Problèmes mixtes et problèmes sur des variétés closes, relativement aux équations linéaires du type elliptique.

Par

Georges Giraud.

Introduction.

L'objet du présent travail est de trouver, pour une équation linéaire du type elliptique, une solution u qui prenne sur une partie de la frontière des valeurs données (condition du type de Dirichlet), et qui remplisse sur le reste de la frontière une condition du type généralisé de Neumann. On suppose que, aux points de la variété qui sépare les deux parties de la frontière, ces deux parties forment un angle: si l'on mène la droite suivant laquelle est prise la dérivée qui figure dans la condition de Neumann, cette droite est tangente à la partie sur laquelle on donne une condition de Dirichlet, et les sens sont tels que, sans connaître la fonction u, la condition du type de Dirichlet permet de calculer cette dérivée, c'est-à-dire que l'angle n'est pas rentrant; et l'on suppose que les conditions des deux types s'accordent le long de cette variété de séparation. Par exemple, si la fonction u doit être harmonique, on suppose que les deux parties de frontière sont orthogonales l'une à l'autre. La méthode exposée s'applique aussi au cas où, la frontière n'étant pas d'un seul tenant, ces deux parties n'ont pas de variété de séparation. Mr Zaremba a déjà traité, pour les fonctions harmoniques dans l'espace à trois dimensions, un problème mixte relatif à d'autres hypothèses [1]).

[1]) S. Zaremba, Sur un problème mixte relatif à l'équation de Laplace, Bull. int. de l'Académie de Cracovie, juillet 1910, p. 313—344.

La méthode qui sera suivie, rend nécessaire de parler d'abord des équations du type elliptique dont l'inconnue est une fonction d'un point d'une variété close. De telles équations ont été considérées par Mr Picard[1]).

Chapitre I.

Problèmes relatifs à une variété close.

1. Définitions et hypothèses. Une variété *close* $\mathfrak{V}$ à m dimensions $(m > 0)$ est, par définition, un ensemble de points de la nature suivante: on peut trouver un nombre fini de régions $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n$, situées sur $\mathfrak{V}$ et telles que tout point de $\mathfrak{V}$ soit *intérieur* à au moins une région; et d'autre part chaque point d'une région $\mathfrak{V}_\nu$ quelconque est défini par m coordonnées ou paramètres $x^1, x^2, \ldots$, x^m, qui peuvent varier dans une région $\mathfrak{R}_\nu$, bornée et fermée, de l'espace euclidien. On complète la définition de $\mathfrak{V}$ en indiquant la région de $\mathfrak{R}_\nu$ qui correspond à des points communs à $\mathfrak{V}_\nu$ et à $\mathfrak{V}_\mu$, et en indiquant la transformation de coordonnées, qui permet, dans cette partie commune, de passer d'une représentation à l'autre, et cela pour tous les systèmes d'entiers μ et ν, distincts et au plus égaux à n; il peut d'ailleurs se faire que deux régions $\mathfrak{V}_\mu$ et $\mathfrak{V}_\nu$ soient sans points communs.

Nous supposons encore que si, dans la région commune à $\mathfrak{V}_\nu$ et à $\mathfrak{V}_\mu$, on exprime les coordonnées $x^1, \ldots, x^m$ propres à la région $\mathfrak{V}_\nu$ en fonctions des coordonnées $t^1, \ldots, t^m$ propres à la région $\mathfrak{V}_\mu$, les dérivées de ces fonctions existent et sont continues, et le jacobien $\dfrac{d(x^1, \ldots, x^m)}{d(t^1, \ldots t^m)}$ est positif, et cela quels que soient μ et ν, et sans qu'il y ait jamais lieu de changer l'ordre des coordonnées. On exprime cette propriété du jacobien en disant que $\mathfrak{V}$ est *orientable*.

Nous supposons encore que les dérivées secondes de $x^1, \ldots$, x^m par rapport à $t^1, \ldots, t^m$ existent et sont continues, sauf peut-être aux points d'une certaine variété $\mathfrak{M}$, à $m-1$ dimensions, située sur $\mathfrak{V}$. La partie de $\mathfrak{M}$ qui est située dans $\mathfrak{V}_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$, peut par hypothèse, être recouverte par un nombre *fini* de parties telles que chaque point de $\mathfrak{M}$ intérieur à $\mathfrak{V}_\nu$ soit intérieur à l'une d'elles et sur chacune desquelles les coordonnées $x^1, \ldots, x^m$, dans le système

---

[1]) E. Picard, Ann. sc. de l'Ecole normale sup., t. 26, 1909, p. 9—17.

propre à $\mathfrak{B}_\nu$, sont des fonctions de $m-1$ paramètres, et les dérivées de ces fonctions existent et remplissent des conditions de Hölder avec un exposant donné $k (0 < k \leqslant 1)$ [1]), et les m jacobiens ne s'annulent nulle part simultanément; enfin les régions de variation de ces paramètres sont toutes bornées et fermées; nous n'excluons pas le cas où $\mathfrak{M}$ aurait des points multiples. Si $m = 1$, $\mathfrak{M}$ se compose d'un nombre fini de points, mais nous supposerons dorénavant $m \geqslant 2$. Pour un point X quelconque, soit $r(X)$ la distance de l'image de ce point à l'image correspondante de $\mathfrak{M}$ dans celle des régions $\mathfrak{R}_\mu$, $\mathfrak{R}_\nu, \ldots$ contenant X et où cette distance est le plus petite; si aucune région $\mathfrak{B}_\nu$ contenant X ne possède de point de $\mathfrak{M}$, on prend r égal au plus grand des diamètres de tous les $\mathfrak{R}_\nu$. Nous supposons alors qu'on a, dans la région commune à $\mathfrak{B}_\mu$ et à $\mathfrak{B}_\nu$,

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial t^\beta \partial t^\gamma} = O(r^{k-1}) \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, m),$$

où O est le symbole de Landau; ceci doit avoir lieu quels que soient μ et ν si la région commune existe. Il résulte de propositions antérieures que les dérivées des x^α par rapport aux t^β remplissent des conditions de Hölder avec l'exposant k si k est inférieur à *un* [2]).

Enfin nous nous donnons sur $\mathfrak{B}$ un tenseur symétrique $(g_{\alpha, \beta})$, tel que la forme quadratique de différentielles

$$\Sigma_{\alpha,\beta} g_{\alpha,\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

soit partout définie positive. On regarde $(g_{\alpha,\beta})$ comme le tenseur fondamental qui nous permettra d'appliquer les règles du calcul tensoriel de Christoffel; on suppose que les dérivées des $g_{\alpha \cdot \beta}$, dans l'un quelconque de nos systèmes de coordonnées, existent et sont continues en tout point non situé sur $\mathfrak{M}$, et l'on suppose en outre que, en conservant à r la même signification que plus haut, ces

---

[1]) Une fonction φ remplit une condition de Hölder si, quels que soient X et Y, on a

$$\varphi(X) - \varphi(Y) = O[L^k(X, Y)] \quad (k > 0),$$

où O est le symbole de Landau, et L reqrésente la distance des deux points.

