ÉLÉMENTS
D'ARITHMÉTIQUE,

PAR

M. BOURDON,

Commandeur de la Légion d'honneur, Conseiller honoraire de l'Université, ancien Examinateur d'Admission à l'École Polytechnique, Membre de plusieurs Sociétés savantes.

OUVRAGE ADOPTÉ PAR L'UNIVERSITÉ.

TRENTE-QUATRIÈME ÉDITION.

Rédigée conformément aux nouveaux Programmes de l'enseignement dans les Lycées.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

—

1867

Copie de la circulaire de Monsieur le Ministre de l'Instruction publique *à MM. les Recteurs :*

Du 17 octobre 1838.

Monsieur le Recteur,

« Les principaux Libraires de Paris qui s'occupent de la publication des Livres employés dans l'enseignement, en me faisant connaître qu'il existe de nombreuses contrefaçons de ces ouvrages, se plaignent de la facilité avec laquelle elles sont introduites dans les Colléges et dans les Écoles primaires, où leur prix semble, disent-ils, les faire préférer aux éditions originales. De là le double inconvénient de propager l'usage d'*éditions incorrectes* et de décourager les Éditeurs légitimes qui, trompés dans leurs prévisions, sont souvent forcés de renoncer, au détriment de la science, à améliorer et même à publier des ouvrages qu'ils craignent de ne pouvoir exploiter sans dommage et sans trouble.

» Vous voudrez bien, en conséquence, Monsieur le Recteur, inviter les chefs d'établissement d'instruction secondaire et d'instruction primaire à prendre des précautions pour qu'*aucune édition contrefaite* ne soit à l'avenir admise dans les Colléges et dans les Écoles. Vous appellerez leur attention sur les inconvénients qui résultent, pour les études, de l'*incorrection de ces éditions*. Il y a d'ailleurs, dans le fait de la contrefaçon, une action coupable que la loi et la morale réprouvent également, et dont aucun membre de l'Université ne voudra, j'en suis assuré, se rendre complice. Je vous invite à rappeler à MM. les chefs d'établissement de tous les degrés qu'ils ne doivent employer que des Livres régulièrement approuvés ou autorisés par l'Université, et à leur faire remarquer que comme l'indication du nom de l'Éditeur accompagne toujours le titre des ouvrages dans les notifications des décisions dont ces ouvrages ont été l'objet, toute erreur est facile à éviter. L'intérêt des études leur prescrit d'y veiller.

» *Le Ministre de l'Instruction publique, grand maître de l'Université,*

» Signé Salvandy. »

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, les griffes de l'Auteur et de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Gauthier-Villars

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

AVERTISSEMENT.

En publiant une nouvelle édition de mes ÉLÉMENTS D'ARITHMÉTIQUE, j'ai voulu la mettre en rapport avec les Programmes actuels d'enseignement.

Je me suis trouvé ainsi conduit, tout en conservant la méthode que j'avais précédemment adoptée, à revoir et à compléter quelques théories.

La DIVISION est présentée comme dépendant de soustractions successives, à la manière de CONDORCET, et traitée de telle sorte qu'on arrive sans difficulté au *cas le plus général*. Une *méthode d'essai* très-simple, que j'avais déjà indiquée dans les dernières éditions, mais sans la faire suffisamment ressortir, donne le moyen de reconnaître, *à priori*, pour chaque division partielle, le véritable chiffre du quotient.

Les PROPRIÉTÉS DES NOMBRES, les principes sur la *divisibilité*, et les importantes théories qui en découlent, viennent *immédiatement après* les quatre opérations fondamentales sur les nombres entiers.

En adoptant cet ordre d'idées comme le plus rationnel, j'ai eu soin de réduire le développement de ces propriétés et de leurs conséquences à leur partie vraiment essentielle, afin de parer, autant que possible, à l'inconvénient de placer les élèves, presque dès le début, en face de théories trop abstraites.

Les FRACTIONS ORDINAIRES se trouvant à la suite des principes sur lesquels se fondent les principales opérations qu'elles comportent, forment maintenant un ensemble complet.

La théorie des NOMBRES COMPLEXES, présentée comme *appendice* au calcul des FRACTIONS, est réduite aux opérations les plus simples. La *multiplication* n'y est traitée que sur *un seul exemple,* et comme moyen d'initier à la *méthode* dite des *parties aliquotes.*

La théorie des FRACTIONS DÉCIMALES est complétée par des développements assez étendus sur les *approximations;* la comparaison des deux *systèmes de poids et mesures* conduit naturellement à l'exposition d'une *méthode abrégée* pour la *multiplication.*

Les *approximations* occupent également une place importante dans le chapitre des EXTRACTIONS DE RACINES, qui est terminé par des notions sur le *calcul des radicaux* ayant pour *indice* une puissance de 2. La *racine carrée* y est *seule* traitée avec détail.

La théorie des RAPPORTS et PROPORTIONS, si importante dans la GÉOMÉTRIE, est divisée en deux parties, dont la première précède la résolution des questions qui dépendent des *grandeurs proportionnelles,* questions traitées d'ailleurs par la *méthode de réduction à l'unité.*

Le complément de cette théorie sert d'introduction à celle des PROGRESSIONS et des LOGARITHMES.

Les *logarithmes* sont exposés de manière à faire concevoir, *arithmétiquement*, la possibilité de l'existence des *Tables*, et à éviter l'emploi des *logarithmes négatifs*; en sorte qu'ils restent véritablement dans le domaine de l'ARITHMÉTIQUE.

Le *calcul des nombres approximatifs* fait l'objet principal du dernier chapitre, où sont complétées quelques-unes des théories précédentes, et où sont exposées des *méthodes abrégées* pour la *division* et l'*extraction de la racine carrée.*

Enfin, deux *Notes* sont consacrées, l'une aux *différents systèmes de numération*, l'autre au développement d'un procédé pour calculer l'expression $\sqrt{a^2+b^2}$, *sans extraction de racine*, et *sans qu'il soit besoin de former d'autre carré que celui du plus petit* des deux nombres a et b.

On peut, d'après cet exposé sommaire, juger des principales modifications que j'ai fait subir à mon ouvrage.

Retiré depuis longtemps de l'enseignement, j'aurais hésité à entreprendre ce travail si je n'avais dû trouver un collaborateur dévoué dans mon fils, Henri Bourdon, ancien élève de l'École Polytechnique.

TABLE DES MATIÈRES.

ÉLÉMENTS

D'ARITHMÉTIQUE.

INTRODUCTION.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. On appelle *grandeur* ou *quantité* tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution.

Par exemple, les lignes, les surfaces, les temps, les poids, sont des grandeurs; de même, toute collection ou réunion d'objets de même nature, par exemple, d'arbres, d'hommes, de maisons, etc., est une grandeur, en tant que cette collection est susceptible d'augmentation ou de diminution.

On ne peut se former une idée bien exacte d'une grandeur, qu'en la rapportant à une autre grandeur de même espèce; et cette seconde grandeur, destinée à servir de terme de comparaison à toutes les grandeurs de la même espèce, s'appelle UNITÉ. Ainsi, quand nous disons qu'un mur a *vingt mètres* de longueur, nous sommes censés avoir acquis déjà l'idée de *l'unité de longueur* appelée *mètre*, et nous supposons qu'après avoir porté vingt fois le mètre sur la longueur du mur, on soit arrivé tout à fait au bout.

L'unité, en Mathématiques, *est* donc *une grandeur d'une espèce quelconque, servant de terme de comparaison à toutes les grandeurs de même espèce;* d'où il suit qu'il y a autant d'espèces d'unités que d'espèces de grandeurs.

L'unité est dite *arbitraire* quand l'espèce de grandeur à laquelle elle appartient peut varier d'une manière *continue*, c'est-à-dire augmenter ou diminuer d'aussi peu que l'on veut, comme une *ligne*, un *temps*, etc. Au contraire, elle est *donnée* par la nature même de la grandeur, toutes les fois que celle-ci augmente ou diminue d'une manière brusque ou *discontinue;* tels sont les différents genres de collections. Ainsi, dans un groupe d'arbres, considéré comme quantité, c'est nécessairement l'*arbre* qui est l'*unité*.

On appelle *nombre* le résultat de la comparaison d'une grandeur quelconque à son unité.

Un nombre est dit *entier*, lorsqu'il exprime l'unité ou la collection de plusieurs unités de *même espèce*.

Ainsi *un* franc, *vingt* mètres, *trente* grammes, *huit*, *onze*, *quinze* unités d'une espèce quelconque, sont des nombres *entiers*.

Un nombre est dit *fractionnaire*, quand il exprime, soit *une partie* de l'unité, soit l'assemblage d'*un entier* et d'*une partie* de l'unité.

Une *fraction* est, à proprement parler, une partie de l'unité. Toutefois, on comprend souvent sous le nom générique de *fraction* le nombre *fractionnaire* tel qu'il vient d'être défini.

2. Lorsqu'en énonçant un nombre, on ajoute à la suite de l'énoncé le nom qui désigne l'espèce de grandeur dont il s'agit, ce nombre s'appelle *concret*. Ainsi, *cinq mètres*, *quinze heures*, *six lieues*, sont des *nombres concrets*.

La première fois que l'on prononce un nombre, on ne peut y attacher de sens qu'en se représentant une unité d'une certaine espèce, à laquelle on compare une autre grandeur de la même espèce. Mais peu à peu l'esprit, qui s'accoutume aux abstractions, parvient à se peindre une collection de plusieurs objets semblables, mais quelconques, dont chacun est l'unité. Dans ce cas, la collection s'appelle *nombre abstrait*, parce qu'en l'énonçant on fait *abstraction* de l'espèce d'unité à laquelle on la rapporte.

Dans l'exposition des procédés relatifs aux diverses opérations que l'on peut avoir à effectuer sur les nombres, on doit les envisager comme des *nombres abstraits*, pour que ces procédés soient établis de manière à pouvoir être appliqués à toutes les questions possibles.

DE LA NUMÉRATION.

3. Les premières recherches sur les nombres ont dû nécessairement avoir pour objet de leur donner des noms faciles à retenir; et comme *il existe une infinité de nombres*, puisqu'un nombre quelconque étant déjà formé, on peut toujours y ajouter une nouvelle unité, ce qui donne lieu à un nouveau nombre susceptible lui-même d'être augmenté d'une unité, il a fallu trouver le moyen d'*exprimer tous les nombres avec un système limité de mots combinés entre eux d'une manière convenable*. Tel est l'objet de la *numération parlée*.

Il y a plus : les mots qui composent la nomenclature des nombres étant généralement composés de plusieurs sons et variables avec les différentes langues, on a dû inventer, pour les remplacer, une écriture abrégée et plus générale, au moyen de laquelle l'esprit pût saisir avec facilité, et indépendamment de la parole, les raisonnements qu'on est obligé de faire pour découvrir les propriétés des nombres, ou les lois de leurs diverses combinaisons. Tel est le but de la *numération écrite*, laquelle consiste à *représenter les nombres à l'aide d'un nombre limité de caractères* ou CHIFFRES.

4. *Numération parlée.* — Quoique la nomenclature des nombres soit connue de la plupart des personnes pour lesquelles ce Traité est composé, il nous paraît nécessaire d'en exposer une analyse succincte, mais raisonnée.

Les premiers nombres sont : *un* (ou l'unité considérée *seule*), *deux* (ou une unité plus une unité), *trois* (ou deux unités plus une unité), *quatre*, *cinq*, *six*, *sept*, *huit*, *neuf*.

En ajoutant une nouvelle unité au nombre *neuf*, on a le nombre *dix*, qu'on regarde comme une nouvelle espèce d'unité appelée *dizaine* ou *unité du second ordre*, par opposition à l'unité primitive que l'on nomme *unité simple* ou *unité de premier ordre*.

On compte par *dizaines* comme on a compté par *unités simples*; ainsi l'on dit : une dizaine, deux dizaines, trois dizaines, quatre, cinq, six, sept, huit et neuf dizaines; ou bien, *dix*, *vingt*, *trente*, *quarante*, *cinquante*, *soixante*, *septante*, *octante*, *nonante*. Aux trois derniers mots, quoique conformes à l'analogie, on a substitué les mots : *soixante-dix*, *quatre-vingts*, *quatre-vingt-dix*. Ce sont des expressions consacrées par l'usage.

Entre *dix* et *vingt*, il existe neuf autres nombres, qui sont : *dix-un*, *dix-deux*, *dix-trois*, *dix-quatre*, *dix-cinq*, *dix-six*, *dix-sept*, *dix-huit*, *dix-neuf*; mais au lieu des six premières dénominations, l'usage a substitué les mots : *onze*, *douze*, *treize*, *quatorze*, *quinze* et *seize*.

Entre *vingt* et *trente*, il existe aussi neuf nombres qui s'énoncent de cette manière : *vingt-un*, *vingt-deux*, *vingt-trois*, *vingt-quatre*,..., *vingt-neuf*.

On a de même neuf nombres entre *trente* et *quarante*, entre *quarante* et *cinquante*, etc.; on parvient ainsi au nombre *nonante-neuf*, ou *quatre-vingt-dix-neuf*.

Ce dernier nombre augmenté d'*un*, donne *dix dizaines* ou le nombre *cent*, qu'on regarde comme une nouvelle unité appelée *centaine*, ou *unité du troisième ordre*.

On compte par *centaines*, comme on a compté par *dizaines* et par *unités simples*. Ainsi *cent*, *deux cents*, *trois cents*, *quatre cents*,..., *huit cents*, *neuf cents*, expriment des collections d'une centaine, de deux, de trois,..., huit, neuf centaines.

En plaçant successivement entre les mots : *cent* et *deux cents*, *deux cents* et *trois cents*,..., *huit cents* et *neuf cents*, et à la suite de *neuf cents*, les noms de nombre compris depuis *un* jusqu'à *quatre-vingt-dix-neuf*, on a formé les noms de tous les nombres depuis *cent* jusqu'à *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf* (*).

Nous pouvons remarquer déjà que, dans les énoncés de tous ces nombres, on n'emploie que les mots génériques, *un*, *deux*, *trois*, *quatre*, *cinq*, *six*, *sept*, *huit*, *neuf*, *dix*, *vingt*, *trente*, *quarante*, *cinquante*,

---

(*) Tant que le mot *cent* n'est suivi d'aucun autre nom de nombre, il est déclinable; dans le cas contraire, il est indéclinable. Il en est de même du mot *vingt*.

soixante et *cent*. Nous ne parlerons pas des six autres mots, *onze*, *douze*, . . ., *seize*, dont on aurait pu se passer à la rigueur.

En ajoutant *un* au nombre *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, on obtient une collection de *dix centaines*, ou le nombre *mille*, qui forme *l'unité de mille*, ou l'*unité du quatrième ordre*.

Parvenu à ce nombre, on est convenu, pour ne pas trop multiplier les mots, de regarder *mille* comme une *seconde unité principale* devant le nom de laquelle on place les noms des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres. Ainsi l'on dit : *un mille, deux mille* (*),. . ., *neuf mille, dix mille, onze mille*, . . ., *vingt mille, vingt-un mille*, . . ., *cent mille, deux cent mille*, . . ., *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille*.

Une *dizaine de mille* forme d'ailleurs l'*unité du cinquième ordre*; une *centaine de mille*, l'*unité du sixième ordre*.

En plaçant à la suite d'un nombre quelconque de *mille* les noms de tous les nombres inférieurs à *mille*, on peut énoncer tous les nombres jusqu'à *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*.

Ce dernier nombre, augmenté d'*un*, donne *dix cent mille* ou *mille mille*, collection à laquelle on a donné le nom de *million*, et qui donne une *troisième unité principale* ; de même une collection de *mille millions* s'appelle *billion* (ou *milliard*); une collection de *mille billions* se nomme *trillion*, . . .; et chacune de ces collections est une nouvelle *unité principale*.

On compte d'ailleurs par *millions, billions, trillions*, comme on a compté par *mille*; et il est aisé de voir qu'en joignant aux mots génériques indiqués ci-dessus, les mots *mille, million, billion, trillion, quatrillion, quintillion, etc.*, on formera la nomenclature de tous les nombres entiers imaginables.

Un *million* est, du reste, l'*unité du septième ordre*; une *dizaine de millions*, l'*unité du huitième ordre*; une *centaine de millions*, l'*unité du neuvième ordre*, etc.

5. *Numération écrite.* — Quelque simple que soit la nomenclature des nombres, on éprouverait beaucoup de peine à combiner entre eux plusieurs nombres un peu considérables, si l'on n'avait des moyens abrégés de les écrire. Or c'est à quoi l'on peut parvenir facilement pour peu qu'on réfléchisse sur cette nomenclature. En effet, observons que parmi les mots employés pour exprimer les nombres, les uns, tels que *un, dix, cent, mille, cent mille, million, dix millions*, expriment les unités des différents ordres, tandis que les mots *un, deux, trois*, . . ., *neuf*, expriment combien de fois chacune de ces sortes d'unités entre dans un nombre.

Cela posé, si l'on convient d'abord de représenter les neuf premiers

(*) Le mot *mille* est toujours indéclinable quand il désigne un nombre.

nombres par les caractères ou chiffres

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
un,	*deux,*	*trois,*	*quatre,*	*cinq,*	*six,*	*sept,*	*huit,*	*neuf,*

toute la difficulté consistera à trouver un moyen de faire exprimer à ces chiffres les différents ordres d'unités que le nombre proposé renferme.

Or, en établissant ce principe de pure convention, que *tout chiffre placé à la gauche d'un autre exprime des unités de l'ordre immédiatement supérieur à celles de cet autre chiffre*, ou, en d'autres termes, que, *lorsque plusieurs chiffres sont écrits les uns à la suite des autres, le premier chiffre à droite exprime des unités simples, le chiffre immédiatement à gauche exprime des unités de dizaines*, ou simplement *des dizaines, le troisième chiffre de droite à gauche exprime des centaines, le quatrième, des mille, le cinquième, des dizaines de mille, etc.;* il est aisé de voir qu'on pourra, en général, représenter tous les nombres à l'aide des caractères précédents.

Soit, par exemple, à exprimer en chiffres le nombre

trois cent soixante-dix-neuf.

Ce nombre se compose évidemment de 9 *unités*, plus 7 *dizaines*, plus 3 *centaines*, et doit, par conséquent, d'après le principe établi ci-dessus, s'écrire ainsi :

379.

De même, le nombre *vingt-huit mille deux cent quarante-sept*, se composant de 7 unités, 4 dizaines, 2 centaines, 8 mille et 2 dizaines de mille, sera représenté par l'ensemble des cinq chiffres

28247.

Caractère 0. — Il y a cependant des nombres qu'on ne peut écrire en ne faisant usage que des neuf chiffres précédents.

Soient à écrire en chiffres les nombres *dix*, *vingt*, *trente*, . . . , *quatre-vingts*, *quatre-vingt-dix ;* ces nombres ne contenant pas d'unités simples, on a dû adopter *un chiffre qui n'ait aucune valeur par lui-même*, mais qui serve à tenir la place des unités de chaque ordre qui manque dans l'énoncé du nombre. Ce chiffre est 0, que l'on prononce *zéro*. A l'aide de ce caractère, les nombres *dix*, *vingt*, *trente*, *etc.*, se représentent par 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

Par la même raison, les nombres *cent*, *deux cents*, *trois cents*, *etc.*, ne renfermant ni unités simples ni dizaines, s'écrivent : 100, 200, 300, 400, . . . , 900.

En général, le *zéro* est un chiffre qui n'a aucune valeur par lui-même, mais que l'on emploie pour tenir lieu des différents ordres d'unités qui peuvent manquer dans l'énoncé d'un nombre.

Les autres chiffres, appelés *chiffres significatifs*, ont deux espèces de valeurs : l'une nommée *absolue*, qui n'est autre chose que celle du chiffre considéré seul ; l'autre appelée *relative*, c'est celle que le chiffre acquiert d'après la place qu'il occupe à la gauche d'autres chiffres.

Maintenant, si l'on réfléchit que tout nombre énoncé se compose d'*unités simples*, de *dizaines*, de *centaines*, *etc.*; que la collection des unités de chaque ordre est tout au plus égale à *neuf;* que, dans le cas où le nombre est privé de certains ordres d'unités, on a un caractère pour en indiquer la place, on sera convaincu qu'il n'y a pas de nombre entier qui ne puisse être exprimé à l'aide d'une certaine combinaison des *dix* caractères 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Soit, pour nouvel exemple, le nombre *deux cent huit mille dix-neuf* à écrire en chiffres.

Ce nombre contient 9 *unités simples*, 1 *dizaine*, 8 *unités de mille* et 2 *centaines de mille;* mais il n'y a ni *centaines simples* ni *dizaines de mille*. Il suffit donc d'écrire les chiffres 9, 1, 0, 8, 0, 2, à la suite les uns des autres, en allant de droite à gauche, et le nombre s'écrit :

208019.

Soit encore le nombre *trente-six billions cinq cent millions vingt mille quatre cent sept.*

Ce nombre se compose de 7 *unités simples*, 0 *dizaines*, 4 *centaines;* 0 *unités de mille*, 2 *dizaines de mille*, 0 *centaines de mille ;* 0 *unités de millions*, 0 *dizaines de millions*, 5 *centaines de millions ;* 6 *unités de billions* et 3 *dizaines de billions ;* il doit donc s'écrire :

36500020407.

Le système de numération qui vient d'être exposé a reçu la dénomination de *système décimal*, parce qu'il faut, dans ce système, *dix* unites d'un certain ordre pour former *une* unité de l'ordre supérieur, ou parce qu'on y emploie *dix* chiffres pour exprimer tous les nombres. Le nombre *dix* s'appelle LA BASE du système.

6. Faisons maintenant une observation importante : il résulte de la nomenclature, que tout nombre écrit en chiffres se divise en *centaines*, *dizaines* et *unités* SIMPLES ; en *centaines*, *dizaines* et *unités* de MILLE ; en *centaines*, *dizaines* et *unités* de MILLIONS, *etc.*, c'est-à-dire en TRANCHES d'*unités simples*, de *mille*, *millions*, *billions*, *etc.*, dont chacune se compose de *trois* chiffres, excepté la dernière qui est celle des unités les plus fortes, et qui peut n'avoir que *deux* chiffres ou même qu'*un seul*.

Lors donc que l'on s'est familiarisé avec la manière d'écrire les nombres de trois chiffres, il faut écrire successivement les unes à la suite des autres, en allant de droite à gauche, la *tranche des unités*, la *tran-*

che des mille, celle des millions, celle des billions, etc., ou plutôt, en commençant par la gauche, *écrire d'abord la tranche des unités les plus fortes, et à sa droite les autres tranches par ordre de grandeur des unités.*

C'est de cette seconde manière qu'on doit s'y prendre pour écrire en chiffres un nombre dicté en langage ordinaire, et qui n'est pas déjà écrit en toutes lettres; mais il faut avoir bien soin de ne pas omettre les *zéros* destinés à remplacer les ordres d'unités qui manquent; et il ne peut jamais y avoir d'embarras à ce sujet, puisqu'on sait que chaque tranche, excepté la première à gauche, doit toujours renfermer trois chiffres.

Soit, pour dernier exemple, à écrire le nombre *quatre cent six billions vingt-huit millions deux cent cinquante mille quarante-huit.*

Écrivez à la droite les unes des autres la tranche des *billions*, la tranche des *millions*, la tranche des *mille*, enfin celle des *unités simples ;* vous aurez :

406,028,250,048.

7. C'est sur l'observation précédente qu'est fondé le moyen de traduire en langage ordinaire un nombre quelconque écrit en chiffres :

Après avoir séparé le nombre en tranches de trois chiffres chacune, à commencer par la droite, énoncez successivement chacune des tranches, en partant de la première tranche à gauche, et en ayant soin de donner à chaque tranche le nom qui lui convient.

Soit le nombre 70345601.

Ce nombre étant ainsi partagé :

70,345,601,

se compose de *soixante-dix* MILLIONS, *trois cent quarante-cinq* MILLE, *six cent un.*

On trouvera pareillement que 5302400056702, ou bien

5,302,400,056,702,

exprime le nombre *cinq* TRILLIONS, *trois cent deux* BILLIONS, *quatre cent* MILLIONS, *cinquante-six* MILLE, *sept cent deux.*

NOTIONS SUR LES FRACTIONS.

8. Dans l'exposé que nous venons de faire de la numération, nous n'avons considéré que les *nombres entiers*. Il nous reste à indiquer le moyen d'énoncer et d'écrire en chiffres les *fractions*.

Mais, auparavant, il est nécessaire de donner une idée claire et précise de cette sorte de nombres, tels qu'on les considère en Arithmétique.

Supposons qu'on ait à déterminer *la longueur d'une pièce d'étoffe*.

En prenant l'unité de longueur appelée *mètre*, et la portant une fois, deux fois, en un mot autant de fois que possible sur la longueur de la pièce, il arrivera de deux choses l'une : ou, après que l'unité aura été portée un certain nombre de fois, 15 fois par exemple, sur la longueur de la pièce, il ne restera rien ; ou bien, on obtiendra un reste plus petit que le mètre. Dans le premier cas, la pièce contiendra *un nombre entier* de mètres, savoir 15 mètres. Dans le second cas, à ces 15 mètres il faudra, pour avoir la longueur totale, joindre la *fraction* ou la *partie* de mètre qui reste.

Mais comment évaluer cette *partie?* comment la comparer à l'unité?

On pourra d'abord concevoir l'unité divisée en deux parties égales, ou en *deux moitiés ;* et si le *reste* est justement égal à l'une de ces moitiés, on dira que la pièce d'étoffe a 15 mètres et *demi* de long.

Si le *reste* est plus petit ou plus grand que la moitié du mètre, on concevra cette *moitié* divisée en *deux* nouvelles parties égales, appelées *quarts ;* et si ce quart peut être porté *une* fois ou *trois* fois juste sur le *reste*, on dira que le *reste* est égal *au quart* ou *aux trois quarts* du mètre.

Au lieu de diviser l'unité en *deux* ou en *quatre* parties égales, on peut aussi bien la concevoir divisée en *trois* parties égales, appelées *tiers*, en *cinq* parties égales, appelées *cinquièmes*, en *six*, appelées *sixièmes*, etc.

Admettons, pour fixer les idées, que le mètre ait été divisé en *douze* parties égales appelées *douzièmes*, et que ce *douzième* soit porté *sept* fois juste *sur le reste*, on dira que ce *reste* est égal à *sept* fois le *douzième* ou aux *sept douzièmes* du mètre. Donc la pièce d'étoffe aura 15 mètres et *sept douzièmes* de mètre en longueur.

La quantité *sept douzièmes* de mètre se nomme *une fraction* de mètre.

En général, pour se former une idée nette d'une *fraction d'unité* d'espèce quelconque, il faut concevoir cette unité divisée en un certain nombre *entier* de parties égales et supposer que l'on prenne *une*, *deux*, *trois*, *quatre*, *etc.*, de ces parties ; l'ensemble des parties que l'on prend est ce qui constitue *la fraction*.

Ainsi l'énoncé d'une *fraction* comprend nécessairement deux nombres entiers, savoir : *celui qui désigne en combien de parties égales l'unité a été divisée :* on l'appelle DÉNOMINATEUR ; et *celui qui marque combien il faut de ces parties pour former la fraction :* on l'appelle NUMÉRATEUR.

Par exemple, *cinq huitièmes de mètre*, *treize vingtièmes de franc*, *etc.*, sont des *fractions*. Dans la première, on conçoit que le mètre est divisé en huit parties égales nommées *huitièmes*, et que l'on prend cinq de ces huitièmes; *huit* est le dénominateur, et *cinq* le numérateur. Dans la seconde, le franc est conçu divisé en vingt parties égales appelées *vingtièmes*, et l'on en prend *treize*; le dénominateur est *vingt*, et *treize* est le numérateur.

Il résulte encore de là qu'une *fraction* est une grandeur rapportée à une *partie de l'unité principale*, partie qu'on peut elle-même considérer comme une sorte d'*unité secondaire*. Ainsi la fraction *treize vingtièmes* de mètre étant composée de treize fois le *vingtième* d'un mètre, ce vingtième est une unité particulière que la fraction proposée contient *treize* fois.

Deux fractions sont dites *de même espèce* lorsque leur dénominateur est *le même*. Par exemple, *cinq douzièmes, sept douzièmes, onze douzièmes*, sont des fractions de *même espèce*; mais *trois quarts* et *deux tiers* sont des fractions d'espèces *différentes*, parce que les dénominateurs sont différents.

Cela posé, pour exprimer une *fraction* en chiffres, on est convenu de placer le numérateur au-dessus du dénominateur, en interposant une barre. Ainsi la fraction *trois quarts* se désigne par $\frac{3}{4}$, *sept douzièmes* par $\frac{7}{12}$, *vingt-trois trente-cinquièmes* par $\frac{23}{35}$.

Réciproquement, $\frac{7}{8}$, $\frac{13}{15}$, $\frac{47}{72}$, représentent les fractions *sept huitièmes, treize quinzièmes, quarante-sept soixante-douzièmes*. Pour énoncer une fraction, on énonce d'abord le numérateur, puis le dénominateur; et à la fin de l'énoncé, on ajoute la terminaison *ième* (*).

NOTIONS SUR LES QUATRE OPÉRATIONS FONDAMENTALES.

9. Les principes de la numération étant complétement établis, nous allons voir comment les besoins de l'homme en société le conduisent journellement à résoudre des questions pour lesquelles il est obligé de combiner deux ou plusieurs nombres, soit de même nature, soit de nature différente.

Ces combinaisons constituent les *opérations de l'Arithmétique* ou le *calcul numérique*.

Afin d'en faire connaître l'origine et la liaison, nous nous proposerons quelques questions relatives au commerce.

Première question. — *Un marchand de drap a vendu à une première personne*, 5 *mètres* $\frac{2}{3}$ *d'une certaine étoffe; à une seconde per-*

(*) Il y a une exception à faire pour les mots *demi, tiers, quart*, qui remplacent respectivement les mots *deuxième, troisième, quatrième*.

sonne, 7 *mètres* $\frac{1}{2}$; *à une troisième,* 12 *mètres* $\frac{3}{4}$ *de la même étoffe; il désire connaître le nombre total des mètres vendus.*

Il faut, pour cela, qu'il réunisse en un seul nombre les trois nombres de mètres vendus; en d'autres termes, qu'il fasse l'ADDITION de ces *trois nombres composés d'entiers et de fractions.*

DEUXIÈME QUESTION. — *Ces trois nombres de mètres ayant été levés sur une même pièce dont la longueur était de* 30 *mètres* $\frac{2}{3}$, *le marchand veut savoir ce qui doit lui rester.*

Il cherchera la différence entre le nombre 30 $\frac{2}{3}$ qui exprimait la longueur primitive de la pièce, et le nombre total de mètres vendus, c'est-à-dire qu'il sera conduit à SOUSTRAIRE *le second nombre du premier.*

TROISIÈME QUESTION. — *Une personne a acheté* 48 *mètres d'une certaine marchandise à raison de* 25 *francs le mètre ; on demande la somme qu'elle doit payer pour les* 48 *mètres.*

Il est clair que pour obtenir le prix cherché, on doit prendre 48 fois 25 francs, ou faire un total de 48 nombres égaux à 25 francs. Cette opération s'appelle MULTIPLICATION, et n'est qu'une espèce *d'addition :* elle consiste à ajouter ensemble plusieurs nombres égaux.

Reprenons la même question, en changeant toutefois les valeurs des nombres ou des *données de la question.*

Une personne a acheté $\frac{7}{12}$ *de mètre d'une certaine marchandise à raison de* $\frac{17}{20}$ *de franc le mètre; on demande ce qu'elle doit payer pour les* $\frac{7}{12}$ *de mètre.*

On conçoit que si le mètre coûte $\frac{17}{20}$ de franc, $\frac{7}{12}$ de mètre, qui ne sont qu'une *partie* du mètre, doivent coûter une *partie* de $\frac{17}{20}$ marquée par $\frac{7}{12}$; c'est-à-dire que, pour obtenir la réponse à la question, il faudra prendre les $\frac{7}{12}$ de $\frac{17}{20}$; et cette opération s'appelle une *multiplication de fractions.* On la nomme ainsi parce que la question qui y donne lieu est absolument la même, aux *données* près, qu'une autre question qui conduirait à une *multiplication de nombres entiers.*

Au premier abord, le mot *multiplication*, qui présente généralement une idée d'*augmentation*, ne semble pas propre à désigner une opération qui consiste à prendre d'un nombre une *partie* indiquée par une fraction. Mais on a trouvé le moyen de lier la multiplication des nombres entiers et la multiplication des fractions, en disant que *multiplier un nombre, quel qu'il soit, par un autre, c'est former un troisième nombre qui soit composé avec le premier, comme le second est composé avec l'unité*. Si les deux nombres sont *entiers*, il est clair, d'après cette définition, qu'il suffit de prendre le premier *autant de fois* qu'il y a d'unités dans le second ; et si les deux nombres sont des *fractions*, il faut prendre de la première fraction *une partie* marquée par la seconde.

QUATRIÈME QUESTION. — *Une personne a acheté* 12 *mètres d'une certaine étoffe pour* 84 *francs ; on demande le prix du mètre.*

On conçoit que, si ce prix était connu, en le prenant 12 fois, ou en le multipliant par 12, on devrait avoir un résultat égal à 84. La question conduit donc à *trouver un troisième nombre qui, multiplié par le second* 12, *reproduise le premier* 84. Cette opération a reçu le nom de DIVISION.

Pour rendre raison de cette dénomination, qui donne l'idée de la séparation d'un nombre en plusieurs parties égales, supposons que l'on ait à *partager également une somme de* 84 *francs entre* 12 *personnes*.

Il est clair que, si la part de chaque personne était connue, en la multipliant par 12, on devrait reproduire 84. On voit donc que :

Diviser un nombre 84 *en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans un nombre* 12, et *chercher un troisième nombre qui, multiplié par un second* 12, *reproduise le premier* 84, sont *deux opérations identiques*.

Reprenons la même question que ci-dessus, mais sur des données *fractionnaires. Une personne a acheté* $\frac{5}{6}$ *de mètre pour* $\frac{19}{20}$ *de franc ; on demande le prix du mètre.*

La question se réduit, également, dans ce cas, à trouver un troisième nombre tel, qu'en en prenant les $\frac{5}{6}$, ou en le multipliant par $\frac{5}{6}$, on reproduise $\frac{19}{20}$. On a donc encore une *division* à effectuer, dans le sens qui vient d'être attribué à ce mot, et non dans le sens d'une séparation en parties égales.

Ainsi, après avoir vu que les combinaisons des nombres entre eux constituent les *opérations* de la science à laquelle on a donné le nom d'*Arithmétique*, on reconnaît combien il importe d'établir des procédés pour exécuter ces *opérations* : c'est là l'objet spécial de cette science.

L'ARITHMÉTIQUE *a* donc *pour objet spécial d'établir des règles fixes et certaines pour effectuer toutes les opérations possibles sur les nombres.*

Cette première partie des Mathématiques comprend, en outre, l'*étude des propriétés des nombres*, propriétés qui ont été découvertes à l'occasion des recherches qu'on a dû faire pour parvenir à ces règles, et pour en faciliter l'application.

Nous exposerons successivement ces règles et ces propriétés, en rappelant (n° 2) que, pour les rendre indépendantes des diverses espèces de questions, il convient de considérer les nombres comme des *nombres abstraits*. Toutefois, dans les applications destinées à familiariser les commençants avec les procédés, nous pourrons nous proposer des questions relatives à des *nombres concrets*.

CHAPITRE PREMIER.

Des quatre opérations fondamentales sur les nombres entiers.

DE L'ADDITION.

10. L'Addition a pour but de *réunir plusieurs nombres en un seul;* ou, en d'autres termes, de *former un nombre qui contienne à lui seul autant d'unités qu'il y en a dans ces divers nombres considérés séparément.*

Le résultat de cette opération s'appelle *somme* ou *total.*

L'*addition* des nombres d'un seul chiffre n'offre aucune difficulté; on apprend, dès l'âge le plus tendre, à faire ces additions au moyen des doigts, et l'on finit par s'en graver les résultats dans la mémoire.

Ainsi, soit à ajouter les nombres 5, 7, 4, 8 et 6;

On dit : 5 et 7 font 12 (*), et 4 font 16, et 8 font 24, et 6 font 30; donc 30 est la somme demandée.

On trouverait de même que 42 est la somme des nombres 7, 9, 6, 5, 8, 7.

Soient maintenant les nombres 7453 *et* 1534 *qu'on se propose d'additionner.*

Il est évident qu'on obtiendra la *somme* demandée en additionnant successivement les *unités,* les *dizaines,* les *centaines* et les *mille,* qui entrent dans les deux nombres proposés.

A cet effet, on dispose les nombres de la manière suivante :

$$\begin{array}{r} 7453 \\ 1534 \\ \hline 8987 \end{array}$$

Après avoir placé une barre horizontale au-dessous du second nombre, on dit, en commençant par les *unités simples :* 3 et 4 font 7, nombre qu'on place sous les *unités.*

Passant aux *dizaines,* 5 et 3 font 8, qu'on écrit au rang des *dizaines*

(*) L'emploi des doigts pour parvenir à ce nombre 12, suppose des additions successives d'une unité. Ainsi l'on dit : 5 et 1 font 6, et 1 font 7, et 1 font 8, etc., ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait ajouté à 5 toutes les unités du nombre 7.

En général, il est difficile d'établir par quelles opérations de l'esprit on obtient les résultats de ces additions élémentaires; et l'on peut dire, jusqu'à un certain point, que chacun a une manière plus ou moins simple d'y parvenir.

Puis, 4 et 5 font 9, qu'on écrit au-dessous des *centaines*.

Enfin, 7 et 1 font 8, qu'on écrit au rang des *mille*.

Le nombre 8987, trouvé par cette opération, est la *somme* cherchée.

Soit encore proposé d'*ajouter les quatre nombres* 5047, 859, 3507, 846.

$$\begin{array}{r} 5047 \\ 859 \\ 3507 \\ 846 \\ \hline 10259 \end{array}$$

On les écrit comme ci-dessus, et l'on dit, en commençant par les *unités :* 7 et 9 font 16, et 7 font 23, et 6 font 29; on place les 9 *unités simples* sous la première colonne, et l'on retient les *dizaines* pour les joindre aux chiffres de la colonne suivante, qui expriment aussi des *dizaines*.

Passant à cette colonne, on dit: 2 de retenue et 4 font 6, et 5 font 11, et 0 font 11, et 4 font 15; on écrit 5 au rang des *dizaines*, et l'on retient 1 *centaine* qu'on reporte à la colonne des *centaines*.

Opérant sur cette colonne comme sur les précédentes, on trouve 22 *centaines*, ou 2 *centaines*, qu'on écrit sous les *centaines*, et 2 *mille* qu'on retient pour les reporter à la colonne des *mille*.

Enfin, 2 de retenue et 5 font 7, et 3 font 10; on place le chiffre 0 sous les *mille*, et le chiffre 1 à gauche de ces *mille ;* ce qui donne 10259 pour la somme demandée.

Règle générale. — Pour additionner plusieurs nombres entre eux, *commencez par écrire ces nombres les uns au-dessous des autres, de manière que les unités d'un même ordre soient dans une même colonne verticale, et soulignez le dernier nombre*. Puis, *ajoutez respectivement les chiffres de chaque colonne, à partir de la colonne des unités simples, et en passant successivement d'une colonne à celle qui est à sa gauche : écrivez au-dessous de la barre la somme des chiffres de chaque colonne, si cette somme est exprimée par un seul chiffre : mais si elle surpasse* 9 (auquel cas elle est exprimée par plusieurs chiffres dont celui de droite représente des unités de cette colonne, et les autres à gauche, des dizaines du même ordre), *écrivez seulement au-dessous de chaque colonne, le chiffre des unités de cette colonne, et retenez les dizaines, pour les ajouter aux chiffres de la colonne immédiatement à gauche.*

Après avoir ainsi opéré sur toutes les colonnes, vous aurez placé sous la barre la somme demandée; puisque ce résultat provient de la réunion des *unités, dizaines, centaines, etc.*, qui entrent dans les nombres proposés.

11. *Remarque*. — Si la somme des chiffres contenus dans chaque colonne devait être tout au plus égale à 9, il serait indifférent de commencer l'opération par l'addition des unités simples, ou bien par celle des unités de la plus haute espèce. Mais comme il arrive, généralement, que plusieurs de ces sommes surpassent 9, si l'on commençait par *la gauche*, on serait souvent obligé de revenir sur ses pas, pour rectifier un chiffre qu'on aurait écrit, et l'augmenter d'autant d'unités que l'on aurait obtenu de dizaines d'unités de la colonne suivante, en opérant sur cette colonne. Voilà pourquoi il convient, dans tous les cas, de *commencer par la droite* plutôt que par la gauche.

DE LA SOUSTRACTION.

12. La SOUSTRACTION a pour but de *chercher l'excès d'un nombre sur un plus petit.*

Cet *excès* s'appelle encore reste ou *différence.*

On peut, aussi, définir la *soustraction* une opération qui a pour but : *Étant donnés la somme de deux nombres et l'un d'eux, trouver l'autre nombre ;* et, sous ce point de vue, la *soustraction* est l'inverse de l'*addition.*

Tant que les nombres proposés ne sont que d'*un seul* chiffre, la soustraction est facile. Ainsi la différence de 9 à 6 est 3; ou bien ôtez 6 de 9, il reste 3. De même 5 de 7, il reste 2.

Il est encore aisé de soustraire un nombre qui n'a qu'*un* chiffre, d'un autre qui en a *deux*, lorsque le reste doit lui-même n'en avoir qu'*un seul.* Ainsi, ôtez 7 de 13, il reste 6, puisque 7 et 6 font 13; de même 9 de 17, il reste 8, puisque 9 et 8 font 17.

Ces opérations, qui supposent seulement l'exercice de la mémoire sur l'*addition* des nombres d'un seul chiffre, servent de base à la *soustraction* des nombres de plusieurs chiffres.

Soit premièrement à *soustraire* 5467 de 8789 :

$$\begin{array}{r} 8789 \\ 5467 \\ \hline 3322 \end{array}$$

Après avoir placé le plus petit nombre au-dessous du plus grand et tiré une barre, on dit, en commençant par les *unités simples :* 7 de 9, il reste 2, qu'on place sous la colonne des *unités ;* passant aux *dizaines*, 6 de 8, il reste 2, que l'on écrit au rang des *dizaines ;* opérant de même sur les *centaines* et sur les *mille*, 4 de 7, il reste 3, et 5 de 8, il reste 3; ce qui donne enfin 3322 pour le *reste demandé.*

En effet, par la nature même des opérations qui viennent d'être faites, on voit que le plus grand nombre contient, *de plus* que le second, 2 *unités simples*, plus 2 *dizaines*, plus 3 *centaines,* plus 3 *unités de mille,* et, par conséquent, *surpasse* le plus petit nombre de 3322.

Proposons-nous, pour second exemple, de *trouver la différence qui existe entre les deux nombres* 83456 et 28784 :

$$\begin{array}{r} 83456 \\ 28784 \\ \hline 54672 \end{array}$$

Ayant disposé les deux nombres comme dans l'exemple précédent, on dit d'abord : 4 de 6, il reste 2, qu'on écrit sous les *unités*.

Mais lorsqu'on passe à la colonne des *dizaines*, il se présente une difficulté : le chiffre 8 de la ligne inférieure est plus fort que le chiffre 5 de la ligne supérieure, et ne peut, par conséquent, en être soustrait. Pour lever cette difficulté, on prend, par la pensée, sur le chiffre des *centaines* du nombre supérieur, 1 *centaine* valant 10 *dizaines* que l'on ajoute aux 5 *dizaines* qui existent déjà, ce qui donne 15; puis on dit : 8 de 15, il reste 7, qu'on écrit au rang des *dizaines*.

Passant à la colonne des *centaines*, on observe que le chiffre 4 de la ligne supérieure doit être *diminué* de 1, puisqu'on a disposé de cette unité dans la soustraction précédente; alors on dit : 7 de 3, cela ne se peut; mais en ajoutant, comme tout à l'heure, 1 *mille* valant 10 *centaines,* ce qui donne 13 *centaines,* on ôte 7 de 13, et il reste 6, que l'on écrit au rang des *centaines*.

Passant aux *mille :* 8 de 2, cela ne se peut ; mais 8 de 12, il reste 4, qu'on écrit au rang des *mille*.

Enfin, comme le chiffre 8 des *dizaines de mille* doit, à raison de l'opération précédente, être remplacé par 7, on dit : 2 de 7, il reste 5.

Ainsi, le *reste demandé,* ou l'*excès* du plus grand nombre sur le plus petit, est 54672.

Pour bien comprendre comment, par ce moyen, on parvient au but qu'on s'est proposé, il suffit de remarquer que, d'après les artifices employés pour effectuer les soustractions partielles, on peut disposer les deux nombres de la manière suivante :

	Dizaines de mille.	Mille.	Centaines.	Dizaines.	Unités.
1er nombre. .	7	12	13	15	6
2e nombre. .	2	8	7	8	4
	5	4	6	7	2

D'où l'on voit que le nombre supérieur contient, *de plus* que le nombre inférieur, 2 *unités*, 7 *dizaines*, 6 *centaines*, 4 *mille* et 5 *dizaines de mille*, ou le *surpasse* de 54672 *unités*.

Soit, pour troisième exemple, à *retrancher* 158529 *de* 300405 :

$$\begin{array}{r} 99\ 9 \\ 300405 \\ 158529 \\ \hline 141876 \end{array}$$

Comme 9, chiffre des unités du nombre inférieur, est plus fort que 5, chiffre correspondant du nombre supérieur, on doit prendre 1 *dizaine* sur le premier chiffre à gauche ; mais ce chiffre étant un 0, il faut avoir recours au chiffre 4 *des centaines*, sur lequel on prend 1, qui vaut 10 *dizaines ;* et puisqu'on n'a besoin que *d'une* seule *dizaine*, on en laisse 9 *au-dessus* du 0 ; puis on ajoute 1 *dizaine* à 5, ce qui donne 15, et l'on dit : 9 de 15, il reste 6, qu'on écrit sous les *unités.*

Passant aux *dizaines*, on dit : 2 de 9, il reste 7.

Pour les *centaines*, comme le chiffre 4 de la ligne supérieure doit être remplacé par 3, et qu'on ne peut soustraire 5 de 3, on a recours au premier chiffre à gauche ; mais celui-ci et le chiffre qui est à sa gauche étant des *zéros*, on prend *une unité* sur le chiffre significatif 3 ; cette unité en vaut 10 de l'ordre suivant, 100 de l'ordre des *mille ;* et puisque l'on n'a besoin que d'*une seule* unité de cet ordre, on en laisse 99 qu'on reporte sur les deux zéros ; ajoutant 1 *mille* à 3 *centaines*, on obtient 13, et l'on dit : 5 de 13, il reste 8, qu'on place sous la colonne des *centaines*.

Dans les soustractions suivantes, chacun des 0 étant remplacé par un 9, on dit : 8 de 9, il reste 1 ; et 5 de 9, il reste 4.

Passant à la première colonne à gauche, on dit : 1 de 2 (car le chiffre 3 est diminué de 1), il reste 1 ; ainsi l'on a pour le *reste demandé*, 141876.

