Une remarque sur les transformations réelles et orthogonales.

Par

A. Hoborski (Kraków).

Désignons par a_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ les coefficients d'une transformation réelle et orthogonale dans l'espace R_3, nous aurons:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{3} a_{ik}\, a_{ij} = \delta_{kj} = \begin{cases} 0 \text{ pour } k \neq j \\ 1 \text{ pour } k = j \end{cases} \qquad k, j = 1, 2, 3.$$

On sait que l'on a:

$$(2) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon$$

où on a $\varepsilon = \pm 1$. Posons

$$(3) \qquad \alpha = \sum_{i=1}^{3} a_{ii}.$$

Nous démontrerons les propositions suivantes:

$$(\mathrm{I}) \quad \left.\begin{array}{l} \text{pour } \varepsilon = +1, \ -1 \leqslant \alpha \leqslant 3 \\ \text{pour } \varepsilon = -1, \ -3 \leqslant \alpha \leqslant 1 \end{array}\right\} \text{ ou } \operatorname{Min}(3\varepsilon, -\varepsilon) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{Max}(3\varepsilon, -\varepsilon);$$

(II) si l'on a $\alpha = -\varepsilon$ on a $a_{ik} = a_{ki}$ $(i, k = 1, 2, 3)$; donc dans ce cas le déterminant Δ est symétrique;

(III) si l'on a $a_{ik} = a_{ki}$ $(i, k = 1, 2, 3)$, on a: ou bien $\alpha = -\varepsilon$, ou $a_{ik} = \varepsilon\, \delta_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3)$.

Démonstration. I) Pour $k = j$, la relation (1) donne $|a_{i,k}| \leqslant 1$. Donc on a

$$-3 \leqslant \alpha \leqslant 3.$$

En posant ensuite $a_{ik} = \varepsilon \delta_{ik}$ on vérifie les relations (1) et (2) et on obtient $\alpha = 3\varepsilon$, mais on ne peut pas avoir $\alpha = -3\varepsilon$, parcequ'on obtiendrais $a_{ii} = -\varepsilon$, $a_{ik} = 0\,(i \neq k,\ i, k = 1, 2, 3)$ et ces valeurs ne vérifient pas la relation (2).

Pour établir le théorème I il suffit de démontrer la relation

$$(\alpha - 3\varepsilon)\,(\alpha + \varepsilon) \leqslant 0,$$

équivalente à la suivante:

$$\alpha^2 - 2\varepsilon\alpha - 3 \leqslant 0.$$

Or on a

$$\alpha^2 = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + 2\,a_{11}\,a_{22} + 2\,a_{22}\,a_{33} + 2\,a_{11}\,a_{33} =$$
$$= 1 - a_{12}^2 - a_{13}^2 + 1 - a_{21}^2 - a_{23}^2 + 1 - a_{31}^2 - a_{32}^2 + 2\,(a_{12}\,a_{21} + \varepsilon\,a_{33}) +$$
$$+ 2\,(a_{23}\,a_{32} + \varepsilon\,a_{11}) + 2\,(a_{13}\,a_{31} + \varepsilon\,a_{22}) = 3 + 2\,\varepsilon\,\alpha - (a_{12} - a_{21})^2 -$$
$$- (a_{13} - a_{31})^2 - (a_{23} - a_{32})^2,$$

d'où

(4) $$\alpha^2 - 2\,\varepsilon\,\alpha - 3 = -(a_{12} - a_{21})^2 - (a_{13} - a_{31})^2 - (a_{23} - a_{32})^2.$$

Donc on a bien:

$$\alpha^2 - 2\,\varepsilon\,\alpha - 3 \leqslant 0,$$

c. q. f. d.

II. Si nous posons $\alpha = -\varepsilon$ dans l'égalité (4), nous obtenons la relation:

$$0 = -(a_{12} - a_{21})^2 - (a_{13} - a_{31})^2 - (a_{23} - a_{32})^2$$

d'où il suit[1])

(5) $$a_{ik} = a_{ki} \qquad (i, k = 1,\ 2,\ 3).$$

III. Reciproquement, si les relations (5) ont lieu, la relation (4) nous donne:

$$\alpha^2 - 2\,\varepsilon\,\alpha - 3 = 0.$$

On a donc $\alpha = -\varepsilon$ ou $\alpha = 3\varepsilon$ c'est à dire dans le dernier cas on a $a_{ik} = \varepsilon\,\delta_{ik}$.

Le théorème III est donc aussi démontré.

---

[1]) Pendant la correction je me suis aperçu que notre théorème pour $\varepsilon = +1$ se trouve dans un mémoire de E. Study [Mathematische Annalen vol. 39 (1891) p. 534].