[2]) Cela résulte de ce que $\Sigma_\beta \dfrac{\partial^2 x^\alpha}{(\partial t^\beta)^2} = O(r^{k-1})$; voir Bull. Société math. de France t. 61, 1933, p. 1—54. Cet article sera désigné par la lettre *h*.

dérivées valent $O(r^{k-1})$; enfin nous supposons que, sur $\mathfrak{V}$ entier, les $g_{\alpha,\beta}$ remplissent une condition de Hölder avec l'exposant k.

2. Opération du type elliptique sur une variété close. Sur la variété $\mathfrak{V}$, close et orientable, donnons-nous un autre tenseur symétrique $(a_{\alpha,\beta})$ tel que la forme quadratique

$$\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

soit partout définie positive; nous supposons que les $a_{\alpha,\beta}$ remplissent des conditions de Hölder avec un exposant $h \leqslant k$. Soient encore (b^α) un tenseur donné, et c une fonction scalaire donnée; on suppose que les b^α et c sont continus en tout point non situé sur $\mathfrak{M}$, et qu'on a

$$b^\alpha = O(r^{k-1}) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m), \quad c = O(r^{k-1}),$$

toujours avec la même signification pour r.

En désignant par D_α le symbole de la dérivation covariante de Christoffel, nous posons, en tout point non situé sur $\mathfrak{M}$ et pour toute fonction u dont les dérivées jusqu'au second ordre existent et sont continues en ce point,

$$\mathfrak{F} u = \Sigma_{\alpha,\beta} a^{\alpha,\beta} D_\beta \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} + \Sigma_\alpha b^\alpha \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} + cu.$$

La définition de l'opération $\mathfrak{F}$ sera en outre étendue à certaines fonctions u dont les dérivées secondes n'existent pas; cette définition, qui a son origine dans un travail de M[r] Zaremba, est entièrement semblable à celle qui a été donnée pour l'espace ordinaire [1]).

Soit encore f une fonction donnée d'un point de $\mathfrak{V}$; on suppose f continu en tout point non situé sur $\mathfrak{M}$, et f vaut $O(r^{k-1})$. On dit que, pour l'équation $\mathfrak{F} u = f$, u est une solution *régulière* dans un certain ensemble ouvert, si u et ses dérivées premières existent et sont continus en tout point de l'ensemble, et si en outre l'équation est satisfaite en tout point appartenant à l'ensemble mais non situé sur $\mathfrak{M}$. On démontre, comme dans l'espace ordinaire, que les dérivées de u remplissent une condition de Hölder d'exposant k dans tout ensemble fermé appartenant à l'ensemble ouvert donné, pourvu que k soit inférieur à *un*.

---

[1]) Bull. des sciences mathématiques, t. 56, 1932, p. 248—272, 281—312, 316—352, et errata p. 384; spécialement chapitre I. Cet article sera désigné par la letre g.

3. Fonction de Green pour une variété close. Soient Δ le déterminant des $g_{\alpha,\beta}$ et D celui des $a^{\alpha,\beta}$; soit $A_{\alpha,\beta}$ le quotient par D du mineur algébrique de $a^{\alpha,\beta}$. Nous nommons *fonction de Green*, pour notre variété et pour l'opération $\mathfrak{F}$, une fonction $G(X, \Xi)$ qui jouit des propriétés suivantes:

1° Quand X et Ξ sont distincts sur $\mathfrak{V}$, G est, relativement à X, une solution régulière de l'équation $\mathfrak{F}G(X, \Xi) = 0$ (quand l'opération $\mathfrak{F}$ est appliquée à une fonction de deux points, nous supposons toujours qu'elle porte sur le premier point, ici X).

2° Quand X tend vers Ξ, nous supposons que

$$G(X, \Xi) = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{\Delta(\Xi)\, D(\Xi)}}\, F[\sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(\Xi)(x^\alpha - \xi^\alpha)(x^\beta - \xi^\beta)}],$$

où F désigne ce que nous avons nommé la solution élémentaire principale [1]) de l'équation $\Sigma_\alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - u = 0$; bien entendu, les x^α sont les coordonnées de X et les ξ^α sont celles de Ξ.

Nous démontrerons que, si la fonction de Green existe, elle est unique; en outre elle existe certainement si c est négatif en un point de $\mathfrak{V} - \mathfrak{M}$, et négatif ou nul en tout point de $\mathfrak{V} - \mathfrak{M}$.

Commençons par le cas où c remplit ces conditions. La démonstration de l'existence de G se fera en deux temps: d'abord nous prouverons que la fonction de Green existe pour l'opération $\mathfrak{F}u - \lambda^2 u$, où λ est une constante positive suffisamment grande; ensuite nous prouverons qu'il en est de même pour l'opération $\mathfrak{F}$.

Nous allons attribuer des poids aux différentes représentations valables en un point X donné de $\mathfrak{V}$. Nous ferons en sorte que les dérivées secondes de ce poids par rapport aux coordonnées propres à la représentation, existent et soient continues dans toute la région euclidienne correspondante. Pour cela, nous nous arrangeons d'abord pour que toutes les régions euclidiennes $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_n$ soient des hypersphères; en augmentant au besoin n, cela est évidemment possible. Il existe un nombre positif ϱ, indépendant de X, tel que l'une au moins des hypersphères, de rayon 2ϱ, qui ont pour centres les différentes images de X, soit intérieure à l'hypersphère $\mathfrak{R}_\nu$ correspondante. Alors nous donnons le poids *un* à toute représentation valable

---

1) g, chap. II. Le symbole $z = o(y)$ signifie que z/y tend vers zéro.

dans l'hypersphère dont le centre est l'image correspondante de X et dont le rayon est 2ϱ; si l'hypersphère tangente à $\mathfrak{R}_\nu$ et dont le centre est l'image de X dans $\mathfrak{R}_\nu$, a un rayon R compris entre ϱ et 2ϱ, le poids de cette représentation est

$$\left(\frac{R-\varrho}{\varrho}\right)^3\left[6-15\frac{R-\varrho}{\varrho}+10\left(\frac{R-\varrho}{\varrho}\right)^2\right],$$

fonction nulle pour $R=\varrho$, égale à *un* pour $R=2\varrho$, et dont les dérivées premières et secondes s'annulent pour $R=\varrho$ et pour $R=2\varrho$; enfin, pour $R\leqslant\varrho$, le poids est zéro.