En effet, si l'on réfléchit sur la manière dont le nombre supérieur a été décomposé, on peut disposer ainsi l'opération :

	Cent. de mille.	Diz. de mille.	Mille.	Centaines.	Dizaines.	Unités.
1er nombre.	2	9	9	13	9	15
2e nombre.	1	5	8	5	2	9
	1	4	1	8	7	6

Donc le nombre supérieur *surpasse* le nombre inférieur de 6 *unités*, 7 *dizaines*, 8 *centaines*, 1 *mille*, 4 *dizaines de mille*, 1 *centaine de mille*, ou de 141876.

Règle générale. — *Pour soustraire d'un nombre un autre nombre plus petit, placez le second au-dessous du premier, de manière que les unités d'un même ordre soient sur une même colonne, puis tirez une barre, soustrayez ensuite successivement les unités du plus petit nombre, des unités du plus grand, les dizaines des dizaines, les centaines des centaines, etc., et écrivez les restes partiels les uns à côté des autres, en allant de la droite vers la gauche ;* le nombre exprimé par l'ensemble de ces chiffres est le *reste complet*, ou le *résultat demandé.*

Lorsqu'un chiffre de la ligne inférieure est plus fort que le chiffre de la ligne supérieure, augmentez par la pensée ce dernier chiffre, de 10 *unités, et diminuez le chiffre qui est à sa gauche, d'une unité.*

Si, immédiatement à la gauche d'un chiffre supérieur, plus faible *que le chiffre inférieur correspondant, se trouvent un ou plusieurs zéros, augmentez, toujours par la pensée, ce chiffre supérieur, de* 10 *unités; mais, dans les soustractions suivantes, remplacez les zéros par des* 9, *et diminuez d'une unité le chiffre significatif supérieur qui est immédiatement à la gauche de ces zéros.*

On trouvera, d'après ce procédé, que si de........ 603000401
on soustrait.................................. 305724787
le résultat de l'opération est...................... 297275614

13. *Remarque.* — Si chacun des chiffres du nombre inférieur était moindre que le chiffre supérieur correspondant, il serait indifférent de commencer l'opération par la gauche ou par la droite. Mais comme il arrive généralement qu'un chiffre de la ligne inférieure surpasse celui de la ligne supérieure, l'opération ne peut s'exécuter que par une espèce d'emprunt fait sur le chiffre, ou l'un des chiffres à gauche de celui sur lequel on opère : dès lors, il est nécessaire de *commencer par la droite*, afin de pouvoir faire les emprunts dont on a besoin.

14. Autre procédé pour effectuer la soustraction.

Commençons par remarquer que l'*on peut augmenter les deux termes d'une soustraction, d'un même nombre d'unités, sans altérer la différence qui existe entre ces nombres.*

Car si, *d'une part*, on augmente la différence de 10, par exemple, en augmentant le plus grand nombre de 10, il est clair que, *d'autre part*, on la diminue de 10 en augmentant en même temps le plus petit nombre de 10.

C'est ainsi que la différence entre 12 et 7 étant 5, la différence entre 12 *plus* 6 et 7 *plus* 6, c'est-à-dire entre 18 et 13, est encore 5.

De même, la différence entre 24 et 17 étant 7, la différence entre 24 *plus* 9 et 17 *plus* 9, c'est-à-dire entre 33 et 26, est encore 7.

Cela posé, voici en quoi consiste le second procédé :

Reprenons le deuxième exemple ci-dessus :

83456
28784
54672

Après avoir soustrait 4 de 6, ce qui donne 2, on passe à la colonne des *dizaines*, et l'on dit : 8 de 5, cela ne se peut; mais 8 de 15, reste 7.

Passant à la colonne des *centaines* (au lieu de diminuer, comme dans le premier procédé, le chiffre 4 d'une unité), on le laisse tel qu'il est, et l'on *augmente* le chiffre inférieur, 7, de 1, puis on dit : 8 de 14, reste 6.

(Cette unité, que l'on ajoute au chiffre 7, est précisément la *centaine* dont on a augmenté les 5 *dizaines* du nombre supérieur, pour rendre possible la seconde soustraction partielle; et il y a compensation.)

Passant à la colonne des *mille*, au lieu de dire : 8 de 12, on dit : 9 de 13, reste 4.

(L'unité que l'on ajoute au chiffre 8 est précisément l'*unité de mille* dont on a augmenté le chiffre 4 pour rendre possible la troisième soustraction partielle ; et il y a compensation.)

Passant enfin à la dernière colonne, on dit: 3 de 8, reste 5.

(L'unité que l'on ajoute au chiffre 2 est précisément la *dizaine de mille* dont on a augmenté le chiffre 3 pour rendre possible la quatrième soustraction.)

On obtient ainsi pour résultat : 54672.

Reprenons encore le troisième exemple :

$$\begin{array}{r} 300405 \\ 158529 \\ \hline 141876 \end{array}$$

En procédant comme ci-dessus, on dit : 9 de 15, reste 6 ; 3 de 10, reste 7 ; 6 de 14, reste 8 ; 9 de 10, reste 1 ; 6 de 10, reste 4 ; enfin 2 de 3 reste 1 ; et la *différence demandée* est 141876.

Cette seconde manière d'opérer peut être figurée par le tableau suivant :

DEUXIÈME EXEMPLE.

Diz. de mille.	Mille.	Centaines.	Dizaines.	Unités.
8	13	14	15	6
3	9	8	8	4
5	4	6	7	2

TROISIÈME EXEMPLE.

Cent. de mille.	Diz. de mille.	Mille.	Centaines.	Dizaines.	Unités.
3	10	10	14	10	15
2	6	9	6	3	9
1	4	1	8	7	6

On voit facilement par cette disposition, que, dans le deuxième exemple, le nombre supérieur 83456 est augmenté de 11100 unités, et le nombre inférieur 28784, de 11100 unités ; donc, d'après le principe posé, il y a *compensation ;* que, dans le troisième exemple, le nombre supérieur 300405 est augmenté de 11110 unités, et le nombre inférieur 158529, de 11110 ; donc, il y a encore *compensation*.

Le second procédé, généralement plus simple et plus commode que le premier, dans la pratique, est surtout avantageux lorsque, dans le nombre supérieur, il y a un ou plusieurs *zéros* entre deux chiffres significatifs ; parce que, d'après cette manière d'opérer, il n'y a rien à changer aux chiffres du nombre supérieur.

N. B. — On doit avoir bien soin de n'augmenter un chiffre inférieur qu'autant que la soustraction partielle qui a précédé n'a pu se faire immédiatement.

Au reste, c'est principalement dans l'opération de la division, que le second procédé est véritablement indispensable.

Quoi qu'il en soit, nous engageons dès à présent les commençants à se familiariser avec les deux procédés.

Preuves de l'addition et de la soustraction.

15. On appelle *preuve d'une opération arithmétique*, une autre opération que l'on fait pour s'assurer de l'exactitude de la première.

La preuve de l'addition se fait en ajoutant de nouveau, mais à commencer *par la gauche*, les nombres qu'on a déjà ajoutés.

Après avoir fait la somme des chiffres qui se trouvent dans la première colonne à gauche, on la retranche de la partie qui lui répond dans la somme totale ; on écrit au-dessous le reste, qu'on réduit, par la pensée, *en unités de l'ordre du chiffre suivant, pour les joindre aux autres unités de cet ordre contenues dans la somme totale. — On fait, de même, la somme partielle des chiffres de la seconde colonne à gauche, et l'on retranche cette somme partielle de la partie de la somme totale qui lui correspond ; en continuant ainsi jusqu'à la dernière colonne, on doit trouver* 0 *pour le résultat de la dernière soustraction.*

Ainsi, après avoir trouvé que les quatre nombres

$$\begin{array}{r} 5047 \\ 859 \\ 3507 \\ 846 \\ \hline 10259 \\ \hline 2120 \end{array}$$

ont pour *somme*

pour vérifier ce résultat 10259, on ajoute les mêmes nombres en commençant par la gauche, et l'on dit : 5 et 3 font 8 *mille*, qui ôtés de 10 *mille* donnent pour reste 2 *mille*; ces 2 *mille*, ajoutés au chiffre 2 *centaines*, font 22 *centaines* ; ensuite, 8 et 5 font 13, et 8 font 21, que l'on ôte de 22, ce qui donne pour reste 1 *centaine*, laquelle réunie aux 5 *dizaines* forme 15 *dizaines* ; 4 et 5 font 9, et 4 font 13 ; 13 de 15, il reste 2, qui, suivi du 9, donne 29 ; enfin, 7 et 9 font 16, et 7 font 23, et 6 font 29 ; 29 de 29, il reste 0 ; donc l'opération est juste.

La preuve de la soustraction se fait *en ajoutant au plus petit nombre le reste trouvé par l'opération* ; et il est évident qu'on doit reproduire ainsi le plus grand nombre, puisque ce *reste* n'est autre chose que *l'excès* du plus grand nombre sur le plus petit.

Ainsi, dans l'exemple ci-dessous :

	83456
	28784
reste	54672
preuve	83456

Après avoir trouvé que 54672 est l'*excès* du plus grand nombre sur le plus petit, si l'on ajoute cet *excès* au nombre 28784, on doit retrouver 83456 ; ce qui a lieu en effet.

16. Voici encore divers exemples d'*additions* et de *soustractions* avec leurs *preuves :*

Additions.

83054	700548
256870	897597
748759	6588
90874	69764
130909	407300
8746	987847
	1207046
1319212	4276690
324330	3243340

Soustractions.

4073050062	20004001003
2803767086	8405128605
1269282976	11598872398
4073050062	20004001003

PROBLÈME. — *Un banquier avait en caisse une somme de* 65750 *fr., mais il a fait divers payements. Il a donné à une première personne,* 13259 *fr. ; à une seconde,* 18704 *fr. ; à une troisième,* 22050 *fr. ; à une quatrième,* 9850 *fr. ; et il veut connaître l'état de sa caisse après tous ces payements.*

Solution. — Après avoir *réuni en une seule* les quatre sommes payées successivement, le banquier *soustrait* la *somme totale* de celle qu'il avait en caisse ; et le résultat de cette soustraction exprime *ce qui doit lui rester.*

Tableau des opérations.

13259	65750	*montant de la caisse.*
18704	63863	*somme payée.*
22050	1887	*différence.*
9850		
63863		
21110		

Il doit *rester* au banquier 1887 francs.

On remarquera qu'en effectuant l'addition et la soustraction précédentes, on a considéré les nombres proposés comme *abstraits*, quoiqu'ils fussent *concrets* d'après l'énoncé; mais, parvenu au résultat 1887, on lui a donné le nom de l'espèce des unités exprimées dans l'énoncé. C'est ainsi qu'il faut toujours agir dans les applications. Les procédés des opérations étant tout à fait indépendants de la nature des nombres, on envisage ceux-ci sous un point de vue *purement abstrait*, sauf à donner ensuite au résultat final *le nom de l'unité* qu'indique l'énoncé de la question.

DE LA MULTIPLICATION.

17. *Multiplier un nombre par un autre, c'est* (nº 9) *former un troisième nombre qui soit composé avec le premier, comme le second est composé avec l'unité.*

Donc, pour les nombres entiers, c'est *prendre le premier autant de fois qu'il y a d'unités dans le second.*

On appelle *multiplicande* le nombre à multiplier, *multiplicateur* celui par lequel on multiplie, ou qui marque *combien de fois* on doit prendre le premier, et *produit* le résultat de la multiplication; les deux nombres proposés portent conjointement le nom de *facteurs* du produit.

A proprement parler, la multiplication des nombres entiers n'est autre chose qu'une addition; car, pour en obtenir le résultat, il suffirait de placer les uns au-dessous des autres *autant* de nombres égaux au multiplicande qu'*il y a* d'unités dans le multiplicateur, puis d'ajouter tous ces nombres entre eux.

Mais cette manière d'opérer serait très-longue si le *multiplicateur* était composé de plusieurs chiffres; on a donc cherché à la simplifier, et c'est dans cette abréviation que consiste, à proprement parler, le procédé de la *multiplication*.

18. Lorsque les deux *facteurs* sont exprimés chacun par *un seul* chiffre, le produit s'obtient par des *additions* successives du même nombre; ainsi, pour multiplier 7 par 5, on dit: 7 et 7 font 14, et 7 font 21, et 7 font 28, et 7 font 35; ce dernier nombre étant le résultat de l'*addition* de 5 nombres égaux à 7, exprime le produit de 7 par 5.

Les commençants doivent s'exercer d'abord à ces sortes de multiplications, afin de s'en graver les résultats dans la mémoire, et de pouvoir ensuite obtenir avec facilité les produits des nombres exprimés par *plusieurs* chiffres. Toutefois, jusqu'à ce qu'on se soit suffisamment exercé, on fera bien d'avoir sous les yeux une Table appelée *Table de multiplication* ou *Table de* Pythagore, du nom de son inventeur, ou, du moins, de celui qui, le premier, en a répandu l'usage.

Table de multiplication.

Sens horizontal.

Sens vertical.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La première bande horizontale de cette Table se forme en ajoutant 1 successivement à lui-même, jusqu'à ce qu'on soit parvenu au nombre 9;

La seconde, en ajoutant 2 successivement à lui-même huit fois de suite; la troisième, en ajoutant 3, et ainsi de suite.

Remarquons d'ailleurs qu'on peut également dresser cette Table par colonnes verticales.

Chaque colonne verticale est composée des mêmes nombres que la bande horizontale de même numéro.

Ainsi, la *sixième* bande horizontale se composant des nombres 6, 12, 18,..., 54, la *sixième* colonne verticale renferme *les mêmes* nombres 6, 12, 18,..., 54.

Cela posé, pour trouver, au moyen de cette Table, le *produit* de deux nombres exprimés par *un seul* chiffre, on cherche le *multiplicande* dans la première bande horizontale; et en partant de ce nombre, on descend *verticalement* jusqu'à ce qu'on soit vis-à-vis du *multiplicateur* qu'on trouvera dans la première colonne verticale : le nombre contenu dans la *case* correspondante est le *produit*.

Par exemple, pour trouver le *produit* de 8 par 5, on descend depuis 8, pris dans la première bande horizontale, jusque vis-à-vis de 5 pris dans la première colonne verticale ; et le nombre 40 contenu dans la petite case est le *produit* demandé.

On pourrait également prendre 8 dans la première colonne verticale, et se diriger *horizontalement* jusqu'au-dessous de 5 pris dans la première bande horizontale : on trouverait encore 40 pour le produit demandé.

19. Supposons maintenant que, le *multiplicande étant exprimé par plusieurs chiffres, le multiplicateur n'en ait qu'un seul.*

Soit à *multiplier* 8459 par 7.

On pourrait (n° **17**) obtenir le résultat en écrivant les uns au-dessous des autres 7 nombres égaux à 8459, comme on le voit ci-contre : . . . . et en ajoutant successivement les unités simples, les dizaines, les centaines, etc., on trouverait ainsi pour résultat, 59213.

$$\begin{array}{r} 8459 \\ 8459 \\ 8459 \\ 8459 \\ 8459 \\ 8459 \\ 8459 \\ \hline 59213 \end{array}$$

Mais il est évident que cela revient à prendre successivement 7 fois les 9 *unités* du multiplicande, 7 fois les 5 *dizaines*, etc., et à faire la somme de tous ces *produits*.

Ainsi, après avoir placé le multiplicateur 7 au-dessous du multiplicande, comme on le voit ici, et avoir souligné le tout, on dit, d'abord : 7 fois 9 font 63 (*voyez* la Table de multiplication), ou 6 *dizaines* et 3 *unités ;* on pose 3 sous les *unités,* et l'on retient les 6 *dizaines* pour les réunir au *produit* des *dizaines* du multiplicande par 7.

$$\begin{array}{r} 8459 \\ 7 \\ \hline 59213 \end{array}$$

On dit ensuite : 7 fois 5 font 35, et 6 de retenue font 41 *dizaines*, ou 4 *centaines* et 1 *dizaine ;* on pose 1 au rang des *dizaines*, et l'on retient les 4 *centaines*.

7 fois 4 font 28, et 4 de retenue font 32 *centaines*, ou 3 *mille* 2 *centaines ;* on pose 2 au rang des *centaines*, et l'on retient 3.

Enfin, 7 fois 8 font 56, et 3 de retenue font 59, que l'on écrit à gauche des *centaines*, parce qu'on est arrivé au dernier chiffre du multiplicande.

On trouve ainsi 59213 pour le *produit demandé*.

D'où l'on voit que :

Pour multiplier un nombre de *plusieurs* chiffres par un nombre d'*un seul* chiffre, *il faut multiplier successivement les unités, dizaines, centaines, etc., du multiplicande par le multiplicateur, en ayant soin, à chaque multiplication partielle, de retenir les dizaines pour les joindre avec les dizaines, les centaines pour les joindre avec les centaines, etc. ;* puis, *écrire à la gauche les uns des autres, et dans l'ordre des opérations partielles, les chiffres qui en résultent.*

Soit, pour second exemple, à *multiplier* 47008 *par* 9.

On dit d'abord : 9 fois 8 font 72 ; on écrit 2 au rang des unités, et l'on retient 7.

$$\begin{array}{r} 47008 \\ 9 \\ \hline 423072 \end{array}$$

Ensuite, 9 fois 0 donnent 0 ; mais comme, dans la première opération, on a retenu 7 *dizaines*, il faut les écrire au rang des *dizaines*.

9 fois 0 font 0 ; on écrit 0 au rang des centaines, puisqu'il n'y en a pas et qu'il faut cependant en conserver la place.

Ensuite, 9 fois 7 font 63, on pose 3 et l'on retient 6.

Enfin, 9 fois 4 font 36, et 6 de retenue font 42, que l'on écrit à gauche du chiffre précédent.

Ainsi le *produit demandé* est 423072.

20. Avant de passer au cas où le *multiplicateur* est composé de *plusieurs* chiffres, nous indiquerons le moyen de rendre un nombre 10, 100, 1000, etc., fois plus grand, ou de le *multiplier* par 10, 100, 1000, etc.

Il résulte évidemment du *principe fondamental* de la NUMÉRATION (n° **5**), que, si l'on place *un zéro* à la droite d'un nombre déjà écrit, chacun des chiffres significatifs de ce nombre, reculant d'*un* rang vers la gauche, exprime alors des unités 10 fois *plus grandes* qu'auparavant. De même, en plaçant *deux zéros* à sa *droite*, on le rend 100 fois *plus grand*, puisque chaque chiffre significatif exprime des unités 100 fois plus fortes, et ainsi de suite.

Donc, *pour multiplier un nombre entier quelconque par* 10, 100, 1000, *etc., il suffit d'écrire à sa droite* 1, 2, 3,..., *zéros*.

Ainsi, les produits de 439 par 10, 100, 1000, 10000, etc., sont 4390, 43900, 439000, 4390000, etc.

21. Considérons actuellement le cas où *le multiplicande et le multiplicateur sont composés de plusieurs chiffres*.

On propose de *multiplier* 87468 *par* 5847.

$$\begin{array}{r} 87468 \\ 5847 \\ \hline 612276 \\ 3498720 \\ 69974400 \\ 437340000 \\ \hline 511425396 \end{array}$$

On commence par disposer le multiplicateur au-dessous du multiplicande, de manière que les unités d'un même ordre soient dans une même colonne ; et l'on souligne le tout.

Cela posé, on observe que multiplier 87468 par 5847, revient à prendre le multiplicande 7 fois, plus 40 fois, plus 800 fois, plus 5000 fois, et à *réunir en un seul nombre* les produits partiels.

On peut, d'abord, trouver, d'après la règle du n° **19**, le produit de 87468 par 7 ; ce qui donne 612276.

Mais comment obtenir celui de 87468 par 40?

Concevons, pour un instant, qu'on ait écrit les uns au-dessous des autres, 40 nombres égaux à 87468; en faisant l'*addition* de tous ces nombres, on aura le *produit demandé*. Or, il est évident que ces 40 nombres forment 10 groupes de 4 nombres égaux chacun à 87468; mais 4 nombres égaux à 87468 font, en somme, 4 fois 87468, produit que l'on peut former par la règle du n° **19**, et qui est égal à 349872. En multipliant ce produit par 10, ce qui revient (n° **20**) à placer un 0 à sa *droite*, on obtient 3498720 pour le *produit* de 87468 par 40.

On voit donc que cette seconde opération revient à multiplier le *multiplicande* par le chiffre 4 considéré comme exprimant des *unités simples*, à écrire un *zéro* à la *droite* du produit, et à placer, comme on le voit ci-dessus, le résultat 3498720 ainsi obtenu, au-dessous du premier produit partiel.

Pareillement, pour effectuer la multiplication de 87468 par 800, il suffit de multiplier 87468 par 8, ce qui donne 699744, puis d'écrire deux *zéros* à la *droite* de ce produit; et l'on a pour troisième produit partiel 69974400, nombre qu'on place au-dessous des deux produits précédents. En effet, 800 nombres égaux à 87468 et placés les uns sous les autres, forment évidemment 100 groupes de 8 nombres égaux à 87468, ou bien 100 nombres égaux au produit de 87468 par 8, c'est-à-dire 69974400.

On prouverait par un raisonnement semblable, que pour multiplier le nombre 87468 par 5000, il suffit de le multiplier par 5, de placer trois *zéros* à la *droite* du produit, et d'écrire le résultat 437340000 ainsi obtenu, au-dessous des trois premiers produits.

Effectuant maintenant l'*addition* de ces quatre produits *partiels*, on trouve enfin pour le *produit total* 511425396.

N. B. — Dans la pratique, on se dispense de placer les *zéros* à la droite des produits partiels du multiplicande par les chiffres des dizaines, centaines, mille, etc., du multiplicateur; mais on écrit chaque produit partiel au-dessous du produit précédent, en le reculant d'*un* rang vers la *gauche* par rapport à ce produit, c'est-à-dire en faisant *occuper au premier chiffre à droite le même rang que celui qu'occupe le chiffre par lequel on multiplie.*

Règle générale. — Pour multiplier un nombre de *plusieurs* chiffres par un nombre de *plusieurs* chiffres, *multipliez d'abord tout le multiplicande par le chiffre des unités du multiplicateur* (d'après la règle du n° **19**)*; multipliez de même tout le multiplicande successivement par le chiffre des dizaines, par celui des centaines, etc., considérés comme des unités simples, et écrivez les produits partiels les uns au-dessous des autres de manière que chacun soit reculé d'un rang vers la gauche par rapport au précédent; puis additionnez ces produits ;* vous aurez le *produit total* demandé.

22. Souvent quelques-uns des chiffres du *multiplicateur* sont des *zéros;* et alors il faut apporter quelques modifications dans la disposition des produits partiels.

Soit à *multiplier* 870497 *par* 500407 :

$$
\begin{array}{r}
870497 \\
500407 \\
\hline
6093479 \\
3481988 \\
4352485 \\
\hline
435602792279
\end{array}
$$

On multiplie d'abord tout le multiplicande par 7; ce qui donne pour produit, 6093479.

Maintenant, comme il n'y a pas de *dizaines* au multiplicateur, on passe à la multiplication par 4, chiffre des *centaines* du multiplicateur, ce qui donne le produit 3481988; et comme il faut lui faire exprimer des *centaines*, on le place sous le premier produit, en le reculant de *deux* rangs vers la *gauche*.

Pareillement, comme il n'y a dans le multiplicateur ni *mille*, ni *dizaines de mille*, on passe à la multiplication par 5, chiffre des *centaines de mille;* et l'on écrit le produit 4352485 sous le précédent, en le reculant de *trois* rangs vers la gauche par rapport à celui-ci.

En général, *lorsqu'il se trouve un ou plusieurs zéros entre deux chiffres significatifs du multiplicateur, on recule le produit correspondant au chiffre significatif qui est à gauche de ces zéros, d'autant de rangs* PLUS UN *vers la gauche, par rapport au produit précédent, qu'il y a de zéros intermédiaires.* Au reste, pour éviter toute erreur à ce sujet, on peut s'assurer à chaque opération, si le *premier* chiffre à *droite* du produit partiel est *dans la colonne des unités de même ordre que celui du chiffre par lequel on multiplie.*

23. Si l'un des deux facteurs de la multiplication, ou tous les deux, sont *terminés* par des *zéros*, on abrége l'opération *en multipliant comme si ces zéros n'y étaient pas; mais on les place ensuite à la droite du produit.*

Soit à *multiplier* 47000 *par* 2900 :

$$
\begin{array}{r}
47000 \\
2900 \\
\hline
423 \\
94 \\
\hline
136300000
\end{array}
$$

Après avoir multiplié 47 par 29, d'après le procédé développé, on écrit 5 *zéros* à la *droite* du produit résultant; et l'on obtient 136300000 pour le *produit demandé.*

En effet, il est clair, d'abord, que si l'on avait 47000 à multiplier par 29, on devrait, après avoir multiplié 47 par 29, faire exprimer au produit, des unités de *même espèce* que le multiplicande, et, par conséquent, des *mille;* ainsi, il faudrait déjà écrire *trois zéros*. En second lieu, multiplier un nombre par 2900, revient (nº **21**) à prendre 100 fois le produit par 29; donc, il faut poser *deux* nouveaux zéros. Le même raisonnement s'appliquerait à tous les cas semblables.

24. Pour peu qu'on réfléchisse sur le procédé de la multiplication, on sent la nécessité de commencer l'opération par la *droite, du moins dans les multiplications partielles par chacun des chiffres du multiplicateur*, à cause des *retenues* que l'on fait continuellement en multipliant un chiffre du multiplicande par un chiffre du multiplicateur. Mais rien n'empêcherait d'intervertir l'ordre des multiplications partielles par les différents chiffres du multiplicateur, comme on peut le voir dans l'exemple suivant.

On a commencé ici la multiplication par le chiffre des *centaines* du *multiplicateur*, et l'on a placé les *unités* du produit sous les *centaines* du multiplicateur ; mais dans l'opération suivante, on a eu soin d'avancer le produit d'un rang *vers la droite*, c'est-à-dire de le placer au-dessous du premier de manière que le *dernier* chiffre fût au-dessous des *dizaines* des deux facteurs. De même, le troisième produit est avancé d'*un* rang vers la *droite*, par rapport au précédent.

$$\begin{array}{r} 5704 \\ 487 \\ \hline 22816 \\ 45632 \\ 39928 \\ \hline 2777848 \end{array}$$

Mais dans l'usage ordinaire, on forme les produits en allant de *droite à gauche*, parce que cela est plus naturel et plus commode.

25. Nous terminerons la théorie de la multiplication par la démonstration d'une propriété qui joue un très-grand rôle dans la science des nombres, et qui consiste en ce que, *dans toute multiplication de deux nombres abstraits, on peut intervertir l'ordre des facteurs sans changer leur produit*.

Ainsi le produit de 37 par 29 reste le même, soit que l'on multiplie 37 par 29, soit que l'on multiplie 29 par 37; de même le produit de 459 par 528 est égal au produit de 528 par 459, etc.

Pour se rendre compte de cette propriété sur les deux nombres 37 et 29, par exemple, on peut concevoir comme dans le tableau ci-dessous,

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,..., 37,
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1....
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,....
1, 1, 1, 1, 1. 1, 1,....
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,....
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,....
....
29,...,

qu'on ait écrit l'unité 37 fois sur une même ligne horizontale, et que l'on ait formé 29 lignes pareilles.

Cela posé, il est clair que la *somme totale* des unités contenues dans ce tableau est égale à *autant de fois* les 37 unités d'une ligne horizontale, *qu'il y a* d'unités dans une colonne verticale, ou dans 29; c'est-à-dire que cette *somme* est égale au produit de 37 par 29. Mais on peut dire aussi que cette *somme* est égale à *autant de fois* les 29 unités d'une colonne verticale, *qu'il y a* d'unités dans une ligne horizontale, ou dans 37; c'est-à-dire qu'elle est égale au produit de 29 par 37. Donc, le produit de 37 multiplié par 29 est *égal* au produit de 29 par 37.

Ce raisonnement est d'ailleurs applicable à deux nombres entiers quelconques; donc, etc. (*).

26. Nous nous bornerons, pour le moment, à faire connaître deux applications de ce principe.

1°. Supposons que la nature d'une question ait conduit à multiplier 75 par 5642.

On fera, de préférence, le produit de 5642 par 75, parce que l'on n'aura ainsi que *deux* produits partiels à former, tandis que l'on en aurait *quatre* en multipliant 75 par 5642.

2°. A l'aide de ce même principe, on pourrait rendre compte du procédé de la multiplication de deux nombres de *plusieurs chiffres*.

Reprenons le premier exemple (n° **21**),

87468 *à multiplier par* 5847.

Après avoir formé le premier produit partiel 612276, il faut former celui de 87468 par 40.

Or, multiplier 87468 par 40, revient, d'après le principe que nous venons de démontrer, à multiplier 40 par 87468, ou 4 *dizaines* par 87468; d'où il suit que le second produit partiel doit exprimer des *dizaines*, c'est-à-dire qu'il faut placer le *dernier chiffre à droite* dans la colonne des *dizaines* du produit total. De même, multiplier 87468 par 800, revient à multiplier 800 ou 8 *centaines* par 87468 : ainsi le produit de 8 par 87468, ou de 87468 par 8, doit exprimer des *centaines;* il faut, par conséquent, placer le *dernier chiffre* de ce produit au rang des *centaines*, *etc.*

On doit remarquer, d'ailleurs, que le principe de l'interversion de l'ordre des deux facteurs d'un produit, étant indépendant de tout procédé pour effectuer une multiplication, pourrait être établi avant que l'on développât la théorie de la multiplication.

(*) On pourrait déduire cette proposition de la Table même de PYTHAGORE, en observant la manière dont les nombres y sont disposés (n° **18**) : il suffirait, pour cela, de concevoir cette Table prolongée au delà d'une certaine limite, 10000 par exemple, si l'on n'avait à raisonner que sur des nombres au-dessous de cette limite; mais la démonstration qui vient d'être développée nous paraît préférable sous le rapport de la simplicité.

DE LA DIVISION.

27. *Diviser un nombre par un autre, c'est* (n° 9) *former un troisième nombre qui, multiplié par le second, reproduise le premier;* ou bien (n° **25**), *c'est former un troisième nombre tel, que le second multiplié par le troisième, reproduise le premier.*

Ainsi la DIVISION a pour but : *Etant donnés un produit de deux facteurs et l'un de ces facteurs, déterminer l'autre ;* cette opération est donc l'inverse de la MULTIPLICATION.

Comme, dans une multiplication de nombres entiers, le produit se compose d'autant de fois le multiplicande qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, on peut encore dire que DIVISER un nombre entier par un autre, c'est chercher *combien de fois* le premier nombre, considéré comme *produit*, contient le second, considéré comme *multiplicande; ce nombre de fois* est alors le *multiplicateur.*

Enfin, on a encore vu (n° 9) que DIVISER un nombre entier par un autre, c'est *partager le premier nombre en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le second.*

Ces deux dernières définitions ne sont généralement applicables qu'aux nombres *entiers ;* cependant les dénominations des termes de la *division* ont été tirées de ces manières d'envisager l'opération.

Ainsi, le premier nombre s'appelle *dividende* (nombre à diviser ou à partager); le second s'appelle *diviseur;* et le troisième se nomme *quotient*, du mot latin *quoties*, parce qu'il exprime *combien de fois* le dividende contient le diviseur.

Il résulte évidemment de ces définitions, que, lorsqu'on aura obtenu le quotient, pour faire *la preuve* de l'opération *il suffira de multiplier le diviseur par le quotient*, ou réciproquement (n° **25**); *et*, si le calcul a été bien fait, *on devra reproduire le dividende.*

Réciproquement, dans la multiplication, le produit peut être considéré comme un *dividende*, le multiplicande comme le *diviseur* ou le *quotient*, et le multiplicateur comme le *quotient* ou le *diviseur;* ainsi, l'on fait la *preuve* de la multiplication *en divisant le produit par l'un des facteurs*, *et*, si le produit obtenu est exact, *on doit reproduire l'autre facteur.*

Ces notions établies, passons à l'exposition du procédé de la division.

28. De même que la *multiplication* peut s'exécuter par l'*addition* de plusieurs nombres égaux entre eux, on pourrait aussi trouver le *quotient* d'une *division* par une suite de *soustractions.*

En effet, qu'il s'agisse, par exemple, de *diviser* 60 par 12. Autant de fois on pourra *soustraire* 12 de 60, autant de fois 12 sera contenu dans 60; ainsi, le *quotient* est égal au *nombre de soustractions* qu'il faudra faire pour épuiser le *dividende*.

Dans cet exemple, comme on est obligé de faire 5 *soustractions* successives, il s'ensuit que le *quotient* est 5.

Mais cette manière d'obtenir le quotient serait trop longue dans la pratique, surtout si le dividende était très-grand par rapport au diviseur. Ce qui constitue essentiellement *la règle* de la *division*, c'est un procédé spécial et abrégé pour arriver au résultat.

$$\begin{array}{rl} 60 & \\ \underline{12} & \\ 48 & \ldots 1^{er} \text{ reste.} \\ \underline{12} & \\ 36 & \ldots 2^{e}. \\ \underline{12} & \\ 24 & \ldots 3^{e}. \\ \underline{12} & \\ 12 & \ldots 4^{e}. \\ \underline{12} & \\ 0 & \ldots 5^{e}. \end{array}$$

29. Dès que l'on connaît de mémoire tous les produits de deux nombres d'*un seul* chiffre, ou la Table de Pythagore (nº **18**), on peut déterminer aisément le quotient de la division d'un nombre d'*un* ou de *deux* chiffres, par un nombre d'*un seul* chiffre, lorsque ce quotient ne doit avoir *lui même qu'un seul* chiffre.

Par exemple, 35 divisé par 7 donne pour quotient 5; ou bien on dit: en 35 combien de fois 7? Il y est 5 fois (parce qu'on sait que 5 fois 7 font 35); ou bien encore: le 7^e de 35 est 5, parce que 7 fois 5 font 35.

Soit encore 68 *à diviser par* 9. Comme 7 fois 9 ou 63, et 8 fois 9 ou 72, comprennent 68, il s'ensuit que 68 divisé par 9 donne le quotient 7 pour 63 avec un *reste* 5; c'est ce qu'on exprime en disant: le 9^e de 68 est 7 pour 63, et il *reste* 5.

Pareillement, en 47 combien de fois 8? Il y est 5 fois; ou le 8^e de 47 est 5, et il *reste* 7.

On verra plus loin ce qu'on doit faire du *reste* de la division, lorsque le diviseur n'est pas contenu *exactement* dans le dividende.

30. Considérons le cas où le *dividende est composé d'un nombre quelconque de chiffres, le diviseur n'ayant qu'un seul chiffre.*

Soit *à diviser* 6766453 *par* 8:

$$\begin{array}{l|l} 6766453 & 8 \\ \cline{2-2} \underline{64} & 845806 \\ \;\;36 & \\ \;\;\underline{32} & \\ \;\;\;\;46 & \\ \;\;\;\;\underline{40} & \\ \;\;\;\;\;\;64 & \\ \;\;\;\;\;\;\underline{64} & \\ \;\;\;\;\;\;\;053 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{48} & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;5 & \end{array}$$

Preuve par la multiplication.

$$\begin{array}{r} 845806 \\ \underline{8} \\ 6766448 \\ \underline{5} \\ 6766453 \end{array}$$

Après avoir écrit le diviseur à la droite du dividende, et les avoir séparés par un trait vertical, on tire au-dessous du diviseur une ligne horizontale.

Cela posé, on voit tout d'abord que, si l'on place (par la pensée ou *mentalement*) à la droite du diviseur 8, *cinq* zéros, ce qui revient à le multiplier par 100000, puis *six* zéros, ce qui revient à le multiplier par 1000000, les deux produits 800000 et 8000000 sont, l'un *plus petit*, l'autre *plus grand* que le dividende.

D'où l'on peut déjà conclure que le *quotient demandé* est compris entre 100000 et 1000000, c'est-à-dire est composé de *six* chiffres, et qu'ainsi, les plus hautes unités du quotient sont des *centaines de mille*, dont il faut trouver le nombre ou le *chiffre*.

Maintenant, comme le produit du diviseur par le chiffre cherché ne peut donner d'unités d'un ordre inférieur à des *centaines de mille*, il s'ensuit que ce produit est tout entier contenu dans les 67 *centaines de mille* du dividende; et si l'on divise 67 par 8, ce qui donne le quotient 8 pour 64, et le reste 3, on peut affirmer que le chiffre des *centaines de mille* du quotient total est 8.

En effet, 800000 fois 8 donne 6400000, nombre qui peut être retranché du dividende 6766453 : tandis que 900000 fois 8 ou 7200000, ne peut pas l'être.

Le chiffre 8 étant ainsi déterminé, on le place sous le diviseur; puis, après avoir soustrait le produit de 8 par 8, ou 64, de 67, on obtient le reste 3, à la droite duquel on peut *concevoir* écrits les chiffres restants du dividende, ce qui donnerait 366453 pour reste total de cette première opération (*).

(Il semblerait nécessaire d'écrire *à la droite* du quotient déjà obtenu, *cinq* zéros, afin de lui donner sa véritable valeur; mais on en est dispensé par la disposition qui sera donnée aux chiffres suivants du quotient.)

Il faut actuellement déterminer le chiffre des *dizaines de mille* du quotient. Or le produit du diviseur par ce chiffre, ne pouvant donner d'unités d'un ordre *inférieur à* des *dizaines de mille*, se trouve tout entier renfermé dans les 36 *dizaines de mille* du dividende restant. Il suffit donc d'*abaisser* à côté du reste 3, le chiffre suivant 6 du dividende (comme on le voit dans le tableau de l'opération), puis de diviser 36 par 8, ce qui donne le quotient 4 pour 32, et le reste 4. On écrit ce quotient, qui exprime nécessairement les *dizaines de mille* du quotient total, *à la droite* du premier quotient 8; puis, après avoir soustrait 4 fois 8, ou 32, de 36, on abaisse à côté du reste 4, le chiffre suivant du dividende, ce qui donne 64 (**).

(*) Cette première opération revient évidemment à soustraire du dividende, 800000 fois le diviseur, ou équivaut à 800000 soustractions successives du diviseur 8.

(**) Cette nouvelle opération, qui revient à soustraire 40000 fois 8, ou

Pour obtenir le chiffre des *unités de mille* du quotient total, on divise 46 par 8; le quotient est 5 pour 40, et le reste est 6; on écrit ce nouveau quotient 5 à la droite des deux premiers; puis, après avoir soustrait 5 fois 8, ou 40, de 46, on abaisse à côté du reste 6 le chiffre suivant, 4, du dividende, ce qui donne 64 (*).

Pour obtenir le chiffre des *centaines* du quotient total, on divise 64 par 8, ce qui donne 8 pour 64, et il reste 0 : on écrit le nouveau quotient à la droite des trois premiers, puis, après avoir soustrait 8 fois 8, ou 64, de 64, on abaisse à côté du reste 0 le chiffre suivant du dividende, ce qui donne 05, ou simplement 5.

Il se présente ici une particularité : comme le nouveau dividende partiel, 05 ou 5, destiné à donner les *dizaines* du quotient total, est plus faible que le diviseur 8, on doit en conclure que le quotient total n'a pas de *dizaines* (et en effet, le dividende restant est 53, nombre *moindre que* 10 fois 8, ou 80).

On place alors un 0 au quotient, à la droite des *quatre* chiffres déjà obtenus, afin de remplacer les *dizaines* qui manquent, et de conserver aux chiffres précédents leur *valeur relative,* puis on abaisse à la droite du reste 5 le chiffre suivant, ou le dernier chiffre du dividende, et l'on continue l'opération.

Le quotient de 53 divisé par 8 étant 6 pour 48, on écrit ce chiffre à la droite des *cinq* premiers quotients déjà obtenus, puis on soustrait 48 de 53, ce qui donne enfin 5 pour *reste de l'opération totale*, et le *quotient demandé* est 845806 (**); ce qu'on peut vérifier facilement en multipliant 8 par 845806, ou plutôt (n° **26**) 845806 par 8, et ajoutant le *reste* 5 au produit obtenu.

N. B. — Dans la pratique, on se dispense, à chaque opération, de placer au-dessous du dividende partiel correspondant le produit du diviseur par le quotient obtenu, et l'on se contente d'écrire le reste de la soustraction, à côté duquel on abaisse le chiffre suivant du dividende, ainsi qu'on le voit dans le tableau ci-dessous :

```
6766453 | 8
 36     |------
  46    | 845806
   64
    053
      5
```

320000 de 366433, équivaut à 40000 nouvelles soustractions successives du diviseur 8.

(*) Cette troisième opération équivaut à 5000 soustractions successives du diviseur 8.

(**) Toutes les opérations qui viennent d'être exécutées équivalent évidemment à 800 000, plus 40 000, plus 5000, plus 800, etc., plus 6, ou à 845 806 soustractions successives, dans lesquelles le diviseur 8 est constamment le nombre à soustraire.

31. Nous nous abstiendrons d'établir, pour le cas de la division que nous venons de traiter, une *règle générale* fondée sur les raisonnements précédents, parce qu'il existe (pour ce cas seulement) un procédé pratique, plus commode, et surtout plus simple, sous le rapport de la disposition des calculs.

Reprenons l'exemple ci-dessus :

	6766453	à *diviser par*	8;
Quotient,	845806;	*reste*,	5.

Nous savons déjà (n° **27**) que diviser un nombre par 8, ou chercher combien de fois 8 est contenu dans ce nombre, revient à partager ce nombre en 8 parties égales, ou à en prendre le 8^e^.

Cela posé, prenant dans le dividende les deux premiers chiffres à gauche, 67, on dit :

Le 8^e^ de 67 est (n° **29**) 8 pour 64, avec un reste 3;

On écrit le quotient 8 sous le chiffre 7 du dividende; puis on place *mentalement* le reste 3 exprimant 3 *centaines de mille* ou 30 *dizaines de mille* à la gauche du chiffre 6 du dividende, qui exprime aussi des *dizaines de mille*, et l'on dit de même :

Le 8^e^ de 36 est 4 pour 32, avec un reste 4;

On écrit le second quotient 4 à la droite du premier; plaçant (encore mentalement) le reste 4 exprimant 4 *dizaines* de mille, ou 40 *unités de mille* à la gauche du chiffre 6 des *unités de mille*, du dividende, on dit également :

Le 8^e^ de 46 est 5 pour 40, avec un reste 6;

On écrit ce troisième quotient 5 à la droite du précédent; continuant de la même manière, on dit encore :

Le 8^e^ de 64 (nombre formé par le reste 6 et le chiffre 4 du dividende) est 8, avec le reste 0;

Et l'on écrit ce quatrième quotient 8 à la droite du troisième.

Le 8^e^ de 05 ou de 5 (chiffre des dizaines du dividende), est 0, avec un reste 5;

On écrit ce cinquième quotient à la droite du quatrième.

Enfin, le 8^e^ de 53 est 6 pour 48, avec un reste 5;

On écrit, à la droite du cinquième quotient, ce sixième et dernier quotient partiel, qui se trouve ainsi placé au-dessous du chiffre des *unités* du dividende; et l'on a pour résultat :

Le *quotient* 845806 avec le *reste* 5.

2^e^ Exemple	8230200409 à *diviser* par	6;	
Quotient,	1371700068;	*reste*,	1.

Ici, le premier chiffre à gauche 8, du dividende, étant *plus fort* que le diviseur, il s'ensuit que le quotient doit avoir des *unités de même espèce* que celles du chiffre 8; et l'on dit :

Le 6^e de 8 est 1, que l'on écrit sous le chiffre 8, avec le reste 2;

Puis, le 6^e de 22 est 3 (qu'on place à la droite du chiffre 1), avec le reste 4;

Le 6^e de 43 est 7, avec le reste 1;
Le 6^e de 10 est 1, avec le reste 4;
Le 6^e de 42 est 7, avec le reste 0;
Le 6^e de 0 est 0, avec le reste 0;
Le 6^e de 0 est 0, avec le reste 0;
Le 6^e de 4 est encore 0, avec le reste 4;
Le 6^e de 40 est 6, avec le reste 4;
Enfin, le 6^e de 49 est 8, avec le reste 1.

Le quotient demandé est donc 137170068, avec le *reste* 1.

Il est d'autant plus important de se bien pénétrer de ce procédé, qu'il trouve son application dans les cas de la division qu'il nous reste à développer.

Nous ferons d'ailleurs observer que, lorsqu'on possède de mémoire la Table de multiplication étendue jusqu'au nombre 12, on peut obtenir très-facilement, par le même moyen, le 10^e, le 11^e, le 12^e d'un nombre quelconque.

Voici deux exemples pour exercice.

1°. 8976147084 97 *à diviser par* 12. *Quotient*, 748012257 08; *reste*, 1.

(Le 12^e de 89 est 7 pour 84, et il reste 5; le 12^e de 57 est 4 pour 48, et il reste 9; le 12^e de 96 est 8, et il reste 0; le 12^e de 1 est 0, avec le reste 1; le 12^e de 14 est 1 pour 12, et il reste 2; etc.)

2°. 23054273896 *à diviser par* 11. *Quotient*, 2095843081; *reste*, 5.

(Le 11^e de 23 et 2 pour 22, et il reste 1; le 11^e de 10 est 0, avec le reste 10; le 11^e de 105 est 9 pour 99; le 11^e de 64 est 5 pour 55; le 11^e de 92 est 8 pour 88; etc.)

Quant à la division par 10, au lieu d'appliquer le procédé, il est plus simple de séparer, *par la pensée*, dans le dividende, le *dernier chiffre à droite*. La partie à gauche exprime le *quotient*, et ce dernier chiffre *séparé* (qui peut être 0) est le *reste de la division*. C'est une conséquence évidente du système de *numération*.

Ainsi le 10^e de 2710548 est 271054, et il reste 8; le 10^e de 863005074 est 86300507, et il reste 4; le 10^e de 3805670 est *exactement* 380567; résultats qu'on trouverait également en appliquant le procédé ci-dessus.

32. Passons au cas où, *les nombres donnés étant tous deux composés de plusieurs chiffres, le quotient ne doit en avoir qu'un seul.*

Ce cas mérite par lui-même une attention particulière, et il nous servira d'ailleurs de base pour le développement du cas général.

Soit à *diviser* 730465 *par* 87467 :

$$\begin{array}{r|l} 730465 & 87467 \\ \underline{699736} & \overline{8} \\ 30729 & \end{array}$$

Remarquons d'abord que le produit du diviseur par 10, ou 874670, est *supérieur* au dividende; ainsi le *quotient cherché* est *inférieur* à 10, et ne doit avoir qu'*un seul* chiffre.

En second lieu, le produit des 8 *dizaines de mille* du diviseur par le chiffre cherché ne pouvant donner d'unités d'un ordre inférieur à des *dizaines de mille*, doit se trouver tout entier dans les 73 *dizaines de mille* du dividende; d'où il suit déjà que le chiffre cherché ne saurait surpasser le quotient de la division de 73 par 8.

