweisen, dass für jede Nullmenge F, die in D enthalten ist, die Gleichung

$$F(E) = 0$$

besteht.

Zum Beweis ziehen wir einen sehr wichtigen Überdeckungssatz von Rademacher zu, der in seiner Inauguraldissertation (Monatshefte für Math. u. Phys. 1916) enthalten ist. Der Satz lautet so: „Es sei E eine Nullmege. Jedem Punkte P von E schreiben wir eine Folge von Kugeln σ_i, deren Radien nach Null streben, und welche immer den Punkt P in seinem Mittepunkt haben, zu. Es sei (N) die Menge aller derer Kugeln, und ε eine positive Zahl. Es ist immer möglich, aus der Menge (N) eine Folge von Kugeln

$$\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \ldots$$

so auszuwählen, dass

$$\sum_k |\sigma^{(k)}| < \varepsilon$$

und die Kugeln der Folge *alle* Punkte von E lückenlos überdecken".

Es sei jetzt E eine Nullmenge, die ganz in D enthalten ist. Die Funktion $F(M)$ oder die Transformation (1) besitzt in jedem Punkte P von E eine endliche nicht-zentrierte Derivierte $J(P)$. Wir bezeichnen mit E_n diejenige Menge die aus lauter Punkten besteht, für welche $J(P) \leqq n$ ist, wenn n eine gegebene ganze Zahl bedeutet. Es ist klar, dass es genügt die Gleichheit: $|E'_n| = 0$ für jedes n zu zeigen.

Um dies zu beweisen, denken wir uns um jeden Punkt P von E_n eine unendliche Folge von Kugeln $\sigma_i(P)$, die folgende Eigenschaften besitzt:

---

[1]) Fundamenta Math. t. VII.

1. P liegt im Mittelpunkt von $\sigma_i(P)$ $\quad i|1, 2 \ldots$

2. Die Radien der Folge $\{\sigma_i(P)\}$ streben für festes P, gegen Null.

3. $|\sigma_i'(P)| < 2n|\sigma_i(P)|$ $\quad (P$ in E_n, $i|2, 2 \ldots)$.

Es sei nun ε eine beliebige positive Zahl.

Wir wählen aus der Gesamtheit von Kugeln $\sigma_i(P)$ eine endliche oder unendliche Folge

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots$$

so, dass die Kugeln der Folge die ganze Menge E_n lückenlos überdecken und ausserdem die Ungleichung:

$$\sum |\sigma_i| < \varepsilon$$

besteht. Die Möglichkeit einer solchen Auswahl ist uns durch den soeben erwähnten Satz von Rademacher gesichert.

Dann wird auch

$$\sum |\sigma_i'| < 2n\varepsilon$$

und folglich, da die Summe $\Sigma\sigma_i$ die ganze Menge E_n überdeckt, zugleich

$$|E_n'| < 2n\varepsilon.$$

Daraus folgt schon $|E_n'| = 0$ und endlich noch $|E'| = 0$.

Die Abbildung (1) ist also unter den oben genannten Voraussetzungen *totalstetig* in D.

Wir ziehen daraus 3 wichtige Schlüsse.

I. Die Abbildung ist *messbar* d. h., es entspricht jeder messbaren Menge vermittels der Transformation wiederum eine messbare Menge.

[Siehe Radermachers Dissertation].

II. Wenn M eine messbare beschränkte Untermenge von D ist, dann gilt die Formel:

$$F(M) = |M'| = \int_M J(P)\,dP. \tag{3}$$

Der Schluss folgt nämlich aus der Additivität und Totalstetigkeit der Mengenfunktion $F(M)$ nach dem Satze von de la Vallée Poussin (Cours d'Analyse t. II. ed. 2. p. 116 nr. 104).

III, Bewegt sich eine Kugel σ stetig im Gebiete D, so ändert sich das Mass ihres Bildes d. h. der Wert von $F(\sigma)$ stetig.

Es ist dies eine unmittelbare Folge der Integraldarstellung von F durch die Formel (3).

§ 3.