Pour chaque domaine $\mathfrak{B}_\mu$ qui contient Ξ, en supposant que $\mathfrak{M}$ n'existe pas, nous formons la fonction $H_\mu(X,\Xi)$, nulle quand la distance $L(X,\Xi)$, comptée dans la région $\mathfrak{R}_\mu$ correspondante, dépasse ϱ, nulle aussi quand X n'appartient pas à $\mathfrak{B}_\mu$, et qui, dans le cas contraire, a l'expression

$$H_\mu(X,\Xi)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\Delta(\Xi)\,D(\Xi)}}F_\lambda\left[\sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta}(\Xi)(x^\alpha-\xi^\alpha)(x^\beta-\xi^\beta)}\right]\left[1-\frac{L^2(X,\Xi)}{\varrho^2}\right]^3,$$

où F_λ est la solution élémentaire principale de $\Sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}-\lambda^2 u=0$. Nous multiplions cette fonction par le poids de la représentation valable en Ξ, nous additionnons tous ces produits et nous divisons par la somme des poids, qui est au moins égale à *un*. Le résultat est une fonction H définie dès que X et Ξ sont distincts et qui, quand X tend vers Ξ, devient infinie comme la fonction dont il s'agit d'établir l'existence. Nous posons

$$K(X,\Xi)=\mathfrak{F}\,H(X,\Xi)-\lambda^2 H(X,\Xi);$$

on constate que, si X tend vers Ξ, K vaut $O[L^{h-m}(X,\Xi)]$. Posons maintenant

$$dV_X=\sqrt{\Delta(X)}\,d(x^1,x^2,\dots,x^m),$$

de sorte que dV est invariant. On démontre, comme dans l'espace ordinaire (g, chap. II, § 4), l'existence d'une constante λ_0 telle que, pour $\lambda\geqslant\lambda_0$, la borne supérieure de $\int\limits_{\mathfrak{B}}^{(m)}|K(A,\Xi)|\,dV_A$ soit inférieure à *un*. Si alors on pose

$$K^{(1)} = K, \quad K^{(n+1)}(X, \Xi) = \int\limits_{\mathfrak{V}}^{(m)} K^{(n)}(X, A)\, K(A, \Xi)\, dV_A,$$

on constate que la série

$$H(X, \Xi) + \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{\mathfrak{V}}^{(m)} H(X, A)\, K^{(n)}(A, \Xi)\, dV_A,$$

dont les termes, à partir d'un certain rang, sont continus par rapport à X et à Ξ, converge uniformément et est une fonction de Green pour l'opération $\mathfrak{F}u - \lambda^2 u$ $(\lambda \geqslant \lambda_0)$.

Si $\mathfrak{M}$ existe, cette démonstration disparaît. Dans ce cas, dans chacun des espaces euclidiens qui contiennent les régions $\mathfrak{R}_\mu$, nous prolongeons arbitrairement les $a^{\alpha,\beta}$, de façon seulement que la *solution élémentaire principale* (g, chap. II, spécialement § 4) de l'opération

$$\Sigma_{\alpha,\beta} a^{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} - \lambda^2 u,$$

ainsi définie dans chaque espace euclidien, existe pour $\lambda > 0$. Nous désignons par $H_\mu(X, \Xi)$ le produit par $\dfrac{1}{\sqrt{\Delta(\Xi)}}\left[1 - \dfrac{L^2(X, \Xi)}{\varrho^2}\right]^3$ de celle de ces fonctions qui correspond à l'espace contenant $\mathfrak{R}_\mu$, tant qu'on a $L(X, \Xi) < \varrho$; H_μ sera nul dans le cas contraire. Nous en déduisons, comme plus haut, une fonction $H(X, \Xi)$. Pour $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$, on constate que $H(X, \Xi)$ et les $\partial H/\partial x_\alpha$ ont des limitations $O[L^{2-m}(X, \Xi)]$ et $O[L^{1-m}(X, \Xi)]$, indépendantes de λ; quand $L(X, \Xi)$ reste supérieur à une borne positive quelconque, H et ses dérivées de tout ordre par rapport aux x^α tendent uniformément vers zéro quand λ augmente indéfiniment. Si alors on définit K comme plus haut, on constate encore que $\int\limits_{\mathfrak{V}}^{(m)} |K(A, \Xi)|\, dV_A$, pour λ assez grand, reste inférieur à une constante positive donnée (*voir h*, chap. II, § 6). En prenant cette constante inférieure à *un*, on en déduit que la série formée comme plus haut converge uniformément et représente une fonction de Green pour l'opération $\mathfrak{F}u - \lambda^2 u$.

Soit G_λ cette fonction de Green. Nous cherchons la fonction G, dont l'existence a été annoncée, parmi les fonctions

$$G(X, \Xi) = G_\lambda(X, \Xi) + \int\limits_{\mathfrak{V}}^{(m)} G_\lambda(X, A)\, \sigma(A, \Xi)\, dV_A,$$

où σ est une inconnue, continue quand les deux points sont distincts. L'équation $\mathfrak{F}\, G = 0$ s'écrit alors

$$\sigma(X, \Xi) - \lambda^2 \int\limits_{\mathfrak{B}}^{(m)} G_\lambda(X, A)\, \sigma(A, \Xi)\, d V_A = \lambda^2 G_\lambda(X, \Xi),$$

équation du type de Fredholm. Pour prouver que la solution existe, il suffit de prouver que l'équation

$$\tau(X) - \lambda^2 \int\limits_{\mathfrak{B}}^{(m)} G_\lambda(X, A)\, \tau(A)\, d V_A = 0$$

n'a que la solution zéro; or si

$$u(X) = - \int\limits_{\mathfrak{B}}^{(m)} G_\lambda(X, A)\, \tau(A)\, d V_A ,$$

notre équation exprime que u est une solution, régulière dans tout $\mathfrak{B}$, de l'équation $\mathfrak{F} u = 0$; cette fonction est nulle, car elle ne peut atteindre ni maximum positif, ni minimum négatif (h, chap. II, §§ 13 et 14); comme l'équation en τ s'écrit aussi $\tau + \lambda^2 u = 0$, τ est nul aussi, C. Q. F. D. Donc la fonction σ existe, et l'on vérifie que G est une fonction de Green.

Pour prouver, dans la même hypothèse sur c, que G est unique, il suffit de remarquer que la différence de deux fonctions de Green est une solution de l'équation homogène, et cette solution est régulière même quand X est en Ξ (h, chap. II, § 16); cette différence est donc nulle.

Enfin, si nous levons notre restriction relative à c, soit G^* la fonction de Green relative à l'opération $\mathfrak{F} u - \chi u$, où χ satisfait aux mêmes conditions que c et est supérieur à c dans tout $\mathfrak{B} - \mathfrak{M}$; on démontre alors que, si G existe, cette fonction satisfait aux deux équations de Fredholm

$$G(X, \Xi) = G^*(X, \Xi) + \int\limits_{\mathfrak{B}}^{(m)} G^*(X, A)\, \chi(A)\, G(A, \Xi)\, d V_A =$$

$$= G^*(X, \Xi) + \int\limits_{\mathfrak{B}}^{(m)} G(X, A)\, \chi(A)\, G^*(A, \Xi)\, d V_A ,$$

et chacune de ces équations a une seule solution; réciproquement, toute solution d'une de ces équations est une fonction de Green pour l'opération $\mathfrak{F}$. La démonstration est semblable à celle qui concerne la solution élémentaire principale dans l'espace ordinaire (*h*, chap. III, § 2; *g*, chap. II, § 12).

4. Problème relatif à la variété close. On peut se donner une fonction f remplissant sur tout $\mathfrak{V}$ les hypothèses indiquées (§ 2), et se proposer de trouver une fonction u, solution partout régulière de l'équation

$$\mathfrak{F} u = f.$$

Ce type de problèmes est spécial aux variétés closes, et a été considéré par Mr Picard[1]).

Si c est négatif ou nul en tout point de $\mathfrak{V} - \mathfrak{M}$, et négatif en au moins un de ces points, la solution existe et est unique, et elle a pour expression

$$u(X) = -\int_{\mathfrak{V}}^{(m)} G(X, A) f(A)\, dV_A,$$

G étant la fonction de Green.