On est donc conduit à diviser la partie à gauche, 73, du dividende par le premier chiffre 8 du diviseur, ce qui donne le quotient 9 pour 72. Mais 9 est évidemment *trop fort;* car, dans la multiplication du diviseur total par ce chiffre, on trouverait, en multipliant par 9, le chiffre 7 des *unités de mille* du diviseur, 63 unités de cet ordre, et, par conséquent, 6 *dizaines de mille* à ajouter aux 72 *dizaines de mille*, produit du premier chiffre 8 du diviseur par le même chiffre 9; ce qui donnerait 78 *dizaines de mille*, nombre *supérieur* au dividende.

Il ne faut donc essayer que 8 au plus, comme chiffre du quotient cherché. Or, en effectuant la multiplication de 87467 par 8 (que l'on a placé sous le diviseur), on obtient un produit 699736, *moindre que* le dividende, et pouvant, par conséquent, en être retranché; ce qui prouve que le quotient 8 est *bon;* et, en soustrayant ce produit du dividende, comme l'indique le tableau, on trouve pour *reste* 30729.

N. B. — On verra au n° **34**, que, dans la pratique, on se dispense d'écrire au-dessous du dividende le produit du diviseur par le quotient.

Soit encore à *diviser* 974065 *par* 189768 :

$$\begin{array}{r|l} 974065 & 189768 \\ \underline{948840} & \overline{5} \\ 25225 & \end{array}$$

Comme le dividende et le diviseur se composent d'*un même nombre de chiffres*, il est clair que le quotient ne doit avoir qu'*un seul* chiffre; et, pour le trouver, on divise d'abord le premier chiffre à gauche, 9, du dividende, par le premier chiffre à gauche, 1, du diviseur. Le quotient est 9; mais ce chiffre et les chiffres inférieurs, 8, 7, 6, sont *trop forts*, si l'on a égard aux deux premiers chiffres à gauche, 18, du diviseur; car les produits de 18 par 9, 8, 7, 6, étant 162, 144, 126 et 108, surpassent, tous, les 97 *dizaines de mille* du dividende; on est donc conduit à essayer le chiffre 5.

En multipliant le diviseur par 5, on a le produit 948840, qui, retranché du dividende, donne pour *reste* 25225, nombre *plus petit que* le diviseur; ce qui prouve que le quotient 5 n'est pas *trop faible*.

33. *Première remarque*. — Dans les deux exemples précédents, on a pu déterminer assez facilement quel devait être le vrai chiffre du quotient. Mais comme cela n'est pas toujours ainsi, il importe d'avoir une *méthode* pour reconnaître sûrement, sans avoir besoin d'effectuer le produit du diviseur par le quotient, si le chiffre présumé *bon*, l'est en effet.

C'est cette méthode que nous allons développer.

Méthode particulière d'essai.

Soit à *diviser* 556428 *par* 69784 :

$$\begin{array}{r|l} 556428 & 69784 \\ \underline{488488} & \overline{7} \\ 67940 & \end{array}$$

La division de 55 (ensemble des deux premiers chiffres à gauche du dividende) par 6 (premier chiffre à gauche du diviseur) donne pour quotient 9, avec le reste 1.

Pour que 9 ne soit pas *plus fort* que le quotient cherché, il faut que 9 fois le diviseur soit *inférieur* ou *au plus égal* au dividende, ou, ce qui revient au même, que le 9^e du dividende soit *supérieur* ou *au moins égal* au diviseur. Or, si l'on commence à prendre le 9^e de 556428, d'après le procédé indiqué au n° **31**, on trouve pour les deux premiers chiffres à gauche, 61 *dizaines de mille*, nombre *inférieur* aux 69 *dizaines de mille* du diviseur; ce qui indique que le 9^e du dividende est *moindre* que le diviseur ; 9 doit donc être rejeté.

Essayons 8 : nous trouvons pour les trois premiers chiffres du 8^e du dividende 695 *centaines*, nombre *inférieur* aux 697 *centaines* du diviseur; donc 8 est encore trop fort.

Essayons 7 : le premier chiffre du 7^e du dividende est 7, nombre de *dizaines de mille*, *supérieur* aux 6 *dizaines de mille* du diviseur; d'où il suit que le 7^e du dividende est *supérieur* au diviseur, ou, en d'autres termes, que le produit du diviseur par 7 est *inférieur* au dividende. Ainsi le chiffre 7 est *bon*.

Multipliant le diviseur par 7, et écrivant le produit 488488 au-dessous du dividende, puis effectuant la soustraction, on obtient le reste 67940, nombre *plus petit* que le diviseur.

Autre exemple. — Soit à *diviser* 1148367 *par* 169987:

$$\begin{array}{r|l} 1148367 & 169987 \\ \underline{1019922} & \overline{6} \\ 128445 & \end{array}$$

La division de 11 par 1, donnerait pour quotient, 11; mais le quotient cherché ne peut être plus grand que 9, puisque le diviseur suivi d'un 0, c'est-à-dire multiplié par 10, serait un nombre *supérieur* au dividende.

Essayons 9 : le 9^e^ du dividende est 12... (*), nombre *plus petit* que le diviseur 16... ; ainsi 9 doit être rejeté.

Essayons 8 : le 8^e^ du dividende est 14..., nombre *moindre* que le diviseur 169... ; donc 8 doit être rejeté.

Essayons 7 : le 7^e^ du dividende est 164..., nombre plus petit que le diviseur 169... ; donc 7 doit être rejeté.

Essayons 6 : le 6^e^ du dividende est 19..., nombre *supérieur* au diviseur 16...; ainsi le chiffre 6 est *bon*.

Multipliant le diviseur par 6, et retranchant du dividende le produit 1019922, on obtient le *reste* 128445, *plus petit* que le diviseur.

Le mécanisme de cette *méthode d'essai* ressort explicitement de l'exposition du dernier exemple ; on s'arrête dès que l'on obtient un chiffre *plus fort* ou *plus faible* que le chiffre correspondant du diviseur. S'il est *plus fort*, on peut affirmer que le chiffre essayé est *bon ;* s'il est *plus faible*, le chiffre essayé est *trop fort* et doit être *diminué*.

Ajoutons, d'ailleurs, que tous ces essais sont susceptibles de se faire *mentalement*, c'est-à-dire de *tête* et sans rien écrire.

Il pourrait même arriver (mais rarement) qu'on reproduisît ainsi successivement *tous* les chiffres du diviseur en arrivant à un *reste final*, nécessairement *moindre* que le *chiffre essayé*, et pouvant même être 0 ; on aurait alors, non-seulement le quotient cherché, mais encore le reste de la division proposée, qui ne serait autre que ce *reste final*.

Nous recommandons expressément l'exercice de cette *méthode d'essai*, comme moyen d'éviter toute difficulté dans quelque cas que ce soit.

34. *Seconde remarque.* — On a vu, dans tout ce qui précède, qu'après avoir déterminé un chiffre du quotient, on est amené à multiplier le diviseur par ce chiffre, à écrire le produit au-dessous du dividende, et à effectuer la soustraction en plaçant le reste sous ce produit.

Mais on peut, ainsi qu'on l'a déjà fait pour le cas de la division traité au n° **30** (*voir* le *N. B.*), employer un *procédé d'abréviation* que nous allons expliquer.

Reprenons pour cela le premier exemple traité au n° **32** :

730465	87467
30729	8

(*) Ici, comme dans ce qui va suivre, les chiffres *non écrits* sont remplacés par *autant* de points.

Ce procédé d'abréviation consiste en ce que le produit du diviseur par le chiffre 8 du quotient n'est effectué que *mentalement*, et que le *reste seul* est écrit au-dessous du dividende.

A cet effet, on doit retrancher successivement des *unités, dizaines, centaines, etc.*, du dividende, les produits des unités de *même ordre*, du diviseur par le quotient, au fur et à mesure qu'on les forme *mentalement*.

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, on a, d'abord, à soustraire des 5 *unités du dividende* le produit 56, du quotient 8 par les 7 *unités du diviseur*.

Mais comme cette soustraction est impossible (ce que l'on conçoit devoir arriver généralement), on applique le principe du n° **14**, en ajoutant, par la pensée, 6 *dizaines* aux 5 *unités* (nombre dont il faut soustraire), avec la réserve expresse d'ajouter, par compensation, ces 6 *dizaines* au produit (à soustraire ultérieurement) des *dizaines* du diviseur par le même quotient 8; on forme ainsi le nombre 65 dont on retranche 56, ce qui donne pour reste 9, qu'on écrit au-dessous des unités du dividende.

Passant au chiffre des *dizaines*, 6, du diviseur, on dit : 8 fois 6 donnent 48 *dizaines*, qui, augmentées de 6 *dizaines* (qu'on s'est réservé, dans l'opération précédente, d'ajouter à ce produit), font 54 *dizaines*, nombre à soustraire des 6 *dizaines* du dividende ; et pour opérer la soustraction, on ajoute encore 5 *dizaines* (*de dizaines*) à ces 6 *dizaines*, ce qui donne 56 ; puis, retranchant 54 de 56, on a pour reste 2, que l'on écrit sous le chiffre des *dizaines* du dividende.

Continuant ainsi, on dit : 8 fois 4 *centaines* font 32, et 5 (qui avaient été ajoutées dans l'opération précédente) font 37 ; 37 de 4, cela ne se peut ; mais 37 de 44, il reste 7, que l'on écrit sous les *centaines* du dividende.

De même, 8 fois 7 font 56 et 4 (ajouté précédemment) font 60 ; 60 de 60, il reste 0, que l'on écrit au rang des *mille* du dividende.

Enfin, 8 fois 8 font 64, et 6 font 70 ; 70 de 73, il reste 3. Le *reste total est donc* 30729.

Reprenons maintenant le deuxième exemple, mais en abrégeant le discours, et en nous servant des locutions usitées dans la pratique (quoique souvent impropres) :

$$\begin{array}{r|l} 974065 & 189768 \\ \hline 25225 & 5 \end{array}$$

Ayant constaté que 5 est le *véritable* chiffre du quotient, on dit : 5 fois 8 font 40 ; 40 de 45, reste 5, et je retiens 4 (*sous-entendu*, pour les ajouter au produit suivant).

De même, 5 fois 6 font 30, et 4 font 34 ; 34 de 36, reste 2, et je retiens 3 ;

5 fois 7 font 35, et 3 font 38; 38 de 40, reste 2, et je retiens 4;
5 fois 9 font 45, et 4 font 49; 49 de 54, reste 5, et je retiens 5;
Enfin, 5 fois 18 font 90; et 5 font 95; 95 de 97, reste 2. Le *reste total* est 25225.

N. B. — Il est bien important, à chaque opération partielle, de dire : et *je retiens* tel chiffre, pour ne pas oublier le nombre qui, par *compensation*, doit être ajouté au produit suivant.

On fera bien d'appliquer le même procédé aux deux exemples du n° **33**.

Nous avons traité avec beaucoup de développements les cas simples de la *division*, parce qu'une fois qu'on est bien pénétré du procédé, ainsi que des *méthodes d'essai* et d'*abréviation*, qui s'y rattachent, on ne saurait plus éprouver aucune difficulté pour comprendre le *cas général* que nous allons maintenant traiter, savoir celui où *le dividende*, *le diviseur*, *et*, par suite, *le quotient*, ont *un nombre quelconque de chiffres*.

Cas général de la division.

35. Soit à *diviser* 9176298 *par* 2678 :

9176298	2678
11422	3426
7109	
17538	
1470	

Preuve par la multiplication.

2678
3426
16068
5356
10712
8034
1470
9176298

Nous disposons ici les termes de la *division*, le quotient, et les restes successifs, d'après les indications qui précèdent; puis nous raisonnons comme au n° **30** :

Si l'on place (*mentalement*) *trois* zéros, et ensuite *quatre* zéros à la droite du diviseur, on obtient deux produits 2678000 et 26780000, l'un *plus petit*, l'autre *plus grand* que le dividende. Ainsi, le quotient total est compris entre 1000 et 10000, ou bien, doit être composé de *quatre* chiffres, dont le premier à gauche exprime des *unités de mille*.

Pour trouver ce premier chiffre, on observe que son produit par le diviseur, devant exprimer des *unités de mille*, se trouve nécessairement tout entier dans la partie 9176 *mille* du dividende. On est donc conduit à diviser 9176 (que l'on considère comme un *premier dividende partiel*) par 2678; et *le plus grand* nombre de fois que le second nombre est contenu dans le premier, représente le chiffre des *unités de mille* du quotient total.

Or *le véritable* quotient de 9176 par 2678, obtenu d'après la *méthode d'essai* indiquée au n° **33**, est 3. On écrit alors 3 au-dessous du diviseur, puis on retranche du dividende le produit du diviseur par 3, soit en plaçant ce produit au-dessous du premier dividende partiel, et soustrayant l'un de l'autre, soit (comme au n° **34**) en effectuant simultanément la soustraction et la multiplication, ainsi que l'indique le tableau ci-dessus (*).

Le reste de cette première soustraction étant 1142, si on le faisait suivre des chiffres du dividende qui n'ont pas encore été employés, il en résulterait un nouveau dividende sur lequel on pourrait opérer comme sur le dividende primitif; mais comme on a maintenant à déterminer le chiffre des *centaines* du quotient, et que le produit du diviseur par ce chiffre, ne pouvant pas donner d'*unités* d'un ordre inférieur à des *centaines*, se trouve tout entier dans les 11422 *centaines* du dividende restant, on n'abaisse à la droite du reste 1142, que le *chiffre suivant*, 2, du dividende; ce qui donne un *second dividende partiel*, 11422, sur lequel on doit opérer comme sur le premier.

Le *véritable* quotient de la division de 11422 par 2678 est 4, que l'on écrit au-dessous du diviseur et à la droite du premier quotient obtenu (*voyez* le n° **30**); puis on soustrait du *second dividende partiel*, le produit du diviseur par le nouveau quotient.

Le reste de cette soustraction étant 710, on abaisse à sa droite le chiffre suivant, 9, du dividende; ce qui donne un *troisième dividende partiel*, 7109, destiné à fournir le chiffre des *dizaines* du quotient total.

Divisant 7109 par 2678, on a pour quotient véritable le chiffre 2 que l'on écrit à la droite des deux premiers quotients obtenus; multipliant le diviseur par 2, et retranchant le produit du troisième dividende partiel, on obtient le reste 1753, à la droite duquel on abaisse le dernier chiffre, 8, du dividende; ce qui donne pour *quatrième dividende partiel*, 17538.

Enfin, le *véritable* quotient de 17538 par 2678 étant 6, on multiplie le diviseur par 6, et l'on retranche le produit du quatrième dividende partiel, ce qui conduit au reste 1470.

Le *quotient demandé* est donc 3426, avec le *reste* 1470; ce qu'on peut vérifier en multipliant 2678 par 3426, et en ajoutant 1470 au produit, ainsi que le montre le tableau (**).

(*) Cette première opération revient évidemment à soustraire du dividende, 3000 fois le diviseur.

(**) Les *quatre* opérations qu'on vient d'exécuter conduisent *au même résultat* que si l'on avait soustrait successivement du dividende, 3000 fois, *plus* 400 fois, *plus* 20 fois, *plus* 6 fois le diviseur proposé.

Autre exemple. — Soit à *diviser* 4220658159 1 *par* 569874 :

```
4220658159 1 | 569874
 2315401     | 74063
   3590559
    171315 1
      3529
```

En plaçant (*mentalement*) *quatre* zéros, puis *cinq* zéros à la droite du diviseur, on obtient deux produits, 5698740000 et 56987400000, qui *comprennent* le dividende ; ce qui prouve que le quotient cherché est *compris* lui-même entre 10000 et 100000, ou bien est composé de *cinq* chiffres, dont le premier à gauche exprime des *dizaines de mille*.

Les deux premiers chiffres à gauche de ce quotient 74, que l'on a placés au-dessous du diviseur, se trouvent sans difficulté, comme dans le premier exemple.

Mais, parvenu au reste 35905, si, pour former le *troisième dividende partiel* destiné à fournir le chiffre des *centaines* du quotient total, on abaisse à la droite de ce reste le chiffre suivant 5, du dividende, on obtient 359055, nombre *moindre* que le diviseur ; ce qui prouve (*voyez* le premier exemple du nº **30**) que le quotient n'a pas de *centaines*.

On doit alors placer un o à la droite des deux premiers quotients obtenus, puis abaisser à la droite de 359055, le chiffre suivant, 9, du dividende, et l'on a ainsi un *quatrième dividende partiel* 3590559, que l'on divise par 569874, afin d'avoir le chiffre des *dizaines* du quotient.

Continuant l'opération, on trouve finalement le *quotient* total 74063, avec le *reste* 3529.

36. Règle générale. — Pour diviser deux nombres entiers quelconques l'un par l'autre, *écrivez le diviseur à la droite du dividende ; séparez-les par un trait vertical, puis tirez une ligne horizontale au-dessous du diviseur.*

Cela fait, *prenez à la gauche du dividende le nombre de chiffres* NÉCESSAIRE ET SUFFISANT *pour que cette partie à gauche contienne le diviseur ;* vous obtenez ainsi *un premier dividende partiel composé, soit d'*AUTANT *de chiffres, soit d'*AUTANT PLUS UN *de chiffres qu'il y en a dans le diviseur.*

Cherchez combien de fois ce dividende partiel contient le diviseur, et écrivez le quotient résultant sous le diviseur ; multipliez le diviseur par ce chiffre, et soustrayez le produit du premier dividende partiel.

Abaissez à la droite du reste le chiffre suivant du dividende, ce qui *donne* UN SEDOND DIVISEUR PARTIEL. *Cherchez de même combien de fois ce second diviseur partiel contient le diviseur, et écrivez ce nouveau quotient à la droite du premier; multipliez le diviseur par ce second quotient, et retranchez le produit du second dividende partiel.*

Abaissez à la droite de ce second reste le chiffre suivant du dividende, ce qui donne UN TROISIÈME DIVIDENDE PARTIEL, *sur lequel vous opérez comme sur les précédents.*

Continuez cette série d'opérations jusqu'à ce que vous ayez abaissé le dernier chiffre du dividende, en ayant soin, à chaque opération, d'écrire le quotient que vous obtenez à la droite des précédents (afin de donner à ceux-ci leur *valeur relative*).

S'il arrive qu'après avoir abaissé un chiffre, vous obteniez un dividende partiel moindre que le diviseur, placez un 0 *au quotient,* puis *abaissez un nouveau chiffre pour former un nouveau dividende partiel.*

Lorsque, après toutes ces opérations, on parvient à un *reste nul* le dividende est dit *exactement divisible par le diviseur; si le reste n'est pas nul,* on l'ajoute, DANS LA PREUVE, *au produit du diviseur par le quotient trouvé.*

37. De la nature même du procédé, on déduit les conséquences suivantes :

1°. Chaque *division partielle* ne peut donner un *quotient* plus grand que 9, et doit conduire à un *reste* MOINDRE QUE le diviseur.

On peut ainsi reconnaître, dans le cours de l'opération, qu'un chiffre trouvé pour le quotient a été *mal déterminé* et doit être *augmenté* d'une ou de plusieurs unités.

2°. Le *premier* chiffre *à gauche* du quotient exprime des unités de *même ordre* que celles exprimées par le *premier chiffre* à droite de la partie du dividende, qu'on a dû séparer pour former le premier dividende partiel; et, par suite, le quotient renferme *autant de chiffres plus un*, qu'il reste de chiffres dans le dividende, à la *droite* de ceux qui ont été séparés.

En d'autres termes, *le nombre des chiffres du quotient est, selon les cas, la* DIFFÉRENCE *entre le nombre des chiffres du dividende et le nombre des chiffres du diviseur, ou* CETTE DIFFÉRENCE AUGMENTÉE D'UNE UNITÉ.

Cas particuliers de la division.

38. REMARQUE. — Lorsque l'*un* des termes d'une division à exécuter, ou *tous les deux*, sont terminés par des *zéros*, il y a lieu à simplifier le procédé général.

Nous examinerons spécialement le cas où le diviseur *seul* est *terminé* par des zéros, attendu que la même règle de simplification peut s'appliquer à tous les autres, *un seul* excepté.

1°. Soit 47543296 à *diviser par* 690000 :

Procédé général.			Procédé particulier.		
	47543296	690000	4754	3296	69
	6143296	68	614		68
reste,	623296		*reste,* 62 ;	*véritable reste,* 623296	

Voici la règle à suivre : *Supprimez* les zéros qui terminent le diviseur, et *séparez* à la droite du dividende *autant de chiffres* qu'il y a de zéros à la droite du diviseur. Il reste alors à diviser 4754 par 69 ; *effectuez cette division* d'après le procédé ordinaire. Le quotient obtenu, 68, n'est autre que celui de la division des deux nombres proposés. *Faites suivre le reste correspondant*, 62, des chiffres 3296 du dividende qui avaient été séparés vers la droite ; et vous avez 623296 pour le *reste total* de la division.

Cette manière d'opérer se justifie ainsi : On observe d'abord que les 69 *dizaines de mille* du diviseur primitif sont contenues dans les 4754 *dizaines de mille* du dividende, *le même nombre de fois* que 69 *unités simples* sont contenues dans 4754 *unités simples*. Ainsi, déjà, le quotient de 4754 par 69 doit être *identique avec* le quotient de la division des deux nombres donnés.

En second lieu, le *reste* provenant de la division de 4754 par 69, étant *moindre que* le diviseur 69, il s'ensuit que ce reste suivi des chiffres à droite, 3296, du dividende, est *moindre* aussi que le diviseur suivi de *quatre* zéros, ou 690000 ; donc 623296 exprime le *véritable reste* de la division des deux nombres 47543296 et 690000.

2°. Le cas où le dividende *seul* serait *terminé* par des *zéros*, ne donne généralement lieu à aucune simplification.

Toutefois, si la partie à gauche de ces *zéros* devait contenir *exactement* le diviseur, on pourrait faire d'abord abstraction des *zéros ;* puis, après avoir obtenu le quotient de la division de la partie à gauche, par le diviseur, on écrirait à la droite de ce quotient les *zéros* qui terminent le dividende.

Exemple. — Soit 375000 à *diviser par* 125.

La division de 375 par 125 donnant 3 pour *quotient exact*, le quotient demandé est 3 suivi de *trois zéros* du dividende, ou 3000. Mais cette simplification n'a pas d'importance.

3°. Il peut y avoir *le même nombre de zéros* à la droite du dividende et du diviseur.

Dans ce cas, *on supprime ces zéros* dans les deux termes de la division ; puis, après avoir divisé les deux parties à gauche, l'une par l'autre, *on fait suivre* le *reste* obtenu, des *zéros* qui terminaient le dividende.

Soit à *diviser* 5679800 *par* 8600 :

```
56798 | 00 | 86
 519       | 660
reste,  38      véritable reste, 3800
```

Cette manière d'opérer rentre dans le premier cas, avec la seule différence, que le *reste* de la division de 56798 par 86, ou 38, doit être suivi des *zéros* qui *terminent* le dividende primitif, au lieu de l'être par des chiffres *significatifs*.

4°. *Moins de zéros* à la droite du dividende qu'à la droite du diviseur.

Soit 68235947000 à *diviser par* 547600000:

```
682359 | 47000 | 5476
 13475         | 124
  25239
reste,  3335      véritable reste, 333547000
```

Ce cas est un *composé* du premier et du troisième.

5°. *Plus de zéros* à la droite du dividende qu'à la droite du diviseur.

Soit 25036900000 à *diviser par* 875000 :

```
25036900 | 000 | 875
 7536          | 28613
  5369
   1190
    3150
reste,  525      véritable reste, 525000
```

Ce cas n'est, à proprement parler, qu'une *particularité* du premier.

39. Remarque générale. — Comme, dans les trois premières opérations de l'Arithmétique, les calculs s'effectuent à commencer par la *droite*, il est naturel de demander pourquoi, dans la division, on commence, au contraire, par la *gauche*.

Pour répondre à cette question, il faut observer que, le dividende étant la somme des produits partiels du diviseur par les *unités, dizaines, centaines*, *etc.*, du quotient, tous ces produits partiels se fondent les uns dans les autres; en sorte qu'il n'est pas possible de commencer par mettre en évidence les produits par les *unités,* par les *dizaines*, *etc.*, tandis que, d'après les procédés établis, on détermine, tout d'abord, dans quelle partie du dividende se trouve le produit par *les plus hautes unités*, et, par suite, on obtient le chiffre de *ces plus hautes unités;* puis, on arrive au chiffre des unités de l'ordre *immédiatement inférieur*, et ainsi de suite.

Voici deux exemples pour exercices :

1°.	12187610837	*à diviser par*	15619;
Quotient,	780306;	*reste,*	11423.
2°.	248762339304	*à diviser par*	5076078;
Quotient,	490068;	*reste,*	0.

Preuves de la multiplication et de la division.

40. Il a été établi, au nº **27**, qu'on est naturellement amené, par la définition même de la DIVISION, à faire la preuve de la *multiplication* par la *division*, celle de la *division* par la *multiplication ;* et nous avons donné, dans le cours de l'exposition du procédé, le moyen d'effectuer cette opération. Mais nous indiquerons ultérieurement des moyens plus expéditifs de faire ces vérifications.

APPLICATIONS.

41. Dans tout ce que nous avons dit jusqu'à présent sur la *multiplication* et la *division*, nous avons envisagé les nombres sous un point de vue purement *abstrait* (nº **2**).

Nous allons maintenant faire l'application à des nombres *concrets*, des principes qui ont été développés.

PREMIÈRE QUESTION. — *Le prix du mètre d'un certain ouvrage étant de* 47 *fr., que doivent coûter* 2564 *mètres du même ouvrage ;* ou bien, *quel est le prix de* 2564 *mètres d'un certain ouvrage, à* 47 *fr. le mètre ?*

Puisqu'un mètre coûte 47 fr., 2564 mètres doivent coûter 2564 fois 47 fr. ; ainsi, il suffit de *multiplier* 47 par 2564, ou plutôt (nº **26**), 2564 par 47 (en considérant ces deux nombres comme *abstraits*, *voyez* la fin du nº **16**) ; et le produit exprimera en *francs* la somme à payer.

On a pour ce produit, 120508 ; donc les 2564 mètres ont dû coûter 120508 *francs*.

DEUXIÈME QUESTION. — *Le mètre d'un certain ouvrage en maçonnerie coûtant* 39 *fr., on demande combien on peut faire construire de mètres du même ouvrage, pour* 8395 *fr. ?*

Il est clair qu'*autant* de fois 39 sera contenu dans 8395, *autant* de mètres on pourra faire construire ; on est donc amené à *diviser* les deux nombres *abstraits* 8395 et 39, l'un par l'autre ; et le quotient exprimera le nombre de mètres demandé.

$$\begin{array}{r|l} 8395 & 39 \\ \hline 59 & 215\frac{10}{39} \\ 205 & \\ 10 & \end{array}$$

Le quotient étant 215, avec le reste 10, il faut savoir *comment on* *doit interpréter ce résultat*, pour la question que nous avons à résoudre.

Observons d'abord que si, au lieu de 8395, on n'avait que 8385, ce dernier nombre serait le *produit exact* de 39 par 215; et il s'ensuivrait qu'avec 8385 fr., on pourrait faire construire 215 *mètres*. Mais, comme on a 10 fr. *de plus*, le *nombre de mètres demandé* doit être 215, plus *une partie* de mètre, *qu'il s'agit d'évaluer*.

Or, *un mètre* coûtant 39 fr., d'après l'énoncé de la question, un *trente-neuvième, ou* $\frac{1}{39}$ de *mètre* (*voyez* le n° 8) doit coûter 1 fr.; et $\frac{10}{39}$ de *mètre* doivent coûter 10 fr. D'où l'on peut conclure qu'avec 8385 fr., *plus* 10 fr., ou 8395 fr., on fera construire 215 mètres, *plus* $\frac{10}{39}$ de *mètre*.

Généralisant ce qui vient d'être dit, on voit que, dans toutes les applications de la division à des nombres *concrets*, lorsque l'opération donne lieu à un reste, *on conçoit l'unité du quotient* (dont la nature est toujours déterminée par l'énoncé de la question) *divisée en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le diviseur; on prend l'une de ces parties autant de fois qu'il y a d'unités dans le reste de la division; puis, on ajoute la fraction qui en résulte au quotient entier déjà obtenu*.

C'est ce qu'on appelle : *compléter* le quotient, qui est alors *fractionnaire*.

TROISIÈME QUESTION. — *On a payé* 21478 *fr. pour* 895 *mètres d'une certaine étoffe; on demande le prix du mètre de cette étoffe?*

Si l'on connaissait le prix du *mètre*, en le prenant 895 fois, ou en le multipliant par 895, on devrait reproduire 21478 fr.; on est donc conduit ici à *trouver un nombre qui, multiplié par* 895, *donne pour produit* 21478, et par conséquent (n° **27**), *à diviser* 21478 *par* 895.

$$\begin{array}{r|l} 21478 & 895 \\ \hline 3578 & 23\,\frac{893}{895} \\ 893 & \end{array}$$

Pour reproduire le dividende, il faut ajouter 893 au produit de 895 par 23; d'où il suit que le prix du mètre est 23 fr., plus *une fraction* de franc.

Pour déterminer cette fraction, remarquons que $\frac{1}{895}$ pris 895 fois, donne 1; ainsi $\frac{893}{895}$ pris 895 fois, donne 893; et par conséquent, 23 plus $\frac{863}{895}$ est *un nombre qui, multiplié par* 895, *reproduit* 21478.

Donc enfin, le prix demandé est 23 *francs*, plus $\frac{893}{895}$ *de franc*.

Ce résultat s'accorde avec la règle établie dans l'exemple précédent.

Quatrième question. — *Supposons que* 498 *personnes aient à partager également une somme de* 1348708 *fr.; on demande la part qui revient à chacune.*

1348708	498
3527	$2708\,\frac{124}{498}$
4108	
124	

Le quotient de cette division étant 2708 avec le reste 124, on peut déjà conclure que, si la somme à partager était diminuée de 124 fr., chaque personne aurait, pour sa part, 2708 fr. Mais comme la somme renferme 124 fr. de plus, il s'ensuit que chaque personne doit avoir 2708 fr., *plus* une *partie* des 124 fr.

Pour se former une idée nette de cette partie, on peut d'abord *considérer* 124 *comme un* TOUT *qu'il faut diviser en* 498 *parties égales*, et l'*une* de ces parties serait ce qui doit revenir à chaque personne; mais il est plus simple (n° 8) de concevoir que *l'unité*, qui est ici le franc, soit divisée en 498 *parties égales* appelées 498es, et qu'on prenne 124 *de ces parties;* ce qui donne $\frac{124}{498}$ pour la *fraction* qui doit *compléter* le quotient.

Chaque personne doit donc avoir pour sa part, 2708 fr., *plus* $\frac{124}{498}$ *de franc.*

N. B. — On remarquera que les trois dernières questions ont été choisies de manière à présenter les *différents points de vue* sous lesquels on peut envisager la DIVISION.

42. La dernière question fournit l'occasion d'établir la proposition suivante, dont on reconnaîtra plus tard l'importance:

Diviser un nombre, 124 par exemple, *en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans un autre,* 498, *revient à diviser l'unité en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le second, et à prendre l'une de ces parties autant de fois qu'il y a d'unités dans le premier.*

En effet, si, au lieu de 124, on avait seulement 1 à diviser en 498 parties égales, chaque partie serait $\frac{1}{498}$ de l'unité; mais comme le nombre à partager est 124 fois plus grand, on conçoit que le résultat du partage doit être 124 fois plus grand, ou égal à 124 fois $\frac{1}{498}$, ou bien enfin, à $\frac{124}{498}$ de l'unité.

Pareillement, diviser 15 en 28 parties égales, revient à prendre 15 fois la 28^{e} partie de l'unité.

Car si l'on avait seulement 1 à diviser en 28 parties égales, chacune d'elles serait exprimée par $\frac{1}{28}$; mais comme on a à partager 15, ou un nombre 15 fois plus grand, le résultat doit être égal à $\frac{1}{28}$ de 15, ou à $\frac{15}{28}$ de l'*unité*.

45. Les divers problèmes qui viennent d'être résolus montrent que les raisonnements propres à faire connaître la réponse à des questions sur des *nombres concrets*, conduisent toujours à opérer sur des *nombres abstraits*, sauf ensuite à donner au résultat la signification indiquée par la nature de la question.

Il est évident, d'après cela, que l'on peut *étendre* aux nombres *abstraits* ce que nous avons *établi*, en traitant de questions relatives à des nombres *concrets*, sur l'usage à faire du *reste d'une division*, pour *compléter* ce *quotient*, et qu'ainsi le *quotient* de la division de deux nombres entiers quelconques *peut* être ENTIER ou FRACTIONNAIRE.

Cette observation est importante pour l'exposition des *principes* et des *propriétés* des nombres, en général, qui va faire l'objet du second chapitre, dans lequel nous considérerons exclusivement des *nombres abstraits*.

Exercices.

I. *Énoncer* le nombre 1003004708950476.

II. *Énoncer* ce nombre, *abstraction faite* du chiffre du milieu.

III. *Combien y a-t-il de chiffres* dans un nombre dont le premier à gauche exprime des *centaines de septillions?*

IV. Que manque-t-il au nombre 2047035007 pour former l'*unité* suivie d'*autant de zéros* qu'il y a de chiffres dans le nombre?

V. Étant donné à soustraire 58900564 de 62080347, si l'on substitue au *plus petit* nombre ce qui lui manque pour former l'unité suivie de *huit* zéros, et que l'on *additionne* ce *complément* avec le *plus grand* nombre, que faut-il faire ensuite pour obtenir un résultat égal à celui qu'on obtient par la soustraction directe?

VI. Le jour étant composé de 24 *heures*, l'heure de 60 *minutes*, la minute de 60 *secondes*, on demande *combien* il y a de *secondes* dans l'*année*, qu'on suppose être de 365 jours?

VII. On demande *quel changement* doit éprouver le produit de 67084 par 3769, en supposant: 1° que le multiplicateur soit *augmenté* de 10, le multiplicande restant le même; 2° que le multiplicande soit *augmenté* de 10, le multiplicateur restant le même; 3° que les deux facteurs soient *augmentés simultanément* de 10 unités?

VIII. *Quelle est la population* d'un département dont la superficie est de 16537 *hectares*, chaque hectare contenant, terme moyen, 45 habitants?

IX. La lumière du soleil parvenant à la terre en 8 *minutes* 13 *secondes* (la minute vaut 60 secondes), et la distance parcourue étant de 34600000 *lieues, quel est le chemin parcouru* en une *seconde?*

X. Une somme de 24672 francs est partagée entre trois personnes de telle manière que la première reçoive le *tiers* de cette somme, la seconde personne le *quart* de ce qui reste, *plus* 4112 francs; et la troisième le *huitième* de ce qui reste, *plus* 7196 francs. *On demande la part de chaque personne.*

CHAPITRE DEUXIÈME.

PROPRIÉTÉS DES NOMBRES.

§ I. *Principes sur la multiplication et la division.* — § II. *Plus grand commun diviseur.* — § III. *Divisibilité.*

41. Introduction. — Afin de rendre plus concis, et souvent plus généraux, les raisonnements que nous aurons à faire sur les nombres, dans l'exposition de leurs propriétés, nous emploierons des signes *abréviatifs* que nous allons énumérer.

Premièrement, les lettres a, b, c, etc., que l'on substitue aux chiffres, soit pour mieux faire ressortir la généralité des raisonnements, soit pour abréger l'écriture des nombres.

Quelquefois, même, il est avantageux de se servir de lettres affectées d'accents $'\ ''\ '''$, qui se prononcent *prime, seconde, tierce.*

Secondement, les signes que l'on place entre deux nombres, pour exprimer que ces deux nombres sont *égaux*, ou bien, que l'un *surpasse* l'autre, ou en est *surpassé ;* savoir :

Le signe $=$, qui s'énonce *égale ;* et les signes $>$, $<$, que l'on énonce *plus grand que* ou *supérieur à*, *plus petit que* ou *inférieur à.*

Ainsi, l'expression $a = b$ veut dire que le nombre représenté par a est *égal* au nombre représenté par b, et prend le nom d'*égalité.*

Les expressions $a > b$, $a < b$, s'appellent des *inégalités*, et signifient, dans le premier cas, que a est *plus grand que*, ou *supérieur à* b ; dans le deuxième, que a est *plus petit que*, ou *inférieur à* b.

L'*ouverture* du signe est toujours tournée du côté du plus grand nombre.

La partie à *gauche*, d'une *égalité*, ou d'une *inégalité*, est dite le *premier membre*, et la partie à *droite*, le *second membre.*

Troisièmement, les signes indiquant les opérations à exécuter sur des nombres exprimés soit par des chiffres, soit par des lettres ; savoir :

1°. Le signe de l'*addition*, $+$, qui s'énonce *plus.*

Ainsi, $27 + 19$, pour 27 *plus* 19, $37 + 49 + 63 + \ldots\ldots$, $a + b + c + \ldots\ldots$, indiquent l'*addition* de plusieurs nombres entre eux.

Lorsque ces nombres, exprimés par des lettres, sont *tous égaux* à a par exemple, au lieu d'écrire $a + a$, $a + a + a$, $a + a + a + a$, etc., on écrit $2a$, $3a$, $4a$, $5a$, etc.; et le *nombre particulier* écrit à la *gauche* de la lettre a, s'appelle COEFFICIENT.

2°. Le signe de la *soustraction*, —, substitué au mot *moins*.

Ainsi, 63 — 38, pour 63 *moins* 38, indique que l'on doit *soustraire* 38 de 63.

De même, $a-b+c-d-e+f$... indiquent l'*addition* et la *soustraction* de plusieurs nombres représentés par les lettres a, b, c, etc.

3°. Le signe de la *multiplication*, $\times$, ou *un point* ., qu'on substitue aux deux mots *multiplié par*.

Ainsi, 24×19, ou 24.19, pour 24 *multiplié par* 19, indiquent que l'on a à effectuer le *produit* de la multiplication de 24 par 19, ou (pour abréger le discours) le produit de 24 par 19.

Pareillement, $a \times b \times c \ldots$, $a.b.c\ldots$, expriment qu'il faut d'abord *multiplier* a par b, puis le produit résultant, par c, puis le nouveau produit résultant, par d, etc.

On peut encore, sans inconvénient, toutes les fois que les nombres sont exprimés par des lettres (*mais dans ce cas-là seulement*), se dispenser de placer aucun signe.

Ainsi, $abcd$... aura la même signification que

$$a \times b \times c \times d \times \ldots, \text{ ou } a.b.c.d.\ldots$$

Lorsqu'un nombre doit être la somme de plusieurs autres, dont l'*addition* est indiquée par le signe $+$, et que l'on a à le *multiplier* par un autre nombre, il convient de placer la *somme* entre parenthèses, et d'écrire à la suite le nombre *multiplicateur*.

Ainsi, $(37+23)\,15$, $(a+b+c)\,m$, indiquent la somme $37+23$ à *multiplier* par 15, la somme $a+b+c$ à *multiplier* par m.

De même, la *différence* $a-b$, *multipliée* par m, s'écrit $(a-b)\,m$.

Les *parenthèses* tiennent lieu du signe de la multiplication.

$(a+b+c+\ldots)(f+g)$, $(a-b)(c-d)$, indiquent qu'on doit *multiplier* la *somme* $a+b+c+\ldots$ par la *somme* $f+g$, la *différence* $a-b$ par la *différence* $c-d$.

4°. Le signe de la *division*, une *barre* —, au-dessus et au-dessous de laquelle on place le dividende et le diviseur, ou bien *deux points* :, à gauche et à droite desquels on place les deux *termes* de la division, le dividende à gauche et le diviseur à droite.

Ainsi $\frac{89}{18}$, ou $89:18$, pour 89 *divisé par* 18, indiquent également que 89 doit être *divisé* par 18.

Les expressions $\frac{89}{18}$, $\frac{a}{b}$, s'énoncent aussi 89 *sur* 18, a sur b.

La notation : est surtout employée avec avantage quand on a à représenter la division de deux nombres *fractionnaires* l'un par l'autre.

4.

Ainsi, $\frac{23}{19}$ *à diviser par* $\frac{47}{15}$, se représente plus simplement par

$\frac{23}{19} : \frac{47}{15}$, que par $\dfrac{\frac{23}{19}}{\frac{47}{15}}$.

45. Outre les *quatre opérations fondamentales* de l'Arithmétique, il en existe deux autres que nous exposerons plus tard, et pour lesquelles il faut également des signes *abréviatifs* : ce sont la *formation des puissances* et l'*extraction des racines*.

On nomme PUISSANCE d'un nombre, le produit de ce nombre *plusieurs fois* par lui-même, et *degré* de la puissance, le chiffre ou le nombre particulier qui exprime *combien de fois* le nombre proposé doit entrer comme *facteur* dans la puissance.

La *racine* d'un nombre donné est un autre nombre qui, élevé à une certaine *puissance*, reproduit le nombre donné; le *degré* de la *racine à extraire* est celui de la puissance à former pour obtenir le nombre donné.

Ainsi, les nombres représentés par

$$37 \times 37 \mid 37 \times 37 \times 37 \mid 37 \times 37 \times 37 \times 37 \ldots$$

sont dits la 2^e, la 3^e, la 4^e, etc., *puissance* du nombre 37; et réciproquement, 37 est dit la *racine* 2^e, 3^e, 4^e, etc., de ces nombres.

Cela posé, voici encore deux signes qu'il faut joindre à ceux précédemment indiqués :

5°. L'*exposant*, c'est-à-dire un chiffre ou un nombre particulier que l'on place à la *droite* et un peu *au-dessus* du nombre qui doit être élevé à une certaine puissance; ce signe n'est autre chose que le *degré* de la puissance à former.

Ainsi, a^2, a^3, a^4, a^5, etc., qui s'énoncent : a élevé à la 2^e, 3^e, etc., puissance, ou, simplement, *a deux*, *a trois*, etc., signifient qu'il faut élever le nombre a à la 2^e, 3^e, etc., puissance, ou le multiplier par lui-même *une fois*, *deux fois*, etc.; en un mot, a^2, a^3, a^4, etc., sont l'écriture abrégée de $a \times a$, $a \times a \times a$, $a \times a \times a \times a$, etc.

De même, $a^5\, b^3\, c^2$ expriment, d'une manière abrégée, un produit dans lequel le nombre a doit entrer *cinq* fois comme facteur, le nombre b, *trois* fois, le nombre c, *deux* fois.

6°. Le *radical* $\sqrt{\ }$, signe en dedans duquel on place l'*indice* ou le *degré* de la *racine* à extraire.

Nous n'insisterons pas, pour le moment, sur ce dernier signe, qui ne nous sera utile qu'à partir du cinquième chapitre; si nous avons donné quelques détails sur l'*exposant*, c'est que nous aurons à en faire usage dans le chapitre actuel.

Ces préliminaires établis, nous allons développer quelques propriétés élémentaires des nombres *entiers*, en tant qu'elles peuvent servir à la simplification des opérations précédemment exposées, et à la résolution de certaines questions faisant partie essentielle de l'Arithmétique.

Nous prévenons d'ailleurs, une fois pour toutes, que dans ce chapitre il ne sera question que de *nombres entiers*. Nous signalerons plus tard celles de ces propriétés qui conviennent aux *nombres fractionnaires*.

46. Définitions. — Commençons par définir certains mots ou expressions dont nous ferons un fréquent usage dans tout ce qui va suivre.

On sait déjà qu'un nombre *entier* est dit *exactement divisible* par un autre nombre *entier* lorsqu'il existe un *troisième* nombre, aussi *entier*, qui, multiplié par le second, ou qui, multipliant le second, reproduit le premier.

Cela posé, on appelle *multiple* d'un nombre, tout nombre qui est *exactement divisible* par le premier; et par opposition, celui-ci est dit *sous-multiple* de l'autre.

Ainsi, 24 étant *divisible exactement* par 6, est un *multiple* de 6, et un *sous-multiple* de 24.

De même, 72 est un *multiple* de 9, et 9 un *sous-multiple* de 72; car, 8 fois 9 donnent 72. Le nombre 8 est, lui-même, un *sous-multiple* de 72, comme celui-ci est un *multiple* de 8.

A l'expression *sous-multiple* d'un nombre on substitue quelquefois la dénomination de *partie aliquote* d'un nombre. Mais on emploie plus fréquemment encore à sa place, les mots *facteur* ou *diviseur* d'un nombre, dont l'usage a prévalu, quoique, dans les deux opérations de la multiplication et de la division, ces mêmes mots aient déjà une signification plus étendue.

Ainsi, nous dirons dorénavant que 2, 4, 5, 10, sont des *facteurs* ou *diviseurs* de 20, en tant que ces nombres sont contenus exactement dans 20.

De même, 3, 5, 15, 6, 10, 12, etc., sont des *sous-multiples*, *facteurs* ou *diviseurs* de 60; ils en sont aussi des *parties aliquotes*. Ces *quatre* expressions sont synonymes.

La recherche de tous les *diviseurs* ou *facteurs* d'un nombre est une des questions les plus importantes de l'Arithmétique et fera partie du présent chapitre.

Nous pouvons maintenant passer à l'exposition de quelques propriétés.

§ I. — PROPRIÉTÉS RELATIVES A LA MULTIPLICATION ET A LA DIVISION.

47. Premier principe. — *Le produit de la somme* (indiquée) *de plusieurs nombres, par un autre, est égal à la somme* (indiquée) *des produits des premiers nombres par le dernier.*

Ainsi, étant donnés les nombres 15, 12, 23 et 47, et un autre nombre 8, je dis que l'on a

$$(15+12+23+47).8 = 15.8+12.8+23.8+47.8.$$

En effet, si l'on forme le tableau ci-dessous :

$$\begin{array}{c} 15+12+23+47 \\ 15+12+23+47 \\ 15+12+23+47 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

lequel on suppose contenir 8 lignes horizontales, on voit que la somme de toutes les unités renfermées dans ce tableau est égale, *d'une part*, au produit de $15+12+23+47$ par 8, et, *de l'autre*, à la somme de 8 fois 15, *plus* 8 fois 12, *plus* 8 fois 23, *plus* 8 fois 47.

Donc, etc.; ce qu'on peut d'ailleurs vérifier en effectuant les calculs indiqués.

Le raisonnement que nous venons de faire pouvant évidemment s'appliquer à d'autres nombres, quel que soit le nombre des termes entre parenthèses, on peut conclure qu'en général,

$$(a+b+c+d+e+\ldots).m = a.m+b.m+c.m+\ldots,$$

a, b, c, d, etc., représentant des nombres donnés.

48. Conséquence. — *Le produit de la somme* (indiquée) *de plusieurs nombres par la somme* (indiquée) *de plusieurs autres, est égal à la somme des produits de tous les nombres qui entrent dans la première somme, par chacun des nombres qui entrent dans la seconde.*

Ainsi, par exemple,

$$(49+37+25+13).(63+27+19) = \left\{\begin{array}{r} 49.63+37.63+25.63+13.63 \\ +49.27+37.27+25.27+13.27 \\ +49.19+37.19+25.19+13.19 \end{array}\right\}.$$

Car, multiplier $49+37+\ldots$ par $63+27+\ldots$, revient à prendre 63 fois la première somme, plus 27 fois la même somme, plus 19 fois la même somme, puis à ajouter tous ces produits.

Généralement :

$$\begin{aligned}(a+b+c+\ldots).(m+n+\ldots) = {} & a.m+b.m+c.m \\ & +a.n+b.n+c.n+\ldots.\end{aligned}$$

N. B. — *Le nombre total* des termes du second membre de cette égalité est évidemment égal au produit du *nombre des termes* du multiplicande $a+b+c\ldots$, par le *nombre des termes* du multiplicateur $m+n+\ldots$.