Endlich sind wir gewappnet genug, um den Beweis des Hauptsatzes unserer Arbeit geben zu können.

Satz: Wir setzen voraus, dass die Abbildung (1) stetig und umkehrbar eindeutig ist, in jedem Punkte von D eine endliche *nicht-zentrierte* sphärische Derivierte besitzt, P und Q zwei Punkte des Gebietes D sind und ausserdem

$$J(P)=A,\quad J(Q)=B,\quad A<C<B$$
$$\text{oder}\quad A>C>A,$$

dann gibt es in D mindestens einen Punkt (X) von der Eigenschaft, dass

$$J(X)=C.$$

Beweis:

Wir verbinden die Punkte P und Q im Innern des Gebietes D durch eine stetige Kurve $(\mathfrak{C})$. Um die Punkte P und Q beschreiben wir zwei offene Kugeln σ_0 und τ_0, so dass:

1. Der Mittelpunkt von σ_0 in P und der Mittelpunkt von τ_0 in Q liegt.

2. Die Kugeln σ_0, τ_0 sind kongruent und liegen beide in D.

3. Es besteht die Ungleichung

$$\frac{|\sigma_0'|}{|\sigma_0|}<C<\frac{|\tau_0'|}{|\tau_0|}.$$

4. Während der Bewegung der Kugel längst der Kurve $\mathfrak{C}_1$ sodass der Mittelpunkt immer auf $\mathfrak{C}$ sich befindet, und dass endlich σ_0 in die Lage von τ_0 gebracht wird, verlässt die Kugel samt ihrer Grenze niemals das Gebiet D.

Nach den Bemerkungen, die wir oben gemacht haben, ändert sich der Wert von $F(\sigma)$ stetig und erreicht in einer bestimmten Lage, z. B. ω_0 den Zwischenwert C. Wir haben dabei gemäss der Formel (3):

$$|\omega'|=\int\limits_{\omega} J(P)\,dP=C\cdot|\omega_0|=C\cdot|\sigma_0|=C\cdot\tau_0.$$

Nehmen wir an, dass im Innern von ω_0 die Derivierte $J(P)$

immer von C verschieden ist. Es ist aber unmöglich, dass immer im Innern von ω_0 $J(P) < C$ wäre, denn in unserem Falle:

$$\int\limits_{\omega} [C - J(P)]\, dP = 0,$$

also müsste $C - J(P)$ in dem der Kugel massgleichen Kern verschwinden. Die andere Annahme, dass immer im Innern von ω_0 $J(P) > C$ ist, erweist sich auf ähnliche Weise als falsch. Es gibt also im Innern von ω_0 mindestens zwei Punkte P_1 und Q_1, so dass:

$$J(P_1) < C < J(Q_1)$$

ist.

Jetzt wiederholen wir das vorige Verfahren, indem wir nur die Punkte P und Q durch P_1 und Q_1, und ausserdem das Gebiet D durch das Innere von ω_0 ersetzen.

Wir erhalten endlich, wenn wir die Kugeln immer kleiner wählen, eine Folge:

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2 \ldots$$

die folgende Eigenschaften aufweist:

1. Die Kugel ω_{i+1} ist samt ihrer Grenze in ω_i enthalten.
2. Die Radien der Kugeln bilden eine Nullfolge.
3. Es ist immer:

(4)
$$\frac{|\omega_i'|}{|\omega_i|} = C.$$

4. Die Mittelpunkte von ω_i konvergieren gegen einen bestimmten Punkt X, der im Innern jeder ω_i liegt.

Im Punkte X gibt es aber eine bestimmte endliche *nicht-zentrierte* Derivierte $J(X)$, deren Wert aber wegen (4):

$$J(X) = \lim \frac{|\omega_i'|}{|\omega_i'|} = C$$

sein muss. Die Annahme führt also zum Widerspruch und somit ist unser Satz bewiesen.

Anmerkung.

Das Ergebnis dieser Arbeit wurde schon im Jahre 1925 in einer Sitzung der Polnischen Mathematiker-Vereinigung vorgeführt.