Dans le cas général, soit χ une fonction remplissant les mêmes conditions que c, et supérieure à c dans tout $\mathfrak{V} - \mathfrak{M}$; alors le problème équivaut à l'équation de Fredholm

$$u(X) = -\int_{\mathfrak{V}}^{(m)} G^*(X, A)[f(A) - \chi(A) u(A)]\, dV_A,$$

où G^* est la fonction de Green relative à l'opération $\mathfrak{F} u - \chi u$. Si le problème homogène a p solutions linéairement indépendantes ($p > 0$), soient $v_1, v_2, \ldots, v_p$ les solutions linéairement indépendantes du problème homogène adjoint, c'est-à-dire de l'équation

$$v(X) - \int_{\mathfrak{V}}^{(m)} v(A) \chi(A)\, G^*(A, X)\, dV_A = 0;$$

alors les conditions nécessaires et suffisantes pour la solubilité du problème donné sont

$$\int_{\mathfrak{V}}^{(m)} f v_n\, dV = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, p).$$

---

[1]) E. Picard, loc. cit.

On remarquera que le cas d'une solution unique est précisément celui où l'opération $\mathfrak{F}$ admet une fonction de Green, et qu'alors u peut s'exprimer comme dans le cas où c est négatif partout.

Si c est identiquement nul, le problème homogène correspondant au problème donné, c'est-à-dire le problème où $f=0$, admet pour solution une constante quelconque, et n'en admet pas d'autre.

5. Autres problèmes. Soit maintenant $\mathfrak{D}$ un domaine donné sur $\mathfrak{V}$; on suppose que sa frontière $\mathfrak{S}$ remplit les mêmes hypothèses que $\mathfrak{M}$, et en outre $\mathfrak{S}$ n'a pas de point multiple. On peut se poser, à propos de ce domaine et de l'équation $\mathfrak{F}u=f$, les mêmes types de problèmes que dans l'espace euclidien.

Le premier type consiste, étant donnée une fonction φ continue sur $\mathfrak{S}$, à trouver une solution, régulière dans $\mathfrak{D}$, de l'équation donnée, qui soit continue dans $\mathfrak{D}+\mathfrak{S}$ et égale à φ sur $\mathfrak{S}$ (notre méthode, comme dans l'espace euclidien, entraînera parfois des restrictions pour φ); c'est le type de Dirichlet.

Dans le deuxième type, on se donne deux fonctions ψ et φ continues sur $\mathfrak{S}$. La fonction ψ sert à définir une opération qui sera nommée Θu. Les représentations paramétriques que nous avons choisies, définissent une orientation du domaine $\mathfrak{D}$; nous choisissons pour $\mathfrak{S}$ l'orientation associée à celle-ci [1]), et nous posons, pour $\mathfrak{S}$,

$$dS=\sqrt{\Delta\Sigma_{\alpha,\beta}(-1)^{(m-1)(\alpha+\beta)}g^{\alpha,\beta}d(x^{\alpha+1},\ldots,x^{\alpha-1})\,d(x^{\beta+1},\ldots,x^{\beta-1})},$$
$$\bar{\omega}_\alpha\, dS=(-1)^{(m-1)(\alpha-1)}\sqrt{\Delta}\,d(x^{\alpha+1},\ldots,x^{\alpha-1}),$$

où $(x^{\alpha+1},\ldots,x^{\alpha-1})$ désigne le résultat obtenu en permutant circulairement les coordonnées, de façon à amener x^α en tête, puis en supprimant x^α. Par définition, dS est la *mesure* d'un élément de $\mathfrak{S}$, et les $\bar{\omega}_\alpha$ sont les *cosinus directeurs de la normale extérieure*. On voit que dS est invariant, et les $\bar{\omega}_\alpha$ sont les composantes covariantes d'un tenseur: on a $\Sigma_{\alpha,\beta}g^{\alpha,\beta}\bar{\omega}_\alpha\bar{\omega}_\beta=1$. Par définition, si les dérivées d'une fonction u existent et sont continues dans $\mathfrak{D}+\mathfrak{S}$, on a, sur $\mathfrak{S}$,

$$\Theta u=\Sigma_{\alpha,\beta}a^{\alpha,\beta}\,\bar{\omega}_\alpha\frac{\partial u}{\partial x^\beta}+\psi u,$$

de sorte que Θu est invariant. Pour étendre cette définition à d'autres fonctions u, désignons par Y un point de $\mathfrak{S}$, par y^α ses coor-

[1]) Ann. sc. Ec. norm. sup., t. 43, 1926, p. 1 — 128, spécialement chap. I, § 4, p. 9.

données ($\alpha = 1, 2, \ldots, m$), et par Y_t un point qui a pour coordonnées des quantités

$$y^\alpha - t\Sigma_\beta a^{\alpha,\beta}\bar{\omega}_\beta + O(t^{h+1}) \quad (t > 0,\ h > 0,\ \alpha = 1, 2, \ldots, m);$$

par définition

$$\Theta u(Y) = \lim_{t\to 0} \frac{u(Y) - u(Y_t)}{t} + \psi(Y)u(Y),$$

pourvu que la limite existe et soit indépendante des quantités $O(t^{h+1})$. Cela posé, le deuxième type de problèmes consiste à trouver, pour l'équation $\mathfrak{F}u = f$, une solution u régulière dans $\mathfrak{D}$, continue dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$, et satisfaisant sur $\mathfrak{S}$ à la condition $\Theta u = \varphi$.

Il convient de traiter d'abord ce second type de problèmes. Si c est négatif sur tout $\mathfrak{V}$, de façon que la fonction G de Green, relative à $\mathfrak{V}$, existe, on remarque que le potentiel de simple couche

$$u(X) = 2\overset{(m-1)}{\int_{\mathfrak{S}}} G(X, A)\,\sigma(A)\,dS_A$$

est une solution, régulière dans $\mathfrak{D}$, de l'équation $\mathfrak{F}u = 0$; cette solution est continue dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$ et elle satisfait sur $\mathfrak{S}$ à la condition

$$\Theta u(Y) = \sigma(Y) + 2\overset{(m-1)}{\int_{\mathfrak{S}}} \Theta G(Y, A)\,\sigma(A)\,dS_A,$$

exactement comme dans l'espace euclidien. Dès lors notre second type de problèmes se résout, dans les hypothèses indiquées plus haut, exactement comme dans l'espace euclidien (h, chap. III, § 7); la notion de fonction de Green relative au domaine $\mathfrak{D}$ et aux opérations $\mathfrak{F}$ et Θ se définit comme dans l'espace euclidien, et la formule de Green reste également valable.

Pour le premier type de problèmes, on formera, comme dans l'espace euclidien (h, chap. III, § 9), la fonction de Green relative au domaine $\mathfrak{D}$ et à l'opération $\mathfrak{F}u - \chi u$. La solution du problème posé en résulte si les dérivées partielles de φ existent et remplissent des conditions de Hölder.