49. Second principe. — *Le produit de la différence* (indiquée) *de deux nombres par un troisième, est égal à la différence* (indiquée) *des produits de chacun des deux premiers nombres par le troisième.*

C'est-à-dire que

$$(37-19)12 = 37\times12-19\times12.$$

Car, si l'on forme le tableau ci-dessous :

$$\begin{array}{c} 37-19 \\ 37-19 \\ 37-19 \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

dans lequel chaque ligne verticale est supposée contenir 12 nombres, on voit que, pour obtenir le nombre d'unités contenues dans ce tableau qui représente déjà le produit de $37-19$ par 12, il suffit de faire la somme des unités contenues dans la première ligne verticale, ce qui revient à multiplier 37 par 12, et de retrancher du produit, 37×12, la somme des unités contenues dans la seconde ligne verticale, ou le produit de 19 par 12.

Donc

$$(37-19)\,12 = 37 \times 12 - 19 \times 12.$$

Et, en effet,

$$(37-19)\,12 = 18 \times 12 = 216,$$
$$37 \times 12 - 19 \times 12 = 444 - 228 = 216.$$

50. Avant de passer à un *troisième principe* qui n'est que la proposition du n° **25** généralisée, nous démontrerons une PROPOSITION PRÉLIMINAIRE dont voici l'énoncé :

Dans une multiplication de plusieurs nombres, on peut intervertir l'ordre des deux derniers facteurs de la multiplication sans changer le produit.

Soit à effectuer la *multiplication* $43 \times 19 \times 27 \times 15$.

Je dis que

$$43 \times 19 \times 27 \times 15 = 43 \times 19 \times 15 \times 27.$$

En effet, désignons par P le produit 43×19 que l'on peut supposer déjà formé; il faut prouver que

$$P \times 27 \times 15 = P \times 15 \times 27.$$

Or on a

$$P \times 27 = P + P + P + P + \ldots,$$

le second membre de cette égalité se composant de 27 nombres égaux à P, et écrits à la suite les uns des autres.

Si l'on multiplie les deux membres par 15, les deux produits résultants sont évidemment égaux (*) et l'on a

$$P \times 27 \times 15 = (P + P + P + \ldots) \times 15,$$

(*) Il est clair que, si deux nombres sont égaux, leurs *doubles*, leurs *triples, etc.*, leurs *moitiés*, leurs *tiers*, leurs *quarts*, *etc.*, sont aussi égaux ; d'où il résulte qu'on peut *multiplier* ou *diviser* les deux membres d'une égalité, par *un même* nombre, sans que les nouveaux membres cessent d'être égaux. Cette double proposition est du genre de celles qu'on nomme, en mathématiques, *intuitives*. Nous aurons souvent occasion de nous en servir dans la suite de cet ouvrage.

ou, en vertu du premier principe (n° **47**),

$$P \times 27 \times 15 = P \times 15 + P \times 15 + P \times 15 + \ldots.$$

Mais le second membre de cette nouvelle égalité est formé de 27 fois le nombre $P \times 15$, ou est égal à $P \times 15 \times 27$.

Donc enfin

$$P \times 27 \times 15 = P \times 15 \times 27.$$

CE QU'IL FALLAIT DÉMONTRER.

51. TROISIÈME PRINCIPE. — *Dans toute multiplication de plusieurs facteurs,* quel qu'en soit le nombre, *on peut, sans changer le produit, intervertir l'ordre des facteurs de toutes les manières possibles.*

Soit un produit indiqué, ou à effectuer

$$49 \times 72 \times 137 \times 63 \times 54 \times 19 \times 224.$$

D'après la PROPOSITION PRÉLIMINAIRE, le *dernier* facteur 224 peut être échangé avec l'*avant-dernier* 19, ce qui donne

$$49 \times 72 \times 137 \times 63 \times 54 \times 224 \times 19.$$

On peut, de même, l'échanger avec 54, *considéré comme l'avant-dernier terme d'un produit,* puis, par la même raison encore, avec 63, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on l'ait fait parvenir à la *seconde* place, et que l'on ait

$$49 \times 224 \times 72 \times 137 \times 63 \times 54 \times 19.$$

Il peut alors être considéré comme le *second* facteur d'un produit de *deux* facteurs, et passer à la place du *premier* facteur 49, en vertu du principe n° **25**.

On voit donc déjà qu'il est permis de faire occuper à ce *dernier* facteur du produit proposé *toutes* les places, sans que le produit cesse d'être le même.

Prenons maintenant un facteur occupant une place *quelconque*, 63 par exemple; on peut d'abord, ainsi qu'on vient de le voir, en le considérant comme le *dernier* facteur d'un produit, le faire passer successivement à toutes les places, *de droite à gauche*, puis, toujours d'après la PROPOSITION PRÉLIMINAIRE, en le considérant constamment comme l'*avant-dernier* facteur d'un produit, le faire passer, *de gauche à droite*, à la place du facteur 54, de là, à la place du facteur 19, et enfin à la place de 224. Donc, etc.

52. [Ce principe donne lieu à la question suivante :

Combien, dans une multiplication de facteurs en nombre quelconque, peut-on faire d'échanges ou de PERMUTATIONS *entre tous ces facteurs ?*

Pour y répondre, nous considérerons successivement *deux*, *trois*, *quatre*, *etc.*, facteurs que nous exprimerons pour le moment par les lettres a, b, c, d, etc.

D'abord, pour DEUX lettres a et b, on peut avoir les *deux* permutations ab, ba ; ce qui donne 2 ou 1×2.

Pour TROIS lettres a, b, c, on peut, dans chacun des produits égaux ab, ba, introduire la troisième lettre c à la première place à droite, puis au milieu, puis à la gauche; ce qui donne nécessairement les *six* produits tous égaux (n° **31**) :

$$abc,\quad acb,\quad cab \mid bac,\quad bca,\quad cba.$$

Ainsi, pour TROIS lettres, on a 6, ou

$$2 \times 3, \quad \text{ou} \quad 1 \times 2 \times 3 \text{ } \textit{permutations}.$$

Pour QUATRE lettres, comme dans chacun des *six* produits de trois lettres, on peut faire occuper à la quatrième lettre *quatre* places différentes, en commençant par la droite, et remontant jusqu'à la première place à gauche; il s'ensuit que ces *quatre* lettres donneront 6×4 ou 24 *permutations*, c'est-à-dire $1 \times 2 \times 3 \times 4$.

On prouverait de même que CINQ lettres donnent 24×5 ou 120 *permutations*, c'est-à-dire $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$; et ainsi de suite.

Généralement si n exprime le nombre total des lettres, on a, pour *le nombre total* des permutations,

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \ldots \times n,$$

produit qui se compose de la *suite naturelle* des nombres depuis 1 jusqu'à n.

Veut-on savoir, par exemple, *combien* 10 *personnes rangées autour d'une table peuvent faire d'échanges entre elles, en supposant que chacune d'elles doive occuper successivement toutes les places?*

Réponse :

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10,$$

ou, effectuant les calculs,

$$3628800 \text{ } \textit{permutations}.]$$

53. CONSÉQUENCE I. — *Trois nombres, ou plus, étant donnés, lorsqu'on multiplie chacun d'eux par le produit effectué de tous les autres, les produits résultants sont tous égaux entre eux.*

Soient, pour exemple, les nombres 23, 49, 57, 19.

Je dis que l'on a

$$\begin{aligned} 23 \times (49 \times 57 \times 19) &= 49 \times (23 \times 57 \times 19) \\ &= 57 \times (23 \times 49 \times 19) \\ &= 19 \times (23 \times 49 \times 57). \end{aligned}$$

[Pour fixer les idées, *on convient de mettre entre parenthèses* les produits qu'on *suppose déjà tout formés*.]

Cela posé, on a, d'après le principe du n° **25**,

$$23 \times (49 \times 57 \times 19) = (49 \times 57 \times 19) \times 23,$$

ou, supprimant dans le second membre les parenthèses qui deviennent alors inutiles,

$$23\times(49\times57\times19)=49\times57\times19\times23,$$

ou, remettant le facteur 23 à la première place, en vertu du troisième principe (n° **51**),

$$23\times(49\times57\times19)=23\times49\times57\times19. \qquad [1]$$

On a pareillement

$$49\times(23\times57\times19)=(23\times57\times19)\times49,$$

ou, supprimant les parenthèses du second membre,

$$49\times(23\times57\times19)=23\times57\times19\times49,$$

ou, remettant le facteur 49 à la première place,

$$49\times(23\times57\times19)=49\times23\times57\times19. \qquad [2]$$

En raisonnant de même pour les facteurs 57 et 19, on arriverait aux égalités

$$57\times(23\times49\times19)=57\times23\times49\times19, \qquad [3]$$
$$19\times(23\times49\times57)=19\times23\times49\times57. \qquad [4]$$

Or les seconds membres des égalités [1], [2], etc., sont égaux d'après le principe du n° **51**; donc les premiers membres sont aussi égaux entre eux, et la proposition se trouve démontrée.

54. Conséquence II. — *Multiplier un nombre par le produit effectué de plusieurs facteurs, revient à multiplier ce nombre successivement par chacun des facteurs.*

(Cette proposition est *implicitement* comprise dans la précédente.)

Soit, en effet, 47 à *multiplier par* 72, ou (8×9).

Si l'on applique le raisonnement qui a conduit aux égalités [1], [2], etc., on a

$$47\times72 \text{ ou } 47\,(8\times9)=(8\times9)\,47=8\times9\times47=47\times8\times9.$$

Soit encore 19 à *multiplier par* 84, ou $(7\times4\times3)$. On a

$$19\times84$$

ou

$$19\times(7\times4\times3)=(7\times4\times3)\times19=7\times4\times3\times19$$
$$=19\times7\times4\times3.$$

55. Conséquence III. — *Diviser un nombre par le produit effectué de plusieurs facteurs* (lorsque la division doit se faire *exactement*, c'est-à-dire sans donner de reste), *revient à diviser le nombre par le premier facteur; le quotient obtenu, par le second facteur; le nouveau quotient obtenu, par le troisième facteur; et ainsi de suite.*

Désignons par D le dividende, et soit, par exemple, 140 le diviseur qu'on peut considérer comme le produit effectué de *trois* facteurs 4, 5, 7 ; en sorte que l'on ait

$$140 = (4 \times 5 \times 7).$$

[Les parenthèses indiquent (n° 53) un produit effectué.]

Puisque la division de D par 140 doit être *exacte*, on a, en appelant q le quotient de cette division,

$$D = 140 \times q \text{ (} q \text{ étant un nombre entier)};$$

ou, remplaçant 140 par sa valeur $(4 \times 5 \times 7)$,

$$D = (4 \times 5 \times 7) \times q.$$

Or, de cette égalité, on déduit (n° 53)

$$D = 4 \times (5 \times 7 \times q);$$

ce qui prouve déjà que D est divisible *exactement* par le premier facteur 4, puisque $(5 \times 7 \times q)$ est un nombre *entier*.

Désignant le quotient correspondant par q', on obtient la nouvelle égalité

$$q' = 5 \times 7 \times q,$$

ou bien encore (n° 53)

$$q' = 5 \times (7 \times q);$$

d'où l'on voit, en second lieu, que q' est divisible par le second facteur 5, puisque $(7 \times q)$ est un nombre *entier*.

Désignant le *nouveau quotient* par q'', on a la nouvelle égalité

$$q'' = 7 \times q;$$

donc enfin q'' est divisible exactement par le troisième facteur 7, et donne pour quotient q, c'est-à-dire le *quotient de la division* des deux nombres donnés. C. Q. F. D.

N. B. — L'un des facteurs, 5 par exemple, peut entrer plusieurs fois dans la composition du produit effectué ; on dit alors que D est divisible *plusieurs fois de suite* par 5.

56. C'est ici le lieu de faire connaître une *locution* très-usitée en mathématiques, et dont nous aurons souvent à faire usage.

Lorsqu'un nombre N est décomposé en plusieurs facteurs a, b, c, d, etc., de manière que l'on ait

$$N = a \times b \times c \times d \ldots;$$

si l'on divise N par a, on a pour quotient $b \times c \times d$.

On dit, dans ce cas, que l'on *supprime* le facteur a dans le produit $a \times b \times c \times d \ldots$, ce qui donne pour résultat,

$$b \times c \times d \ldots.$$

Supprimant de même le facteur b, on a pour résultat,

$$c \times d; \text{ et ainsi de suite.}$$

Donc, SUPPRIMER un facteur dans un produit, c'est *diviser* ce produit par le facteur.

57. QUATRIÈME PRINCIPE. — Dans une multiplication à exécuter sur deux nombres, *lorsqu'on rend l'un des deux facteurs* UN CERTAIN NOMBRE DE FOIS *plus grand ou plus petit, et qu'on effectue ensuite l'opération, on obtient un produit qui est* CE MÊME NOMBRE DE FOIS *plus grand ou plus petit que le produit des deux nombres proposés.*

En termes abrégés, *si l'on multiplie ou divise* PAR UN CERTAIN NOMBRE *l'un des facteurs d'une multiplication de deux nombres, on multiplie ou divise le produit* PAR CE MÊME NOMBRE.

[On suppose ici, comme dans les énoncés des principes suivants et de leurs conséquences, que le DIVISEUR EMPLOYÉ soit un *sous-multiple* (n° 46) du nombre sur lequel on opère.]

Soient a et b les deux nombres donnés.

Je dis que si, *avant d'effectuer la multiplication,* on rend le *multiplicande* a, 12 fois, par exemple, *plus grand,* ce qui revient à le *multiplier* par 12, et qu'ensuite on effectue la multiplication, on obtiendra un produit 12 fois *plus grand* que le produit $a \times b$ des deux nombres proposés.

En effet on a, d'après la proposition du n° 50,

$$(a \times 12) \times b, \text{ ou } a \times 12 \times b = a \times b \times 12, \text{ ou } (a \times b) \times 12;$$

ce qui indique bien que le produit d'un nombre 12 fois *plus grand* que a par b est 12 fois *plus grand* que celui de a par b.

Raisonnons maintenant sur $a \times 12$, pris pour *multiplicande*, en conservant b pour *multiplicateur :* si l'on rend $(a \times 12)$ 12 fois *plus petit,* ou si on le *divise* par 12, on a le *nouveau multiplicande* a qui, multiplié par *le multiplicateur* b, donne le produit $a \times b$, lequel est, évidemment, 12 fois *moindre* que le produit $(a \times b) \times 12$, résultant de la multiplication de $(a \times 12)$ par b.

Donc, en rendant le *multiplicande* 12 fois *plus petit* (ou le *divisant* par 12), on rend le *produit* 12 fois *plus petit,* ou, en d'autres termes, on le *divise* par 12.

Ce que nous venons de dire pour le *multiplicande* s'applique nécessairement au *multiplicateur,* puisqu'on peut (n° 26) prendre le *multiplicande* pour *multiplicateur*, et réciproquement.

Donc, etc.

58. CONSÉQUENCE. — *On ne change pas la valeur d'un produit de deux facteurs en* MULTIPLIANT *l'un des facteurs par un nombre, et* DIVISANT *l'autre facteur par ce même nombre.*

Car il est évident que les deux opérations qu'on exécute ainsi, *avant* *l'opération principale*, établissent, dans l'un et l'autre cas, une véritable *compensation*.

N. B. — De cette proposition résulte la suivante :

Si l'on MULTIPLIE ou DIVISE *l'un des deux facteurs d'un produit par* UN CERTAIN NOMBRE, *il faut, par compensation, pour que le produit reste* LE MÊME, DIVISER *ou* MULTIPLIER *l'autre facteur par* LE MÊME NOMBRE.

59. CINQUIÈME PRINCIPE. — Dans une division à exécuter sur deux nombres (lorsque la division doit se faire *exactement*, c'est-à-dire sans donner de reste), *si l'on rend* d'abord *le dividende* UN CERTAIN NOMBRE DE FOIS *plus grand* ou *plus petit*, ou bien le diviseur UN CERTAIN NOMBRE DE FOIS *plus petit ou plus grand, et qu'on effectue ensuite la division, on obtient un quotient* CE NOMBRE DE FOIS *plus grand* ou *plus petit que le quotient de la division des deux nombres proposés.*

En d'autres termes, si l'on *multiplie* ou *divise* le *dividende* d'une division qui ne donne pas de reste, ou si, au contraire, on *divise* ou *multiplie le diviseur par un certain nombre*, on *multiplie* ou *divise* le quotient par ce NOMBRE.

Soient D le dividende, d le diviseur et q le quotient de la division ; on a l'égalité

$$D = d \times q \ (q \text{ étant un nombre } \textit{entier}).$$

Je dis, EN PREMIER LIEU, que si, avant d'effectuer la division, on rend le dividende, par exemple, 15 fois *plus grand*, ce qui revient à le *multiplier* par 15, et qu'ensuite on effectue la division, on obtiendra un quotient 15 fois *plus grand* que q.

En effet, si l'on multiplie par 15 les deux membres de l'égalité précédente, les deux produits résultants sont évidemment *égaux* (n° **50**, *voir* la note), et l'on a

$$D \times 15 = d \times q \times 15 = d \times (q \times 15) \quad (\text{n}^\circ\ \mathbf{54});$$

le quotient de la division de $D \times 15$ par d est donc bien 15 fois *plus grand* que celui de D par d.

Raisonnons maintenant en prenant $D \times 15$ pour dividende : si on le rend quinze fois *plus petit*, c'est-à-dire si on le *divise* par 15, on obtient le nouveau dividende D qui, *divisé* par le diviseur d, donne le quotient q, lequel est évidemment 15 fois *moindre* que le quotient $q \times 15$, résultant de la division de $D \times 15$ par d.

Donc, si l'on *multiplie* ou *divise* le dividende par un *nombre quelconque*, on obtient un quotient *ce même nombre* de fois *plus grand* ou *plus petit*.

Je dis, EN SECOND LIEU, que, si l'on *divise* ou *multiplie* le diviseur par un *nombre*, le quotient résultant doit être ce *nombre* de fois *plus grand* ou *plus petit*.

Cela se déduit évidemment de la proposition énoncée au *N. B.* du n° 58, puisque le dividende doit toujours être égal au produit du diviseur par le quotient.

60. Conséquence I. — *Multiplier* ou *diviser* le dividende par *un nombre*, revient à *diviser* ou *multiplier* le diviseur par ce même nombre.

On vient de voir, en effet, que le quotient éprouve, dans l'un et l'autre cas, le même changement.

61. Sixième principe. — *On ne change pas la valeur d'un quotient en multipliant ou divisant le dividende et le diviseur par un même nombre; et le reste, s'il y en a un, est multiplié ou divisé par ce nombre.*

Premièrement. — Si la division se fait *exactement*, il résulte du principe précédent (n° 59) que, par cette double opération, le quotient est, d'une part, rendu *un* certain nombre de fois *plus grand* ou *plus petit*, et, de l'autre, le même nombre de fois *plus petit* ou *plus grand*; donc il y a *compensation*.

Secondement. — Supposons que la division donne *un reste*.

Soient D le dividende, d le diviseur, q le quotient, et r le reste de la division; on a l'égalité

$$D = d \times q + r. \tag{1}$$

Multipliant les deux membres par un nombre entier quelconque, 15 par exemple, on a (n° 47)

$$D \times 15 = d \times q \times 15 + r \times 15,$$

ou

$$D \times 15 = d \times 15 \times q + r \times 15,$$

ou bien encore

$$D \times 15 = (d \times 15) q + r \times 15. \tag{2}$$

Cette dernière égalité, traduite en langage ordinaire, exprime que le *quotient* de la division de $D \times 15$ par $d \times 15$ est q (quotient de la division de D par d), et que le *reste* est le produit de r (reste de cette dernière division) *multiplié par* 15.

Raisonnons maintenant en remontant de l'égalité (2) à l'égalité (1): on reconnaît que le *quotient* de la division de D par d est q (quotient de la division de $D \times 15$ par $d \times 15$), et que *le reste* est r (reste de cette dernière division) *divisé par* 15.

Ainsi se trouve complétement démontrée la proposition énoncée.

N. B. — Si, au lieu de *multiplier* ou *diviser* à la fois le dividende et le diviseur par un certain nombre, on *multiplie* ou *divise* seulement l'un des deux termes par ce nombre, lorsque la division primitive donne *un reste*, il est aisé de reconnaître, en opérant comme précédemment sur l'égalité

$$D = d \times q + r,$$

que l'on ne peut rien conclure pour le quotient de la nouvelle division, considéré par rapport au premier quotient.

Il ne s'agit évidemment ici que de la *partie entière* du quotient.

Remarque. — Le *sixième principe* peut servir à justifier la simplification de calcul que nous avons indiquée au n° 38, pour effectuer la division *dans le cas où le diviseur est terminé par des zéros;* car, en opérant comme il a été dit, on ne fait autre chose que *diviser* les deux termes de la division par un *même nombre,* 10, 100, 1000, etc., en sorte qu'*on ne change pas* le *quotient;* et l'on ramène d'ailleurs le *reste* à sa vraie valeur en le faisant suivre des zéros ou chiffres significatifs séparés dans le dividende.

62. Septième principe. — *Lorsqu'un nombre donné est la somme de plusieurs parties toutes divisibles exactement par un autre nombre donné, le premier nombre est lui-même divisible par le second; et le quotient de la division de ces deux nombres est égal à la somme des quotients partiels que donne la division des différentes parties par ce second nombre.*

Désignons par a le premier nombre, supposé égal à la somme $a'+a''+a'''\ldots$ de plusieurs autres; soit 12, par exemple, le nombre qui, d'après l'énoncé, doit *diviser exactement* chacune des parties a', a'', a''', etc., du premier nombre donné, et appelons q', q'', q''', etc., les quotients correspondants.

On a les égalités

$$a'=12\times q',\quad a''=12\times q'',\quad a'''=12\times q''',\ldots,$$

qui, ajoutées entre elles *membre à membre*, donnent

$$a'+a''+a'''+\ldots,\quad \text{ou } a=12\times q'+12\times q''+12\times q''',\ldots,$$

ou bien (n° 47)

$$a=12\times(q'+q''+q'''+\ldots);$$

ce qui démontre que le nombre a lui-même est *divisible exactement* par 12, et donne pour quotient

$$q'+q''+q'''+\ldots.$$

63. Conséquence. — *Tout multiple* (n° 46) d'un nombre *exactement divisible* par un autre nombre, est *aussi divisible* par cet autre nombre.

Car, soient a *divisible exactement* par b, et m fois a un *multiple* quelconque de a; ce *multiple* peut être considéré comme égal à $a+a+a+\ldots$. Or chacune des parties a, a, a, etc., est supposée *divisible exactement* par b; donc leur *somme* ou m fois a est aussi *divisible* par b.

Ainsi, 48 étant *divisible* par 6, et donnant 8 pour quotient, 5 fois 48, ou 240, est *divisible* par 6, et donne pour quotient 5 fois 8, ou 40.

64. Huitième principe. — *Si un nombre est composé de deux parties dont l'une soit divisible exactement par un autre nombre donné, et l'autre ne le soit pas, le premier nombre n'est pas non plus divisible par le second; et le reste de leur division est égal à celui que donne la division par ce second nombre de la partie non divisible.*

Soient $a = a' + a''$, a étant *divisible* par un nombre quelconque, 15 par exemple, et a'' ne l'étant pas, on a les deux égalités

$$a' = 15 \times q' \quad \text{et} \quad a'' = 15 \times q'' + r$$

(q' et q'' sont des nombres *entiers*, et r est le reste de la division de a'' par 15).

D'où l'on déduit (n° **47**)

$$a \quad \text{ou} \quad a' + a'' = 15 \times (q' + q'') + r;$$

ce qui montre que la division de a, ou $a' + a''$ par 15, donne un reste r, et que ce reste est précisément celui de la division de a'' par 15.

Le quotient de cette division est d'ailleurs égal à la somme des quotients résultant de la division des deux parties a' et a'' par 15.

65. Conséquence. — *Tout nombre qui divise exactement une somme composée de deux parties, et l'une de ses parties, doit diviser l'autre partie.*

Car si cette seconde partie n'était pas divisible par ce nombre, la *somme*, d'après ce que nous venons de dire, ne le serait pas non plus; ce qui serait contraire à l'hypothèse.

Les deux derniers principes nous conduisent naturellement à développer ici les *caractères particuliers* auxquels on reconnaît qu'un nombre donné est *divisible* par *certains nombres*, et lorsque la division *ne doit pas se faire exactement*, à faire connaître un moyen simple d'obtenir le *reste*.

Restes de la division par certains nombres. — Caractères de divisibilité par ces nombres.

66. Premièrement. — *Le reste de la division d'un nombre quelconque par 2, ou par 5, est égal à celui que donne le* CHIFFRE DE SES UNITÉS *divisé par 2, ou par 5;*

Lorsque ce chiffre *est divisible par 2 ou par 5, le nombre lui-même est divisible par 2 ou par 5.*

En effet, le nombre donné peut toujours être décomposé en *deux* parties, savoir : la *partie à gauche* du chiffre de ses *unités*, prise avec sa valeur *relative*, et ce *dernier chiffre*. Or la première partie étant une collection de *dizaines*, est un *multiple* de 10, nombre divisible par 2 ou par 5, puisque l'on a $10 = 2 \times 5$; donc (n° **63**) cette première partie est essentiellement divisible, soit par 2, soit par 5; et alors de deux choses l'une : ou le chiffre des unités est lui-même divisible, soit par 2, soit par 5, ou bien il ne l'est pas. Dans le premier cas, le nombre total est divisible par 2 ou par 5 (nº **62**); dans le second, le *reste* de la division du nombre total est égal (nº **64**) à celui que donne le chiffre des unités divisé par 2 ou par 5. C. Q. F. D.

67. *Remarques.* — 1º. Tous les nombres terminés par un des chiffres 0, 2, 4, 6, 8, sont évidemment divisibles par 2.

Au contraire, les nombres terminés par l'un des chiffres, 1, 3, 5, 7, 9, ne sont pas divisibles, et donnent pour reste 1, c'est-à-dire celui que donne l'un quelconque de ces chiffres.

Les nombres de la première catégorie sont dits des nombres *pairs*, et peuvent être représentés, d'une manière générale, par l'expression $2n$ (n étant un nombre entier quelconque).

Les nombres de la seconde catégorie sont appelés des nombres *impairs*, et ont pour expression générale $2n+1$.

2º. Il n'y a que les nombres terminés par un 0 ou par un 5, qui soient divisibles par 5. Tous les autres donnent *un reste égal au dernier chiffre lui-même.*

68. DEUXIÈMEMENT. — *Le reste de la division d'un nombre quelconque par* 4, ou *par* 25, *est égal à celui que donne la* COLLECTION DE SES DIZAINES ET UNITÉS, *divisée par* 4, ou *par* 25.

Lorsque cette collection est divisible par 4, ou *par* 25, *le nombre donné est lui-même divisible par* 4, ou *par* 25.

Le raisonnement est presque identique avec celui du nº **66**.

Le nombre donné peut toujours être décomposé en *deux* parties, savoir : *la partie à gauche* du chiffre des *dizaines*, prise avec sa valeur *relative*, et *la collection* de ses *dizaines* et *unités* (ou l'*ensemble des derniers chiffres* pris avec leur valeur *relative*).

Or la première partie, qui est un nombre terminé par *deux* zéros, est un multiple de 100, nombre divisible soit par 4, soit par 25, puisque $100 = 4 \times 25$; donc (nº **63**), cette première partie est divisible par 4, ou par 25; et alors de deux choses l'une : ou la seconde partie est elle-même divisible par 4, ou par 25, ou bien elle ne l'est pas. Dans le premier cas, le nombre total est (nº **62**) divisible par 4, ou par 25; dans le deuxième, le reste de la division doit être (nº **64**) égal à celui que donne cette seconde partie divisée soit par 4, soit par 25. C. Q. F. D.

Par exemple, 750628 est divisible par 4, puisque le *quart* de 28 est exact et égal à 7.

De même, 123756 est divisible par 4; car 56 est égal à 14×4.

Mais 263019 n'est pas divisible par 4; et le reste est 3, c'est-à-dire celui que donne 19.

De même, 37234 n'est pas divisible par 4; et le reste est 2, ou le reste que donne 34.

N. B. — Il n'y a que les nombres terminés par 00, 25, 75, qui soient divisibles par 25.

69. Les nombres 8 et 125, 16 et 625, etc., qui reviennent à 2^3 et 5^3, 2^4 et 5^4, etc., jouissent de propriétés tout à fait analogues, que l'on démontrerait de la même manière, en se fondant sur ce que $1000 = 8 \times 125$, ou $2^3 \times 5^3$, $10000 = 16 \times 625$, ou $2^4 \times 5^4$, etc. Mais comme elles sont fort peu d'usage dans la pratique, nous nous abstiendrons d'entrer dans des détails à leur sujet.

70. Troisièmement. — *Le reste de la division d'un nombre quelconque par* 3, *ou par* 9, *est égal à celui qu'on obtient en faisant la somme des chiffres du nombre, considérés avec leur valeur absolue, et divisant cette somme par* 3, *ou par* 9.

Si cette somme est un multiple de 3, *ou de* 9, ou bien si l'on a 0 *pour reste de la division par* 3, ou *par* 9, *le nombre lui-même est divisible par* 3, ou *par* 9.

(Nous démontrerons spécialement la propriété relative à 9, parce que c'est la partie importante de la proposition, eu égard à l'usage que l'on en fait ; mais il serait facile d'appliquer les mêmes raisonnements au nombre 3.)

Remarquons d'abord qu'un nombre qui se compose de l'*unité* suivie d'*un* ou de *plusieurs* zéros, est égal à un *multiple* de 9, *augmenté* de 1.

(Par exemple, $10 = 9 + 1$, $100 = 99 + 1$, $1000 = 999 + 1$, etc.; toutes les parties, 9, 99, 999, etc., sont évidemment divisibles par 9 : les quotients respectifs sont 1, 11, 111, etc.)

Il suit de là que tout nombre formé par un chiffre significatif suivi d'*un* ou de *plusieurs* zéros, est lui-même un certain *multiple* de 9, *augmenté* de ce chiffre significatif.

Par exemple,

$$70 = 7 \times (9 + 1) = (9 + 1) \times 7 = 9 \times 7 + 7, \ldots (\text{n}^\circ\ \mathbf{47}),$$
$$80000 = 8 \times (9999 + 1) = 9999 \times 8 + 8, \ldots$$

Cela posé, prenons un nombre quelconque,

6205473 par exemple.

Il peut être décomposé de la manière suivante :

$$6000000 + 200000 + 0.0000 + 5000 + 400 + 70 + 3;$$

et, d'après ce qui vient d'être dit, il contient deux parties principales, savoir :

1°. Une *somme* de plusieurs *multiples* de 9, laquelle somme est elle-même un multiple de 9 (n° **62**) ;

2°. *La somme des chiffres* $6 + 2 + 0 + 5 + 4 + 7 + 3$.

La *première* partie étant divisible par 9, il peut arriver deux cas : ou la *seconde* partie est divisible par 9, ou elle ne l'est pas.

Dans le premier cas, le nombre proposé est lui-même divisible par

9; et, dans le second cas, le reste de la division de la somme des chiffres significatifs par 9 est nécessairement (nº **64**) égal à celui qu'on obtiendrait en divisant le nombre total par 9. C. Q. F. D.

L'exemple ci-dessus donne, pour la somme des chiffres, 27, nombre divisible par 9. Donc le nombre total est divisible par 9; ce qu'on peut vérifier facilement.

Quant au nombre 3, la démonstration est absolument la même, et il suffirait de substituer, dans le discours, le chiffre 3 au chiffre 9.

Nous ferons toutefois une observation importante, c'est qu'un nombre qui est divisible par 9, l'est nécessairement par 3; mais il peut être divisible par 3 sans l'être par 9. Ainsi, 24, 147, 246, etc., sont divisibles par 3, et ne le sont pas par 9; les quotients sont 8, 49, 82, etc., qui ne renferment plus le facteur 3.

N. B. — Dans la pratique, au lieu de déterminer la somme totale des chiffres, pour la diviser ensuite par 9, on peut, au fur et à mesure que l'on obtient une somme partielle égale ou supérieure à 9, retrancher 9 de cette somme partielle et continuer l'opération jusqu'à ce qu'on soit arrivé au dernier chiffre. Ces soustractions partielles ne changent évidemment pas le reste que l'on cherche.

On se dispense d'ailleurs de faire entrer les 9 dans l'addition, lorsqu'il s'en trouve dans le nombre proposé.

Soit, pour nouvel exemple, le nombre

$$74683056743.$$

Dites : 7 et 4 font 11; ôtez 9, reste 2, et 6 font 8 et 8 font 16; ôtez 9, reste 7, et 3 font 10; ôtez 9, reste 1, et 5 font 6 et 6 font 12; ôtez 9, reste 3, et 7 font 10; ôtez 9, reste 1, et 4 font 5 et 3 font 8.

Donc le reste de la division du nombre proposé par 9 est 8.

On évite ainsi de diviser par 9 une somme qui peut être assez grande si le nombre renferme beaucoup de chiffres.

Preuve par 9 de la multiplication et de la division.

71. La propriété du nombre 9 fournit un moyen très-simple de vérifier le résultat d'une multiplication ou d'une division, moyen connu sous la dénomination de *preuve par* 9.

Voici en quoi cette preuve consiste :

1°. Pour la multiplication, *déterminez* le reste de la division du multiplicande par 9, comme au numéro précédent, et *opérez* de la même manière sur le multiplicateur.

Multipliez ces deux restes l'un par l'autre, et *déterminez* de même le reste de la division par 9 du produit résultant.

Cherchez enfin le reste de la division du produit total par 9.

Si l'opération a été faite exactement, le *dernier reste* obtenu doit être égal au *troisième*.

Lorsque l'*un* des deux premiers restes est 0, il en est nécessairement de même du *troisième;* par suite, on doit trouver o pour le *quatrième:* cela revient à dire que, si l'un des facteurs de la multiplication est *divisible par* 9, le produit total doit être aussi *divisible par* 9; ce qui est conforme au principe du n° **63.**

Pareillement, lorsque les deux premiers restes sont égaux à 3, auquel cas le *troisième* est 0, le *quatrième* doit aussi être 0; ce qui veut dire que le produit total doit être *divisible* par 9.

2°. POUR LA DIVISION, il faut *commencer par soustraire* du dividende proposé le reste qu'a donné l'opération; puis on *exécute la vérification* comme il est dit ci-dessus, en considérant le diviseur et le quotient comme les deux facteurs d'une multiplication, et le dividende, *préalablement diminué du reste,* comme le produit de ces deux facteurs.

Pour se rendre compte de ce moyen de vérification, on remarque d'abord que *les deux termes de la multiplication* peuvent se mettre sous la forme

$$9 \times m + r, \quad \text{et} \quad 9 \times m' + r',$$

$9 \times m$ et $9 \times m'$ désignant deux *multiples* quelconques de 9, r et r' les restes de la division par 9 de ces deux termes.

Cela posé, si l'on multiplie entre elles les expressions précédentes, d'après le principe du n° **47**, on obtient *quatre* produits partiels dont les trois premiers sont essentiellement des *multiples* de 9, et le quatrième est $r \times r'$; en sorte que le produit de ces deux expressions, qui n'est autre chose que le *produit de la multiplication proposée,* peut lui-même être mis sous la forme

$$9 \times m'' + r \times r'.$$

Or le reste de la division de ce dernier produit par 9, s'il y en a un, ne peut provenir que du produit $r \times r'$; donc, etc.

Appliquons la règle à l'exemple suivant :

$$\begin{array}{r} 47659 \\ 8076 \\ \hline 285954 \\ 333613 \\ 381272 \\ \hline 384894084 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c} 4 & 3 \\ \hline 3 & 3 \end{array}$$

Il est d'usage de tracer une croix à côté de l'opération, pour y placer successivement les *quatre* restes que comporte la preuve par 9.

Ainsi, la multiplication étant déjà effectuée, on *écrit* à la gauche de la ligne verticale de cette croix et l'un au-dessous de l'autre, les deux restes 4 et 3 de la division par 9, du multiplicande et du multiplicateur; puis, on *fait le produit* de ces deux restes, ce qui donne 12, que l'on *divise* par 9; et l'on obtient le *troisième* reste 3, qu'on place à la droite de la ligne verticale et à côté du *premier* reste 4. On *cherche* enfin le reste de la division du produit par 9, et ce *quatrième* reste, qui se place au-dessous du troisième, doit, si l'opération est juste, être *égal* à celui-ci.

C'est ce qui a lieu, en effet, dans l'exemple que nous venons de traiter.

Avec un peu d'habitude, on fait cette vérification de *mémoire* et sans rien écrire.

72. Première remarque. — La *preuve par* 9, qui est très-simple dans son emploi, est sujette à plusieurs causes d'erreur dont voici les principales :

1°. Il se peut que, soit dans les produits partiels, soit dans le produit total, l'on ait écrit un 0 pour un 9, ou réciproquement, ou bien, d'une part, un chiffre *trop fort* ou *trop faible* d'un certain nombre d'unités, et, d'autre part, un chiffre *trop faible* ou *trop fort* du même nombre d'unités;

2°. Il est possible encore, lorsqu'il y a des *zéros* dans le *multiplicateur*, que l'on n'ait pas avancé suffisamment à gauche les produits partiels.

On comprend que, dans ces divers cas, les erreurs commises, ou se compensent, ou, du moins, n'influent pas sur les restes de la division par 9, des termes de l'opération à vérifier.

La *preuve par* 9 n'est donc, à proprement parler, qu'une *demi-preuve*, à laquelle on a recours quand on est pressé par le temps; ce qui est seulement certain, c'est que, toutes les fois qu'il n'y a pas *concordance* entre le *quatrième* et le *troisième* restes, l'opération est fautive et doit être recommencée. Mais, si la concordance existe, il n'y a qu'une assez grande *probabilité* que le produit est véritablement celui que l'on cherchait.

73. Deuxième remarque. — Le nombre 11 jouissant d'une propriété analogue à celle du nombre 9, on peut la faire servir également à la vérification d'une multiplication ou d'une division, et ce moyen comporte beaucoup moins de chances d'erreur. Mais nous renvoyons le développement de cette propriété au *dernier* chapitre.

74. Troisième remarque. — Si l'on comprend bien le *procédé de la preuve par* 9, on reconnaît qu'il est applicable à tout nombre tel, que le reste de la division par ce nombre puisse être facilement déterminé. Or la méthode de division (n° **31**) fournit un moyen simple de diviser un nombre donné par un nombre d'un seul chiffre, 7 par exemple; on pourrait donc substituer la *preuve par* 7 à la *preuve par* 9, ou même les employer toutes les deux; ce qui serait encore plus simple que d'avoir recours à l'opération *inverse* de l'opération primitive.

Ainsi, dans l'exemple traité plus haut, si l'on prend le 7ᵉ de chacun des facteurs, on obtient les restes 3 et 5 qui, multipliés l'un par l'autre, donnent 15 pour produit; le 7^e de 15 est 2, et il reste 1.

D'ailleurs, en prenant le 7^e du produit total, on a aussi pour reste 1 ; et comme la *preuve par* 9 a également réussi, on peut conclure, presque avec certitude, que le produit est exact.

§ II. — DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR.

75. *Définitions préliminaires*. — On appelle *nombre premier absolu*, ou simplement, *nombre premier*, tout nombre qui n'a d'autre diviseur que *lui-même* et l'*unité*.

Un nombre est toujours divisible par *lui-même* et donne 1 pour quotient ; l'*unité* est *diviseur* de tout nombre, et donne pour quotient le nombre lui-même.

Par exemple, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc., sont des *nombres premiers;* mais 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, etc., n'en sont pas, car on a

$$4=2\times2,\quad 6=3\times2,\quad 8=2\times2\times2\ldots.$$

Deux nombres sont dits *premiers entre eux*, ou un nombre est dit *premier avec* un autre, lorsqu'ils n'ont pas d'autre *diviseur commun* que l'*unité*.

Ainsi, 25 et 12 *sont premiers entre eux;* car il n'y a que 1 qui puisse les diviser tous les deux exactement. 8 et 14, 12 et 27, *ne sont pas premiers entre eux*, puisque l'on a

$$8=4\times2,\quad 14=7\times2,$$

et

$$12=4\times3,\quad 27=9\times3.$$

Tout nombre *premier absolu* qui ne divise pas un autre nombre donné, est nécessairement *premier avec* celui-ci.

Car ces deux nombres n'ont alors d'autre *diviseur commun* que l'unité.

Deux nombres *qui ne sont pas premiers entre eux* peuvent avoir plusieurs *diviseurs communs*.

Ainsi, 72 et 48 ont évidemment pour *communs diviseurs*, 2, 3, 4, 6, 12 et 24.

La détermination *du plus grand commun diviseur* de deux nombres constitue une opération très-importante que nous allons traiter dès à présent.

Du plus grand commun diviseur de deux nombres.

76. Nous commencerons par énoncer la règle générale, qui sera ensuite développée et démontrée sur des exemples particuliers.

RÈGLE GÉNÉRALE. — Pour trouver le PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR DE DEUX NOMBRES :

Divisez d'abord le plus grand nombre par le plus petit ; si la division se fait *exactement*, le plus petit nombre est le plus grand commun diviseur cherché.

Mais si vous obtenez un reste, *divisez le plus petit nombre par le reste;* et si cette nouvelle division se fait *exactement*, le reste de la première opération, qui a été pris pour diviseur dans la seconde, est le nombre demandé.

Si vous obtenez encore un reste, *divisez le premier reste par le second;* et si cette troisième division se fait exactement, le second reste est le nombre demandé; mais si, etc.

Continuez ainsi les opérations jusqu'à ce que vous parveniez à un reste qui divise exactement le reste précédent; le dernier reste obtenu est le plus grand commun diviseur cherché.

77. Soient, pour exemple, les deux nombres :

$$943 \quad \text{et} \quad 345.$$

Tableau des calculs.

	2	1	2	1	3
943	345	253	92	69	23
253	92	69	23	0	

943 | 23
23 | 41
0

345 | 23
115 | 15
0

(Pour plus de clarté, on place, contre l'usage ordinaire, chaque quotient *au-dessus* du diviseur correspondant.)

Il est évident que *le plus grand commun diviseur* cherché ne peut surpasser le plus petit nombre dont il doit être un diviseur; mais il peut lui être égal.

On est ainsi amené à diviser le plus grand nombre, 943, par le plus petit, 345.

Ici, la division donne un reste; donc 345 *n'est pas le plus grand commun diviseur.*

Je dis actuellement que celui-ci ne peut être plus grand que le reste 253, et qu'il doit le diviser exactement.

En effet, il résulte de cette première opération, que

$$943 = 345 \times 2 + 253.$$

Or, *le plus grand commun diviseur*, devant diviser exactement 345, doit aussi diviser son *multiple* 345×2 (nº 63); il doit, également, diviser le plus grand nombre, 943. D'où l'on voit que le nombre cherché doit diviser *un tout*, 943, et l'*une* de ses parties, 345×2;

donc (n° 65), il doit diviser l'*autre* partie, 253, et, par conséquent, ne saurait être supérieur à 253.

On est ainsi conduit à essayer si 253 ne serait pas, *lui-même*, le plus grand commun diviseur, et, par suite, à diviser le plus petit nombre, 345, par 253.

Mais nous allons d'abord faire voir que *le plus grand commun diviseur cherché* est *le même* que celui qui existe entre *le plus petit* nombre et *le reste* de la première division.

A cet effet, nommons, pour le moment, D le plus grand commun diviseur *cherché*, et D' le plus grand commun diviseur, quel qu'il soit, entre 345 et 253. Nous avons dit plus haut que, D devant diviser 943 et l'une de ses parties, 345×2, doit diviser l'autre partie 253. Ainsi, D ne peut être *supérieur* à D', qu'on suppose être le plus grand commun diviseur de 345 et 253.

D'un autre côté, D', qui doit diviser 253, doit aussi diviser 345, et, par suite, son *multiple*, 345×2; donc (n° 62), il doit diviser également 943; par conséquent, D' qui doit diviser à la fois 943 et 345, ne saurait être *supérieur* à D, plus grand commun diviseur de ces deux nombres.

Il suit de là que les nombres D, D', ne peuvent être *supérieurs* l'un à l'autre, et, par conséquent, sont *égaux*.

La question est alors ramenée à chercher le plus grand commun diviseur entre 345 et 253; c'est-à-dire à opérer sur ces deux nombres comme sur les nombres proposés.

La seconde division donnant encore un reste 92, on prouverait, comme ci-dessus, en posant l'égalité

$$345 = 253 \times 1 + 92,$$

que le plus grand commun diviseur de 345 et de 253 est *le même* que celui qui peut exister entre 253 et 92.

Opérant sur ces derniers nombres, comme sur les précédents, on trouve successivement les restes 69 et 23; mais, à la cinquième opération, on obtient *zéro* pour *reste*.

D'où l'on peut conclure que 23 est le plus grand commun diviseur de 69 et de 23, par suite de 92 et de 69, de 253 et de 92, de 345 et de 253, et enfin de 943 et de 345.

78. La division de 943 par 23, et de 345 par 23, donne pour quotients 41 et 15, ainsi que le montre le tableau.

Nous ferons, à ce sujet, une *remarque* importante : c'est que ces deux quotients 41 et 15 sont, *nécessairement*, des nombres *premiers entre eux*.

En effet, s'ils pouvaient avoir un *facteur commun*, 3 par exemple, en sorte que l'on eût $41 = 3 \times q$, $15 = 3 \times q'$ (q et q' étant des nombres entiers), il en résulterait

$$943 = 23 \times (3 \times q\ ) = (23 \times 3) \times q,$$
$$345 = 23 \times (3 \times q') = (23 \times 3) \times q';$$

donc (23×3) ou 69 serait *commun diviseur* de 943 et de 345, et, par conséquent, 23 ne serait pas leur *plus grand commun diviseur*, ce qui serait contraire au résultat trouvé.

Cette observation et le raisonnement sur lequel elle s'appuie étant évidemment applicables à deux nombres quelconques, il s'ensuit que *les quotients de la division de deux nombres par leur plus grand commun diviseur sont toujours des nombres* PREMIERS ENTRE EUX.

Autres exemples.

2^e^ *Exemple.* 18225 et 7425

	2	2	5
18225	7425	3375	675
3375	675	000	

Quotients.

18225	675	7425	675
4725	27	675	11
000		0	

(Les quotients 27 et 11 sont *premiers entre eux.*)

3^e^ *Exemple.* 57792 et 14256.

	4	18	1	1	3	2
57792	14256	768	432	336	96	48
768	6576	336	96	48	0	
	432					

Quotients.

57792	48	14256	48
97	1204	465	297
192		336	
0		0	

(1204 et 297 sont *premiers entre eux.*)

4^e^ *Exemple.* 5425 et 1727.

	3	7	12	1	5	3
5425	1727	244	19	16	3	1
244	19	54	3	1	0	
		16				

Dans le deuxième exemple, on a obtenu le reste 0, après *trois* opérations, et, par suite, 675 pour le *plus grand commun diviseur.*

Dans le troisième, on est arrivé au reste 0, après *six* opérations (dans l'une desquelles le *quotient* est composé de *deux* chiffres, 18). Le *plus grand commun diviseur* est 48.