Si les dérivées partielles des $a^{\alpha,\beta}$ existent et remplissent, ainsi que les b^α, des conditions de Hölder au voisinage de $\mathfrak{S}$, on peut traiter, comme dans l'espace euclidien, le cas où φ est continu sans plus, car la fonction de Green d'une opération $\mathfrak{F}w - \chi w$ peut être dérivée par rapport au second point, ce qui permet de lui appliquer l'opération Z définie plus loin.

Disons aussi qu'on peut traiter, comme dans l'espace euclidien, un troisième type de problèmes: si, dans la définition de Θu, au lieu de faire tendre la direction YY_t vers la direction indiquée (dite parfois *transversale* à $\mathfrak{S}$), on la fait tendre vers une direction non tangente quelconque, ce troisième type de problèmes consiste à se donner sur $\mathfrak{S}$ le résultat de cette nouvelle opération Θ appliquée à u[1]).

6. Opération adjointe. Par définition, on a

$$\mathfrak{G}v = \Sigma_{\alpha,\beta} D_\alpha \left(a^{\alpha,\beta} \frac{\partial v}{\partial x^\beta}\right) - \Sigma_\alpha D_\alpha \left[\left(b^\alpha - \Sigma_\beta \frac{\partial a^{\alpha,\beta}}{\partial x^\beta}\right) v\right] + cv,$$

pourvu que les coefficients de v et de ses dérivées premières et secondes existent et remplissent les mêmes hypothèses que les coefficients correspondants dans $\mathfrak{F}$. Si alors la fonction $G(X, \Xi)$ de Green existe sur la variété $\mathfrak{V}$ pour l'opération $\mathfrak{F}$, elle existe aussi pour $\mathfrak{G}$, et elle s'obtient en échangeant les rôles des deux points dans G. L'opération Z *(dzêta)* correspondant à Θ est alors

$$Zv = \Sigma_{\alpha,\beta} \overline{\omega}_\alpha D_\beta (a^{\alpha,\beta} v) + (\psi - \Sigma_\alpha b^\alpha \overline{\omega}_\alpha) v.$$

Ce qui a été dit antérieurement pour l'espace euclidien peut se répéter maintenant pour $\mathfrak{V}$.

Chapitre II.

Problèmes mixtes.

1. Introduction d'une symétrie. Soit $\mathfrak{D}$ un domaine borné de l'espace euclidien à m dimensions ($m \geqslant 2$), ou un domaine pris sur la variété $\mathfrak{V}$, close et orientable, définie au chapitre I, paragraphe 1. On suppose que la frontière $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{D}$ existe et satisfait aux hypothèses précédemment énoncées pour $\mathfrak{M}$ (chap. I, § 2); en outre $\mathfrak{S}$ n'a pas de points multiples. Nous admettons désormais que $\mathfrak{M}$ comprend la totalité de $\mathfrak{S}$, et peut-être d'autres points.

Nous allons définir une nouvelle variété $\mathfrak{W}$, close et orientable, qui contiendra $\mathfrak{D}$. En dehors de $\mathfrak{D}$, cette variété comprend un domaine $\mathfrak{E}$

---

[1]) Deux articles, non encore parus, développent la solution d'abord pour deux et trois dimensions, puis pour m dimensions; on trouvera des indications dans une note, *Comptes rendus*, t. 195, 1932, p. 454—456.

identique à $\mathfrak{D}$; mais l'orientation choisie sur $\mathfrak{E}$ est opposée à l'orientation choisie sur $\mathfrak{D}$, ce qui s'obtient par le changement de coordonnée $x'^1 = -x^1$, dans chaque région $\mathfrak{B}_\nu$ qui contient des points de $\mathfrak{D}$, les autres coordonnées ne changeant pas. Nous ferons en sorte que les composantes du tenseur fondamental $(g_{\alpha,\beta})$ pour $\mathfrak{E}$ se déduisent des composantes relatives à $\mathfrak{D}$ par ce changement de coordonnée. $\mathfrak{S}$ est regardé sur $\mathfrak{W}$ comme la frontière entre $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$. Il reste à trouver des représentations paramétriques, en nombre fini, qui conviennent pour les points de $\mathfrak{S}$ et de son voisinage dans $\mathfrak{D}$ et dans $\mathfrak{E}$. Il a été démontré (h, chap. IV, §§ 1 et 2) que, Y étant un point donné de $\mathfrak{S}$, on peut trouver un système de variables $y^1, y^2, \ldots, y^m$, valable pour tous les points assez voisins de Y dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$, et tel que, dans ce voisinage de Y, $\mathfrak{S}$ soit identique à la variété $y^m = 0$, et $\mathfrak{D}$ identique à l'ensemble $y^m > 0$; si en outre on désigne par $a'^{\alpha,\beta}$ et par b'^{α} les composantes des tenseurs $(a^{\alpha,\beta})$ et (b^α) pour ces nouvelles variables, on a

$$a'^{m,\alpha} = 0 \quad \text{pour} \quad y^m = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Nous avons besoin qu'en outre les dérivées secondes des y^α par rapport aux anciennes variables existent en tout point de $\mathfrak{D} - \mathfrak{M}$ et admettent des limitations $O(r^{h-1})$. Il nous suffit pour cela de modifier légèrement la formation des fonctions y^α. Comme précédemment (h, chap. IV, § 1, p. 43 et 44), nous nous ramenons au cas où les anciennes variables sont telles qu'au voisinage de Y, $\mathfrak{S}$ coïncide avec $x^m = 0$, et $\mathfrak{D}$ avec $x^m > 0$. Ensuite nous remplaçons l'équation du type elliptique à laquelle y^α doit satisfaire dans $\mathfrak{D}$ au voisinage de Y, par (*voir* h, chap. IV, § 1, p. 45)

$$\Sigma_{\beta,\gamma} a^{\beta,\gamma} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} - \lambda^{-2} y^\alpha = -\lambda^{-2}(x^\alpha + \psi_\alpha x^m);$$

dans cette équation, les coefficients de l'inconnue y^α et de ses dérivées premières et secondes, ainsi que le second membre, remplissent des conditions de Hölder avec l'exposant h; par conséquent les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\beta\, \partial x^\gamma}$ existent en tout point du voisinage de Y dans $\mathfrak{D}$, et les dérivées $\dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}$ remplissent des conditions de Hölder, avec l'exposant h, dans le même voisinage, pourvu que h soit < 1. On en déduit que $\Sigma_{\beta,\gamma} a^{\beta,\gamma} \dfrac{\partial^2 (x^m y^\alpha)}{\partial x^\beta\, \partial x^\gamma} - \lambda^{-2} x^m y^\alpha$ remplit, dans le même voisinage, une condition de Hölder avec l'exposant $h < 1$, et par suite (h, chap. IV, § 4) les dérivées secondes de $x^m y^\alpha$ remplissent des conditions de Hölder avec le même exposant; donc les $\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}$ valent $O[(x^m)^{h-1}]$ $(h < 1)$, et notre but est atteint. Puisque tout point Y de $\mathfrak{S}$ est intérieur à une région de $\mathfrak{S}$ où une telle représentation est valable, un nombre fini de telles représentations suffit pour tout $\mathfrak{S}$ et son voisinage dans $\mathfrak{D}$. Par définition maintenant, si $y^1, y^2, \ldots, y^m$ sont, dans une telle représentation, les paramètres d'un point de $\mathfrak{D}$, ce qui entraîne que y^m est positif, $y^1, y^2, \ldots, -y^m$ sont les paramètres du point correspondant de $\mathfrak{E}$. Avec notre définition sur l'orientation choisie pour $\mathfrak{E}$, on vérifie que tous les jacobiens sont positifs, et par suite la variété $\mathfrak{W}$ aiusi définie est orientable.