Enfin, le quatrième exemple a donné également lieu à *six* opérations; mais on n'a trouvé 0 pour reste, qu'après avoir obtenu l'*unité* pour le *reste précédent;* ce qui indique que 1 est *le seul* diviseur commun des deux nombres proposés, et que, par conséquent (n° 75), ces nombres sont *premiers entre eux.*

79. En général, on reconnaît que deux nombres donnés sont *premiers entre eux*, lorsqu'en leur appliquant le procédé du *plus grand commun diviseur*, on parvient à l'*unité* pour reste, *avant d'avoir obtenu le reste* 0.

C'en est le *signe caractéristique;* car, pour peu qu'on réfléchisse sur la nature du procédé, on voit que les restes diminuant sans cesse, on doit arriver finalement au *reste* 0.

Mais alors, de *deux* choses l'*une :*

Ou le reste précédent est différent de 1, auquel cas il est *diviseur commun ;* et les nombres proposés *ne sont pas premiers entre eux.*

Ou bien, le reste précédent est 1 ; et alors l'*unité seule* est *diviseur commun* des deux nombres.

L'application de la règle générale donne lieu à plusieurs *remarques* qui constituent, avec celle du n° 78, des propriétés essentielles du *plus grand commun diviseur.*

80. Première remarque. — Lorsque, dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres, on arrive à un reste, reconnu pour être un *nombre premier* (tels sont 7, 11, 13, 17, 19, etc.; et nous donnerons, dans ce chapitre, le moyen de reconnaître qu'un nombre est *premier absolu*), qui ne divise pas le reste précédent, on peut, sans pousser plus loin l'opération, *affirmer* que les deux nombres proposés sont *premiers entre eux.* Car le plus grand commun diviseur de ces deux nombres devrait, d'après la démonstration même du procédé, diviser le reste auquel on est arrivé; ce qui est impossible, puisque ce reste est un *nombre premier.*

Il est clair que, pour la même raison, si l'un des deux nombres proposés est reconnu comme étant un *nombre premier,* on doit, ou ne pas commencer l'opération, ou s'arrêter après la *première* division, suivant que le *nombre premier* est le plus grand ou le plus petit de ces deux nombres.

81. Deuxième remarque. — Si l'on multiplie par un nombre *entier quelconque*, 15 par exemple, les deux nombres auxquels on suppose le procédé déjà appliqué, et qu'on recherche le plus grand commun diviseur des deux produits résultants, les nouveaux *quotients* seront respectivement *les mêmes* que les quotients successifs provenant de la première série d'opérations; mais *tous les restes* seront respectivement égaux aux produits de la multiplication des restes primitifs par 15.

C'est une conséquence évidente de la proposition établie au n° **61**; car le procédé du plus grand commun diviseur consiste dans une série de *divisions* telles, que la première a pour dividende *le plus grand nombre proposé* et pour diviseur *le plus petit nombre*, que *ce plus petit nombre* et *le reste obtenu* forment le dividende et le diviseur de la seconde, que *ce premier reste* et *le second* servent eux-mêmes, à leur tour, de dividende et de diviseur pour la troisième opération, et ainsi de suite.

82. Troisième remarque. — Tout *diviseur commun* de deux nombres *divise exactement tous les restes* auxquels conduit le procédé, et, par conséquent, *divise le* PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR de ces deux nombres.

Reprenons, en effet, l'égalité (n° **77**)

$$943 = 345 \times 2 + 253;$$

tout diviseur commun d de 943 et de 345 devant diviser 345×2, *multiple* de 345, divise *un tout*, 943, et l'*une de ses parties*, 345×2; donc il doit diviser l'*autre partie*, 253, ou le *premier reste* de l'opération.

On déduirait, pareillement, de l'égalité

$$345 = 253 \times 1 + 92,$$

que d, diviseur commun de 345 et de 253, doit diviser le *second reste*, 92; et, en continuant ainsi, on prouverait successivement que d divise *tous les restes*, et, par conséquent, le PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR, qui n'est autre que le *dernier de ces restes*.

Plus grand commun diviseur de plus de deux nombres.

83. La propriété qui fait l'objet de la troisième remarque sert de base à la *recherche du plus grand commun diviseur entre plus de deux nombres* (*).

Soient A, B, C, E, F, etc., les nombres proposés, pour lesquels il s'agit de trouver le *plus grand* nombre qui les divise *tous* exactement.

Voici la RÈGLE GÉNÉRALE :

Cherchez le p. g. c. d. D entre A et B; puis, *le p. g. c. d.* D′ entre D et *le troisième nombre* C; puis *le p. g. c. d.* D″ entre D′ et E; et ainsi de suite.

(*) L'expression *plus grand commun diviseur* sera si fréquemment employée dans tout ce qui va suivre, que, pour abréger, nous lui substituerons le plus souvent les *quatre* lettres initiales *p. g. c. d.*

Le dernier *p. g. c. d.* obtenu, est le nombre demandé.

Pour démontrer cette règle, considérons d'abord les *trois* nombres A, B, C; je dis que le *p. g. c. d.* D′ entre D et C, est le *p. g. c. d.* des trois nombres A, B, C.

En effet, d'*une part*, D′ divisant D, divise (nº 65) *ses multiples* A, B, et, par conséquent, est *diviseur commun de* A, B, C.

D'*autre part*, le *p. g. c. d.* cherché de A, B, C, divise (nº 82) D, *p. g. c. d.* de A et B; par suite et pour la même raison, il divise D′, *p. g. c. d.* de D, C; en conséquence, il ne peut surpasser D′.

Donc D′ est lui-même le *plus grand commun diviseur* de A, B, C.

Raisonnons, maintenant, sur les *quatre* nombres A, B, C, E.

D'*une part*, D″, *p. g. c. d.* entre D′ et E, divisant D′, divise *ses multiples* D, C (nº 65); par suite, divise les *multiples* A, B de D, et, par conséquent, est *commun diviseur* de A, B, C, E.

D'*autre part*, le *p. g. c. d.* cherché de A, B, C, E, divise (nº 82) D, *p. g. c. d.* de A, B; par suite et pour la même raison, divise D′, *p. g. c. d.* de D, C, puis divise également D″, *p. g. c. d.* de D′, E, et, en conséquence, ne peut surpasser D″.

Donc D″ est lui-même le *p. g. c. d.* cherché.

La même série de raisonnements s'appliquerait à *cinq*, *six*, *etc.*, nombres; et ainsi se trouve démontrée la règle énoncée.

N. B. — Dans la pratique, il convient d'opérer d'abord sur les deux nombres *les plus simples*, puis sur le *p. g. c. d.* obtenu et le nombre *le plus simple* après les deux premiers,... ; car le *p. g. c. d.* cherché ne saurait surpasser celui qui existe entre les plus petits nombres.

Soient, pour exemple, les quatre nombres

$$1260, \quad 1512, \quad 2016, \quad 7350.$$

En opérant d'abord sur 1260 et 1512, on trouve pour leur *p. g. c. d.* 252.

Cherchant ensuite celui qui existe entre 252 et 2016, on reconnaît que 252 est lui-même leur *p. g. c, d.*

Opérant enfin sur 252 et 7350, on obtient 42; donc 42 est le *p. g. c. d.* des quatre nombres.

84. PREMIÈRE REMARQUE. — Lorsque, après avoir appliqué le procédé, on obtient l'*unité* pour dernier *p. g. c. d.*, c'est une preuve que 1 est le *seul* nombre qui puisse diviser à la fois *tous* les nombres proposés.

Ces nombres sont dits alors *premiers entre eux*, en tant que considérés *tous ensemble*; mais plusieurs de ces nombres, pris *deux à deux*, *trois à trois*, *etc.*, peuvent avoir des *facteurs communs*.

Il est clair que, si, en opérant sur les deux nombres *les plus simples*, on trouve 1 pour le *p. g. c. d.*, toute opération ultérieure devient inutile.

85. DEUXIÈME REMARQUE. — *Tout diviseur commun* de plusieurs

nombres A, B, C, E, etc., *divise* nécessairement leur PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR, puisque, d'après la remarque du n° 82, divisant A et B, il doit diviser D, et, par suite, D′, D″, etc. — C'est la propriété même du n° 82, *généralisée*.

86. TROISIÈME REMARQUE. — On démontrerait absolument, comme on l'a fait au n° 78 pour *deux* nombres, que *les quotients de la division de plusieurs nombres* A, B, C, E, etc., *par leur plus grand commun diviseur, sont* PREMIERS ENTRE EUX.

Pour compléter cette théorie du PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR, nous aurions à faire connaître d'autres méthodes pour arriver à sa détermination, et des moyens de simplifier les procédés que nous venons d'exposer ; mais il est nécessaire, pour cela, d'établir divers principes sur la *divisibilité des nombres*.

§ III. — DIVISIBILITÉ DES NOMBRES.

87. PRINCIPE FONDAMENTAL. — *Tout nombre qui divise exactement le produit de deux facteurs, et qui est* PREMIER AVEC *l'un d'eux, divise nécessairement l'autre facteur.*

Soient $A \times B$ le produit donné, P le nombre qui *divise exactement* ce produit; je dis que si P est PREMIER AVEC A, par exemple, il doit *diviser* B.

En effet, A et P étant, par hypothèse, *premiers entre eux*, si on leur applique la règle du plus grand commun diviseur, on sera (n° 79) conduit à un reste égal à 1; c'est-à-dire qu'en désignant par $r, r' \ r'', \ldots, 1$, les restes successifs, on aura la série des nombres

$$A,\ P,\ r,\ r',\ r'',\ldots,\ 1,\quad A \text{ étant } > P;$$

[ce serait $\quad P,\ A,\ r,\ r',\ r'',\ldots,\ 1,\quad$ si A était $< P$],

pour les différents termes des divisions à effectuer.

Mais, supposons qu'avant d'effectuer les opérations, on commence par multiplier A et P par B, il en résultera (n° 81) la nouvelle série

$$A\times B,\quad P\times B,\quad r\times B,\quad r'\times B,\quad r''\times B,\ldots,\quad 1\times B.$$

Or tous les termes de celle-ci sont (n° 82) divisibles par P, puisque P est un *diviseur commun* des deux premiers termes, comme divisant $A \times B$, par hypothèse, et divisant évidemment $P \times B$.

Donc $1 \times B$, ou B, est divisible par P. C. Q. F. D.

N. B. — Il est important de remarquer que la proposition n'est vraie qu'autant que P est un nombre *premier avec* l'un des facteurs du produit.

Car, si l'on a, par exemple, *d'une part*, 28×15, et *de l'autre*, 12, qui n'est PREMIER AVEC aucun des deux facteurs du produit, le quotient de la division de (28×15), ou 420, par 12, est *exact* et égal à 35, quoique 12 ne divise ni 28 ni 15.

Cela tient à ce que les deux facteurs du produit contiennent *ensemble tous les facteurs premiers* qui composent le diviseur.

Ainsi l'on a :

$$28 \times 15 = 4 \times 7 \times 3 \times 5 = (4 \times 3) \times 7 \times 5 = 12 \times 7 \times 5 = 12 \times 35.$$

88. CONSÉQUENCE. — *Un nombre quelconque* P, PREMIER AVEC *tous les facteurs*, MOINS UN, *d'un produit* $A \times B \times C \ldots$, *ne peut diviser le produit qu'autant qu'il divise exactement le facteur* RESTANT.

Car, étant *premier avec* A, par exemple, il ne peut, d'après le principe précédent, diviser le produit donné, qu'autant qu'il divise $B \times C \times D \ldots$; s'il est *premier avec* B, il ne peut diviser $B \times C \times D \ldots$, qu'autant qu'il divise $C \times D \ldots$; et ainsi de suite. On serait ainsi amené à conclure qu'il doit diviser le *dernier* facteur, s'il ne divise aucun des précédents.

89. DEUXIÈME PRINCIPE. — TOUT NOMBRE PREMIER ABSOLU *qui divise exactement le produit de deux facteurs, divise nécessairement l'un de ces facteurs.*

En effet, soient $A \times B$ le produit donné, P un nombre *premier absolu* qui doit le diviser exactement.

Si P ne divise pas A, par exemple, il est *premier avec* A (n° 75); donc, en vertu du *premier principe*, il doit diviser B.

90. CONSÉQUENCE I. — *Si un nombre* PREMIER ABSOLU P, *divise le produit* $A \times B \times C \times \ldots$ *d'un nombre quelconque de facteurs, il divise l'un de ces facteurs au moins.*

Car s'il ne divise pas A, par exemple, il doit diviser le produit $B \times C \ldots$; s'il ne divise pas B, il doit diviser $C \times D \ldots$; etc. On serait ainsi conduit jusqu'au *dernier* facteur, que P devrait alors diviser, s'il ne divisait aucun des précédents.

91. CONSÉQUENCE II. — *Tout* NOMBRE PREMIER ABSOLU P *qui divise les puissances* A^2, A^3, A^4,... (*voyez* le n° 45), *d'un nombre quelconque* A, *divise* A.

Car A^2, A^3..., étant la même chose que $A \times A$, $A \times A \times A$, ..., P ne peut diviser ces différents produits qu'autant qu'il divise l'un des facteurs, et par conséquent A.

92. CONSÉQUENCE III. — *Si deux nombres* A et B sont PREMIERS ENTRE EUX, *leurs puissances* A^2 et B^2, A^3 et B^3, *et*, en général, A^n et $B^{n'}$ *sont aussi des nombres* PREMIERS ENTRE EUX.

Car tout *nombre premier*, *d* par exemple, autre que 1, qui serait *diviseur commun* de A^n et de $B^{n'}$, devrait aussi diviser A, comme divisant A^n, et diviser B, comme divisant $B^{n'}$: *d* serait, par conséquent, *diviseur commun* de A et de B; ce qui est impossible, puisque A et B sont supposés *premiers entre eux*.

93. CONSÉQUENCE IV. — *Lorsqu'un produit a été formé par la multiplication de plusieurs nombres quelconques, on ne saurait le former de nouveau par la multiplication d'autres nombres contenant des* FAC-

TEURS PREMIERS *différents de ceux qui entraient dans la composition des premiers nombres donnés.*

Soit N un nombre égal à $a \times b \times c \times d \times \ldots$; je dis que ce même nombre ne saurait être égal au produit $a' \times b' \times c' \times d' \ldots$, si l'un de ces derniers nombres renfermait *un* ou *plusieurs facteurs premiers,* DIFFÉRENTS de ceux qui entrent dans a, b, c, ...

Car tout *facteur premier* qui n'entrerait ni dans a, ni dans b, ni dans c,..., ne divisant exactement aucun de ces nombres, ne saurait non plus (n° **90**) diviser leur produit $a \times b \times c \times \ldots$, ou N.

Cela revient, évidemment, à dire qu'*un nombre quelconque ne peut être formé qu'avec* UN SEUL *système de facteurs premiers pouvant être élevés, chacun, à une certaine puissance.*

N. B. — Il résulte d'ailleurs du principe général établi au n° **51**, que les multiplications de ces facteurs premiers et de leurs puissances peuvent être exécutées dans un ordre quelconque.

94. CONSÉQUENCE V. — *Tout nombre* P, PREMIER AVEC *chacun des facteurs d'un produit* $A \times B \times C \times \ldots$, *est aussi* PREMIER AVEC *ce produit.*

Car, supposons qu'un *nombre premier d*, différent de 1, puisse diviser à la fois P et le produit $A \times B \times C \times \ldots$; comme d devrait (n° **90**) diviser l'un des facteurs de ce produit, ce facteur et le nombre P ne seraient pas *premiers entre eux ;* ce qui serait contraire à l'énoncé de la proposition.

95. TROISIÈME PRINCIPE. — *Tout nombre divisible par deux nombres* PREMIERS ENTRE EUX, *est divisible par leur produit.*

Soit N un nombre divisible exactement par deux autres nombres A et B, qu'on suppose *premiers entre eux ;* je dis que N est divisible par leur produit $A \times B$.

En effet, désignons par q le quotient de N par A ; on a

$$N = A \times q \quad (q \text{ étant un nombre } \textit{entier}).$$

D'un autre côté, B divise aussi N, ou sa valeur $A \times q$; or, il est *premier avec* A, par hypothèse ; donc (n° **87**) il doit diviser q, et l'on a

$$q = B \times q' \quad (q' \text{ étant un nombre } \textit{entier}).$$

Si l'on substitue cette valeur de q dans la première égalité, il en résulte

$$N = A \times (B \times q') \quad \text{ou} \quad N = (A \times B) \times q'.$$

Donc N est divisible par $A \times B$. C. Q. F. D.

96. CONSÉQUENCE. — *Tout nombre divisible par plusieurs autres nombres qui, pris deux à deux dans un* ORDRE QUELCONQUE, *sont* PREMIERS ENTRE EUX, *est divisible par leur produit.*

Soient, d'abord, trois nombres A, B, C supposés, *deux à deux, premiers entre eux*, en sorte que, A étant *premier avec* B et *avec* C, B et C soient aussi *premiers entre eux.*

Si un autre nombre N est *divisible* par chacun de ces trois nombres, il est aussi *divisible par leur produit*.

Car on a déjà (n° **95**)

$$N=(A\times B)\times q' \quad (q' \text{ étant } \textit{entier}).$$

Or C divise aussi N, par hypothèse, ou sa valeur $(A\times B)\times q'$; d'ailleurs, on le suppose *premier avec* A et *avec* B, par suite, *avec* $A\times B$ (n° **94**); ainsi C doit diviser q' et l'on a

$$q'=C\times q'' \quad (q'' \text{ étant } \textit{entier}).$$

Substituant cette valeur de q' dans l'égalité précédente, on obtient la nouvelle égalité

$$N=(A\times B)\times C\times q'') \quad \text{ou} \quad N=(A\times B\times C)\times q'';$$

ce qui prouve que N est divisible par $A\times B\times C$.

La démonstration serait tout à fait semblable pour *quatre, cinq, etc.*, nombres A, B, C, D, etc.; elle se déduirait de la proposition démontrée pour *trois*, comme celle-ci a été déduite de la proposition démontrée pour *deux* nombres.

N. B.— Il faut bien distinguer les nombres A, B, C, etc., tels que nous venons de les considérer, des nombres A, B, C, etc., définis au n° **84** *premiers entre eux*, en tant qu'il n'existe aucun nombre autre que l'*unité*, qui les divise *tous à la fois*, bien que, considérés *deux à deux*, ou même *trois à trois*, etc., ces nombres puissent avoir des diviseurs communs.

Des nombres *premiers absolus* et différents les uns des autres, tels que 2, 3, 5, 7,..., 11, 13, etc., sont nécessairement *premiers entre eux* DEUX A DEUX; et, par conséquent, le troisième principe et sa conséquence leur sont *applicables*.

97. Du troisième principe, on déduit des *caractères de divisibilité* pour d'autres *nombres particuliers* que ceux indiqués aux n^{os} **66** à **70**.

1°. *Tout nombre est divisible par* 6 ou *par* 18, lorsqu'il est *terminé* par l'un des chiffres 0, 2, 4, 6, 8, et que *la somme de ses chiffres* est un *multiple* de 3 ou de 9.

Car alors (n^{os} **67** et **70**), il est divisible par 2 et par 3, ou par 2 et par 9; or 2 et 3, de même que 2 et 9, sont *premiers entre eux*; donc 2×3, ou 6, et, dans le second cas, 2×9, ou 18, sont des *diviseurs* du nombre.

Pareillement, *tout nombre est divisible par* 12 ou *par* 36, s'il est divisible par 4 et par 3 (n^{os} **68** et **70**), ou par 4 et par 9; puisque 4 et 3, ou 4 et 9, étant *premiers entre eux*, le nombre est divisible par 4×3, ou par 4×9.

Et *tout nombre est divisible par* 24, ou *par* 72, s'il est divisible par 8 (n° **69**), et par 3 ou par 9; car 8 et 3, ou bien 8 et 9, étant des nombres *premiers entre eux*, il s'ensuit que 8×3, ou 8×9, sont des *diviseurs* du nombre proposé.

2°. *Tout nombre est divisible par* 15, 45, 75, 225, lorsque, étant divisible par 5, ou par 25, il est en même temps divisible par 3 ou par 9; car alors il est divisible, soit par 5 et 3, par conséquent, par 5×3, ou 15, soit par 5 et 9, par conséquent, par 5×9, ou 45, — ou bien, par 25 et 3, par conséquent, par 25×3, ou 75, ou enfin, par 25 et 9, dès lors, par 25×9, ou 225.

On obtient ainsi des *caractères de divisibilité* faciles à vérifier, pour la série des nombres

6, 12, 18, 24, 36, 72, et 15, 45, 75, 225,

et ces propriétés sont avec celles des nombres 2, 3, 4, 5, 9, 25, principalement utiles dans la *décomposition* d'un nombre *en ses facteurs premiers*, question dont nous allons maintenant nous occuper.

Recherche de tous les diviseurs d'un nombre.

98. Nous partagerons cette question en *deux* parties distinctes :

La PREMIÈRE aura pour objet de déterminer tous les *facteurs premiers* qui entrent dans la composition du nombre donné, ainsi que le *nombre de fois* que chaque *facteur premier* s'y trouve, c'est-à-dire l'*exposant* de la puissance à laquelle il y est élevé;

La SECONDE, d'obtenir *tous* les diviseurs, *tant simples que composés*, que le nombre proposé renferme.

99. PREMIÈRE PARTIE. — *Décomposer un nombre donné dans ses facteurs simples* ou *premiers*.

Soit, *pour premier exemple*, le nombre 2820 :

$$\begin{array}{r|l} 2820 & 2 \\ 1410 & 2 \\ 705 & 3 \\ 235 & 5 \\ 47 & 47 \\ 1 & \end{array} \qquad 2820 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 47$$

On trace d'abord une ligne verticale, *à gauche* de laquelle il faut placer le nombre donné, afin de le séparer des diviseurs auxquels on parviendra successivement, et que l'on écrira *à droite* de cette même ligne.

Cela posé, 2820 étant divisible par 2, que l'on écrit à la droite de la barre et sur la même ligne horizontale que ce nombre, on effectue la division de 2820 par 2, ce qui donne le quotient 1410 qu'on écrit au-dessous de 2820.

Comme 1410 est encore divisible par 2 [ce qui prouve que 2820 est *deux fois de suite* divisible par 2 (n° **55**, *N. B.*)], on place ce second diviseur au-dessous du premier, puis, le quotient résultant, 705, au-dessous du précédent, et l'on a ainsi, d'après les opérations exécutées,

$$2820 = 2^2 \times 705.$$

Or je dis que la recherche des diviseurs *premiers* de 2820 *autres que* 2, est maintenant ramenée à celle des diviseurs *premiers* de 705. Car : 1° tout diviseur de 705 doit diviser son *multiple* $2^2 \times 705$ ou 2820; 2° réciproquement, tout diviseur *premier* de 2820, *autre que* 2, doit (n° **89**) diviser 705.

On doit donc opérer sur 705 comme sur le nombre proposé.

La somme des chiffres de 705 étant 12, ou un *multiple* de 3, ce nombre est (n° **70**) divisible par 3; on écrit alors ce nouveau diviseur sous le précédent; puis on place le quotient correspondant 235 sous le dernier déjà obtenu; et de là résulte la nouvelle égalité

$$2820 = 2^2 \times 3 \times 235;$$

235 n'étant plus divisible par 3, on démontrerait comme on vient de le faire à l'égard du nombre 705, que la question est réduite à la recherche des diviseurs *premiers* de 235.

Or ce nombre est divisible par 5 que l'on écrit sous les diviseurs précédents; puis on effectue la division, et l'on obtient un nouveau quotient 47 qu'on place également sous 235.

On a, de cette manière, la nouvelle égalité

$$2820 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 47.$$

On serait maintenant conduit à rechercher les diviseurs *premiers* de 47; mais il est facile de reconnaître que 47 est un *nombre premier*.

En effet, le plus simple diviseur *premier* qu'on ait à essayer après 2, 3, 5, est 7; or ce dernier nombre ne divise pas 47. Comme d'ailleurs 7 fois 7, ou 49, est un nombre *supérieur à* 47, on conçoit qu'il est inutile de pousser plus loin les essais; car, si un nombre premier *plus grand* que 7 divisait 47, le quotient correspondant serait nécessairement *moindre* que 7 (puisque dans une division qui se fait exactement, le produit du diviseur par le quotient doit reproduire le dividende); d'où l'on conclurait qu'il existe un facteur de 47 *inférieur* à 7; ce qui n'est pas.

Donc 47 est un *nombre premier*, divisible seulement par lui-même, et donnant pour quotient 1, que l'on place au-dessous des autres.

Là se termine l'opération, et l'on a

$$2820 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 47,$$

pour le nombre 2820 décomposé en ses *facteurs premiers*. Le facteur 2 est le seul qui soit affecté d'un exposant.

100. *Remarque importante.* — Avant d'aller plus loin, généralisons ce qui vient d'être dit pour établir que 47 est un nombre *premier;* et nous ferons connaître ainsi, pour tout nombre donné, une *limite* au-dessus de laquelle on n'a pas besoin de pousser les essais dans la recherche de ses *diviseurs premiers*.

Soit N ce nombre donné, et supposons qu'on ait essayé *infructueu-*

sement, comme *diviseurs*, tous les nombres *premiers* jusqu'à un certain nombre a tel, que le quotient correspondant soit un nombre q, *fractionnaire* (n° 43) et *moindre* que a.

Je dis que l'essai de tout autre nombre serait inutile, et que N est un *nombre premier*.

En effet, on a, d'après *la supposition*,

$$N = a \times q \quad (q \text{ étant fractionnaire et } \textit{plus petit} \text{ que } a).$$

Or, s'il existait un nombre a' *plus grand* que a qui pût *diviser exactement* N, on aurait, en désignant par q' le quotient correspondant,

$$N = a' \times q' \quad (q' \text{ étant un nombre } \textit{entier});$$

d'où l'on déduirait

$$a \times q = a' \times q'.$$

Mais, pour que cette égalité eût lieu, a' étant $> a$, il faudrait nécessairement, *par compensation*, que le quotient q', nombre *entier*, fût $< q$, et, par conséquent, $< a$, qui est supposé *plus grand que* q.

Il résulterait de là qu'un nombre entier q' *inférieur* à a diviserait N, ce qui est contraire à la supposition.

Prenons, pour exemple, le nombre 263. Aucun des *nombres premiers* 2, 3, 5 ne divise exactement ce nombre. En essayant ensuite 7, 11, 13, on trouve également des quotients *fractionnaires*. Mais, parvenu au nombre 17, on trouve encore un quotient *fractionnaire* égal à $15 + \frac{8}{17}$, nombre < 17; d'où l'on conclut que 263 est un *nombre premier*.

On trouverait pareillement que 631 est un *nombre premier;* car, en poussant les essais jusqu'à 29 inclusivement, on obtient, pour quotient correspondant à ce dernier nombre, $21\frac{22}{29}$, nombre < 29.

En général, *la limite* des essais pour la recherche des diviseurs *premiers* d'un nombre, est *le plus petit nombre premier* qui donne un quotient *fractionnaire* MOINDRE QUE ce nombre pris pour *diviseur* d'une division dont le nombre proposé est le dividende.

N. B. — Nous donnerons, dans le cinquième chapitre, une autre expression de cette *limite*.

101. Reprenons la question primitive, et soit, *pour nouvel exemple*, à rechercher les diviseurs *premiers* du nombre 38088 :

38088	2
19044	2
9522	2
4761	3
1587	3
529	23
23	23
1	

6.

En suivant la marche indiquée dans le premier exemple, on reconnaît que 38088 est divisible *trois fois de suite* par 2, et donne, pour le troisième quotient, 4761 ; que 4761 est divisible *deux fois de suite* par 3, et donne, pour quotient correspondant à la deuxième division, 529.

Parvenu à ce nombre, on essaye successivement les nombres *premiers* 7, 11, 13, etc.; et, arrivé au nombre 23, on reconnaît que le quotient est *le même* nombre 23, qui, divisé par 23, donne enfin pour quotient 1; tel est, comme nous l'avons déjà montré, le terme de l'opération.

On trouve ainsi

$$38088 = 2^3 \times 3^2 \times 23^2.$$

102. *Généralisons* maintenant le procédé que nous avons, pour plus de clarté, commencé par développer sur des exemples *particuliers*.

Soit a le nombre *premier* le plus simple, à partir de 2, qui divise N. *On effectue la division* de N par ce facteur, *autant de fois de suite* que possible (ce qui revient à diviser d'abord N par a, puis le quotient obtenu par a, puis le nouveau quotient par a, etc.).

Appelant n le nombre de divisions que l'on aura pu exécuter ainsi, on a l'égalité

$$N = a^n \times N' \quad (N' \text{ étant un } \textit{nombre entier}).$$

Amené par un raisonnement analogue à celui qui a été fait pour le premier exemple (n° 99), à *opérer* sur N', comme on a opéré sur N, on a, en désignant par b le *nombre premier*, le plus simple après a, qui divise N', et par n' le nombre de fois que N' est divisible successivement par b; on a, dis-je,

$$N = a^n \times b^{n'} \times N'' \quad (N'' \text{ étant un } \textit{nombre entier}).$$

Admettant, pour fixer les idées, que c, d, soient les seuls *facteurs simples* qui entrent dans N'', en sorte qu'on ait

$$N'' = c^{n''} \times N''' \quad \text{et} \quad N''' = d^{n'''};$$

on obtient

$$N = a^n \times b^{n'} \times c^{n''} \times d^{n'''};$$

et le nombre N se trouve ainsi *décomposé en ses facteurs premiers*; de plus, on connaît le *nombre de fois* que chacun d'eux entre dans ce nombre.

Il résulte, d'ailleurs, de la proposition générale (n° 93), que *ces facteurs premiers, élevés respectivement aux puissances* marquées par les exposants n, n', n'', n''', FORMENT LE SEUL *système de facteurs premiers dans lesquels le nombre* N *puisse être décomposé*.

103. SECONDE PARTIE. — *Déterminer tous les diviseurs, tant simples que composés, d'un nombre quelconque.*

De la forme même sous laquelle on vient de représenter le nombre N, résulte un moyen de résoudre cette question.

Écrivons, sur *quatre* lignes différentes, les nombres

$$\begin{array}{l}
1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ldots,\ a^n,\ \ldots,\ (n\ +1\ \text{termes}),\\
1,\ b,\ b^2,\ b^3,\ b^4,\ldots,\ b^{n'},\ \ldots,\ (n'\ +1\ \text{termes}),\\
1,\ c,\ c^2,\ c^3,\ c^4,\ldots,\ c^{n''},\ \ldots,\ (n''+1\ \text{termes}),\\
1,\ d,\ d^2,\ d^3,\ d^4,\ldots,\ d^{n'''},\ldots,\ (n'''+1\ \text{termes}),
\end{array}$$

et concevons qu'on ait effectué la multiplication,

1°. Des $(n+1)$ nombres de la première ligne, par les $(n'+1)$ nombres de la seconde ligne, ce qui donne une nouvelle série de $(n+1)\times(n'+1)$ nombres (*N. B.* du n° **48**);

2°. Des nombres de la nouvelle série, par les $(n''+1)$ nombres de la troisième, ce qui donne encore une nouvelle série de $(n+1)\times(n'+1)\times(n''+1)$ nombres;

3°. Enfin, des nombres de cette nouvelle série, par les $(n'''+1)$ nombres de la quatrième, d'où résulte une dernière série qui renferme $(n+1)\times(n'+1)\times(n''+1)\times(n'''+1)$ nombres.

Il est évident que cette dernière série, considérée *seule*, c'est-à-dire abstraction faite de toutes les autres, contient *tous les diviseurs cherchés*.

Car elle se compose des facteurs $1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ldots,\ a^n;\ b,\ b^2,\ b^3,\ldots,\ b^{n'};\ c,\ c^2,\ c^3,\ldots,\ c^{n''};\ d,\ d^2,\ d^3,\ldots,\ d^{n'''}$, ainsi que de tous les produits, *deux à deux, trois à trois, quatre à quatre,* de ces mêmes facteurs; lesquels produits sont nécessairement des *diviseurs* de N, comme étant tous des *sous-multiples* de N, ou de sa valeur $a^n b^{n'} c^{n''} d^{n'''}$ (n° **102**).

N. B. — On doit remarquer que l'expression

$$(n+1)\ (n'+1)\ (n''+1)\ (n'''+1)$$

fournit un moyen simple de déterminer le *nombre total* des diviseurs d'un nombre :

Augmentez d'une unité chacun des exposants des facteurs premiers que renferme ce nombre; puis, *multipliez entre elles les sommes qui en résultent.*

Le produit exprime le *nombre total* des diviseurs, y compris l'*unité* et le *nombre* lui-même.

Soit

$$N = a^3\times b^2\times c^5\times d\times f^2,$$

l'expression ci-dessus devient, dans ce cas,

$$4\times 3\times 6\times 2\times 3,\quad \text{ou}\quad 432;$$

ainsi le nombre N doit avoir 432 diviseurs.

104. La méthode que nous venons d'indiquer pour obtenir les diviseurs, tant *simples* que *composés*, d'un nombre, étant peu commode dans la pratique, nous allons exposer, sur un nouvel exemple, un procédé plus expéditif :

<table>
<tr><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>5880</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2940</td><td>2, 4</td></tr>
<tr><td>1470</td><td>2, 8</td></tr>
<tr><td>735</td><td>3, 6, 12, 24</td></tr>
<tr><td>245</td><td>5, 10, 20, 40 | 15, 30, 60, 120</td></tr>
<tr><td>49</td><td>7, 14, 28, 56 | 21, 42, 84, 168 | 35, 70, 140, 280 |
105, 210, 420, 840</td></tr>
<tr><td>7</td><td>7, 49, 98, 196, | 147, 294, 588, 1176 | 245, 490,
980, 1960 | 735, 1470, 2940, 5880.</td></tr>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
</table>

(En tout, $4 \times 2 \times 2 \times 3$, ou 48 diviseurs.)

Explication de ce tableau :

Après avoir déterminé les diviseurs *premiers* de 5880, comme on l'a fait aux n^{os} **99** et **101**, et avoir écrit en tête, au-dessus du facteur 2, l'*unité*, comme devant entrer en *ligne de compte* dans le calcul du nombre total des diviseurs,

On remonte au second diviseur 2, par lequel *on multiplie* le précédent ; ce qui donne le nouveau diviseur 4, que l'*on place à la droite du second diviseur.*

Passant au troisième diviseur 2, *on multiplie* 4 seulement *par* 2, et l'*on place le produit* 8 à la droite du troisième diviseur.

Passant au diviseur 3, *on multiplie par* 3 *tous les diviseurs* qui précèdent, *savoir :* 2, 4, 8 ; ce qui donne les nouveaux diviseurs 6, 12, 24, que l'*on place à la droite* du diviseur 3.

En un mot, lorsqu'on descend à un nouveau diviseur, *on multiplie par ce diviseur tous ceux qui le précèdent*, EN AYANT BIEN SOIN, toutefois, de ne pas répéter les produits déjà obtenus.

On est certain que les produits auxquels ce mode de procéder conduit, comprennent *tous les diviseurs* du nombre donné ; puisque ce sont les combinaisons des facteurs 2, 3, 5, 7, élevés respectivement à des puissances dont les exposants sont *au plus* égaux à 3 pour 2, 1 pour 3, 1 pour 5, et 2 pour le facteur 7.

Dans cet exemple, le *nombre total* des diviseurs doit être égal (n° **103**, *N. B.*) à $4 \times 2 \times 2 \times 3$, ou 48.

N. B. — Il est bon de faire observer que, dans le calcul des produits successifs, on a *groupé* ces produits, eu égard aux facteurs dont ils se composent ; c'est un moyen de les former plus facilement les uns au moyen des autres.

De plus, lorsqu'on est arrivé au dernier *produit* qui doit être le nombre donné lui-même, il convient de vérifier le nombre total des diviseurs ainsi formés, en les comptant *un par un;* on s'assure par là qu'on n'en a laissé échapper aucun.

Voici le tableau des calculs pour les exemples des nos **99** et **101** :

<table>
<tr><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>1°.</td><td>2820</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>1410</td><td>2, 4</td></tr>
<tr><td></td><td>705</td><td>3, 6, 12</td></tr>
<tr><td></td><td>235</td><td>5, 10, 20 | 15, 30 60</td></tr>
<tr><td></td><td>47</td><td>47, 94, 188 | 141, 282, 564 | 235, 470, 940 |
705, 1410, 2820.</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td></td></tr>
</table>

En tout, $3 \times 2 \times 2 \times 2$, ou 24 diviseurs.

<table>
<tr><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>2°.</td><td>38088</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>19044</td><td>2, 4</td></tr>
<tr><td></td><td>9522</td><td>2, 8</td></tr>
<tr><td></td><td>4761</td><td>3, 6, 12, 24</td></tr>
<tr><td></td><td>1587</td><td>3, 9, 18, 36, 72</td></tr>
<tr><td></td><td>529</td><td>23, 46, 92, 184 | 69, 138, 276, 552 | 207, 414,
828, 1656</td></tr>
<tr><td></td><td>23</td><td>23, 529, 1058, 2116, 4232 | 1587, 3174, 6348,
12696 | 4761, 9522, 19044, 38088.</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td></td></tr>
</table>

En tout, $4 \times 3 \times 3$, ou 36 diviseurs.

105. La recherche de *tous les diviseurs* d'un nombre, particulièrement sa décomposition en *facteurs premiers*, étant une des questions les plus importantes et les plus utiles de l'Arithmétique, nous ne saurions trop engager les commençants à s'y exercer.

Nous proposerons, pour nouveaux exemples, les nombres :

$$1764, \quad 1665, \quad 56700, \quad 122108,$$

que l'on reconnaîtra être respectivement égaux à

$$2^2.3^2.7^2, \quad 3^2.5.37, \quad 2^2.3^4.5^2.7, \quad 2^2.7^3.89;$$

d'où l'on conclut, pour l'expression du *nombre total* de leurs diviseurs,

$$27, \quad 12, \quad 90, \quad 24.$$

Quant aux nombres

$$113, \quad 719, \quad 777, \quad 3229,$$

en leur appliquant le procédé pour trouver les diviseurs *simples*, et la remarque du no **100**, on s'assurera facilement que ce sont des *nombres premiers*.

Nous renvoyons, au huitième chapitre, le moyen de former une Table de *nombres premiers ;* et nous ferons connaître en même temps une méthode assez expéditive pour s'assurer si un nombre de *trois*, ou d'*un plus grand* nombre de chiffres, est *premier*.

Complément de la théorie du plus grand commun diviseur.

Les principes sur la *divisibilité des nombres* et les procédés établis pour la recherche des *diviseurs* d'un nombre, qui en a été la suite, nous mettent à même de compléter, ainsi que nous l'avons indiqué en terminant le deuxième paragraphe de ce chapitre, la théorie DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR.

106. COMPOSITION DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR. — *Le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres est le produit de tous les facteurs premiers communs à ces nombres et élevés respectivement à* LA PLUS FAIBLE *des puissances que ces nombres renferment.*

Raisonnons sur deux nombres A et B ; appelons D leur *p. g. c. d.*, q et q' les quotients respectifs de leur division par D ; de sorte qu'on ait les égalités

$$A = D \times q, \quad B = D \times q'.$$

En premier lieu, on reconnaît que D ne peut renfermer des *facteurs premiers différents* de ceux qui entrent à la fois dans A et B ; car tout diviseur de D doit diviser ses multiples A et B.

De plus, D renferme nécessairement *tous les facteurs premiers communs* à A et à B ; puisque q et q' étant (n° 78) *premiers entre eux,* tout facteur *premier* qui divise à la fois A et B, doit (n° 89) diviser D.

En troisième lieu, il ne peut contenir ces *facteurs premiers communs* à une puissance *supérieure* à celle où ils se trouvent élevés dans celui des deux nombres qui les renferme *le moins de fois ;* car autrement, il ne pourrait diviser ce nombre.

Enfin on a vu (n° 93) qu'un nombre ne peut être formé qu'avec UN SEUL système de *facteurs premiers*.

La proposition se trouve donc complétement démontrée pour deux nombres.

Ainsi, soient A, B les deux nombres donnés, D leur *p. g. c. d.*, et supposons que l'on ait

$$A = a^4 . b^3 . c^5 . d . f . g,$$
$$B = a^2 . b^4 . c^3 . f^2 . g',$$

on a nécessairement

$$D = a^2 . b^3 . c^3 . f.$$

Quant aux quotients q, q' résultant de la division de A et de B par D, il suffit, pour les obtenir, de *supprimer* (n° 56) dans chacun des nombres A et B, les facteurs que renferme D; ce qui donne les expressions

$$q = a^2.c^2.d^2.g, \quad q' = b.f.g';$$

d'où l'on voit que ces quotients sont *premiers entre eux* (n° **78**) et se composent de tous les facteurs de chacun des nombres A, B, qui ne sont pas facteurs de l'autre nombre.

Des raisonnements tout à fait identiques seraient évidemment applicables à *trois, quatre, etc.*, nombres; et nous ne croyons pas nécessaire de nous y arrêter.

107. De cette *composition* du plus grand commun diviseur, on déduit, pour parvenir à sa détermination, le procédé suivant :

Décomposez chacun des nombres donnés dans leurs facteurs premiers, affectés respectivement des exposants qui leur conviennent;

Comparez les résultats obtenus, et *formez un produit de tous les facteurs premiers communs, affectés respectivement* DU PLUS FAIBLE *des exposants qui entrent dans les différents nombres.*

Reprenons les quatre nombres du n° **83**, savoir :

$$1260, \quad 1512, \quad 2016, \quad 7350.$$

Tableau des calculs.

1260	2	1512	2	2016	2	7350	2
630	2	756	2	1008	2	3675	3
315	3	378	2	504	2	1225	5
105	3	189	3	212	2	245	5
35	5	63	3	126	2	49	7
7	7	21	3	63	3	7	7
1		7	7	21	3	1	
		1		7	7		
				1			

$$2^2.3^2.5.7\ldots, \quad 2^3.3^3.7\ldots, \quad 2^5.3^2.7, \quad 2.3.5^2.7^2.$$

Donc

$$D = 2.3.7 = 42.$$

Cette méthode est surtout plus simple et plus avantageuse sous le rapport pratique, pour peu qu'on ait l'habitude de décomposer un nombre presque à sa seule inspection et à l'aide des *caractères de divisibilité* par les nombres

$$2, \quad 3, \quad 5, \quad 6, \quad 8, \quad 10, \quad 11, \quad 18, \quad 24, \ldots$$

N. B. — On pourrait encore *déterminer tous les diviseurs* de chacun des nombres proposés, puis *comparer les différentes séries* de diviseurs, et prendre, parmi les diviseurs communs, le *plus grand de tous*.

Mais il est facile de voir que cet autre *mode* de procéder serait, en général, très-laborieux.

103. Nous allons maintenant faire connaître, en nous appuyant sur les principes de la divisibilité des nombres, le moyen de *simplifier,* dans la pratique, le procédé ordinaire de la recherche du *plus grand commun diviseur de deux nombres.*

Ces simplifications auront pour résultat d'en rendre l'emploi généralement préférable à celui des deux méthodes que nous venons d'indiquer.

Premièrement. Nous avons déjà vu (n° **80**) que lorsque, dans le cours des opérations, on parvient à un reste, *nombre premier* (et nous avons exposé au n° **100** un moyen de reconnaître si un nombre est *premier*), qui ne divise pas le reste précédent, on est en droit de conclure, sans aller plus loin, que les deux nombres sont *premiers entre eux.*

Deuxièmement. Comme le *p. g. c. d.* de deux nombres renferme tous les *facteurs premiers,* communs à ces nombres (n° **106**), et n'en renferme pas d'autres, qu'il doit en être de même pour deux restes *consécutifs* quelconques, puisque le *p. g. c. d.* de ces deux restes est le même que celui des nombres proposés, il s'ensuit que l'on peut, sans rien changer au *p. g. c. d., introduire* ou *supprimer,* soit dans l'un des nombres, soit dans l'un des restes, un facteur *premier* qui n'entre pas dans l'autre nombre ou dans le *reste* qui précède immédiatement celui où l'on *introduit* ou *supprime* ce facteur.

Soit, *pour exemple,* à déterminer le *p. g. c. d.* des deux nombres 36935 et 5874.

Observons d'abord que le premier nombre contient le facteur 5 qui n'entre pas dans le second; ensuite, que celui-ci renferme les *facteurs premiers* 2 et 3, par suite (n° **97**) le facteur 6 produit de ces deux facteurs, qui n'entrent pas dans le premier. On peut donc *supprimer* les facteurs 5 et 6, respectivement dans les deux nombres proposés; ce qui donne les quotients

7387 et 979,

entre lesquels tout se réduit à chercher le *p. g. c. d.*

	7	11
7387	979	89
534	89	
	0	

Après avoir divisé 7387 par 979, ce qui donne le reste 534, on remarque que ce reste est divisible par 2 et 3, ou par 6, qui est *pre-*

mier avec 979 ; on peut donc supprimer ce facteur, et diviser ensuite 979 par le quotient 89. On obtient ainsi un quotient exact.

Donc 89 est *le p. g. c. d.* cherché.

N. B. — Si 89 n'eût pas divisé exactement 979, on en aurait immédiatement conclu (nº **80**) que les nombres donnés sont *premiers entre eux;* car 89 est un *nombre premier,* comme on peut facilement s'en assurer.

Il aurait fallu faire *quatre* opérations en appliquant, sans modification, le procédé ordinaire.

Soient, pour deuxième exemple, 5827 et 4321.

Ici, il n'existe aucun facteur *premier,* APPARENT ; ainsi, on doit d'abord appliquer le procédé ordinaire :

	1	17
5827	4321	251
1506	1811	
	54	

Le reste de la première opération étant 1506, nombre divisible par 6, on *supprime* ce facteur ; et la question est ramenée à opérer sur les nombres 4321 et 251.

Le reste de la deuxième opération est 54, ou 6×9, ou $2 . 3^3$. Or, aucun des facteurs 2 et 3 n'entre dans les deux nombres proposés; donc ceux-ci sont *premiers entre eux.*

Il aurait fallu 12 opérations, par le procédé ordinaire, pour arriver au même résultat.

Quant à l'*introduction* d'un facteur dans l'un des nombres proposés ou dans l'un des restes, elle est, en ARITHMÉTIQUE, d'un usage moins fréquent que la *suppression.* C'est dans la recherche du plus *grand commun diviseur algébrique* qu'elle a le plus d'importance.

TROISIÈMEMENT. On peut même *supprimer* un facteur que l'on aperçoit être *commun* aux deux nombres, sauf à *en tenir compte* dans le résultat.

Soient les deux nombres 945 et 720. Le facteur 5 étant commun aux deux nombres, si on le *supprime,* il vient 189 et 146.

Mais ces deux nombres renferment encore le facteur 9. En le *supprimant,* on obtient 21 et 16, qui reviennent à 3×7 et 2^4, et sont, par conséquent, *premiers entre eux.*

Les deux nombres proposés ont donc pour *p. g. c. d.* 5×9, ou 45.

Nous ne saurions trop engager les commençants à s'exercer sur ces modifications, qui abrégent considérablement les calculs.

Détermination du multiple le plus simple de plusieurs nombres.

109. On nomme ainsi *le nombre le plus petit, divisible à la fois par tous les nombres donnés*.

Les théories précédentes fournissent *deux* méthodes différentes pour obtenir ce *plus simple multiple*.

Première méthode. — Ne considérons d'abord que *deux* nombres A et B.

En désignant par D leur *plus grand commun diviseur*, par q, q' les quotients de la division de A, B par D, on a (n° **106**) les deux égalités

$$A = D \times q, \quad B = D \times q',$$

q et q' étant *premiers entre eux* (n° 78).

Or, je dis que le *nombre cherché* est égal à

$$D \times q \times q'.$$

Car déjà, ce produit est *multiple* de A et de B, puisqu'il est *divisible* par $D \times q$ et par $D \times q'$; et il reste à prouver que c'est *le plus petit* ou *le plus simple multiple* qu'on puisse obtenir.

Appelons, pour le moment, M *un multiple* quelconque de A, B Pour être *divisible* par A, ou $D \times q$, il faut que M renferme *tous* les facteurs qui entrent dans la composition de chacun des nombres D et q; de même, il ne peut être *divisible* par B, ou $D \times q'$, qu'autant qu'il contient *tous* les facteurs de chacun des nombres D et q'; et puisque q et q' sont *premiers entre eux*, il est nécessaire que M renferme, non-seulement *tous* les facteurs qui composent D, mais encore *tous ceux* qui entrent dans le quotient q et *tous ceux* qui entrent dans le quotient q'. M ne saurait donc être *moindre que* $D \times q \times q'$.

C. Q. F. D.

Tous les autres *multiples* de A, B s'obtiendraient en multipliant ce produit par 2, 3, 4, 5, etc.

De là résulte le procédé suivant, pour obtenir *le multiple le plus simple* de *plus* de *deux* nombres A, B, C, etc. :

Déterminez le plus grand commun diviseur D entre A et B; puis *divisez* A, B par ce *p. g. c. d.*

Multipliez les quotients q, q', ainsi obtenus, par D; et vous avez $D \times q \times q'$, ou M, pour *le plus petit multiple* de A, B.

Déterminez de même *le plus petit multiple*, M', de M et de C; vous obtenez alors *le plus simple multiple* de A, B, C.

Opérez de la même manière sur M et E; et ainsi de suite.

N. B. — Il convient, contrairement à ce qui se pratique pour le *p. g. c. d.*, d'opérer d'abord sur les *deux plus grands* nombres; car le nombre cherché ne saurait être *moindre* que *le plus petit multiple* de ces deux nombres.

Seconde méthode. — *Décomposez chacun des nombres proposés*

A, B, C, etc., *en ses facteurs premiers,* en donnant à ces facteurs *les exposants* qui leur conviennent.

Formez ensuite *le produit de tous les facteurs premiers, communs ou non communs à* A, B, C, etc., *en affectant chaque facteur premier du* PLUS FORT *des exposants dont ils sont affectés dans les différents nombres.*

Vous obtenez par ce moyen un résultat, évidemment *divisible* par tous les nombres A, B, C, E; et c'est en outre *le plus petit multiple;* car tout nombre contenant un des *facteurs premiers*, avec un exposant *inférieur au plus grand* de tous, ne serait pas divisible par celui des nombres A, B, C, etc., qui renferme ce *plus fort* exposant.

N. B. — Si les nombres donnés sont *premiers absolus*, ou bien, si chacun d'eux est *premier* avec tous les autres, *le plus petit multiple* ne peut évidemment être que *le produit de tous ces nombres.*

Nous proposerons pour exemples de former *le plus simple multiple,* M,

1°. Des nombres 136730 et 37224;

2°. Des nombres 19305, 10340 et 4158,

en appliquant successivement les deux méthodes; ce qui peut servir de vérification.

On trouvera

1°. $M = 231347160$,

2°. $M = 25405380$.

Le troisième chapitre fournira d'ailleurs l'occasion de mettre ces procédés en pratique.

CONCLUSION. — Quelques-unes des théories développées dans ce chapitre auront pu paraître un peu difficiles pour les commençants. Toutefois, il est important de s'en bien pénétrer; car elles faciliteront beaucoup l'intelligence du chapitre suivant, qui a pour objet le calcul de sfractions ordinaires.

Exercices.

I. Démontrer que la *somme* de deux nombres quelconques multipliée par leur *différence*, donne pour produit la *différence des secondes puissances* de ces nombres.

II. La *somme* de deux nombres est 255; leur *différence* est 39. — *Quels sont ces deux nombres?*

Généraliser la proposition, c'est-à-dire établir une règle générale pour *trouver deux nombres* dont on connaît la *somme* et la *différence*, mais en ne faisant usage que des signes *abréviatifs* du nº 44, et par le raisonnement *seul*.

III. Prouver qu'un nombre entier quelconque est toujours la somme de plusieurs puissances de 2, si le nombre est *pair*, et la somme de plusieurs puissances de 2, augmentée de 1, si le nombre est *impair*. *Exemples.* 876, 2539, 6750.

IV. Tous les *nombres premiers*, autres que 2 et 3, sont compris dans l'expression $6n \pm 1$ (prononcez *plus* ou *moins*), n étant un nombre entier quelconque.

V. Tout nombre entier qui n'est pas *premier,* admet *au moins* un diviseur *premier,* autre que 1.

VI. Le *reste* de la division par 9 du *produit* d'un nombre quelconque de facteurs, est *égal* à celui que donne le *produit des restes* fournis par les différents facteurs.

Prouver que cette propriété appartient à tout nombre, *autre que* 9.

VII. Tous les diviseurs *simples* ou *composés* d'un nombre étant rangés sur une même ligne par *ordre* de *grandeur,* prouver que le *produit* de deux facteurs quelconques pris à *égale distance* des extrêmes est CONSTANT et *égal au produit* des deux facteurs extrêmes.

VIII. On sait que, D désignant le plus *grand commun diviseur* de deux nombres A, B, on a

$$A = D \times q, \quad B = D \times q' \; (q \text{ et } q' \text{ étant } \textit{premiers entre eux}).$$

Déduire de là un moyen d'obtenir le *p. g. c. d.* entre un nombre donné A, et le produit indiqué, $B \times C \times E\ldots$, de plusieurs autres, sans effectuer préalablement ce produit.

La règle consiste : 1° à chercher le *p. g. c. d.* D entre A et B, puis à *diviser* A par D ; 2° à chercher le *p. g. c. d.* D' entre le quotient obtenu q et le troisième nombre C, puis à *diviser* q par D' ; 3° à chercher le *p. g. c. d.* D'' entre le second quotient q' et le quatrième nombre E, puis à *diviser* q' par D'', et ainsi de suite. Le *p. g. c. d.* cherché est $D \times D' \times D'' \times \ldots$; *à démontrer.*

IX. Déterminer le plus petit des nombres qui ont 120 *diviseurs ;* de même, pour 81 *diviseurs.*

X. Le produit de trois nombres entiers consécutifs quelconques est toujours divisible par 6.

XI. L'expression $n(n+1)(2n+1)$ est toujours divisible par 6, n étant un nombre entier quelconque.

XII. Démontrer que m et n étant deux nombres entiers quelconques, mais m étant *plus grand* que n, l'expression

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3.4.5\ldots n}$$

est toujours un nombre entier.

En d'autres termes, le produit de n nombres entiers consécutifs est toujours divisible par le produit $1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots \times n$.

CHAPITRE TROISIÈME.

§ I. *Fractions ordinaires.* — § II. *Nombres complexes.*

§ I. — DES FRACTIONS ORDINAIRES.

Notions et principes préliminaires.

110. On a déjà vu (nos **1** et **8**) ce que c'est qu'une *fraction*, et quelle idée on doit s'en former.

On distingue toujours deux termes dans une fraction, le *dénominateur* et le *numérateur*. Le dénominateur indique *en combien de parties égales l'unité est divisée*, et le numérateur, *combien on prend de ces parties*; l'ensemble des parties que l'on prend constitue la *fraction*.

Par exemple, dans la fraction $\frac{3}{4}$, qu'on énonce *trois quarts*, 4 est le *dénominateur* et indique que l'unité est divisée en *quatre* parties égales; 3 est le *numérateur* et indique qu'on prend *trois* de ces parties. De même la fraction $\frac{11}{12}$, que l'on énonce *onze douzièmes*, exprime 11 parties de l'unité supposée divisée en 12 parties égales.

Il résulte également du n° **42**, qu'une fraction telle que $\frac{13}{15}$ ou 13 fois la 15e partie de l'unité, est équivalente à la 15e partie du *tout* exprimé par 13; c'est-à-dire qu'*une fraction peut encore être considérée comme le quotient de son numérateur divisé par son dénominateur.*

Ce dernier point de vue conduit naturellement à considérer des expressions fractionnaires telles que

$$\frac{19}{6},\ \frac{23}{12},\ \frac{47}{15},\ldots.$$

dont le numérateur *surpasse* le dénominateur.

Or ces expressions sont faciles à comprendre, en tant qu'elles proviennent de la division des nombres 19, 23, 47, respectivement en 6, 12, 15 *parties égales*.

Mais comment $\frac{19}{6}$ peut-il exprimer 19 fois le 6e de l'unité?

On conçoit, pour cela, que l'on ait quatre *unités principales*, dont chacune soit divisée en 6 *sixièmes;* puis, pour en former 19 ou $6 \times 3 + 1$, on prend les 18 *sixièmes* dont se composent les *trois* premières unités principales, auxquels on ajoute *une* des parties de la quatrième. On obtient bien ainsi

$$19 \text{ sixièmes} \quad \text{ou} \quad \frac{19}{6}.$$

Pareillement, $\frac{23}{12}$ suppose *deux* unités principales, divisées chacune en 12 *douzièmes;* on prend les 12 parties de la première unité principale, auxquelles on ajoute 11 des parties de la seconde unité.

Même raisonnement pour la fraction $\frac{47}{15}$.

Par extension, on peut mettre également, soit l'*unité*, soit un *nombre entier* quelconque sous forme fractionnaire.

Ainsi, 1 peut s'écrire

$$\frac{12}{12}, \quad \frac{15}{15}, \quad \frac{23}{23}, \ldots.$$

De même, 10, 14, 25, etc., reviennent à

$$\frac{10}{1}, \quad \frac{14}{1}, \quad \frac{25}{1}, \ldots.$$

C'est d'ailleurs une conséquence de la double propriété énoncée au nº **75**, savoir : que tout nombre est *divisible par lui-même*, et que l'*unité* est *diviseur* de tout nombre.

Nous aurons souvent occasion de faire usage de ces deux dernières formes.

111. De la définition du numérateur et du dénominateur d'une fraction, résultent évidemment les conséquences suivantes :

1°. *Si*, sans altérer le dénominateur d'une fraction, *on multiplie* ou *divise son numérateur par un nombre entier, la nouvelle fraction sera ce nombre de fois plus grande* ou *plus petite que la première.*

En effet, lorsqu'on *multiplie* le numérateur par 2, 3, 4,..., on indique par là qu'on prend 2, 3, 4,... fois plus de parties; et comme les parties sont *les mêmes*, la nouvelle fraction est 2, 3, 4,... fois *plus grande.*

Ainsi, soit la fraction $\frac{6}{25}$; il est clair que $\frac{12}{25}, \frac{18}{25}, \frac{24}{25}, \ldots$, sont des fractions 2, 3, 4,... fois *plus grandes* que la première.

Au contraire, en *divisant* le numérateur par 2, 3, 4,..., on indique que l'on prend 2, 3, 4,.. fois *moins* de parties; donc, etc.... Ainsi, $\frac{3}{25}, \frac{2}{25}$, sont respectivement 2, 3 fois *plus petits* que $\frac{6}{25}$.

2°. *Si,* sans altérer le numérateur, *on multiplie* ou *divise le déno-*

minateur d'une fraction par un nombre entier, la nouvelle fraction sera ce nombre de fois plus petite ou *plus grande que la première.*

En effet, lorsqu'on *multiplie* le dénominateur par 2, 3, 4,..., on indique que l'unité est divisée en 2, 3, 4,..., fois *plus* de parties égales; les nouvelles parties sont donc 2, 3, 4,... fois *plus petites*, et comme on prend toujours le *même nombre* de ces parties, il s'ensuit que la fraction résultante est 2, 3, 4,... fois *plus petite.*

Au contraire, si l'on *divise* le dénominateur par 2, 3, 4,..., l'unité se trouve divisée en 2, 3, 4,... fois *moins* de parties égales; les nouvelles parties sont donc 2, 3, 4,... fois *plus grandes;* et comme on en prend toujours le *même nombre*, il s'ensuit que la fraction résultante est 2, 3, 4,... fois *plus grande* que la première.

3°. *On ne change point la valeur d'une fraction en multipliant* ou *divisant ses deux termes par un même nombre entier.*

En effet, il résulte des deux premiers principes, que l'effet de l'opération exécutée sur le dénominateur *détruit* l'effet de l'opération exécutée sur le numérateur, et qu'ainsi il y a *compensation.*

Par exemple, les fractions $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{15}{20}$, ..., sont toutes équivalentes à la fraction $\frac{3}{4}$, puisqu'elles résultent de la multiplication de chacun de ses deux termes par 2, 3, 4, 5,.... De même, la fraction $\frac{24}{36}$ est égale à chacune des fractions $\frac{12}{18}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{6}{9}$, ..., puisque l'on obtient ces dernières en divisant les deux termes de $\frac{24}{36}$ par 2, 3, 4,....

Ces diverses propositions sont analogues aux principes établis (n^os **59**, **60** et **61**) sur la division des nombres entiers, et sont, en quelque sorte, une extension de ces principes, en tant qu'une fraction est considérée comme *le quotient de la division du numérateur par le dénominateur.*

112. La troisième proposition étant d'une application continuelle, nous croyons devoir en donner une démonstration directe et indépendante des deux premières.

Prenons pour exemple la fraction $\frac{5}{8}$, et multiplions par 3 les deux termes 5 et 8, ce qui donne $\frac{15}{24}$; je dis que cette dernière fraction est équivalente à la première.

En effet, l'unité principale étant d'abord divisée en *huit* parties égales, divisons chaque *huitième* en *trois* parties égales : l'unité se trouve ainsi divisée en *vingt-quatre* parties égales. Chaque *huitième* vaut donc trois *vingt-quatrièmes*, et cinq *huitièmes* valent cinq fois trois, ou quinze *vingt-quatrièmes*, c'est-à-dire que les fractions $\frac{5}{8}$ et $\frac{15}{24}$ ont absolument la même valeur.

On démontrerait de la même manière que les fractions $\frac{11}{12}$ et $\frac{55}{60}$, dont la dernière se forme en multipliant par 5 les deux termes 11 et 12 de la première, sont égales.

Comme, réciproquement, on passe de la fraction $\frac{15}{24}$ à la fraction $\frac{5}{8}$, en prenant le *tiers* de chacun des termes de la première, et de la fraction $\frac{55}{60}$ à la fraction $\frac{11}{12}$, en prenant le *cinquième* des deux termes de la première, on peut conclure qu'*une fraction ne change pas de valeur lorsqu'on multiplie* ou *divise ses deux termes par un même nombre*.

OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS.

Nous avons maintenant à développer les opérations que l'on peut avoir à effectuer, dans la résolution d'une question dont les *données* sont des fractions ou des nombres fractionnaires.

Mais avant d'exposer les quatre opérations fondamentales, il est nécessaire de faire connaître deux *transformations* d'un usage fréquent, *et particulières* au calcul des fractions.

Réduction des fractions au même dénominateur.

113. Cette transformation a pour objet, *deux ou plusieurs fractions d'espèces différentes*, ou *de différents dénominateurs*, *étant données*, de *les réduire à la même espèce*, ou *au même dénominateur*.

Or, le principe, qu'*on ne change pas* la valeur d'une fraction en *multipliant* ses deux termes par un *même nombre*, fournit un moyen simple d'exécuter cette transformation.

Soient, par exemple, les fractions $\frac{3}{4}$ *et* $\frac{5}{7}$, *qu'il s'agit de réduire au même dénominateur.*

Si l'on multiplie les deux termes 3 et 4 de la première, par 7, dénominateur de la seconde, et les deux termes 5 et 7 de la seconde, par 4, dénominateur de la première, il vient $\frac{21}{28}$ et $\frac{20}{28}$ pour les deux fractions demandées.

Ces fractions ont, d'après le principe du n° **112**, la même valeur que les fractions proposées; de plus, elles ont nécessairement des dénominateurs égaux, puisque chacun d'eux est le produit des deux dénominateurs primitifs 4 et 7.

Soient encore les fractions $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{11}$, *à réduire au même dénominateur.*

Multipliez les deux termes 4 et 7 de la première fraction, par 88, produit des dénominateurs 8 et 11 de la seconde et de la troisième fraction ; puis, les deux termes 5 et 8 de la seconde, par 77, produit des dénominateurs 7 et 11 de la première et de la troisième ; enfin, les deux termes 6 et 11 de la troisième, par 56, produit des dénominateurs 7 et 8 de la première et de la seconde ; vous aurez les nouvelles fractions $\frac{352}{616}$, $\frac{385}{616}$, $\frac{336}{616}$.

Ces fractions ont même valeur que les fractions primitives, et leurs dénominateurs sont nécessairement les mêmes, puisque chacun d'eux est le produit du dénominateur de chaque fraction par le produit effectué des deux autres dénominateurs (*voyez* le n° 53).

Règle générale — *Pour réduire un nombre quelconque de fractions au même dénominateur, multipliez successivement les deux termes de chacune d'elles par le produit effectué des dénominateurs des autres fractions.*

Voici d'ailleurs la manière d'appliquer cette règle dans la pratique :

Soient les cinq fractions $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{10}{13}$, $\frac{23}{25}$ *et* $\frac{29}{43}$.

Pour plus de simplicité, l'on dispose ainsi l'opération :

$$\begin{array}{ccccc} \frac{3}{8}, & \frac{7}{11}, & \frac{10}{13}, & \frac{23}{25}, & \frac{29}{43}. \\ 153725, & 111800, & 94600, & 49192, & 28600, \\ \hline \frac{461175}{1229800}, & \frac{782600}{1229800}, & \frac{946000}{1229800}, & \frac{1131416}{1229800}, & \frac{829400}{1229800}. \end{array}$$

Après avoir formé le produit des cinq dénominateurs 8, 11, 13, 25 et 43, ce qui donne pour dénominateur commun des fractions transformées, le produit 1229800, on divise successivement ce produit par chacun des dénominateurs particuliers, et l'on obtient les cinq *quotients* 153725, 111800, 94600, 49192, 28600, que l'on place respectivement au-dessous des cinq fractions proposées ; après quoi l'on multiplie le numérateur de chaque fraction par le *quotient* qui lui correspond ; et l'on a ainsi les divers numérateurs.

Quant au *dénominateur commun*, il est, comme nous l'avons dit plus haut, égal à

1229800.

La raison de cette manière de procéder est facile à saisir : car le nombre 1229800 étant le produit des cinq dénominateurs, le quotient 153725 de la division de 1229800 par 8 exprime nécessairement le produit des quatre autres dénominateurs 11, 13, 25, 43.

De même, 111800 étant le quotient de la division de 1229800 par le second dénominateur 11, est égal au produit des quatre autres dénominateurs 8, 13, 25 et 43; même raisonnement par rapport aux autres quotients.

Ce moyen est d'ailleurs, sans contredit, beaucoup plus expéditif que si, pour chaque fraction, l'on effectuait la multiplication des dénominateurs des quatre autres. Mais il n'est réellement avantageux que quand on a plus de trois fractions à réduire au même dénominateur.

114. Il est un cas où la réduction au même dénominateur peut s'opérer d'une manière très-simple : c'est *lorsque le plus grand des dénominateurs est exactement divisible par chacun des autres.*

Soient, par exemple, *les fractions*

$$\begin{array}{ccccc} \frac{2}{3}, & \frac{3}{4}, & \frac{5}{6}, & \frac{7}{12}, & \frac{23}{36}, \\ 12, & 9, & 6, & 3, & 1, \\ \hline \frac{24}{36}, & \frac{27}{36}, & \frac{30}{36}, & \frac{21}{36}, & \frac{23}{36}. \end{array}$$

Il est facile de voir que 36, divisible par lui-même, est aussi divisible par chacun des quatre autres dénominateurs 3, 4, 6 et 12.

Cela posé, l'on effectue successivement ces divisions, et l'on place les quotients 12, 9, 6, 3, 1, au-dessous des quatre premières fractions; après quoi, l'on multiplie le numérateur de chacune d'elles par le quotient qui lui correspond; la fraction $\frac{23}{36}$ reste telle qu'elle était, et toutes les fractions se trouvent réduites au dénominateur 36.

Quelquefois, sans que le plus grand dénominateur soit divisible exactement par tous les autres, on s'aperçoit qu'en le multipliant par 2, 3, 4,..., on obtient *un produit divisible exactement par tous les dénominateurs ;* dans ce cas il y a encore lieu à simplification.

Soient proposées les nouvelles fractions

$$\begin{array}{cccccc} \frac{3}{4}, & \frac{7}{8}, & \frac{11}{12}, & \frac{13}{18}, & \frac{17}{24}, & \frac{25}{36}, \\ 18, & 9, & 6, & 4, & 3, & 2, \\ \hline \frac{54}{72}, & \frac{63}{72}, & \frac{66}{72}, & \frac{52}{72}, & \frac{51}{72}, & \frac{50}{72}. \end{array}$$

Le dénominateur 36 est divisible séparément par 4, 12 et 18, et ne l'est ni par 8, ni par 24 ; mais en le doublant, on obtient 72, nombre qui est exactement divisible par chacun des dénominateurs.

Cela posé, l'on forme les quotients de la division de 72 par ces dénominateurs, et on les place respectivement au-dessous des fractions ; ensuite on multiplie le numérateur de chacune d'elles par le quotient qui lui correspond ; toutes ces fractions doivent d'ailleurs avoir 72 pour *dénominateur commun*.

Formation du plus petit dénominateur commun de plusieurs fractions.

115. Les simplifications que nous venons d'indiquer exigent une certaine habitude ; mais il existe un moyen *direct* d'obtenir, dans tous les cas, le PLUS PETIT DÉNOMINATEUR COMMUN de plusieurs fractions.

Ce nombre n'est autre chose évidemment que le *plus petit multiple* de ces dénominateurs. Or, on a vu (n° **109**) comment on détermine le *plus petit multiple* de plusieurs nombres.

Ainsi, dans l'exemple précédent, comme on a

$$4 = 2.2 = 2^2;\quad 8 = 2^3;\quad 12 = 2^2.3;\quad 18 = 2.3^2;\quad 24 = 2^3.3;\quad 36 = 2^2.3^2,$$

il s'ensuit que le *plus petit multiple* est

$$2^3.3^2,\quad \text{ou}\quad 72;$$

c'est le *dénominateur commun* obtenu plus haut.

Soient, pour nouvel exemple, les fractions

$$\frac{11}{15},\quad \frac{13}{18},\quad \frac{17}{24},\quad \frac{25}{28},\quad \frac{37}{44},\quad \frac{83}{140},\quad \frac{29}{175},\quad \frac{233}{480},$$

dont les numérateurs ne contiennent pas, du moins en apparence, des facteurs *premiers* (comme 2, 3, 5,...) qui soient en même temps renfermés dans les dénominateurs correspondants ; autrement, il faudrait *supprimer* ces facteurs dans les deux termes.

En opérant la décomposition des dénominateurs, soit à leur seule inspection, soit par l'application directe de la règle du n° **102**, on trouve pour résultats :

$$3.5 \mid 2.3^2 \mid 2^3.3 \mid 2^2.7 \mid 2^2.11 \mid 2^2.5.7 \mid 7.5^2 \mid 2^5.3.5;$$

ce qui donne pour le *plus petit multiple* :

$$2^5.3^2.5^2.7.11,\quad \text{ou}\quad 554400.$$

Tel est le *dénominateur commun* le plus simple à donner à toutes les fractions ; nombre *incomparablement moindre* que celui qu'on obtiendrait en appliquant la règle générale du n° **113**.

Il ne reste plus maintenant qu'à déterminer les nombres par lesquels on doit multiplier les numérateurs, pour obtenir les numérateurs des nouvelles fractions ; et pour cela, il faut, ainsi que nous l'avons déjà dit, diviser 554400 par chacun des dénominateurs donnés.

On obtient ainsi pour quotients correspondants : 36960, 30800, 23100, 19800, 12600, 3970, 3168, 1155, qu'il faudrait multiplier respectivement par les numérateurs 11, 13, 17, 25, etc.

Relations de grandeur entre plusieurs fractions.

Voici quelques applications de la transformation précédente :

116. PREMIÈRE QUESTION. — *On demande des deux fractions, $\frac{3}{5}$ et $\frac{7}{12}$, quelle est la plus grande ?*

On ne peut, au premier abord, répondre à cette question ; parce que si, d'une part, l'unité est, dans la seconde fraction, divisée en un plus grand nombre de parties que dans la première, d'autre part, on prend plus de parties, puisque le numérateur 7 est plus grand que le numérateur 3.

Mais on lève la difficulté par la réduction au même dénominateur ; car il est évident que *de deux fractions qui ont un même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.*

Cette réduction opérée, il vient $\frac{36}{60}$ pour la première fraction, et $\frac{35}{60}$ pour la seconde ; donc la fraction $\frac{3}{5}$ est *la plus grande* des deux, et est en *excès* sur l'autre, de $\frac{1}{60}$.

On reconnaîtrait de même que, des trois fractions $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{8}{13}$, la plus grande est $\frac{8}{13}$, la plus petite, $\frac{6}{11}$, et la moyenne, $\frac{4}{7}$; car, étant réduites au même dénominateur, elles deviennent respectivement $\frac{572}{1001}$, $\frac{546}{1001}$, $\frac{616}{1001}$.

On pourrait également réduire les fractions au *même numérateur* (ce qu'on ferait en appliquant aux numérateurs ce qui a été dit pour les dénominateurs) ; et de ces fractions, *la plus grande* serait celle qui aurait *le plus petit dénominateur*, puisque l'espèce des parties étant *plus grande*, on en prendrait le *même* nombre. Mais le premier moyen a l'avantage de faire connaître en même temps les *différences* qui existent entre les fractions comparées deux à deux.

117. SECONDE QUESTION. — *Quel changement produit-on sur une fraction, en ajoutant un même nombre à ses deux termes ?*

Soit, par exemple, la fraction $\frac{7}{12}$, aux deux termes de laquelle la fraction 6 devient $\frac{13}{18}$ pour la fraction résultante.

Or, si l'on réduit ces deux fractions au même dénominateur, la première devient $\frac{126}{216}$, et la seconde $\frac{156}{216}$; donc la fraction proposée a *augmenté* de valeur, et l'augmentation est de $\frac{30}{216}$.

Pour rendre compte de ce *fait*, observons que l'unité étant égale à $\frac{12}{12}$, l'*excès* de l'unité sur $\frac{7}{12}$ est exprimé par $\frac{5}{12}$; de même, l'*excès* de l'unité sur $\frac{13}{18}$ est exprimé par $\frac{5}{18}$. Les numérateurs de ces deux *différences* sont les mêmes; et cela doit être : car 18 et 13 ayant été formés par l'addition du même nombre 6 aux deux termes 7 et 12, il s'ensuit (nº **14**) qu'il y a *même différence* entre 18 et 13 qu'entre 12 et 7. Mais la différence $\frac{5}{18}$ est nécessairement *moindre* que la différence $\frac{5}{12}$, puisque le premier dénominateur est plus grand, et que les numérateurs sont égaux; donc la fraction $\frac{13}{18}$ diffère moins de l'unité que la fraction $\frac{7}{12}$; par conséquent, la première est plus grande que la seconde.

On conçoit d'ailleurs que plus le nombre *ajouté* aux deux termes de la fraction $\frac{7}{12}$ est grand, plus la différence entre l'unité et la nouvelle fraction est petite, puisque le numérateur de cette différence étant toujours 5, le dénominateur augmente de plus en plus, et qu'ainsi la fraction devient de plus en plus grande.

Ce raisonnement pouvant évidemment s'appliquer à toute autre fraction, on peut en conclure que *si, aux deux termes d'une fraction l'on ajoute un même nombre, la fraction résultante est plus grande que la fraction proposée : et elle est d'autant plus grande que le nombre ajouté est plus grand.*

Par la raison inverse, *une fraction diminue de valeur lorsqu'on retranche un même nombre de ses deux termes.*

N. B. — Le contraire aurait lieu, si le nombre fractionnaire était plus grand que l'unité, comme $\frac{17}{14}$ (nº **110**).

En ajoutant 8 aux deux termes, on aurait $\frac{25}{22} < \frac{17}{14}$. Car $\frac{25}{22}$ surpasse l'unité de $\frac{3}{22}$ seulement, tandis que $\frac{17}{14}$ surpasse l'unité de $\frac{3}{14}$, nombre $> \frac{3}{22}$.

Nous avons cru devoir entrer dans quelques détails sur cette proposition, afin d'empêcher les commençants de la confondre avec celle du nº **112**, où l'on *multiplie* ou *divise les deux termes d'une fraction par un même nombre*. Dans ce dernier cas, on ne change pas la valeur de la fraction; tandis qu'en *ajoutant* ou *soustrayant* un même nombre, on augmente ou diminue la fraction.

Réduction d'une fraction à de moindres termes.

118. Il arrive souvent, dans le calcul des fractions, que l'on est conduit à une fraction exprimée par de grands nombres; or, plus le numérateur et le dénominateur sont grands, plus on a de peine à se faire une idée nette de la fraction.

Par exemple, la fraction $\frac{12}{15}$ indique qu'il faut diviser l'unité en 15 parties égales, et prendre 12 de ces parties. Mais 12 et 15 étant en même temps divisibles par 3, si l'on effectue les divisions, il vient $\frac{4}{5}$, fraction équivalente à la proposée (nº **112**); alors, pour s'en former une idée, il suffit de concevoir l'unité divisée en 5 parties égales et d'en prendre 4, ce qui est beaucoup plus simple.

Lors donc que l'on a une fraction dont les termes sont assez grands, il est utile de la réduire, s'il y a lieu, à une autre fraction *dont les termes soient moindres*.

Le premier moyen qui se présente, c'est de *diviser* les deux termes par les nombres 2, 3, 4, . . , tant que cela est possible.

1°. *Soit la fraction* $\frac{108}{144}$ *à réduire à de moindres termes.*

Les deux termes de cette fraction sont évidemment divisibles par 4 (nº **68**); et en effectuant la division, on obtient $\frac{27}{36}$; mais les deux termes de celle-ci sont divisibles par 9 (nº **70**); et cette nouvelle division donne pour résultat $\frac{3}{4}$, fraction que l'on ne peut réduire davantage.

2°. *Soit la fraction* $\frac{1288}{2632}$.

Les deux termes étant divisibles par 4, on effectue la division, et l'on obtient $\frac{322}{658}$, fraction dont les deux termes peuvent encore être divisés par 2, ce qui donne $\frac{161}{329}$.

Les divisions par 3 et par 5 sont impossibles (nºs **70** et **66**); mais si l'on essaye la division par 7, elle réussit, et donne pour résultat $\frac{23}{47}$, fraction dont les deux termes ne sont plus divisibles par aucun nombre différent de l'unité.

Ces exemples ont été faciles à traiter; mais il n'en est pas toujours de même, surtout lorsque les deux termes de la fraction proposée sont composés de *trois* ou d'*un plus grand* nombre de chiffres; car il peut se faire que tel facteur *premier* de *deux* ou de *trois* chiffres, par exemple, soit *commun* aux deux termes de la fraction sans qu'on puisse le reconnaître, *à priori*, parce qu'il n'existe aucun caractère de divisibilité par ce facteur; et cependant on conçoit combien il serait utile d'avoir un moyen général de *réduire une fraction donnée à la plus simple expression possible*.

C'est ce moyen que nous allons exposer.

RÉDUCTION D'UNE FRACTION A SES MOINDRES TERMES.

Propositions préliminaires.

119. — On appelle FRACTION IRRÉDUCTIBLE une fraction qu'on ne peut remplacer par une autre, de *même valeur*, et exprimée en des termes *plus simples*.

PREMIÈRE PROPOSITION. — *Toute fraction* IRRÉDUCTIBLE *a nécessairement ses termes* PREMIERS ENTRE EUX.

Car, s'ils avaient un *facteur commun*, en les *divisant* à la fois par ce facteur, on obtiendrait une nouvelle fraction dont les termes seraient respectivement *moindres* que ceux de la première; et alors celle-ci ne serait pas *irréductible*; ce qui est contre l'hypothèse.

120. SECONDE PROPOSITION. — *Lorsqu'une fraction a ses deux termes premiers entre eux, et qu'une autre fraction lui est égale, les deux termes de la seconde sont naturellement* LES MÊMES *multiples des deux termes de la première.*

En effet, soient $\frac{a}{b}$ une fraction dont les deux termes sont supposés *premiers entre eux*, $\frac{a'}{b'}$ une autre fraction équivalente à $\frac{a}{b}$ (*prononcez a sur b*); on a l'égalité

$$\frac{a'}{b'}=\frac{a}{b}.$$

Si l'on multiplie les numérateurs de ces deux fractions *égales*, par le même nombre b' [ce qui les rend toutes deux (n° **111**) b' fois plus grandes], on a encore des résultats *égaux;* et il vient

$$\frac{a'.b'}{b'}=\frac{a.b'}{b};$$

d'où, *supprimant*, dans la première fraction, le facteur b', commun à ses deux termes, on tire

$$a' = \frac{a.b'}{b}.$$

Cela posé, le premier membre de cette nouvelle égalité étant *entier*, il doit en être de même du second; c'est-à-dire que b doit diviser le produit $a.b'$; mais b est *premier avec* a, par hypothèse; donc b doit diviser b' (nº **87**), et l'on a

$$b' = b.m, \ldots (m \text{ étant } \textit{entier}).$$

Substituant cette valeur de b' dans l'égalité précédente, on obtient

$$a' = \frac{a.b.m}{b};$$

et, par suite, celle-ci,

$$a' = a.m.$$

D'où l'on voit que a' et b' sont *les mêmes* multiples $m\,a$ et $m\,b$, des deux termes a et b de la fraction proposée. C. Q. F. D.

121. Conséquence des deux propositions précédentes. — *Deux fractions irréductibles égales sont nécessairement identiques;*

Ce qui veut dire qu'il y a *égalité séparément*, entre les *numérateurs* et entre les *dénominateurs*.

Soient, en effet, $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ deux fractions *irréductibles*.

Supposons que l'on ait l'égalité

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

D'abord, puisque $\frac{a}{b}$ est, par hypothèse, *irréductible*, ses deux termes sont, en vertu de la première proposition, *premiers entre eux*; donc, d'après la deuxième, on doit avoir

$$a' = ma, \quad b' = mb,$$

m étant un nombre *entier*, *au moins* égal à 1; d'où il suit que a' et b' ne peuvent être respectivement *moindres que* a et b.

D'un autre côté, la fraction $\frac{a'}{b'}$ étant aussi supposée *irréductible*, on prouverait de la même manière que a et b ne sauraient être respectivement *moindres que* a' et b'.

Les nombres a et a', b et b', ne pouvant être respectivement *moindres l'un que l'autre*, sont nécessairement *égaux*; et l'on a

$$a = a', \quad b = b'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

122. Troisième proposition. — *Toute fraction dont les deux termes sont premiers entre eux, est* IRRÉDUCTIBLE.

Car, d'après la deuxième proposition, aucune fraction telle que $\frac{a'}{b'}$ ne pourrait être égale à la fraction $\frac{a}{b}$, dont on suppose les deux termes *premiers entre eux*, qu'autant que l'on aurait

$$a' = ma, \quad b' = mb.$$

D'où l'on voit que $\frac{a}{b}$ ne peut être remplacée par aucune fraction de *moindres termes*, et de *même* valeur.

123. Nous déduirons de cette proposition, réciproque de la première, le moyen de réduire une fraction à *sa plus simple expression*.

A cet effet, nous allons établir que, *si l'on divise les deux termes d'une fraction quelconque par leur plus grand commun diviseur, la fraction résultante est égale à la première, et est* IRRÉDUCTIBLE.

Or, soient $\frac{a}{b}$ la fraction proposée, D le plus grand commun diviseur de a et de b, a' et b' les quotients respectifs de la division de a par D; en sorte que l'on ait

$$a = \mathrm{D} \times a', \quad b = \mathrm{D} \times b';$$

on a nécessairement

$$\frac{a}{b} = \frac{\mathrm{D} \times a'}{\mathrm{D} \times b'};$$

d'où, en *supprimant*, dans le second membre, le facteur D *commun* aux deux termes, on déduit

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

Ainsi, déjà, la fraction $\frac{a'}{b'}$ est égale à $\frac{a}{b}$.

De plus, elle est (n° **122**) *irréductible*, puisque a' et b' étant les quotients de la division de deux nombres a et b par leur plus grand commun diviseur, sont (n° **78**) *premiers entre eux*.

Donc, *pour réduire une fraction à sa plus simple expression, il suffit de chercher le plus grand commun diviseur entre ses deux termes, puis de les diviser par ce plus grand commun diviseur.*

Soit, *pour exemple*, la fraction $\frac{7665}{15184}$.

En appliquant aux deux nombres 15184 et 7665, le procédé ordinaire du plus grand commun diviseur, avec les modifications indiquées au n° **108**, on trouve 73 pour le plus grand commun diviseur de ces nombres, et 208, 105, pour les quotients de leur division par 73; donc $\frac{105}{208}$ est la fraction *irréductible* équivalente à la proposée.

Second exemple, $\frac{29003}{36569}$.

P. g. c. d., 1261; quotients respectifs, 29 et 23 : ainsi $\frac{23}{29}$ est la fraction réduite à ses *moindres termes*.

124. Remarque. — De ce qui précède il résulte que, *si des deux termes d'une fraction, on retranche les* MÊMES MULTIPLES *des deux termes de la fraction* IRRÉDUCTIBLE *équivalente, la fraction résultante est aussi équivalente à la proposée.*

Prenons, pour exemple, la fraction $\frac{18}{24}$ qui, réduite à ses *moindres termes*, d'après le procédé indiqué au numéro précédent, est égale à $\frac{3}{4}$.

Si, des deux termes 18 et 24 de la fraction proposée, on retranche respectivement *quatre* fois 3, ou 12, et *quatre* fois 4, ou 16, on obtient une nouvelle fraction $\frac{6}{8}$, qui, exprimée en termes *plus simples* que ceux de la proposée, lui est *égale*;

Car, en supprimant le facteur 2, *commun* à 6 et 8, on trouve $\frac{3}{4}$, comme pour la première fraction $\frac{18}{24}$.

Il est aisé de se rendre compte de ce résultat :

En effet, si $\frac{18}{24}$ est égal à $\frac{3}{4}$, fraction *irréductible*, dont les deux termes sont, par conséquent, *premiers entre eux*, c'est que 18 et 24 sont (n° **120**) *les mêmes multiples* (*six* fois 3 et *six* fois 4) des deux termes de la fraction $\frac{3}{4}$; et lorsque, de 18 et de 24, on retranche *quatre* fois 3, et *quatre* fois 4, on obtient des différences, *deux* fois 3 et *deux* fois 4, qui sont aussi *les mêmes multiples* de 3 et de 4; d'où résulte une nouvelle fraction $\frac{6}{8}$ égale à $\frac{3}{4}$.

Cette proposition semblerait devoir fournir un moyen de *simplifier* une fraction ; mais on comprend que ce moyen serait tout à fait *illusoire*, puisqu'il suppose connue d'avance la fraction *irréductible* à laquelle la proposée est équivalente.

N. B. — Il convient de remarquer que l'on soustrait ici, des deux termes de la fraction, *deux nombres différents*, par opposition à l'opération indiquée au n° **117**, qui consiste à retrancher *un même nombre* des deux termes d'une fraction, et change nécessairement la valeur de cette fraction.

Nous passons maintenant *aux quatre opérations fondamentales sur les fractions*.

Addition des fractions.

125. L'addition des fractions a pour but de *trouver un seul nombre qui ait la même valeur que plusieurs fractions réunies.*

Il peut se présenter deux cas : ou les fractions qu'on doit additionner sont de *même espèce*, c'est-à-dire ont *même* dénominateur, ou bien elles sont d'espèce *différente.*

Dans le premier cas, *on fait la somme des numérateurs*, puis *on donne à cette somme le dénominateur commun.*

Dans le second, on commence par *réduire les fractions au même dénominateur;* après quoi, l'on opère comme dans le premier cas.

Ainsi,

$$\frac{2}{11}+\frac{3}{11}+\frac{4}{11}=\frac{2+3+4}{11}=\frac{9}{11}.$$

De même,

$$\frac{5}{23}+\frac{2}{23}+\frac{7}{23}+\frac{4}{23}=\frac{5+2+7+4}{23}=\frac{18}{23}.$$

Soit maintenant *à ajouter* les trois fractions

$$\begin{array}{ccc} \frac{2}{3}, & \frac{3}{4}, & \frac{7}{8}, \\ 8, & 6, & 3, \\ \hline \frac{16}{24}, & \frac{18}{24}, & \frac{21}{24}. \end{array}$$

Après avoir réduit ces fractions au dénominateur le plus simple, 24 (n° **115**), on ajoute les numérateurs 16, 18 et 21 ; puis on donne à la somme 55, le dénominateur 24.

On a ainsi :

$$\frac{55}{24}$$

pour le résultat cherché.

Extraire l'entier d'un nombre fractionnaire, et réciproquement.

126. Ce dernier exemple conduit à une expression fractionnaire, $\frac{55}{24}$, plus grande que l'unité (n° **110**), qui donne lieu à une *nouvelle* opération.

On a vu (même numéro) que l'*unité* équivaut à $\frac{24}{24}$, ou vingt-quatre *vingt-quatrièmes ;* d'où il suit qu'autant de fois 55 contient 24, autant d'unités il y a dans $\frac{55}{24}$. Or, en divisant 55 par 24, on a pour quotient, 2, et pour reste, 7; ainsi, $\frac{55}{24}$ est un nombre composé de 2 unités plus une fraction $\frac{7}{24}$.

En général, lorsqu'on parvient à un résultat fractionnaire dont le numérateur surpasse le dénominateur, pour *extraire l'entier contenu dans cette expression*, il faut *diviser le numérateur par le dénominateur*.

Le quotient qu'on obtient représente l'*entier*, et le reste est le numérateur de la *fraction* qui doit être ajoutée à l'entier (n° **43**).

On trouvera, par ce moyen :

$$\frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}; \quad \frac{153}{15} = 10\frac{3}{15} = 10\frac{1}{5}; \quad \frac{654}{88} = 7\frac{31}{89}.$$

Réciproquement, lorsqu'on a *un entier joint à une fraction*, pour en former *un seul nombre* fractionnaire, il faut *multiplier l'entier par le dénominateur, ajouter au produit le numérateur, et donner à la somme le dénominateur de la fraction*.

Par exemple,

$$3\frac{2}{5} = \frac{3 \times 5 + 2}{5} = \frac{17}{5};$$

$$11\frac{7}{12} = \frac{11 \times 12 + 7}{12} = \frac{139}{12}; \quad 8\frac{17}{24} = \frac{8 \times 24 + 17}{24} = \frac{209}{24}.$$

Soustraction des fractions.

127. La soustraction des fractions a pour but de *trouver l'excès d'une plus grande fraction sur une plus petite*.

Si les deux fractions ont *même* dénominateur, *on retranche le plus petit numérateur du plus grand, et l'on donne à la différence le dénominateur commun*.

Si elles n'ont pas le même dénominateur, *on les y réduit;* après quoi, l'*on opère* comme dans le premier cas.

Soit à soustraire $\frac{5}{12}$ de $\frac{11}{12}$; il reste $\frac{6}{12}$ ou $\frac{1}{2}$.

De même,

$$\frac{17}{24} - \frac{7}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}.$$

Soit actuellement à soustraire $\frac{2}{3}$ de $\frac{7}{8}$.

Ces deux fractions reviennent (nº **115**) à $\frac{16}{24}$ et $\frac{21}{24}$; et l'on a

$$\frac{21}{24}-\frac{16}{24}=\frac{21-16}{24}=\frac{5}{24}.$$

Pareillement,

$$\frac{19}{20}-\frac{13}{17}=\frac{19\times17-13\times20}{20\times17}=\frac{63}{340}.$$

On peut avoir *un entier joint à une fraction,* à soustraire d'un *entier joint à une fraction.*

Soit, par exemple, à soustraire $5\frac{11}{13}$ de $12\frac{3}{4}$.

$$\begin{array}{l} 12\frac{3}{4}=12\frac{39}{52}=11\frac{91}{52}, \\ 5\frac{11}{13}=\ 5\frac{44}{52}\ldots 5\frac{44}{52}, \\ \hline 6\frac{47}{52}. \end{array}$$

Pour effectuer cette opération, l'on commence par réduire les deux fractions au *même* dénominateur, ce qui donne $\frac{39}{52}$ pour la première, et $\frac{44}{52}$ pour la seconde.

Ensuite, comme on ne peut soustraire $\frac{44}{52}$ de $\frac{39}{52}$, on prend sur l'entier 12 du nombre supérieur, *une unité* que l'on réduit, avec $\frac{39}{52}$, en un seul nombre fractionnaire $\frac{91}{52}$ (nº **126**), puis on soustrait $\frac{44}{52}$ de $\frac{91}{52}$, et l'on a pour reste $\frac{47}{52}$.

Passant à la soustraction des *entiers,* on regarde le nombre supérieur comme *diminué* d'une unité, et l'on retranche 5 de 11, ce qui donne 6.

On obtient enfin $6\frac{47}{52}$ pour le résultat demandé.

128. Voici une question où se trouvent réunies une addition et une soustraction de nombres entiers joints à des fractions :

Un marchand de drap a vendu à différentes fois, sur une pièce d'étoffe renfermant 30 *mètres* $\frac{7}{8}$, *savoir :* $7^{m}\frac{3}{4}$, $9^{m}\frac{2}{3}$, $11^{m}\frac{5}{12}$; *il désire connaître ce qui doit lui rester de son étoffe.*

Il fera d'abord *la somme* des trois nombres de mètres vendus; puis, il soustraira cette somme de $30^{m}\frac{7}{8}$: le résultat de la soustraction doit représenter la longueur du reste de l'étoffe.