Par suite de la condition posée plus haut pour $\mathfrak{D}$ et pour $\mathfrak{E}$, les composantes $g'_{m,\alpha}$ $(\alpha \neq m)$ du tenseur fondamental, avec les paramètres $y^1, y^2, \ldots, y^m$, doivent être des fonctions impaires de y^m, et toutes les autres composantes doivent être des fonctions paires de y^m. Pour que les $g'_{\alpha,\beta}$ restent continus, il faut donc modifier le tenseur fondamental de façon que les $g'_{m,\alpha}$ $(\alpha \neq m)$ soient nuls sur $\mathfrak{S}$. Nous définirons des fonctions $g^*_{\alpha,\beta}$ dans chaque domaine où un système de variables y^α, du type qui vient d'être introduit, est valable; ces fonctions doivent satisfaire, dans ce domaine, à toutes les hypothèses relatives au tenseur fondamental (chap. I, § 1), et en outre les $g^*_{m,\alpha}$ $(\alpha \neq m)$ doivent être des fonctions impaires de y^m (ce qui entraîne leur nullité pour $y^m = 0$), et les autres $g^*_{\alpha,\beta}$ doivent être des fonctions paires de y^m; sauf ces conditions, les $g^*_{\alpha,\beta}$ sont arbitraires dans chacun de ces domaines. Dans chaque région commune à $\mathfrak{D}$ et à l'une des régions $\mathfrak{B}_\nu$, on prend les $g^*_{\alpha,\beta}$ égaux, dans le système des variables propres à cette région, aux composantes $g_{\alpha,\beta}$ du tenseur fondamental qui était donné sur $\mathfrak{B}$; dans la région correspondante de $\mathfrak{E}$, les $g^*_{\alpha,\beta}$ se déduisent des précédents par le changement de coordonnée $x'_1 = -x_1$. Dans les régions où interviennent les variables y^α, les différents systèmes de fonctions $g^*_{\alpha,\beta}$ ne se ramènent pas les uns aux autres par les relations entre les variables correspondantes: mais ayant défini le poids comme plus haut (chap. I, § 3), nous multiplions chaque système de $g^*_{\alpha,\beta}$ par le poids correspondant; les ayant tous ramenés à un même système de variables, nous ajoutons ces produits et nous divisons par la somme des poids: le résultat de cette opération est un tenseur qui jouit sur $\mathfrak{W}$ de toutes les propriétés voulues, et que nous nommerons désormais $(g_{\alpha,\beta})$.

Cette modification du tenseur fondamental se répercute sur la dérivation covariante. Nous modifions donc aussi le tenseur (b^{α}), de façon que l'opération $\mathfrak{F}$ donnée dans $\mathfrak{D}$ ne soit pas altérée.

Il reste à définir sur tout $\mathfrak{W}$ l'opération $\mathfrak{F}$, qui, par définition, coïncide dans $\mathfrak{D}$ avec l'opération donnée; pour le point de $\mathfrak{E}$ qui correspond à un point donné de $\mathfrak{D}$, elle se déduit de l'opération donnée par le changement de variable $x'^1 = -x^1$. Cela entraîne qu'avec les paramètres $y^1, y^2, \ldots, y^m$ qui conviennent pour une région de $\mathfrak{S}$, les $a'^{m,\alpha} (\alpha \neq m)$ et b'^m sont des fonctions impaires de y^m, et toutes les autres fonctions $a'^{\alpha,\beta}$, b'^{α} et c' sont des fonctions paires de y^m.

Par définition, un point de $\mathfrak{D}$ et son correspondant dans $\mathfrak{E}$ sont dits *symétriques* l'un de l'autre. Un point de $\mathfrak{S}$ est son propre symétrique.

On conçoit que cette symétrie a des propriétés remarquables. Si notre opération $\mathfrak{F}$ admet, pour $\mathfrak{W}$ entier, une fonction de Green $G(X, \Xi)$, et si l'on distingue par un accent deux points X et X' symétriques l'un de l'autre, on a $G(X, \Xi) = G(X', \Xi')$. La fonction $G(X, \Xi) - G(X, \Xi')$ est donc la fonction de Green relative aux problèmes du premier type dans le domaine $\mathfrak{D}$. La fonction $\Theta[G(Y, \Xi) + G(Y, \Xi')]$ est nulle si la fonction ψ, qui intervient dans la définition de Θ sur $\mathfrak{S}$, est nulle.

2. Problème mixte, énoncé et préliminaires de la solution. Soit $\mathfrak{D}$ un domaine borné de l'espace euclidien à m dimensions $(m \geqslant 2)$, ou un domaine pris sur la variété $\mathfrak{V}$ du chapitre I, paragraphe 1. On suppose que sa frontière se compose de deux ensembles ouverts $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$, et de leur frontière commune $\mathfrak{C}$, qui remplit les conditions suivantes (le cas où $\mathfrak{C}$ n'existe pas est compris dans nos considérations, mais il peut aussi se traiter autrement): on peut trouver sur $\mathfrak{C}$ un nombre fini de régions fermées, telles que chaque point de $\mathfrak{C}$ soit intérieur à au moins une de ces régions; dans chaque région, les coordonnées $x^1, x^2, \ldots, x^m$ d'un point de $\mathfrak{C}$ sont des fonctions de $m-2$ paramètres dont le champ de variation est borné et fermé; les dérivées des x^{α} existent par hypothèse, et remplissent des conditions de Hölder, et les $\frac{m(m-1)}{2}$ jacobiens ne s'annulent simultanément nulle part; on suppose que $\mathfrak{C}$

n'a pas de point multiple (ces hypothèses se simplifient d'une façon évidente pour $m = 2$). Ensuite on suppose qu'on peut recouvrir $\mathfrak{S} + \mathfrak{C}$ par un nombre fini de régions fermées, telles que tout point de $\mathfrak{S}$ soit intérieur à au moins l'une d'elles et telles que, dans chaque région, les coordonnées $x^1, x^2, \ldots, x^m$ d'un point de $\mathfrak{S} + \mathfrak{C}$ soient des fonctions de $m - 1$ paramètres dont le champ de variation est borné et fermé; les dérivées des x^α existent et remplissent des conditions de Hölder, et les m jacobiens ne s'annulent simultanément nulle part; enfin $\mathfrak{S} + \mathfrak{C}$ n'a pas de point multiple. Les hypothèses sur $\mathfrak{T} + \mathfrak{C}$ sont exactement les mêmes que les hypothèses sur $\mathfrak{S} + \mathfrak{C}$, et en outre $\mathfrak{T}$ n'a pas de point commun avec $\mathfrak{S}$. Enfin considérons les paramètres directeurs $\bar{\omega}_\alpha$ de la normale à $\mathfrak{T} + \mathfrak{C}$ en un point Y variable sur $\mathfrak{C}$, cette normale étant dirigée vers l'extérieur de $\mathfrak{D}$: on suppose que la direction *transversale* $\Sigma_\beta a^{\alpha,\beta} \bar{\omega}_\beta$ est tangente au prolongement de $\mathfrak{S}$ au delà de $\mathfrak{T}$ (par conséquent l'angle de $\mathfrak{S}$ et de $\mathfrak{T}$ n'est pas rentrant); si les $\bar{\omega}'_\alpha$ sont les paramètres directeurs de la normale à $\mathfrak{S} + \mathfrak{C}$, on a donc $\Sigma_{\alpha,\beta} a^{\alpha,\beta} \bar{\omega}_\alpha \bar{\omega}'_\beta = 0$.