Pour plus de simplicité, il convient de disposer ainsi l'opération :

$$
\begin{array}{llcc}
 & & \underline{12} & \\
7^{m} & \frac{3}{4} \ldots & 3 \ldots & 9 \\
9 & \frac{2}{3} \ldots & 4 \ldots & 8 \\
11 & \frac{5}{12} \ldots & 1 \ldots & 5 \\
 & & & \overline{22} \\
\hline
28 & \frac{10}{12} & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lll}
30^{m} & \frac{7}{8} \ldots & \frac{21}{24} \\
28 & \frac{10}{12} \ldots & \frac{20}{24} \\
\hline
2 & \frac{1}{24} &
\end{array}
$$

Après avoir placé les uns au-dessous des autres les trois nombres à ajouter, on observe que les fractions qui en font partie, peuvent être réduites au même dénominateur 12. On place ce nombre à la droite, un peu au-dessus des fractions, et on le souligne. Ensuite, on écrit au-dessous de 12, et respectivement sur la même ligne horizontale que les trois fractions, les quotients 3, 4 et 1, résultant de la division de 12 par chacun des dénominateurs; après quoi l'on multiplie les numérateurs de ces fractions par 3, 4 et 1, ce qui donne 9, 8 et 5; on fait la somme 22 de ces trois nouveaux numérateurs, et l'on obtient pour la somme des trois fractions, $\frac{22}{12}$, ou $1\frac{10}{12}$. On écrit $\frac{10}{12}$ au-dessous des trois fractions, et l'on retient 1 pour le reporter à la colonne des parties entières que l'on ajoute à la manière ordinaire; il vient alors $28\frac{10}{12}$ pour la *somme* des trois nombres de mètres vendus.

On place cette somme au-dessous de $30\frac{7}{8}$, et l'on effectue la soustraction comme il a été indiqué précédemment, en observant que les deux fractions peuvent être réduites au même dénominateur, 2 *fois* 12, ou 24.

On trouve enfin 2 mètres $\frac{1}{24}$ pour le *reste* de la pièce d'étoffe; ce que le marchand peut aisément vérifier en mesurant le *coupon* restant des trois ventes.

Multiplication des fractions.

129. La multiplication a en général pour but (n° 9), *deux nombres* *étant donnés*, de *former un troisième nombre qui se compose avec le premier, de la même manière que le second se compose avec l'unité.*

Cela posé, on distingue TROIS cas principaux dans la multiplication des fractions. On peut avoir :

1°. UNE FRACTION A MULTIPLIER PAR UN ENTIER.

Soit, par exemple, $\frac{7}{12}$ *à multiplier par* 5.

D'après la définition ci-dessus, puisque le multiplicateur 5 contient 5 fois l'unité, il s'ensuit que le produit doit être égal à 5 fois $\frac{7}{12}$, ou doit être 5 fois plus grand que $\frac{7}{12}$. Or, on a vu (n° **111**) qu'on rend une fraction 5 fois plus grande en multipliant son numérateur par 5; il viendra ainsi :

$\frac{5 \text{ fois } 7}{12}$ ou $\frac{35}{12}$ pour le produit demandé.

Donc, *pour multiplier une fraction par un entier, il faut multiplier le numérateur par l'entier, et donner au produit le dénominateur de la fraction.*

Le produit $\frac{35}{12}$ revient d'ailleurs à $2\frac{11}{12}$ (n° **126**).

On trouvera de même que :

Le produit de $\frac{13}{24}$ par 29 est égal à $\frac{377}{24}$ ou $15\frac{17}{24}$.

Soit encore à multiplier $\frac{11}{18}$ *par* 9.

Il vient d'abord, d'après la règle, $\frac{99}{18}$ pour le produit;

Ou, si l'on extrait l'entier, $5\frac{9}{18}$, c'est-à-dire $5\frac{1}{2}$.

Ce résultat pouvait être obtenu plus simplement :

Car, pour multiplier $\frac{11}{18}$ par 9, on peut (n° **111**), au lieu de multiplier le numérateur par 9, *diviser* le dénominateur par 9;

Et l'on trouve ainsi $\frac{11}{2}$, ou $5\frac{1}{2}$, pour le produit demandé.

Ce qui rend ce mode d'opérer applicable à l'exemple proposé, c'est que le dénominateur est *divisible* par le multiplicateur; or cela n'arrive pas toujours, tandis que la règle établie d'abord est toujours applicable; l'usage peut seul rendre familières ces sortes de simplifications.

2°. UN ENTIER A MULTIPLIER PAR UNE FRACTION.

Soit à multiplier 12 *par* $\frac{4}{7}$.

Puisque, dans ce cas, le multiplicateur $\frac{4}{7}$ est égal à 4 fois le 7^e de l'unité, le produit doit être égal lui-même à 4 fois le 7^e de 12. Or, le 7^e de 12 revient (n° **110**) à $\frac{12}{7}$; et pour prendre ce nombre 4 fois, ou pour obtenir un nombre 4 fois plus grand que $\frac{12}{7}$, il suffit (n° **111**) de multiplier le numérateur par 4 ; on obtient alors $\frac{48}{7}$ ou $6\frac{6}{7}$ pour le produit demandé.

Donc, *pour multiplier un entier par une fraction, il faut multiplier l'entier par le numérateur et donner au produit le dénominateur de la fraction.*

On peut ensuite *extraire l'entier*, s'il y a lieu.

Ainsi,

$$29 \times \frac{7}{8} = \frac{203}{8} = 25\frac{3}{8};$$

de même,

$$24 \times \frac{5}{6} = \frac{120}{6} = 20;$$

résultat qu'on trouverait encore en *divisant* d'abord 24 par 6, ce qui donnerait 4, et *multipliant* ce résultat par 5.

Mais, nous le répétons, ces simplifications ne sont pas toujours possibles.

3°. Une fraction a multiplier par une fraction.

Soit à multiplier $\frac{3}{4}$ *par* $\frac{5}{8}$.

Le raisonnement est analogue à celui du cas précédent : puisque le multiplicateur $\frac{5}{8}$ est égal à 5 fois le 8^e de l'unité, le produit doit être lui-même égal à 5 fois le 8^e du multiplicande $\frac{3}{4}$; or, pour prendre le 8^e de $\frac{3}{4}$, il faut (n° **111**) multiplier le dénominateur par 8, ce qui donne $\frac{3}{32}$; et pour obtenir une fraction 5 fois plus grande que $\frac{3}{32}$, il faut multiplier le numérateur par 5;

Ce qui donne enfin $\frac{15}{32}$ pour le produit demandé.

Donc, *pour multiplier une fraction par une fraction, multipliez numérateur par numérateur et dénominateur par dénominateur ;* puis, *donnez le second produit pour dénominateur au premier.*

On trouvera ainsi :

$$\frac{7}{12} \times \frac{5}{6} = \frac{35}{72};$$

de même

$$\frac{8}{12} \times \frac{3}{4} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}.$$

N. B. — Dans les deux cas précédents, *le produit est toujours plus petit que le multiplicande;* et cela doit être, puisque l'opération revient réellement à prendre du multiplicande, *une partie* indiquée par *la fraction multiplicateur.*

130. Enfin, l'un des facteurs de la multiplication, ou tous les deux, peuvent être *des entiers joints à des fractions;* mais on ramène facilement ces nouveaux cas aux précédents.

Soit, par exemple, à multiplier $7\frac{2}{3}$ *par* $5\frac{7}{8}$.

Ces nombres reviennent respectivement (n° **126**, *récipr.*) à $\frac{23}{3}$ et $\frac{47}{8}$; effectuant la multiplication d'après la règle ci-dessus, on obtient pour produit $\frac{1081}{24}$, ou, extrayant les entiers, $45\frac{1}{24}$.

On pourrait encore effectuer la multiplication *par parties*, c'est-à-dire multiplier d'abord 7 par 5, $\frac{2}{3}$ par 5, 7 par $\frac{7}{8}$, et $\frac{2}{3}$ par $\frac{7}{8}$, puis ajouter ces *quatre* produits : mais cette manière d'opérer étant plus longue, nous ne nous y arrêterons pas.

Division des fractions.

131. La division a pour but (n° **27**) : *Étant donnés un produit de deux facteurs et l'un de ces facteurs, déterminer l'autre.*

Il résulte évidemment de cette définition et de celle de la multiplication (n° **17**), que le premier nombre, appelé *dividende*, se compose avec le troisième, appelé *quotient*, de la même manière que le second, nommé *diviseur*, se compose avec l'unité.

Cela posé, dans la division comme dans la multiplication des fractions, il se présente TROIS cas principaux. On peut avoir :

1°. A DIVISER UNE FRACTION PAR UN ENTIER.

Soit, par exemple, *la fraction* $\frac{5}{7}$ *à diviser par* 6.

Puisque le diviseur 6 est égal à 6 fois l'unité, il s'ensuit que le dividende $\frac{5}{7}$ est égal à 6 fois le quotient cherché ; donc, réciproquement, le quotient doit être le 6ᵉ de $\frac{5}{7}$. Or, pour prendre le 6ᵉ d'une fraction, ou pour obtenir une fraction 6 fois plus petite, il faut (nº **111**) multiplier le dénominateur par 6; ainsi, l'on obtient $\frac{5}{6 \text{ fois } 7}$ ou $\frac{5}{42}$, pour le quotient demandé.

Donc, *pour diviser une fraction par un entier, multipliez le dénominateur de la fraction par l'entier, en laissant le numérateur tel qu'il est*.

Ainsi,

$$\frac{11}{12} \textit{ divisé par } 8, \text{ ou (nº } \mathbf{44}), \quad \frac{11}{12} : 8 = \frac{11}{12 \times 8} = \frac{11}{96};$$

de même,

$$\frac{23}{30} : 12 = \frac{23}{30 \times 12} = \frac{23}{360}.$$

Le quotient de $\frac{18}{25}$ par 6 est $\frac{18}{150}$; mais on peut encore effectuer la division de $\frac{18}{25}$ par 6, en prenant le 6ᵉ du numérateur, ce qui donne $\frac{3}{25}$; résultat auquel se réduit d'ailleurs $\frac{18}{150}$, lorsqu'on supprime le facteur 6 *commun* aux deux termes.

2º. A DIVISER UN ENTIER PAR UNE FRACTION.

Soit à diviser 12 *par* $\frac{7}{9}$.

De ce que le diviseur $\frac{7}{9}$ est égal à 7 fois le 9ᵉ de l'unité, il résulte que le dividende 12 est aussi égal à 7 fois le 9ᵉ du quotient cherché. Donc, en prenant le 7ᵉ de 12, ce qui donne $\frac{12}{7}$, on aura le 9ᵉ du quotient cherché, et pour obtenir ce quotient lui-même, il suffit de prendre 9 fois $\frac{12}{7}$, ce qui se fait en multipliant le numérateur par 9; et l'on obtient ainsi : $\frac{9 \text{ fois } 12}{7}$ ou $\frac{108}{7}$, ou, extrayant l'entier, $15\frac{3}{7}$.

Donc, *pour diviser un entier par une fraction*, il faut *multiplier l'entier par le dénominateur*, *diviser le produit par le numérateur*, *et extraire l'entier s'il y a lieu*.

Observons que prendre le 7ᵉ de 12, et multiplier le résultat par 9, revient à multiplier 21 par $\frac{9}{7}$; ainsi, l'on peut encore dire que, *pour diviser un entier par une fraction*, il faut *multiplier l'entier par la fraction diviseur renversée* (voyez le nº **129**, 2º).

3º. A DIVISER UNE FRACTION PAR UNE FRACTION.

Soit à diviser $\frac{3}{5}$ *par* $\frac{8}{11}$.

Le raisonnement est semblable au précédent. Le diviseur $\frac{8}{11}$ étant égal à 8 fois le 11ᵉ de l'unité, le dividende $\frac{3}{5}$ est aussi égal à 8 fois le 11ᵉ du quotient; donc le 8ᵉ de $\frac{3}{5}$, ou $\frac{3}{40}$, est le 11ᵉ du quotient; et 11 fois $\frac{3}{40}$, ou $\frac{33}{40}$, est le quotient cherché.

Donc, *pour diviser une fraction par une fraction*, il faut *multiplier le numérateur de la fraction dividende par le dénominateur de la fraction diviseur, puis le dénominateur de la fraction dividende par le numérateur de la fraction diviseur, et donner le second produit pour dénominateur au premier*.

Ou bien, en termes plus simples, il faut *multiplier la fraction dividende par la fraction diviseur renversée* (voyez le n° **129**, 3°).

Ainsi,

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20};$$

de même,

$$\frac{23}{30} : \frac{13}{15} = \frac{23}{30} \times \frac{15}{13} = \frac{23 \times 15}{30 \times 13} = \frac{345}{390} = \frac{23}{26}.$$

(On aurait pu, avant de former les produits indiqués par 23×15 et 30×13, *supprimer* le facteur 15, qui est évidemment *commun* aux deux termes de la fraction.)

N. B. — Toutes les fois que, dans la division des fractions, le diviseur est *moindre que l'unité*, le quotient doit être *plus grand que* le dividende.

Car ce quotient résulte de la multiplication du dividende par le *diviseur renversé*, qui devient alors un nombre plus grand que 1.

132. Enfin, si l'on avait *un entier joint à une fraction*, à diviser par *un entier joint à une fraction*, on *réduirait* d'abord *les entiers en fraction*, puis on *opérerait* comme ci-dessus.

Soit $12\frac{3}{4}$ *à diviser par* $6\frac{2}{3}$.

On a

$$12\frac{3}{4} : 6\frac{2}{3} = \frac{51}{4} : \frac{20}{3} = \frac{51}{4} \times \frac{3}{20} = \frac{153}{80} = 1\frac{73}{80};$$

de même

$$7\frac{8}{11} : 15\frac{5}{8} = \frac{85}{11} : \frac{125}{8} = \frac{85}{11} \times \frac{8}{125} = \frac{680}{1375} = \frac{136}{275}.$$

Fractions à termes fractionnaires.

133. En exposant la division des fractions, nous avons toujours fait usage de *deux points* (:), pour indiquer l'opération à exécuter, parce que cette notation est généralement plus simple et plus commode que la barre (—). Cependant, il y a des circonstances où l'emploi de celle-ci est utile et même indispensable pour la clarté des raisonnements; et nous en verrons bientôt des exemples.

Ainsi, comme nous l'avons déjà dit au n° **44** (*signes* de la division),

$\dfrac{\frac{5}{7}}{\frac{8}{9}}$ a la même signification que $\frac{5}{7} : \frac{8}{9}$.

Pareillement, $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ peut remplacer $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$.

Il faut seulement avoir le soin, pour éviter toute confusion, que *la barre* de l'opération principale soit *un peu plus longue* que les deux autres.

En outre, si l'on fait usage des lettres, comme ci-dessus, l'expression, dans le discours, doit se prononcer ainsi :

a *sur* b *divisé par* c *sur* d.

On est, de la sorte, conduit à considérer des expressions *fractionnaires* dont le numérateur et le dénominateur ne sont plus des nombres *entiers*, mais sont, eux-mêmes, des *nombres fractionnaires*, auxquels, d'après la nature des procédés établis, *on peut*, en toute rigueur, *appliquer les principes qui ont été démontrés pour le cas où les deux termes* d'un *nombre fractionnaire* sont des *nombres entiers*.

Pour justifier cette proposition, faisons voir, par exemple, que : *si l'on multiplie, par un nombre entier quelconque, les deux termes d'une expression fractionnaire,* supposés eux-mêmes des nombres fractionnaires, *on ne change pas la valeur du quotient.*

Soit $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ le nombre proposé, et multiplions par m ses deux termes $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$; je dis que le quotient restera *le même* avant et après la multiplication.

En effet, on a d'abord (nº **131**, 3º)

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}.$$

Maintenant, si l'on multiplie les deux termes du nombre proposé par un nombre entier m, on obtient, en appliquant les règles sur la multiplication et la division des fractions, la série d'égalités

$$\frac{\frac{a}{b} \times m}{\frac{c}{d} \times m} = \frac{\frac{a \times m}{b}}{\frac{c \times m}{d}} = \frac{a \times m}{b} \times \frac{d}{c \times m} = \frac{a \times m \times d}{b \times c \times m} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

(cette dernière expression résulte de la suppression du facteur commun m).

On voit donc que le résultat est absolument le même, soit *après*, soit *avant* la multiplication.

Des fractions de fractions.

134. A la multiplication des fractions se rattache une autre espèce d'opération connue sous le nom de *règle des fractions de fractions*.

Pour donner une idée nette de cette opération, supposons d'abord que l'on ait à prendre, de la fraction $\frac{5}{7}$, *une partie* indiquée par la fraction $\frac{2}{3}$.

Comme cela revient à prendre 2 fois le *tiers* de $\frac{5}{7}$, ou (nº **129**, 3º) à multiplier $\frac{5}{7}$ par $\frac{2}{3}$, on aura pour résultat

$$\frac{5 \times 2}{7 \times 3}, \quad \text{ou} \quad \frac{10}{21}.$$

En second lieu, supposons que, de la nouvelle fraction $\frac{10}{21}$ on veuille prendre *une partie* indiquée par la fraction $\frac{8}{13}$.

D'après ce qui vient d'être dit, on aura pour résultat

$$\frac{10 \times 8}{21 \times 13}, \quad \text{ou} \quad \frac{80}{273};$$

et cette dernière expression représentera alors les $\frac{8}{13}$ des $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{7}$.

Soit encore à prendre les $\frac{3}{11}$ de $\frac{80}{273}$; on aura le nouveau résultat

$$\frac{80 \times 3}{273 \times 11}, \quad \text{ou} \quad \frac{240}{3003},$$

expression qui représentera les $\frac{3}{11}$ des $\frac{8}{13}$ des $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{7}$.

D'où l'on voit que :

Pour prendre des fractions de fractions, il faut *multiplier tous les numérateurs* entre eux, ainsi que *tous les dénominateurs*, puis donner le second produit pour *dénominateur* au premier, pris pour *numérateur*.

Lorsque l'on a à prendre des fractions de fractions d'un *certain nombre entier*, on doit mettre cet *entier* sous forme *de fraction*, ayant 1 pour dénominateur (n° **110**), et l'on applique la règle qui vient d'être établie.

Ainsi,

les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ des $\frac{5}{8}$ des $\frac{6}{7}$ de $\frac{12}{1} = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 6 \times 12}{3 \times 4 \times 8 \times 7 \times 1} = \frac{2160}{672}$;

ou, extrayant les entiers,

$$= 3\,\frac{144}{672} = 3\,\frac{3}{14}.$$

Problème. — *On demandait à un arithméticien quelle heure il était?* Il répondit : *Il est les* $\frac{3}{4}$ *des* $\frac{5}{6}$ *des* $\frac{7}{12}$ *des* $\frac{6}{7}$ *de* 24 *heures. Quelle heure était-il?*

Pour résoudre cette question, *écrivez* sur une première ligne horizontale tous les numérateurs, y compris l'*entier*, et, sur une seconde ligne, les dénominateurs, y compris 1 (n° **110**) :

$$\begin{array}{ccccc} 3, & 5, & 7, & 6, & 24, \\ 4, & 6, & 12, & 7, & 1. \end{array}$$

Cela posé, *faites le produit* des nombres de la première ligne et *celui* des nombres de la seconde; puis *divisez* le premier produit par le second.

Vous obtenez ainsi pour résultat, $\frac{15120}{2016}$, ou, extrayant l'entier, $7\,\frac{1008}{2016}$, ou, réduisant, $7\,\frac{1}{2}$.

Donc il était 7 heures $\frac{1}{2}$.

N. B. — On peut simplifier la manière d'opérer en remarquant :

1° que 7 devant évidemment être *facteur commun* au produit des numérateurs et à celui des dénominateurs, rien n'empêche de *supprimer ce facteur* avant d'effectuer les multiplications; 2° qu'il en est de même du facteur 6, puis du facteur 12 qui, se trouvant au nombre des dénominateurs, divise en même temps le numérateur 24; enfin, du facteur 2, quotient de 24 par 12, qui est compris aussi dans le dénominateur 4.

Il vient alors, après la *suppression* de tous les facteurs *communs*, $\frac{3 \times 5}{2}$, ou $\frac{15}{2}$, ou $7\frac{1}{2}$, comme on l'a déjà trouvé.

Ces sortes de simplifications, qu'il ne faut pas négliger, demandent de l'habitude.

Autres applications. — Les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ d'un nombre forment les $\frac{6}{12}$ ou la *moitié* de ce nombre.

Le *tiers* du *cinquième* est égal au quinzième; la *moitié* des $\frac{3}{4}$ est égale aux $\frac{3}{8}$, etc.

Évaluation approximative des fractions ordinaires.

135. Pour compléter la théorie générale des fractions, nous allons résoudre une question qui trouvera d'utiles applications, et dont voici l'énoncé :

Étant donnée une fraction IRRÉDUCTIBLE *dont les termes sont assez grands pour qu'il soit difficile de se former une idée bien nette de sa valeur, la remplacer par une autre qui en approche plus ou moins, mais dont les termes soient plus simples* (telles sont celles qui ont pour dénominateurs 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 20, 24, etc.),

Prenons, *pour premier exemple*, la fraction $\frac{523}{949}$.

Proposons-nous de l'évaluer en *douzièmes*, c'est-à-dire de la remplacer par une autre fraction ayant 12 pour *dénominateur*.

Remarquons d'abord que, l'unité valant $\frac{12}{12}$ (n° **110**), les $\frac{523}{949}$ *de l'unité* valent les $\frac{523}{949}$ de 12 *douzièmes*, ou (n° **129**, 2°) $\frac{523 \times 12}{949}$ *de douzièmes*, ou $\dfrac{\frac{523 \times 12}{949}}{12}$ (n° **135**.)

Si donc on effectue les deux opérations marquées par $\frac{523 \times 12}{949}$, la partie entière du quotient exprimera le nombre *de douzièmes* contenu dans le nombre proposé.

Cette double opération étant exécutée,

$$\begin{array}{r|l} 523 & \\ 12 & \\ \hline 6276 & 949 \\ \hline 582 & 6 \end{array}$$

on obtient 6 pour partie entière du quotient ; ce qui donne $\frac{6}{12}$, ou $\frac{1}{2}$, pour la valeur de $\frac{523}{949}$, *à moins de* $\frac{1}{13}$ *près ;*

Car la partie négligée dans le résultat est le *douzième* de la fraction $\frac{582}{949}$ qui devrait être ajoutée au quotient 6, et, par conséquent, est *moindre que* $\frac{1}{12}$.

Soit, pour deuxième exemple, la fraction $\frac{3179}{8764}$, dont on demande la valeur *à moins de* $\frac{1}{20}$ *près*.

On a, d'après ce qui précède,

$$\frac{3179}{8764} = \frac{\frac{3179}{8764} \times 20}{20}.$$

Effectuant la double opération marquée par $\frac{3179 \times 20}{8764}$, on trouve pour résultat de la dernière, $7\,\frac{2232}{8764}$; donc $\frac{7}{20}$ est la valeur de $\frac{3170}{8764}$ à moins de $\frac{1}{20}$ près.

136. En général, pour transformer une fraction $\frac{a}{b}$, d'une espèce *donnée* et marquée par le dénominateur b, en une autre *d'espèce différente*, marquée par n, ou bien, pour lui substituer une autre fraction ayant pour dénominateur un nombre entier n :

Multipliez le numérateur de la proposée par n, *et divisez le produit par le dénominateur.*

Formez ensuite *une nouvelle fraction ayant pour numérateur la partie entière*, a', *du quotient qui résulte de la seconde opération*, et *pour dénominateur*, n.

La fraction $\frac{a'}{n}$ est la fraction cherchée.

137. *N. B.* — Toutes les fois que le dénominateur de la fraction qui est jointe au quotient obtenu, est *plus que le double* de son numérateur (ce que l'on reconnaît à la seule inspection), on peut conclure que l'erreur commise, quand on substitue $\frac{a'}{n}$ à $\frac{a}{b}$, est moindre que $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{n}$, ou $\frac{1}{2n}$, et l'on dit, dans ce cas, que $\frac{a'}{n}$ est la valeur approchée, *par défaut*, ou *en moins*, de la fraction $\frac{a}{b}$, *à moins* de $\frac{1}{2n}$.

Si, au contraire, le dénominateur est *inférieur au double* du numérateur, il est d'usage de *forcer* ou d'*augmenter* d'une unité la *partie entière* du quotient; ce qui donne alors $\frac{a'+1}{n}$ pour la valeur approchée, *par excès*, ou *en plus*, *à moins* de $\frac{1}{2n}$.

Ainsi, comme, dans le premier exemple, la fraction $\frac{582}{949}$, qui complète le quotient, a son dénominateur *plus petit que le double* de son numérateur, il faut prendre $\frac{7}{12}$ au lieu de $\frac{6}{12}$, et l'on a alors la valeur approchée, *en plus*, de la proposée, *à moins de* $\frac{1}{24}$ *près*.

Dans le second exemple, le dénominateur de la fraction $\frac{2232}{8764}$ *surpasse le double* du numérateur; ainsi $\frac{7}{20}$ est la valeur approchée, par *défaut, à moins de* $\frac{1}{40}$ *près*.

Il y a plus : le dénominateur surpasse même le *triple* du numérateur; donc $\frac{7}{20}$ ne diffère, *en moins*, de la fraction proposée, que d'une quantité *moindre que* $\frac{1}{60}$.

Nous ajouterons enfin que, pour abréger, on dit quelquefois : *Déterminer à* $\frac{1}{n}$ *près*, au lieu de *à moins de* $\frac{1}{n}$ *près*, la valeur d'une fraction $\frac{a}{b}$. Il importe de retenir cette *locution abrégée*, pour en bien saisir le sens.

OBSERVATION GÉNÉRALE SUR LES FRACTIONS.

138. Nous avons dit, au commencement du deuxième chapitre (*fin* du nº **45**), que nous signalerions comme des principes relatifs aux nombres *entiers*, qui sont susceptibles de s'appliquer aux nombres *fractionnaires*.

Or, il résulte de la nature des procédés établis par le calcul des FRACTIONS, que les quatre opérations fondamentales à effectuer sur cette sorte de nombres se réduisent, en dernière analyse, à des opérations du même genre exécutées sur des nombres *entiers*.

Donc, tous les principes sur la *multiplication* et la *division*, qui ont fait l'objet du premier paragraphe du deuxième chapitre, s'étendent également aux *nombres fractionnaires*.

Par exemple :

Le produit de deux ou plusieurs fractions reste le même dans quelque ordre qu'on effectue leur multiplication ;

Multiplier une fraction par le produit effectué de plusieurs autres, revient à multiplier l'une d'elles, successivement, par chacune des autres ;

On peut *multiplier* ou *diviser par* UN MÊME NOMBRE *les deux termes d'une expression fractionnaire quelconque* (n° **133**) *sans que le quotient change de valeur ;*

Et ainsi des autres principes.

De même, on déduirait de la définition (n° **46**) des expressions MULTIPLE, SOUS-MULTIPLE ou DIVISEUR d'un nombre, qu'il existe des fractions *multiples*, *sous-multiples* ou *diviseurs* d'autres fractions, en ce sens que la division de la fraction *multiple* par la fraction *sous-multiple* donne un QUOTIENT ENTIER.

Ainsi, les fractions $\frac{12}{23}, \frac{8}{23}, \frac{6}{23}, \ldots$, sont des *multiples* de $\frac{2}{23}$, comme contenant celle-ci, la première *six fois exactement*, la seconde *quatre fois*, la troisième *trois fois*, etc.

En général, toute fraction a pour *diviseurs* sa *moitié*, son *tiers*, son *quart*, etc.; d'où il suit que le *nombre* de ses diviseurs est *infini*, ce qui n'est pas vrai pour les nombres *entiers*, si l'on ne considère que des diviseurs *entiers*.

Deux fractions peuvent aussi avoir des *diviseurs communs ;* par exemple, $\frac{35}{48}, \frac{7}{24}$ ont pour *diviseur commun* la fraction $\frac{7}{48}$ et tous ses *sous-multiples ;* car les quotients de $\frac{35}{48}$ et de $\frac{7}{24}$, divisés par $\frac{7}{48}$ (d'après la règle du n° **131**, 3°), sont respectivement égaux à 5 et 2, *nombres entiers*.

On peut donc, généralement, établir, par rapport aux *fractions*, des propriétés analogues à celles que nous avons exposées sur le *plus grand commun diviseur* et sur le *plus petit multiple* de *deux* ou de *plus de deux* nombres. Nous en proposerons plusieurs pour exercices, à la fin de ce chapitre.

§ II. — DES NOMBRES COMPLEXES.

Nous plaçons ici la théorie des *nombres complexes* comme étant une application immédiate de la théorie des *fractions ordinaires*.

Mais les opérations qu'elle comporte ayant perdu de leur importance depuis l'établissement du *système décimal des poids et mesures*, nous nous bornerons à donner les notions indispensables pour la résolution des questions qui ont généralement pour objet la comparaison des anciennes et des nouvelles mesures, et de celles qui se rattachent particulièrement à la *division du temps*, à la *division du cercle* et aux principales *divisions du thermomètre*.

139. *Notions préliminaires.* — On a vu (nº 8) que, pour évaluer les quantités plus petites que l'*unité principale*, on conçoit cette unité divisée en un certain nombre de parties *égales* qu'on regarde elles-mêmes comme formant de nouvelles *unités*.

Dans la théorie qui nous occupe, l'unité est *d'abord* divisée en un *petit* nombre de parties *égales*, puis celles-ci sont divisées en d'autres, et ces nouvelles parties en d'autres, etc.

Ainsi, pour les *monnaies*, la *livre* est partagée en 20 parties égales appelées *sous*, le *sou* en 12 parties égales appelées *deniers*. De même, l'unité de longueur, ou la *toise*, se divisait en 6 *pieds*, le pied en 12 *pouces*, etc.

140. Chaque art, chaque industrie, chaque pays subdivisait à sa manière l'*unité principale* qui lui était propre (*).

Le tableau suivant comprend, pour les plus importantes de ces sortes de quantités, un tableau des *unités principales* et de leurs subdivisions.

Pour les monnaies.

La *livre* vaut 20 *sous*, le *sou* 12 *deniers*, en sorte que la *livre* vaut 12 fois 20, ou 240 *deniers*.

On dit encore que le *sou* est la 20ᵉ partie de la *livre*, le *denier* est le 12ᵉ du *sou*, ou la 240ᵉ partie de la *livre*.

Pour les longueurs.

La *toise* se divisait en 6 *pieds*, le *pied* en 12 *pouces*, le *pouce* en 12 *lignes*.

Donc, la *toise* vaut 12 fois 6, ou 72 *pouces*, 12 fois 72, ou 864 *lignes*.

Ou bien, le *pied* est le 6ᵉ de la *toise*; le *pouce* est le 12ᵉ du *pied* ou le 72ᵉ de la *toise*; la *ligne* est le 12ᵉ du *pouce*, ou le 144ᵉ du *pied*, ou le 864ᵉ de la *toise*.

(*) *Voyez*, pour l'histoire et l'origine de ces sortes de mesures, un ouvrage de M. Saigey, ayant pour titre : *Traité de Métrologie ancienne et moderne*.

Pour les mesures itinéraires.

On distinguait trois sortes de lieues : la *grande lieue*, de 2500 toises ; la *lieue moyenne*, de 2250 toises ; et la *lieue de poste*, de 2000 toises.

La lieue se subdivisait en *demies*, en *quarts*, et en *demi-quarts*, ou *huitièmes* de lieue.

Pour les poids.

La *livre-poids* se divisait en 2 *marcs* ; le *marc* en 8 *onces* ; l'*once* en 8 *gros* ; et le *gros* en 72 *grains*.

D'où il suit que la *livre-poids* vaut 8 fois 2, ou 16 *onces* ; 8 fois 16, ou 128 *gros* ; 72 fois 128, ou 9216 *grains*.

Ou bien encore, le *marc* est la moitié de la *livre* ; l'*once* est le 8ᵉ du *marc*, ou le 16ᵉ de la *livre* ; le *gros* est le 8ᵉ de l'*once*, ou la 128ᵉ partie de la *livre* ; le *grain* est le 72ᵉ du *gros*, ou la 9216ᵉ partie de la *livre*.

Pour le temps.

Le *jour* se subdivise en 24 *heures* ; l'*heure* en 60 *minutes* ; la *minute* en 60 *secondes* ; la seconde en 60 *tierces*.

L'*année* est de 365 *jours* (ou de 366 dans les années *bissextiles*).

N. B. — Nous ferons connaître plus loin (quatrième chapitre) d'autres mesures, telles que les mesures *agraires*, les mesures de *capacité*, la *division du cercle, etc.*

141. Ces notions posées, on appelle *nombre complexe* tout nombre *concret* (nº **2**) qui contient en même temps plusieurs *unités principales* d'une certaine espèce, et une ou plusieurs *subdivisions* de cette unité.

Ainsi, 13 livres 17 sols 11 deniers ($13^{\text{₶}}\ 17^{\text{ſ}}\ 11^{\text{d}}$), 25 toises 4 pieds 7 pouces 6 lignes ($25^{\text{T}}\ 4^{\text{pi}}\ 7^{\text{po}}\ 6^{\text{l}}$), 41 livres 1 marc 7 onces 5 gros 17 grains (41 ℔ $1^{\text{m}}\ 7^{\text{o}}\ 5^{\text{gros}}\ 17^{\text{grains}}$), 63 jours 21 heures 53 minutes 29 secondes ($63^{\text{j}}\ 21^{\text{h}}\ 53'\ 29''$), sont des nombres *complexes*.

Il en est de même de $23^{\text{₶}}\ 15^{\text{ſ}}$, $0^{\text{T}}\ 5^{\text{pi}}\ 8^{\text{po}}$, etc.

8 livres, 17 toises, 23 grains, etc., considérés *isolément*, sont des nombres *incomplexes*.

La résolution des questions suivantes sert de base aux *quatre* opérations fondamentales sur les nombres complexes.

142. Première question. — *Un nombre complexe étant donné, réduire ce nombre en unités de la plus petite subdivision de l'unité principale.*

Soit, par exemple, $13^{\text{T}}\ 5^{\text{pi}}\ 8^{\text{po}}\ 11^{\text{l}}$ à convertir en lignes.

Il résulte d'abord du tableau (nº **140**) que la *toise* valant 6 *pieds*, on a

$$13^{\text{T}}\ 5^{\text{pi}} = 13 \times 6 + 5 = 78 + 5 = 83^{\text{pi}}.$$

De même, le *pied* valant 12 *pouces*, il s'ensuit que

$$13^{\text{T}}\ 5^{\text{pi}}\ 8^{\text{po}} = 83 \times 12 + 8 = 996 + 8 = 1004^{\text{po}}.$$

Enfin, le *pouce* valant 12 *lignes*, on en déduit

$$13^{\mathrm{T}}\,5^{\mathrm{pi}}\,8^{\mathrm{po}}\,11^{\mathrm{l}} = 1004 \times 12 + 11 = 12048 + 11 = 12059^{\mathrm{l}}.$$

Donc

$$13^{\mathrm{T}}\,5^{\mathrm{pi}}\,8^{\mathrm{po}}\,11^{\mathrm{l}} = 12059^{\mathrm{l}}.$$

Soit encore $47^{\#}\,19^{s}\,7^{d}$ à réduire en *deniers*.

On a successivement

$$47^{\#}\,19^{s} = 47 \times 20 + 19 = 940 + 19 = 959^{s},$$

et

$$47^{\#}\,16^{s}\,7^{d} = 959 \times 12 + 7 = 11508 + 7 = 11515^{d}.$$

Règle générale. — *Multipliez* d'abord *le nombre d'unités principales par le nombre d'unités de la première subdivision que* (d'après le tableau n° **140**) *contient l'unité principale, et ajoutez au produit les unités de cette première subdivision, qui se trouvent comprises dans le nombre donné;*

Multipliez ensuite *le résultat* ainsi obtenu, *par le nombre d'unités de la seconde subdivision, que contient la première*, et *ajoutez à ce second produit, les unités de la seconde subdivision, qui entrent dans le nombre donné;*

Et ainsi de suite, jusqu'à ce que vous soyez arrivé à la *dernière* subdivision.

On trouvera, par ce moyen :

1°. *Pour*

$$\begin{aligned} 8\text{℔}\,1^{\mathrm{m}}\,7^{\mathrm{o}}\,0^{\mathrm{gros}}\,47^{\mathrm{grains}} \;\Big|\; 8\text{℔}\,1^{\mathrm{m}} &= 8 \times 2 + 1 = 17^{\mathrm{m}},\\ 8\text{℔}\,1^{\mathrm{m}}\,7^{\mathrm{o}} &= 17 \times 8 + 7 = 143^{\mathrm{o}},\\ 8\text{℔}\,1^{\mathrm{m}}\,7^{\mathrm{o}}\,0^{\mathrm{gros}} &= 143 \times 8 + 0 = 1144^{\mathrm{gros}}; \end{aligned}$$

enfin,

$$8\text{℔}\,1^{\mathrm{m}}\,7^{\mathrm{o}}\,0^{\mathrm{gros}}\,47^{\mathrm{grains}} = 1144 \times 72 + 47 = 82415^{\mathrm{grains}}.$$

2°. *Pour*

$$\begin{aligned} 23^{\mathrm{h}}\,55'\,19''\,23''' \;\Big|\; 23 \times 60 + 55 &= 1380 + 55 = 1435',\\ 23^{\mathrm{h}}\,55'\,19'' &= 1435 \times 60 + 19 = 86119'', \end{aligned}$$

et

$$23^{\mathrm{h}}\,55'\,19''\,23''' = 86119 \times 60 + 23 = 5167163'''.$$

143. Seconde question. — Réciproquement, *étant donné un nombre d'unités d'une certaine subdivision de l'unité principale, le convertir en un nombre complexe.*

La règle à suivre est une conséquence évidente de ce qui précède, et peut s'énoncer ainsi :

Divisez d'abord *le nombre proposé par le nombre qui exprime* (d'après le tableau n° **140**) *combien de fois la subdivision donnée est contenue dans la subdivision immédiatement supérieure;* vous obtenez ainsi pour *quotient*, un certain nombre d'unités de cette subdivision supérieure, et pour *reste,* les unités de la subdivision *donnée*, qui doivent entrer dans le nombre complexe cherché;

Divisez ensuite *le quotient obtenu, par le nombre qui exprime combien de fois la subdivision immédiatement supérieure est contenue dans la subdivision qui précède de deux rangs la subdivision donnée;* vous obtenez un *nouveau quotient* qui renferme un certain nombre d'unités de la troisième subdivision dont il vient d'être parlé, et un *nouveau reste* exprimant les unités de l'avant-dernière subdivision qui doivent faire partie du nombre complexe cherché;

Continuez ainsi jusqu'à ce que vous soyez parvenu aux *unités principales.*

N. B. — Si l'on obtient 0 pour quelqu'un des restes, c'est un signe que la subdivision correspondante doit manquer dans le nombre cherché, mais il faut en conserver la place.

Appliquons cette règle aux deux premiers exemples du n° **142.**

On a d'abord, pour le premier,

$$12059^{l} : 12 = 1004^{po} + 11^{l};$$

puis

$$1004^{po} : 12 = 83^{pi} + 8^{po}, \quad \text{et} \quad 83^{pi} : 6 = 13^{T} + 5^{pi};$$

donc

$$12059^{l} = 13^{T}\ 5^{pi}\ 8^{po}\ 11^{l}.$$

Pour le deuxième,

$$11515^{d}: 12 = 959^{s} + 7^{d}, \quad \text{et} \quad 959^{s} : 20 = 47^{\#}\ 19^{s};$$

donc

$$11515^{d} = 47^{\#}\ 19^{s}\ 7^{d}.$$

On traiterait d'une manière analogue les deux autres exemples.

N. B. — On doit remarquer que, dans le deuxième exemple, pour diviser 959 par 20, il suffit (n° **38**), après avoir séparé le dernier chiffre à droite, 9, lequel exprime des *sous*, de diviser la partie à gauche, 95, par 2, ce qui donne pour quotient les *livres*, et pour reste, 1, que l'on écrit à gauche de 9, comme exprimant des *dizaines de sous.*

En général, pour exprimer en *livres* un nombre quelconque de *sous*, *il faut faire abstraction du dernier chiffre à droite, et prendre la moitié de la partie à gauche.* Le reste, s'il y en a un, s'écrit alors à la gauche du chiffre séparé pour former *le nombre* de sous qui doit entrer dans le nombre complexe; et le quotient de la division par 2, exprime *les livres.*

Cette remarque est fort utile dans l'addition des nombres complexes.

144. Troisième question. — *Convertir un nombre complexe donné, en un nombre fractionnaire de l'unité principale.*

C'est encore une conséquence de la règle du n° **142.**

Soit, par exemple, le nombre $13^{T}\ 5^{pi}\ 8^{po}\ 11^{l}$.

Après avoir réduit ce nombre en *lignes*, ce qui a donné (nº **142**) 12059^{l}, on remarque que, d'après le tableau du nº **140**, une ligne vaut $\frac{1}{864}$ de toise; donc 12059 lignes valent $\frac{12059}{864}$ de toise.

Tel est le nombre fractionnaire demandé.

Pareillement $47^{\#}\ 19^{s}\ 7^{d}$ étant égal à 11515^{d} (nº **142**), et le denier valant $\frac{1}{240}$ de *livre* (nº **140**),

$$11515^{d} = \frac{11515}{240}.$$

RÈGLE GÉNÉRALE. — *Commencez par réduire le nombre complexe proposé, en unités de la plus faible des subdivisions qu'il renferme;* puis *formez un nombre fractionnaire, qui ait pour* NUMÉRATEUR *le nombre obtenu, et pour* DÉNOMINATEUR *le nombre d'unités de cette plus faible subdivision, que contient l'unité principale.*

On trouvera également pour les deux derniers exemples du nº **142**,

$$8 \text{℔}\ 1^{m}\ 7^{o}\ 0^{\text{gros}}\ 47^{\text{grains}} = \frac{82415}{9216} \text{ de } \textit{livre-poids},$$

$$23^{h}55'19''23''' = \frac{5167163}{60 \times 60 \times 60} = \frac{5167163}{216000} \text{ d'}\textit{heure},$$

ou

$$23^{h}\,55'\,19''\,23''' = \frac{5167163}{24 \times 216000} = \frac{5167163}{5184000} \text{ de } \textit{jour},$$

le jour étant pris pour *unité principale*.

145. QUATRIÈME QUESTION. — Réciproquement, *étant donné un nombre fractionnaire quelconque de* l'UNITÉ PRINCIPALE *d'une certaine espèce, le convertir en un nombre complexe.*

Cette question, qui est l'inverse de la précédente, exige quelques développements.

Soit, pour exemple, le nombre $\frac{479}{83}$ de *toise*, qu'il s'agit de convertir en *toises, pieds, pouces, etc.*

$$\begin{array}{r|l}
479 & 83 \\ \cline{2-2}
64 & 5^{T}\ 4^{pi}\ 7^{po}\ 6^{l}\ \frac{18}{83} \\
6 & \\ \hline
384 & \\
52 & \\
12 & \\ \hline
624 & \\
43 & \\
12 & \\ \hline
516 & \\
18 &
\end{array}$$

On commence par extraire l'entier contenu dans ce nombre fractionnaire, en divisant 479 par 83 (n° **126**), ce qui donne le quotient 5 et le reste 64 ; d'où l'on déduit déjà

$$\frac{479}{83} \text{ de } 1^{\mathrm{T}} = 5^{\mathrm{T}} + \frac{64}{83} \text{ de } \textit{toise};$$

et il reste à évaluer cette fraction de toise en *pieds*, *pouces*, *lignes*.

Or, 1 toise valant 6 pieds, $\frac{64}{83}$ de toise vaut les $\frac{64}{83}$ de 6^{pi} ou $\frac{64 \times 6}{83}$ de 1^{pi} ; donc, si l'on multiplie 64 par 6, comme le montre le tableau de l'opération, et que l'on divise le produit 384 par 83, le quotient entier, 4, exprime des *pieds*, et la fraction $\frac{52}{83}$, correspondant au reste 52, est une fraction de *pied*, qu'il faut réduire en *pouces*.

En raisonnant sur cette fraction comme sur la précédente, on est conduit à multiplier 52 par 12, puis, à diviser le produit, 624, qui en résulte, par 83 ; ce qui donne pour quotient 7^{po}, et une fraction correspondante, $\frac{43}{83}$ de *pouce*, qu'il ne reste plus qu'à réduire en *lignes*.

Multipliant de même 43 par 12, et divisant le produit résultant 516 par 83, on obtient pour quotient, 6^{l}, et une fraction de ligne, $\frac{18}{83}$.

Donc enfin,

$$\frac{479}{83} \text{ de } \textit{toise} = 5^{\mathrm{T}}\, 4^{\mathrm{pi}}\, 7^{\mathrm{po}}\, 6^{\mathrm{l}}\, \frac{18}{83} \text{ de } \textit{ligne}.$$

Règle générale. — Pour convertir un nombre fractionnaire d'une unité principale quelconque en un nombre complexe : *extrayez d'abord*, s'il y a lieu, *l'entier contenu dans le nombre ;* vous obtenez ainsi un certain nombre d'unités principales (lequel peut être 0) ;

Multipliez ensuite le reste de cette division par le nombre qui exprime combien de fois l'unité principale contient la première subdivision, et *divisez le produit par le dénominateur du nombre donné ;* vous obtenez pour quotient, un certain nombre d'unités de la première subdivision, et un second reste ;

Multipliez de même ce reste par le nombre d'unités de la seconde subdivision contenues dans la première, et *divisez le nouveau produit par le dénominateur du nombre donné ;* le troisième quotient ainsi obtenu représente les unités de la seconde subdivision, qui doivent entrer dans le nombre cherché ; puis, *vous opérez sur le reste d'une manière analogue*.

146. Remarque I. — Les opérations que comportent les deux dernières règles peuvent se servir mutuellement de vérification.

Ainsi, en appliquant la règle du n° **145** aux *quatre* nombres fractionnaires du n° **144**, on doit reproduire les quatre nombres complexes qui leur correspondent.

(Nous engageons surtout à traiter le quatrième exemple, parce qu'on y trouve l'occasion d'employer les modifications du procédé de la division, indiquées au n° **38**.)

De même, on peut vérifier le résultat qui se rapporte à l'exemple particulier du n° **145**, au moyen de la règle du n° **144**. Mais il importe de faire bien attention à l'opération à laquelle on est conduit pour achever la vérification.

La division de 479 par 83, ayant donné le quotient $5^{\mathrm{T}}\,4^{\mathrm{pi}}\,7^{\mathrm{po}}\,6^{\mathrm{l}}\,\frac{18}{83}$, il s'agit de reproduire le nombre $\frac{479}{83}$.

Or, en suivant la règle du n° **144**, on a d'abord

$$5^{\mathrm{T}}\,4^{\mathrm{pi}}\,7^{\mathrm{po}}\,6^{\mathrm{l}} = 4986^{\mathrm{l}},$$

nombre de *lignes* auquel il faut joindre la fraction $\frac{18}{83}$; ce qui donne (n° **126**, *récipr.*)

$$\frac{413856}{83} \text{ de ligne;}$$

puis, divisant par 864, nombre de lignes que contient la toise, on a

$$\frac{413856}{83} : 864 \quad \text{ou (n° 131, 1°)} \quad \frac{413856}{83 \times 864}.$$

Parvenu à cette dernière expression, on reconnaît que 864 divise exactement 413856, et que le quotient de la division est 479.

Divisant donc les deux termes de la fraction par 864, ou, ce qui est la même chose, *supprimant* (n° **56**) ce *facteur commun*, on trouve enfin $\frac{479}{83}$ pour la valeur de $5^{\mathrm{T}}\,4^{\mathrm{pi}}\,7^{\mathrm{po}}\,6^{\mathrm{l}}\,\frac{18}{83}$.

147. Remarque II. — Les principes qui viennent d'être développés seraient, à proprement parler, suffisants pour permettre d'effectuer les *quatre* opérations fondamentales de l'Arithmétique sur les nombres complexes.