$\mathfrak{D}$ étant ainsi défini, nous nous donnons sur $\mathfrak{S} + \mathfrak{C}$ une fonction φ^* dont les dérivées existent et remplissent des conditions de Hölder; sur $\mathfrak{T} + \mathfrak{C}$, nous nous donnons deux fonctions ψ et φ, continues sans plus, dont la première sert à définir sur $\mathfrak{T} + \mathfrak{C}$ l'opération Θ. Aux points de $\mathfrak{C}$, la valeur de Θu, relative à $\mathfrak{T} + \mathfrak{C}$ pour toute fonction u qui prend sur $\mathfrak{S}$ les valeurs φ^*, peut se calculer à l'aide de φ^*: nous supposons que cette valeur est égale à φ. Le problème mixte que nous avons en vue est le suivant:

Trouver une solution u, régulière dans $\mathfrak{D}$, de l'équation

$$\mathfrak{F} u = f,$$

telle que u soit continu dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S} + \mathfrak{T} + \mathfrak{C}$, et telle en outre qu'on ait

$$u = \varphi^* \quad \text{sur} \quad \mathfrak{S} + \mathfrak{C}, \quad \Theta u = \varphi \quad \text{sur} \quad \mathfrak{T} + \mathfrak{C}.$$

Pour résoudre ce problème, nous commençons par former, sur $\mathfrak{V}$ ou dans l'espace euclidien, un domaine borné $\mathfrak{D}_1$, contenant $\mathfrak{D} + \mathfrak{T}$, et dont la frontière $\mathfrak{S}_1$ contient $\mathfrak{S} + \mathfrak{C}$; en outre cette frontière $\mathfrak{S}_1$ doit satisfaire aux hypothèses antérieures relatives à $\mathfrak{M}$ (chap. I, § 2) et être dépourvue de points multiples; d'après nos hypothèses, la formation de $\mathfrak{D}_1$ est possible. Nous formons ensuite, à partir de $\mathfrak{D}_1$, la variété $\mathfrak{W}$ dont il a été parlé au paragraphe 1, et nous définissons, sur $\mathfrak{W}$ entier, le tenseur fondamental $(g_{\alpha,\beta})$ et l'opération $\mathfrak{F}$, comme il a été expliqué.

3. Fonction de Green d'un problème mixte. Nous nommerons maintenant $\mathfrak{M}$ l'ensemble de $\mathfrak{S}_1$, de la partie de l'ancienne variété $\mathfrak{M}$ située dans $\mathfrak{D}_1$, et de la variété symétrique de celle-ci. Soit $\mathfrak{T}'$ la variété symétrique de $\mathfrak{T}$; $\mathfrak{T}+\mathfrak{C}+\mathfrak{T}'$ est la frontière d'un domaine pris sur $\mathfrak{W}$ et formé de $\mathfrak{S}$, de $\mathfrak{D}$ et du domaine $\mathfrak{D}'$ symétrique de $\mathfrak{S}$. Nous définissons sur $\mathfrak{T}'$ l'opération Θ en prenant pour ψ toujours les mêmes valeurs en deux points symétriques.

Nous supposons d'abord que c est négatif ou nul en tout point de $\mathfrak{D}-\mathfrak{M}$, et ψ positif ou nul sur tout $\mathfrak{T}$; en outre nous supposons qu'ou bien c est négatif en un point de $\mathfrak{D}-\mathfrak{M}$, ou bien ψ est positif en un point de $\mathfrak{T}$. Nous allons prouver *qu'il existe alors une et une seule fonction $F^*(X,\Xi)$, solution régulière dans $\mathfrak{D}+\mathfrak{D}'+\mathfrak{S}-\Xi$ de l'équation $\mathfrak{F}F^*=0$, devenant infinie à la façon des fonctions de Green quand X tend vers Ξ, pourvu que Ξ appartienne à $\mathfrak{D}+\mathfrak{D}'+\mathfrak{S}$, et qui, quand X vient sur $\mathfrak{T}+\mathfrak{T}'+\mathfrak{C}-\Xi$, satisfait à la condition $\Theta F^*=0$.*

Nous remarquons que la variété $\mathfrak{T}+\mathfrak{T}'+\mathfrak{C}$ satisfait aux hypothèses dans lesquelles nous savons résoudre le second type de problèmes (chap. I, § 5) pour chacun des domaines qu'elle sépare; cela découle de ce que, dans le système des variables y^α adoptées pour un point de $\mathfrak{C}$ et pour son voisinage (§ 1), on a $\overline{\omega}_m=0$. Par conséquent l'existence de F^* est un cas particulier de ce qui a déjà été vu (chap. I, § 5), et l'on sait aussi que F^* est unique.

Il est évident qu'on a $F^*(X',\Xi')=F^*(X,\Xi)$. Alors la fonction

$$F(X,\Xi)=F^*(X,\Xi)-F^*(X,\Xi'),$$

où X et Ξ appartiennent à $\mathfrak{D}+\mathfrak{S}+\mathfrak{T}+\mathfrak{C}$, est continue relativement à l'ensemble des deux point tant que ceux-ci sont distincts; elle est une solution régulière de l'équation $\mathfrak{F}F=0$ dans le domaine $\mathfrak{D}-\Xi$; elle s'annule quand l'un des points X et Ξ vient sur $\mathfrak{S}+\mathfrak{C}$, les deux points restant distincts, et elle remplit la condition $\Theta F=0$ en tout point X de $\mathfrak{T}+\mathfrak{C}-\Xi$; enfin $F-G$ est continu même quand les deux points coïncident dans $\mathfrak{D}$. Cette fonction F est la *fonction de Green de notre problème mixte* par définition.

Les fonctions $F(X,\Xi)$ qui rempliraient toutes ces conditions, même en supprimant les restrictions imposées plus haut à c et à ψ, se nommeront encore des *fonctions de Green*, pour les problèmes mixtes correspondants.

4. Solution du problème mixte. Nous commençons par construire une fonction w, prenant les valeurs φ^* sur $\mathfrak{S}$; cette fonction et ses dérivées devront être continues dans $\mathfrak{D}+\mathfrak{S}+\mathfrak{T}+\mathfrak{C}$, et l'on devra pouvoir lui appliquer l'opération $\mathfrak{F}$ en tout point de $\mathfrak{D}-\mathfrak{M}$, le résultat de cette opération devant être $O(r^{k-1})$. Pour cela, on prolonge φ^* sur la totalité de $\mathfrak{S}_1$, de façon que les dérivées de cette fonction existent et remplissent partout des conditions de Hölder; d'après les démonstrations auxquelles nous avons renvoyé à propos du premier type de problèmes (chap. I, § 5), nous savons trouver dans $\mathfrak{D}_1+\mathfrak{S}_1$ une fonction continue w, égale à φ^* sur $\mathfrak{S}_1$, et telle que, par exemple, on ait dans $\mathfrak{D}_1$,

$$\mathfrak{F}w - cw = 0,$$

car certainement cette équation possède effectivement une telle solution; on a bien $\mathfrak{F}w = O(r^{k-1})$, et les dérivées de w remplissent des conditions de Hölder dans $\mathfrak{D}_1+\mathfrak{S}_1$ (h, chap. IV, § 2). Alors la fonction $v = u - w$ doit être dans $\mathfrak{D}$ une solution régulière de de $\mathfrak{F}v = f - \mathfrak{F}w$, elle doit s'annuler sur $\mathfrak{S}+\mathfrak{C}$ et remplir sur $\mathfrak{T}+\mathfrak{C}$ la condition $\Theta v = \varphi - \Theta w$, dont le second membre, d'après nos hypothèses, est continu et s'annule sur $\mathfrak{C}$.

Si l'on prolonge une solution v de ce problème dans la région $\mathfrak{D}'+\mathfrak{T}'$, en décidant que ses valeurs en deux points symétriques sont opposées, la fonction v est solution, régulière (h, chap. II, § 16) dans $\mathfrak{D}+\mathfrak{S}+\mathfrak{D}'$, de l'équation

$$\mathfrak{F}v = f_1,$$

où f_1 est une fonction qui prend toujours des valeurs opposées en deux points symétriques, et qui coïncide dans $\mathfrak{D}-\mathfrak{M}$ avec $f - \mathfrak{F}w$; sur $\mathfrak{T}+\mathfrak{T}'+\mathfrak{C}$, on a $\Theta v = \varphi_1$, où φ_1 prend toujours des valeurs opposées en deux points symétriques et coïncide sur $\mathfrak{T}+\mathfrak{C}$ avec $\varphi - \Theta w$, de sorte que φ_1 est continu sur $\mathfrak{T}+\mathfrak{T}'+\mathfrak{C}$. Cette fonction v est donc une solution d'un problème du second type. Soient $c-\chi$ et $\psi-\omega$ deux fonctions remplissant respectivement les mêmes hypothèses que c et ψ, y compris les hypothèses sur la symétrie, mais la première est négative dans tout $\mathfrak{D}-\mathfrak{M}$, et la seconde positive sur tout $\mathfrak{T}$; si $F^*(X, \Xi)$ est la fonction de Green correspondant aux opérations $\mathfrak{F}v - \chi v$ et $\Theta v - \omega v$ et au domaine $\mathfrak{D} + \mathfrak{S} + \mathfrak{D}'$, v est donc donné par l'équation

$$(1) \qquad v(X) = -\int\limits_{\mathfrak{D}+\mathfrak{D}'}^{(m)} F^*(X, A)[f_1(A) - \chi(A)v(A)]\, dV_A + \int\limits_{\mathfrak{T}+\mathfrak{T}'}^{(m-1)} F^*(X, B)[\varphi_1(B) - \omega(B)v(B)]\, dS_B,$$

dont on désire la ou les solutions qui prennent toujours des valeurs opposées en deux points symétriques. De toute solution $v(X)$ de cette équation de Fredholm, on peut en déduire une autre qui prend toujours des valeurs opposées en deux points symétriques, et qui par suite remplit toutes les conditions voulues, à savoir la solution $\frac{v(X) - v(X')}{2}$. D'ailleurs si l'on introduit la fonction de Green $F(X, \Xi) = F^*(X, \Xi) - F^*(X, \Xi')$, relative au domaine $\mathfrak{D}$ et aux opérations $\mathfrak{F}v - \chi v$ et $\Theta v - \omega v$ (§ 3), les fonctions v en question satisfont dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S} + \mathfrak{T} + \mathfrak{C}$ à l'équation de Fredholm

$$(2) \qquad v(X) = -\int\limits_{\mathfrak{D}}^{(m)} F(X, A)[f_1(A) - \chi(A)v(A)]\, dV_A + \int\limits_{\mathfrak{T}}^{(m-1)} F(X, B)[\varphi_1(B) - \omega(B)v(B)]\, dS_B;$$

réciproquement toute solution de cette équation (2) s'annule sur $\mathfrak{S}$ et, si on la prolonge dans $\mathfrak{D}'$ de façon qu'elle prenne en deux points symétriques toujours des valeurs opposées, elle satisfait à l'équation (1), et elle est par suite une solution de notre problème.

Il est donc démontré que le problème mixte considéré ici équivaut à la résolution d'une équation de Fredholm, à savoir l'équation (2).

En particulier, si le problème homogène correspondant n'admet que la solution zéro, le problème donné admet une solution et une seule. Il en est notamment ainsi dans le cas où c est négatif ou nul en tout point de $\mathfrak{D} - \mathfrak{M}$, et ψ positif ou nul en tout point de $\mathfrak{T}$; le cas où c et ψ seraient identiquement nuls n'est pas à exclure (comme il arrive dans le second type de problèmes), car la condition de s'annuler sur $\mathfrak{S}$ entraîne qu'une solution constante est nulle.

Si le problème homogène admet des solutions non identiquement nulles, et si toutes celles-ci dérivent de p solutions linéairement indépendantes, le problème proposé n'est soluble que moyennant p conditions. Pour simplifier, soit $\varphi^* = 0$ la fonction donnée sur $\mathfrak{S}$. Soient $v_1, \ldots, v_p$ des solutions linéairement indépendantes du *problème homogène adjoint*, c'est-à-dire de l'équation

$$(3)\quad v(X) - \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F(A, X)\,\chi(A)\,v(A)\,dV_A + \int_{\mathfrak{T}}^{(m-1)} F(B, X)\,\omega(B)\,v(B)\,dS_B = 0;$$

alors on vérifiera sans peine que les conditions nécessaires et suffisantes pour la solubilité du problème donné sont

$$\int_{\mathfrak{D}}^{(m)} v_n f\,dV - \int_{\mathfrak{T}}^{(m-1)} v_n \varphi\,dS = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, p).$$

Si l'opération $\mathfrak{G}$ adjointe à $\mathfrak{F}$ existe et satisfait aux mêmes hypothèses que $\mathfrak{F}$, le problème adjoint est identique au problème mixte relatif à l'opération $\mathfrak{G}$, et à l'opération Z (chap. I, § 6) sur la partie $\mathfrak{T}$ de la frontière[1]).

Bonny-sur-Loire, le 15 décembre 1933.

---

[1]) La même méthode s'applique au cas où l'on remplace la condition de Neumann par une condition du troisième type décrit plus haut (chap. I, § 5), pourvu que, sur $\mathfrak{C}$, cette condition se réduise au type de Neumann. Pour le même domaine, on peut traiter d'une façon semblable le problème de Dirichlet. Enfin si l'on donne une condition de Neumann sur une des deux parties de la frontière, un changement d'inconnue permet encore d'introduire une symétrie (§ 1) *(ajouté sur l'épreuve)*.