Voici, à cet effet, la marche qu'il faudrait suivre :

1°. *Transformer les nombres complexes, chacun, en un seul nombre fractionnaire de l'unité principale correspondante;* 2° *exécuter sur ces nombres fractionnaires l'opération proposée* (d'après les règles du calcul des fractions ordinaires), ce qui donnerait pour résultat un nombre fractionnaire; 3° *convertir ce nombre fractionnaire en un nombre complexe*, de l'espèce indiquée par la nature de la question.

Cependant, les procédés *directs* donnant lieu à des observations importantes, et offrant même, pour les théories que nous aurons à développer plus tard, des applications utiles, nous allons les exposer aussi succinctement que possible sur des exemples très-simples, à l'aide desquels on pourra en traiter de plus compliqués.

Addition et soustraction.

148. 1°. Addition. — *Placez* (comme pour les nombres entiers) *les nombres donnés, les uns au-dessous des autres, de manière que les unités de même espèce soient dans une même colonne verticale, et tirez une ligne horizontale;* après quoi, *faites l'addition de toutes les unités contenues dans chaque colonne, en commençant par la droite.*

Si (comme cela arrive le plus ordinairement) la *somme* des unités contenues dans une colonne surpasse le *nombre* qui exprime combien de fois l'unité de la subdivision correspondante à cette colonne est contenue dans la subdivision immédiatement supérieure, divisez (n° **145**) la *somme* obtenue, par *ce nombre;* vous obtenez ainsi *un reste* (qui peut être o) que *vous écrivez* au-dessous de la ligne horizontale, et un certain *quotient* que vous *retenez* pour l'*ajouter* aux unités de la colonne suivante; opérez de la même manière sur cette colonne, puis sur la suivante, et ainsi de suite.

2°. Soustraction. — *Ecrivez le plus petit nombre sous le plus grand, de manière que les unités d'une même subdivision se correspondent,* et *soulignez* le tout; puis, *soustrayez successivement, les unes des autres, les unités de chaque subdivision,* en commençant par la plus faible.

Lorsque, pour l'une des subdivisions, le *nombre* des unités à soustraire est plus fort que le *nombre* dont il faut soustraire, *ajoutez* (n° **14**) à celui-ci *une unité* de la subdivision immédiatement supérieure, que *vous convertissez* en unités de la subdivision sur laquelle vous opérez; la soustraction partielle devient alors possible. Seulement, *vous avez soin,* en passant à la soustraction suivante, d'*augmenter* d'une unité le nouveau nombre à soustraire.

Voici quelques exemples pour lesquels nous nous bornons à présenter le tableau des calculs :

Addition.

	$23^{\#}$	$19^{\text{ſ}}$	7^{d}	49^{T}	5^{pi}	10^{po}	8^{l}	59℔	6^{o}	7^{gros}
	47	13	11	17	3	8	10	43	2	4
	19	10	9	24	2	11	7	7	10	5
	8	9	8	19	4	9	11	12	15	6
	$99^{\#}$	$13^{\text{ſ}}$	11^{d}	111^{T}	5^{pi}	5^{po}	0^{l}	123℔	3^{o}	6^{gros}
Preuve.	22	22	0	32	3	3	0	22	2	0

Soustraction.

	$57^{\#}$	$13^{\text{ſ}}$	8^{d}		15^{T}	4^{pi}	0^{po}	2^{l}		48℔	7^{o}	2^{gros}	19^{grains}
	49	17	11		8	5	8	11		37	13	6	47
	$7^{\#}$	$15^{\text{ſ}}$	9^{d}		6^{T}	4^{pi}	3^{po}	3^{l}		10℔	9^{o}	3^{gros}	44^{grains}
Preuve.	57	13	8		15	4	0	2		48	7	2	19

Multiplication.

149. Pour donner une idée nette de la manière d'opérer, nous nous proposerons la question suivante :

La toise d'un certain ouvrage en maçonnerie, coûtant $29^{\#}$ $16^{\text{ſ}}$ 10^{d}, *on demande le prix de* 63^{T} 4^{pi} 0^{po} 6^{l} ?

On conçoit que, si le prix de la toise est $29^{\#}$ $16^{\text{ſ}}$ 10^{d}, celui de 63 toises, et d'*une fraction* de toise, doit être égal à 63 fois ce prix, plus *une partie* de ce même prix, indiquée par *la fraction*. Donc il faut multiplier $29^{\#}$ $16^{\text{ſ}}$ 10^{d}, d'abord, par 63, et ensuite, par la *fraction* de toise.

Effectuons successivement ces deux multiplications.

Tableau du calcul.

	$29^{\#}$	$16^{\text{ſ}}$	10^{d}			
	63^{T}	4^{pi}	0^{po}	6^{l}		
	$87^{\#}$					
	174					
Pour $10^{\text{ſ}}$. . .	31	$10^{\text{ſ}}$				
5.	15	15				
1. . . .	3	3				
6^{d}. . . .	1	11	6^{d}			
3.	0	15	9			
1.	0	5	3			
3^{pi}. . . .	14	18	5			
1.	4	19	5	$\frac{2}{3}$. . .	24	48
1^{po}. . . .	0	8	3	$\frac{17}{36}$. . . .	2	»
6^{l}	0	4	1	$\frac{53}{72}$. . . .	1	53
	$1900^{\#}$	$2^{\text{ſ}}$	6^{d}	$\frac{29}{72}$		

101	72
29	$1\ \frac{29}{72}$

Explication. — On pourrait d'abord, pour multiplier le nombre supérieur par 63, prendre 63 fois les 10 *deniers*, puis 63 fois les 16 *sous*, de même 63 fois les 29 *livres*, et réduire *le tout* en *un seul* nombre complexe, suivant la règle du n° **145**; mais il est généralement plus simple d'opérer de la manière suivante :

On commence par multiplier 29 par 63, d'après le procédé ordinaire, en se dispensant toutefois d'ajouter les produits partiels.

Ensuite, pour obtenir le produit relatif au 16^{s}, on les décompose en $10^{s} + 5^{s} + 1^{s}$, c'est-à-dire en trois parties *aliquotes*, la première, de l'*unité principale;* la deuxième, de la première, et la troisième, de la deuxième.

Cela posé, le produit de 10^{s} par 63, ou de $\frac{1}{2}$ *livre* par 63, n'étant, évidemment, autre chose que *la moitié* de $63^{\#}$, on est conduit à regarder *momentanément* l'entier du multiplicateur comme exprimant des unités *de même nature* que le multiplicande, et à en prendre la *moitié;* ce qui donne $31^{\#}\ 10^{s}$, produit que l'on place au-dessous de ceux déjà formés.

Maintenant, 5^{s} étant la moitié de 10^{s}, il suffit, pour avoir le produit de 5^{s} par 63, de prendre la *moitié* de $31^{\#}\ 10^{s}$; et l'on a $15^{\#}\ 15^{s}$, que l'on écrit au-dessous du précédent.

De même, pour 1^{s}, qui est le *cinquième* de 5^{s}, on prend le 5e de $15^{\#}\ 15^{s}$, et l'on a $3^{\#}\ 3^{s}$.

Opérant d'une manière analogue sur les 10^{d}, que l'on décompose en $6^{d} + 3^{d} + 1^{d}$, on trouve :

1°. Pour 6^{d}, *la moitié* de $3^{\#}\ 3^{s}$, ou $1^{\#}\ 11^{s}\ 6^{d}$;

2°. Pour 3^{d}, *la moitié* de $1^{\#}\ 11^{s}\ 6^{d}$, ou $0^{\#}\ 15^{s}\ 9^{d}$;

3°. Pour $1^{\#}$, *le tiers* de $0^{\#}\ 15^{s}\ 9^{d}$, ou $0^{\#}\ 5^{s}\ 3^{d}$

(Et en effet, 63 fois 1^{d} donne 63^{d}, ou $5^{s}\ 3^{d}$; ce qui prouve l'exactitude des opérations déjà exécutées, du moins quant aux parties aliquotes.)

Passons à la multiplication par la *fraction*, ou plutôt, par les *subdivisions* de l'unité principale du multiplicateur.

On décompose d'abord 4^{pi} en $3^{pi} + 1^{pi}$.

Pour 3^{pi}, on doit prendre *la moitié* du prix de la toise, c'est-à-dire *la moitié* de $29^{\#}\ 16^{s}\ 10^{d}$, et l'on a $14^{\#}\ 18^{s}\ 5^{d}$; pour 1^{pi}, le tiers de $14^{\#}\ 18^{s}\ 5^{d}$, ce qui donne $4^{\#}\ 19^{s}\ 5^{d}\ \frac{2}{3}$.

Ensuite, comme il n'y a pas de *pouces* au multiplicateur, il convient, pour faciliter le calcul relatif aux *lignes*, d'avoir recours à un produit dit *produit auxiliaire*, savoir celui qui correspond à 1 *pouce*.

Or, 1 *pouce* étant le 12e du *pied*, ce produit doit être le 12e de $4^{\#}\ 19^{s}\ 5^{d}\ \frac{2}{3}$, ou $0^{\#}\ 8^{s}\ 3^{d}\frac{17}{36}$, que l'on écrit au-dessous des précédents, mais en ayant soin de le *barrer*, comme ne devant pas entrer en ligne de compte dans l'addition de tous les produits partiels.

On prend enfin, pour 6^l, *la moitié* de $0^{\#}\ 8^{s}\ 3^{d}\ \frac{17}{36}$; et l'on obtient $0^{\#}\ 4^{s}\ 1^{d}\ \frac{53}{72}$ pour le dernier produit partiel.

Il ne reste plus actuellement qu'à additionner tous les produits partiels, en commençant par les fractions de *denier;* ce qui exige qu'on les réduise d'abord au même dénominateur.

Or, en réfléchissant sur la manière dont les dénominateurs de ces fractions ont été formés, on voit facilement que le denier, 72, doit être un *multiple* des deux autres.

Ainsi l'on a

$$72 = 3.24 = 36.2.$$

Écrivant donc les quotients respectifs 24, 2, 1 à la droite des fractions, puis multipliant les numérateurs de ces fractions (hors celui qui correspond au *produit barré*) par ces quotients, on a : 48, », 53 dont la somme est 101 ; ce qui donne $\frac{101}{72}$, ou $1\ \frac{29}{72}$, pour la *somme de ces fractions.*

Cela fait, on tire une barre au-dessous de tous les produits partiels; puis, après avoir placé la fraction $\frac{29}{72}$ sous cette barre, on reporte le *denier* qui résulte de la somme des fractions, à la colonne des *deniers* que l'on additionne d'après la règle du nº **148.** On opère de même sur la colonne des *sous*, puis sur les *nombres entiers;* et l'on obtient alors pour le produit total :

$$1900^{\#}\ 2^{s}\ 6^{d}\ \frac{29}{72}.$$

150. Cette méthode de multiplication, dite *méthode par les parties aliquotes*, peut s'énoncer ainsi :

Après avoir multiplié l'un par l'autre les entiers des deux facteurs (sans additionner les produits partiels), *décomposez les subdivisions du multiplicande en* PARTIES ALIQUOTES *de l'unité principale et les unes des autres ;* puis, *prenez de l'*ENTIER *du multiplicateur* (considéré, pour le moment, comme exprimant des unités de même nature que l'unité principale du multiplicande) *des parties successives, indiquées par les différentes parties aliquotes.*

Décomposez, de même, *les subdivisions du multiplicateur en* PARTIES ALIQUOTES *de l'unité principale, et les unes des autres*, et *prenez de tout le multiplicande des parties successives, marquées par ces différentes parties aliquotes ;*

Additionnez ensuite *tous les produits partiels ainsi obtenus*, *en commençant par les fractions ordinaires* qui s'y trouvent liées.

151. Remarque. — Il résulte évidemment de cette manière de procéder :

1°. Que, dans tout le cours des multiplications partielles, bien que le multiplicateur soit un nombre *concret*, d'après l'énoncé de la question, on doit considérer l'unité principale de ce facteur et ses subdivisions, comme des *nombres abstraits* qui expriment le *nombre de fois* qu'il faut prendre le multiplicande, et *quelles parties* il en faut prendre, pour obtenir le résultat cherché, mais en conservant toujours au multiplicande sa qualité essentielle de *nombre concret ;* ce n'est que *fictivement*, quand on fait le produit des subdivisions du multiplicande par le multiplicateur, qu'on regarde celui-ci comme exprimant des unités de même nature que l'unité principale du multiplicande ;

2°. Que *tous les produits partiels*, *et le produit total*, *sont toujours de même nature que le multiplicande* (*).

DIVISION.

Nous insisterons peu sur cette opération, pour laquelle il est plus commode, en général, d'appliquer la règle établie au n° **147**.

Cependant, nous considérerons successivement, en commençant par le plus simple sous le rapport de l'exécution des calculs, les deux cas principaux qui peuvent se présenter.

152. Premier cas. — Celui où le dividende et le diviseur sont *des nombres complexes de même espèce*.

Par exemple, on peut demander : *Combien de toises d'un certain ouvrage on fera exécuter pour* $75^{\#}\ 19^{s}\ 5^{d}$, *si une toise coûte* $8^{\#}\ 15^{s}\ 6^{d}$;

Ou bien, *quelle somme on doit payer pour* $129^{T}\ 5^{pi}\ 4^{po}$, *d'un certain ouvrage*, en supposant que $3^{T}\ 2^{pi}$ *coûtent* $1^{\#}$.

Il est clair que, pour la résolution de ces deux questions, on doit déterminer *combien de fois* le plus petit des deux nombres complexes est contenu dans le plus grand ; ce à quoi l'on peut parvenir, — 1° en *réduisant* (n° **142**) *ces deux nombres en unités de la plus faible des subdivisions qui y entrent ;* — 2° et *divisant* ensuite, *l'un par l'autre, les nombres entiers ainsi obtenus.*

Le quotient est d'abord un simple *nombre abstrait*, qui, d'après l'énoncé de la question, doit ensuite exprimer des *toises*, *pieds*, *pouces*, *etc.*, pour le premier exemple, et des *livres*, *sous* et *deniers* pour le deuxième.

Si l'on convertit $75^{\#}\ 19^{s}\ 5^{d}$ et $8^{\#}\ 15^{s}\ 6^{d}$ en *deniers*, on trouve

$$18233^{d} \quad \text{et} \quad 2106^{d};$$

(*) Certaines questions de Géométrie, notamment celles qui ont pour objet la mesure des *surfaces* et des *volumes*, font exception à ce principe général; mais cela tient à des considérations qui ne sauraient trouver place ici.

ce qui donne le nombre fractionnaire $\frac{18233}{2106}$, lequel doit être converti en un nombre complexe, suivant la règle du nº **145**.

On obtient pour résultat final : $8^{T}\ 3^{pi}\ 11^{po}\ 4^{l}$, *plus* une fraction $\frac{432}{2106}$ ou $\frac{216}{1053}$, que l'on néglige ordinairement.

Ainsi, la réponse à la première question proposée, est

$$8^{T}\ 3^{pi}\ 11^{po}\ 4^{l}.$$

De même, $129^{T}\ 5^{pi}\ 4^{po}$, et $3^{T}\ 2^{pi}$, réduits en *pouces*, deviennent

$$9352^{po} \quad \text{et} \quad 240^{po};$$

d'où l'on déduit le nombre fractionnaire

$$\frac{9352}{240} \quad \text{ou} \quad \frac{2338}{60},$$

qui, converti en *livres*, *sous* et *deniers*, donne exactement

$$38^{\#}\ 19^{s}\ 4^{d}.$$

Telle est la réponse à la deuxième question.

153. Second cas. — *Celui où le dividende et le diviseur sont de nature* ou *d'espèce différente*.

Dans ce cas, quelle que soit la question proposée, le *quotient* doit exprimer des unités principales de *même espèce* que le dividende, puisqu'il faut (nº **151**) que le dividende, considéré comme un produit, soit de même espèce que l'un de ses deux facteurs.

Mais alors, le diviseur complexe, étant converti (nº **144**) en un nombre fractionnaire de l'*unité principale*, devient un *nombre abstrait*, par lequel il faut *diviser* le dividende; ce qui se fait (nº **132**) en *multipliant* celui-ci par *le nombre fractionnaire renversé*.

Exemple. — *On a fait exécuter* $75^{T}\ 4^{pi}\ 7^{po}$ *d'un certain ouvrage pour la somme de* $639^{\#}\ 18^{s}\ 6^{d}$; et l'*on demande le prix de la toise*.

Si ce prix était connu, en le multipliant par $75^{T}\ 4^{pi}\ 7^{po}$, on devrait reproduire $639^{\#}\ 18^{s}\ 6^{d}$; donc (nº **27**), il faut diviser $639^{\#}\ 18^{s}\ 6^{d}$ par $75^{T}\ 4^{pi}\ 7^{po}$.

$75^{T}\ 4^{pi}\ 7^{po}$ converti en un nombre fractionnaire de l'unité principale (nº **144**), devient $\frac{5455}{72}$.

Multipliant $639^{\#}\ 18^{s}\ 6^{d}$ par 72, à l'aide des *parties aliquotes* (nº **149**), on obtient $46074^{\#}\ 12^{s}$, qui, divisé par 5455, conduit au résultat final

$$8^{\#}\ 8^{s}\ 11^{d} \times \frac{619}{5455}.$$

Ainsi, la fraction étant négligée, on a $8^{\#}\ 8^{s}\ 11^{d}$ pour le prix de la toise.

154. Première remarque. — Concluons de là,

1°. Que, dans toute division à exécuter sur des nombres complexes, si les deux termes de la division sont de *même espèce*, le quotient est considéré d'abord comme un *nombre abstrait*, auquel on fait exprimer ensuite des *unités* et *subdivisions* de ces unités, fixées par l'énoncé de la question;

Ce quotient doit être le *multiplicateur* dans la vérification de l'opération par la multiplication.

2°. Que si, au contraire, les deux termes sont d'*espèce différente*, le quotient exprime nécessairement des unités de *même espèce* que le dividende, tandis que le diviseur, quoique complexe d'abord, doit être regardé comme un *nombre abstrait* qui joue le rôle de multiplicateur dans la preuve de l'opération.

155. Seconde remarque. — Jusqu'ici, nous n'avons indiqué d'autre moyen de vérifier une multiplication que par la division, ou réciproquement (nous ne parlons pas de la *preuve par* 9, qui ne peut s'appliquer qu'à des nombres entiers). Mais, dans la pratique des opérations sur les nombres complexes, il est généralement plus commode, 1° pour *la multiplication*, de *doubler* l'un des deux facteurs, et de prendre *la moitié* de l'autre, puis d'*opérer* de nouveau sur les nombres résultants; 2° pour *la division*, de *doubler* les deux termes de la division. On évite par là l'embarras que causent les fractions ordinaires qui accompagnent ordinairement les résultats auxquels on est parvenu.

Il est évident que ce moyen de vérification peut aussi être employé pour les opérations sur les nombres entiers. Mais nous ne pouvions en faire mention dans le premier chapitre, parce qu'il repose sur des principes que nous n'avions pas encore établis.

Exercices.

I. Trouver un nombre dont la *moitié*, le *quart*, les $\frac{2}{5}$ et les $\frac{3}{4}$ réunis, forment une *somme* qui, diminuée de 139, donne 1289 pour *différence*.

II. Un bassin peut se remplir par *quatre* orifices différents. Si le *premier* seul était ouvert, le bassin serait plein au bout de 5 heures; par le *second* orifice, il faudrait 7 heures; par le *troisième*, 9 heures; enfin, par le *quatrième*, 11 heures:

On demande en combien de temps le bassin sera rempli, les quatre orifices étant ouverts à la fois.

III. La population de l'Asie est supposée de 390 257 000 habitants; trouver celles de l'Europe, de l'Afrique et de l'Amérique, sachant que la population de l'Europe est les $\frac{7}{13}$ de la population de l'Asie, celle d'Afrique les $\frac{3}{11}$ des $\frac{7}{13}$ de cette même population, et celle de l'Amérique, le 11^e seulement.

IV. La mer recouvre les $\frac{11}{14}$ de la surface totale du globe. La surface de l'Asie est égale aux $\frac{121}{27}$ de celle de l'Europe; celle de l'Afrique en est les $\frac{22}{7}$, celle de l'Amérique les $\frac{111}{29}$; et celle de l'Océanie les $\frac{31}{17}$; on sait d'ailleurs que l'Afrique a une superficie de 2 970 000 000 *hectares*.

Calculer celles des autres parties du monde, et en déduire la surface totale du globe.

V. Démontrer que la somme de deux *fractions irréductibles* de dénominateurs *différents*, ne saurait être un nombre *entier*.

VI. Démontrer qu'en ajoutant *un même* nombre aux deux termes d'un nombre fractionnaire, on obtient un résultat d'*autant plus* rapproché de l'unité, soit en *moins*, soit en *plus*, que le nombre ajouté est *plus grand*. Faire voir que la différence entre le résultat et l'unité peut devenir *moindre qu'aucune grandeur donnée*.

VII. Rechercher le procédé pour obtenir le *plus grand commun diviseur* de *deux* ou de *plus de deux* fractions.

Application aux fractions $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{19}{24}$.

VIII. Rechercher le procédé pour obtenir le *plus petit multiple* de plusieurs fractions.

Application aux fractions $\frac{5}{12}$, $\frac{11}{18}$, $\frac{19}{60}$.

IX. Quel est le *plus grand multiple* des fractions $\frac{28}{57}$, $\frac{4}{21}$ et $\frac{48}{19}$, *inférieur à* 100000?

X. Multiplier $11^{\#}\,11^{s}\,11^{d}$ par $11^{\#}\,11^{s}\,11^{d}$, — 1° dans le cas où le produit doit exprimer des unités *de même espèce* que les deux facteurs; — 2° dans le cas où l'on veut faire exprimer au produit des *toises, pieds, pouces, etc*.

XI. Quel sera le prix d'une pièce d'étoffe de 23 *aunes* $\frac{7}{24}$, si l'aune (de 44 *pouces*) coûte $35^{\#}\,19^{s}\,6^{d}$?

XII. On a acheté 87℔ $1^{m}\,7^{o}\,5^{gros}$ d'une certaine marchandise pour la somme de $745^{\#}\,11^{s}\,9^{d}$; quel est le prix de la livre-poids?

CHAPITRE QUATRIÈME.

§ I^er^. *Des fractions décimales et de leurs principales propriétés.* — § II. *Système légal des poids et mesures ; sa comparaison avec l'ancien système.*

§ I^er^. — DES FRACTIONS DÉCIMALES.

136. Introduction. — Dans le système ordinaire de numération, la manière la plus simple et la plus commode de subdiviser l'unité, est la subdivision *en parties successives de dix en dix fois plus petites.* Il en résulte des *fractions qui ont pour dénominateur l'unité suivie d'un ou de plusieurs zéros,* et que l'on nomme des *fractions décimales.*

Ce mode de subdivision de l'unité offre de grands avantages, en ce qu'il ramène immédiatement, ou du moins à l'aide de transformations extrêmement faciles, les opérations sur les nombres *fractionnaires,* à de simples opérations sur les nombres *entiers.* C'est ce que nous développerons, après avoir fait connaître la numération des *fractions décimales,* c'est-à-dire leur nomenclature et la manière de les écrire en chiffres.

137. *Numération des décimales.* — De même qu'en *décuplant* successivement l'unité, on forme de nouvelles unités auxquelles on a donné le nom de *dizaines, centaines, mille, dizaines de mille, etc.* ; de même aussi, l'on a conçu l'unité *divisée* en 10 parties égales que l'on a appelées *dixièmes,* chaque dixième divisé en 10 parties que l'on a appelées *centièmes* (parce que l'unité principale contient 10 fois 10, ou 100 de ces nouvelles parties), ensuite chaque centième divisé en 10 parties appelées *millièmes,* chaque millième en 10 parties nommées *dix-millièmes,* et ainsi de suite ; ce qui a donné des *cent-millièmes, millionièmes, dix-millionièmes, etc.*

En second lieu il résulte (n° 5) du principe fondamental de la numération écrite des nombres entiers, que les chiffres, en remontant de droite à gauche, ont des *valeurs relatives* de dix en dix fois plus grandes, ou bien, en descendant de gauche à droite, ont des valeurs de dix en dix fois plus petites.

D'où il suit que si, à la droite d'un nombre entier déjà écrit en chiffres, on place de nouveaux chiffres, en ayant soin toutefois de distinguer par un signe quelconque, une *virgule* par exemple, ces nouveaux chiffres, du nombre entier, on aura, par cela même, représenté des parties successives de l'unité de dix en dix fois plus petites, c'est-à-dire des *dixièmes*, des *centièmes*, des *millièmes*, *etc*.

Ainsi, l'ensemble des chiffres 24, 75 exprimera 24 *unités*, 7 *dixièmes*, et 5 *centièmes*; 5,478 exprimera 5 *unités*, 4 *dixièmes*, 7 *centièmes* et 8 *millièmes*.

158. Soit proposé d'*énoncer en langage ordinaire le nombre écrit en chiffres*, 56,3506.

Ce nombre peut d'abord s'énoncer ainsi :

56 *unités*, 3 *dixièmes*, 5 *centièmes*, 0 *millièmes*, *et* 6 *dix-millièmes*.

Mais observons que 3 *dixièmes* valent 30 *centièmes*, ou 300 *millièmes*, ou 3000 *dix-millièmes*; de même, 5 *centièmes* valent 50 *millièmes*, ou 500 dix-millièmes.

Le nombre total devient donc à 56 *unités* 3506 *dix-millièmes*.

Ainsi, pour énoncer en langage ordinaire un nombre fractionnaire décimal écrit en chiffres, *il faut énoncer séparément la partie entière*, ou la partie à gauche de la virgule, *énoncer ensuite la partie qui est à la droite*, *comme si elle exprimait un nombre entier*, *et placer à la fin de l'énoncé*, *le nom de l'unité de la dernière subdivision décimale*.

D'après cela, 7,49305 représente 7 *unités*, plus 49305 *cent-millièmes*.

De même, 249,007056 représente 249 *unités*, plus 7056 *millioniêmes*.

On peut encore, si l'on veut, comprendre dans un seul énoncé la partie entière et la partie décimale.

En effet, reprenons pour exemple le nombre 56,3506.

Comme une unité vaut 10 dixièmes, ou 100 centièmes, 1000 millièmes, 10000 dix-millièmes, il s'ensuit que 56 unités équivalent à 560000 *dix-millièmes*;

Et, par conséquent, 56,3506 représente 563506 *dix-millièmes*;

De même, 7 unités valant 700000 *cent-millièmes*, le nombre 7,49305 revient à 749305 *cent-millièmes*.

C'est-à-dire qu'il faut, *après avoir énoncé le nombre comme s'il n'y avait pas de virgule*, *placer à la fin de l'énoncé le nom de la dernière subdivision*.

Mais il est d'usage d'énoncer séparément la *partie entière* (*).

159. Réciproquement, on propose d'*écrire en chiffres une fraction décimale énoncée en langage ordinaire*.

Soit à écrire *en chiffres* le nombre :

Vingt-neuf unités, *trois cent cinquante-quatre* millièmes.

(*) Nous indiquerons, pour énoncer la partie décimale, un moyen qui est, en général, plus commode dans la pratique. Après avoir énoncé la partie entière comme il vient d'être dit, *séparez* mentalement *la partie décimale en tranches de trois chiffres à partir de la virgule* (la dernière tranche pouvant n'avoir que *un* ou *deux* chiffres), *énoncez ensuite chaque tranche séparément, et placez à la fin*

Écrivez d'abord la *partie entière* 29; ensuite, comme 300 millièmes reviennent à 3 *dixièmes*, et que 50 millièmes forment 5 *centièmes*, *placez une virgule* à la droite de 29, et *écrivez* ensuite successivement les chiffres 3, 5 et 4; il viendra

29,354

pour le nombre proposé.

Pareillement, *cent neuf* unités *deux mille trois* dix-millièmes s'écriront

109,2003.

Soit encore à écrire le nombre *huit* unités *trente-sept* millièmes.

Comme trente millièmes font 3 centièmes, et qu'il n'y a pas de *dixièmes* dans l'énoncé, on écrit 8,037 : c'est-à-dire que l'on met à la droite de la virgule, un *zéro* pour tenir lieu des *dixièmes* qui manquent, et donner ainsi aux chiffres qui suivent leur véritable valeur.

Règle générale. — Pour écrire en chiffres un nombre décimal énoncé en langue ordinaire, *commencez par écrire la partie entière, et faites-la suivre d'une virgule*; puis *écrivez successivement, à la droite de cette virgule, les chiffres qui représentent les dixièmes, centièmes, etc., que renferme l'énoncé, en ayant soin de remplacer par des zéros les différents ordres qui peuvent manquer.*

S'il n'y a pas de *partie entière, écrivez un* 0 pour en tenir lieu, et *opérez ensuite comme il vient d'être dit.*

Ainsi, dix-sept *centièmes* se représentent par 0,17;

Cent vingt-cinq *dix-millièmes*, par 0,0125;

Douze mille deux cent quatre *millionièmes*, par 0,012204.

Enfin, dans l'énoncé du nombre, la *partie entière* peut ne pas être distinguée de la *partie décimale*.

Il faut alors *écrire le nombre comme s'il exprimait des* unités entières, et ensuite *placer une virgule, de manière que le dernier chiffre à droite exprime des* unités de la dernière subdivision que comporte l'énoncé.

Par exemple, pour écrire le nombre quatre mille deux cent quatorze *centièmes*, écrivez d'abord 4214;

Et comme le dernier chiffre doit exprimer des *centièmes*, placez la virgule entre 2 et 1, ce qui donne 42,14.

De même, deux cent cinquante-trois mille vingt-neuf *dix-millièmes* se représentera par 25,3029.

---

de chaque énoncé partiel le nom de l'unité qu'exprime le dernier chiffre de cette tranche.

Exemples. Le nombre 2,74986329 s'énonce : 2 *unités* 749 *millièmes* 863 *millionièmes* 29 *cent-millionièmes*.

De même, 14,0230000764 s'énonce : 14 *unités* 230 *millièmes millionième* 76 *billionièmes* 4 *dix-billionièmes*.

On comprend tout l'avantage que présente cette manière d'écrire les fractions décimales.

160. *Fractions décimales mises sous forme de fractions ordinaires.* — Une fraction se composant de deux nombres, le *numérateur* et le *dénominateur*, la place de la virgule suffit, dans le mode que nous venons de développer, pour indiquer le dénominateur, qui est égal à *l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres décimaux*, c'est-à-dire de chiffres à la droite de la virgule.

Quant au numérateur, il se compose de *l'ensemble des chiffres qui sont à la droite de la virgule.*

Ou bien, si l'on considère l'entier comme réduit en fraction, c'est *le nombre proposé, abstraction faite de la virgule.*

Ainsi le nombre 23,5037 mis sous la forme d'une fraction ordinaire, revient à $23\,\frac{5037}{10000}$, ou $\frac{235037}{10000}$.

Le nombre 2,00409 est égal à $2\,\frac{409}{100000}$ ou $\frac{200409}{100000}$.

Enfin, 0,0002154 équivaut à $\frac{2154}{10000000}$.

Réciproquement, $2\,\frac{53}{1000}$ ou $\frac{2053}{1000}$ se changent en 2,053; $\frac{172049}{10000}$ en 17,2049.....

Ces deux transformations sont d'un usage continuel dans le calcul.

161. *Déplacement de la virgule.* — Si, dans une fraction décimale, on *avance* la virgule d'*un* ou de *plusieurs* rangs vers la droite, on *multiplie* le nombre par 10, 100, 1000, etc.; et si, au contraire, on la *recule* d'*un* ou de *plusieurs* rangs vers la gauche, on *divise* le nombre par 10, 100, 1000, etc.

Soit, en effet, le *nombre* 153,07295.

Supposons que l'on *avance* la virgule de trois rangs vers la droite, ce qui donne 153072,95;

les deux nombres reviennent à $\frac{15307295}{100000}$, $\frac{15307295}{100}$.

Or le dénominateur du second nombre est 1000 fois *plus petit* que celui du premier, tandis que le numérateur est le même.

Donc (n° **111**) la seconde fraction est 1000 fois *plus grande* que la première.

Au contraire, si l'on *recule* la virgule de deux rangs vers la gauche, il vient 1,5307295 ou $\frac{15307295}{10000000}$, fraction dont le dénominateur est 100 fois *plus grand* que celui de la fraction proposée.

Donc la nouvelle fraction est 100 fois *plus petite* que celle-ci.

On peut encore raisonner ainsi :

Par le déplacement de la virgule, *la valeur relative* de chaque chiffre devient 10, 100, 1000, etc., fois *plus grande* ou *plus petite*.

Ainsi, en comparant 153072,95 à 153,07295, on voit que le chiffre 3, qui exprimait dans celui-ci des *unités simples*, exprime maintenant des *mille*; le chiffre 5 à la gauche du chiffre 3, qui exprimait des *dizaines*, représente maintenant des *dizaines de mille*; et de même pour les autres chiffres.

162. Zéros placés a la droite d'une fraction décimale. —*En écrivant un nombre quelconque de zéros à la droite d'une fraction décimale, on n'en change pas la valeur.*

Ainsi, 3,415 équivaut à 3,4150, ou 3,41500, ou 3,415000... ; en effet, ces nombres peuvent (n° **160**) se mettre sous la forme

$$\frac{3415}{1000}, \quad \frac{34150}{10000}, \quad \frac{341500}{100000}.$$

Or les deux dernières fractions ne sont autre chose que la première dont on a multiplié les deux termes par 10, 100, ce qui n'en change pas la valeur (n° **112**).

Donc, etc.

Ou bien, on peut observer que les zéros placés à la droite des chiffres déjà écrits, n'en changent pas la *valeur relative;* et, comme ces zéros n'ont aucune valeur par eux-mêmes, la fraction reste toujours la même.

163. Réduction de plusieurs fractions décimales au même dénominateur. — Le principe qui vient d'être établi donne le moyen de ramener plusieurs fractions décimales à avoir *le même nombre de chiffres décimaux*, sans qu'elles changent de valeur, ou, en d'autres termes, à avoir *le même dénominateur*.

(Nous emploierons souvent, pour abréger, cette dernière locution.)

Par exemple, les fractions

$$12,407 \mid 0,25 \mid 7,0456 \mid 23,4,$$

reviennent à

$$12,4070 \mid 0,2500 \mid 7,0456 \mid 23,4000.$$

Elles ont 10000 pour *dénominateur commun*.

Ces préliminaires posés, nous passons aux quatre opérations fondamentales sur les fractions décimales.

ADDITION ET SOUSTRACTION.

167. On effectue l'*addition* des fractions décimales *de la même manière que celle des nombres entiers*, après les avoir toutefois *réduites au même dénominateur*, et *l'on sépare par une virgule, au résultat, autant de chiffres décimaux qu'il y en avait dans celui des nombres qui en renfermait le plus.*

Un exemple suffira pour faire comprendre cette règle.

On propose d'*ajouter les nombres*

32,4056 | 245,379 | 12,0476 | 9,38 | *et* 459,2375.

$$\begin{array}{r} 32,4056 \\ 245,3790 \\ 12,0476 \\ 9,3800 \\ 459,2375 \\ \hline 758,4497 \\ \hline 121,2210 \end{array} \textit{ preuve.}$$

On écrit d'abord *un* 0 à la droite du second nombre, et *deux* à la droite du quatrième; puis on place les nombres *ainsi préparés*, les uns au-dessous des autres, de manière que les *unités d'un même ordre* se correspondent, et l'on fait l'addition comme à l'ordinaire.

On trouve pour résultat

7584497

ou, séparant 4 chiffres décimaux vers la droite,

758,4497,

parce que les nombres ajoutés expriment des unités de l'ordre des *dix-millièmes*.

Dans la pratique, on peut se dispenser d'écrire des zéros à la droite des nombres qui ont le moins de chiffres décimaux, pourvu qu'on ait le soin de *disposer les unités d'un même ordre dans une même colonne*.

La *soustraction* s'effectue aussi de la même manière que pour les nombres entiers, *après que l'on a réduit les fractions décimales au même dénominateur* (n° 163).

Par exemple, soit à *soustraire* 23,0784 *de* 62,09.

$$\begin{array}{r} 62,0900 \\ 23,0784 \\ \hline 39,0116 \\ \hline 62,0900 \end{array} \textit{ preuve.}$$

On écrit deux zéros à la droite de 62,09, ce qui donne 62,0900; puis on effectue la soustraction comme à l'ordinaire, en ayant soin seulement de séparer 4 chiffres décimaux vers la droite du résultat.

Ces procédés sont, évidemment, fondés sur ce que les unités de différents ordres, dans les fractions décimales, ayant les mêmes relations de grandeur, les unes à l'égard des autres, que dans les nombres entiers, il doit en être pour les retenues auxquelles on est conduit, comme s'il s'agissait d'opérer sur des nombres entiers.

MULTIPLICATION.

165. Pour effectuer cette opération, *multipliez les deux nombres proposés l'un par l'autre, sans tenir compte de la virgule qui s'y trouve;* et *séparez, par une virgule, vers la droite du produit ainsi obtenu, autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les deux facteurs.*

Soit, par exemple, à *multiplier* 35,407 *par* 12,54.

On trouve d'abord pour le produit des deux nombres, *abstraction faite* de la virgule,

$$44400378.$$

Séparant ensuite, sur la droite de ce nombre, 3 *plus* 2 ou 5 chiffres, on obtient, pour le produit demandé,

$$444,00378.$$

Pour se rendre compte de cette manière d'opérer, il suffit de remarquer que les deux nombres proposés reviennent à

$$\frac{35407}{1000} \quad \text{et} \quad \frac{1254}{100} \quad (\text{n}^\circ\ \mathbf{160});$$

d'où l'on déduit pour leur produit, d'après la règle du n° **129**,

$$\frac{35407 \times 1254}{1000 \times 100};$$

c'est-à-dire qu'il faut : 1° *multiplier* les deux nombres en faisant abstraction de la virgule; 2° *diviser* le produit ainsi obtenu par 100000 ou l'unité suivie d'*autant de zéros* qu'il y a de chiffres décimaux dans les deux facteurs, ce qui revient à séparer *cinq* chiffres vers la droite du produit.

Le procédé se trouve ainsi justifié.

Autrement : en ôtant la virgule dans le multiplicande, on le multiplie par 1000, puisqu'il exprimait d'abord des *millièmes*, et qu'il exprime maintenant des *unités principales;* donc (n° **57**) le produit est par là rendu 1000 fois trop grand ; de même, en ôtant la virgule dans le multiplicateur, on le rend 100 fois plus grand ; et par conséquent le produit est de nouveau rendu 100 fois trop grand. Ainsi, par la *suppression* des *deux* virgules, il est rendu 100000 fois *trop grand;* donc, pour le ramener à sa juste valeur, il faut le *diviser* par 100000, ou séparer cinq chiffres décimaux vers la droite.

Le raisonnement serait évidemment le même, quel que fût le nombre de chiffres décimaux dans les deux facteurs.

Il peut arriver que l'un des deux nombres seulement renferme des décimales. Dans ce cas, *on sépare vers la droite du produit, autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans ce nombre.* La démonstration est trop facile pour que nous nous y arrêtions.

On trouvera, d'après ces règles, que

1°. *Le produit de* 4,0567 *par* 9,503 *est* 38,5508201;

2°. *Le produit de* 4,0015 *par* 29 *est* 116,0435;

3°. *Le produit de* 0,03054 *par* 0,023 *est* 0,00070242.

N. B. — Ce dernier exemple mérite quelque attention.

En faisant abstraction de la virgule dans les deux facteurs et effectuant la multiplication, on trouve pour produit, 70242; mais comme il y a *cinq* décimales dans le multiplicande, et *trois* dans le multiplicateur, il en faut *huit* au produit qui cependant ne renferme que *cinq* chiffres.

Pour lever la difficulté, on observe que, le produit devant exprimer des unités du 8ᵉ ordre décimal, il suffit d'écrire, *à la gauche* de 70242, des zéros en nombre tel, que, si l'on place ensuite la virgule, le dernier chiffre à droite occupe le 8ᵉ rang décimal. Ici l'on doit en écrire *quatre*, en comptant celui qui doit tenir la place des entiers; et l'on trouve 0,00070242.

DIVISION.

Évaluation du quotient en fraction décimale.

166. Il peut se présenter deux *cas principaux :*

Ou le dividende et le diviseur ont *le même nombre* de chiffres *décimaux;* ou ce nombre est *différent.*

Dans le premier cas, *supprimez la virgule au dividende et au diviseur;* puis, *opérez sur les nombres entiers qui en résultent, comme à l'ordinaire.*

Dans le second, *commencez par ramener les deux nombres proposés à avoir le même nombre de chiffres décimaux* (n° **163**); et vous faites ainsi rentrer le second cas dans le premier.

Premier cas. — Soit *à diviser* 47,359 *par* 8,234.

Ces deux nombres peuvent (n° **160**) être mis sous la forme

$$\frac{47359}{1000},\quad \frac{8234}{1000};$$

d'où, en les divisant l'un par l'autre, d'après la règle de la division des fractions (n° **131**), on a

$$\frac{47359}{1000}\times\frac{1000}{8234}=\frac{47359\times 1000}{8234\times 1000}=\frac{47359}{8234},$$

suppression faite du facteur 1000, *commun* aux deux termes.

On voit donc que le quotient demandé est égal à celui des deux nombres proposés, *abstraction faite de la virgule;* ce qui justifie la règle établie plus haut.

On peut dire encore : les deux fractions décimales ayant *le même dénominateur* (n° **163**), si l'on supprime la virgule, on *multiplie* les deux termes de la division par *un même* nombre 1000; donc (nº **61**) la valeur du quotient est *la même*, soit *après*, soit *avant* la suppression de la virgule.

La division de 47359 par 8234 donne pour *partie entière* du quotient, 5, et pour *reste*, 6189; ainsi le *quotient total* est

$$5\,\frac{6189}{8234}.$$

167. *Évaluation du quotient en décimales.* — La fraction ordinaire qui accompagne la *partie entière* du quotient, ayant des termes assez grands, est difficile à *évaluer* dans son état actuel; il est, d'ailleurs, naturel de chercher à l'exprimer en parties *de même espèce* que les nombres donnés. Or, c'est à quoi l'on parvient au moyen de la *règle* du nº **136** :

```
47359    | 8234
 61890   | 5,7516395...
   42520
    13500
     52660
      32560
       78580
        44740
         3570
         ....
```

Après avoir extrait la *partie entière*, 5, du quotient, pour faire exprimer au reste, 6189, des *dixièmes*, on *multiplie* (nº **136**) ce reste par 10, ce qui se fait en plaçant un 0 à sa droite; puis on *divise* 61890 par 8234; le quotient 7 exprime alors des *dixièmes*, et s'écrit à la droite du chiffre 5 suivi d'une virgule.

A la droite du nouveau reste, 4252, on place un 0, pour le convertir en *centièmes*, puis on *divise* 42520 par 8, ce qui donne le quotient 5 que l'on place à la droite de 7, et le reste 1350 que l'on fait suivre également d'un 0; et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ait obtenu le *nombre de décimales* que peut exiger l'énoncé de la question qui a donné lieu à la division proposée.

Règle générale. — Pour exprimer en *décimales* le quotient de la division de deux *nombres décimaux de même dénominateur*, ou, ce qui revient au même après la suppression de la virgule, de *deux nombres entiers quelconques :*

Commencez par déterminer la partie entière du quotient (laquelle peut être 0), *et faites-la suivre d'une virgule;*

Placez un 0 *à la droite du reste*, et *divisez le nombre ainsi formé par le diviseur;* puis, *écrivez le nouveau quotient à côté de la virgule;*

Placez un 0 *à la droite du nouveau reste*, et *effectuez la division par le même diviseur;* puis, *écrivez le quotient à la droite des deux premiers;*

Continuez ainsi jusqu'à ce que vous ayez obtenu le nombre de décimales demandé.

168. *Remarque sur les approximations.* — Dans l'exemple précédent, nous avons poussé l'opération jusqu'au *septième* chiffre décimal inclusivement, afin de fixer les idées sur les *divers degrés* d'approximation qu'on peut obtenir par le développement d'un nombre en *décimales.*

En ne prenant d'abord que les *deux* premiers chiffres décimaux, on a 5,75 pour la valeur du quotient, *à moins de* 0,01 *près*, puisque la partie négligée est évidemment *moindre que* l'unité de cet ordre décimal.

Il y a plus : comme cette partie négligée est *inférieure à* 0,002 ou $\frac{2}{1000}$, ou $\frac{1}{500}$, il s'ensuit que 5,75 exprime la valeur du quotient à moins de $\frac{1}{500}$ près.

Maintenant, si l'on prend les *trois premiers* chiffres décimaux, on a 5,751 pour la valeur du quotient *à moins de* 0,001 *près*, puisque la partie que l'on néglige, 0,00063..., est inférieure à 0,001.

Mais ici, nous avons à faire une observation importante :

Comme le chiffre 6 surpasse 5, il s'ensuit que 0,0006 surpasse 0,0005 ou *une demi-unité* de l'ordre des *millièmes;* donc, en prenant 5,752 au lieu de 5,751, pour la valeur du quotient, on commet une erreur, *en plus* à la vérité, mais *plus petite que* celle qui est commise quand on prend 5,751 pour la valeur de ce quotient; et l'on peut dire que 5,752 exprime le quotient, non-seulement *à moins de* 0,001 *près*, mais *à moins de* $\frac{1}{2}$ 0,001 *près.*

Généralement, toutes les fois que le chiffre qui suit celui auquel on veut s'arrêter est *moindre* que 5, il faut prendre les chiffres décimaux, *tels qu'ils ont été obtenus;* et l'on a alors la valeur du quotient, *à moins d'une demi-unité* de l'ordre auquel on s'est arrêté.

Si, au contraire, le chiffre qui suit est *égal* ou *supérieur* à 5, il convient d'*augmenter* ou de *forcer d'une unité* le dernier chiffre obtenu, afin d'avoir une valeur *plus approchée* du quotient; l'erreur *commise* est en *plus*, mais elle est *moindre qu'une demi-unité* de l'ordre auquel on a arrêté l'opération.

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, on a successivement pour le quotient de la division proposée :

5,752 *en plus*, à moins de *un demi-millième* près,
5,7516 *en moins*, à moins de *un demi-dix-millième*,
5,75164 *en plus*, à moins de *un demi-cent-millième*,
5,751640 *en plus*, à moins de *un demi-millionième*.

Nous ajouterons, pour terminer, que, lorsqu'on s'est arrêté à un chiffre décimal quelconque, dans l'opération exécutée, le dernier reste obtenu fait connaître si le chiffre suivant du quotient doit être *inférieur*, *égal* ou *supérieur* à 5, sans qu'il soit, pour cela, nécessaire de calculer ce chiffre.

Si le reste est *moindre* que la *moitié* du diviseur, qui est *constant*, on est certain que le chiffre suivant doit être *moindre* que 5.

Si ce reste est *égal* ou *supérieur* à la moitié du diviseur, le chiffre suivant doit être *égal* ou *supérieur* à 5.

Ainsi, dans l'exemple que nous avons traité, le huitième chiffre décimal doit être *moindre* que 5, car le reste auquel on s'est arrêté, 3570, est évidemment *moindre* que la moitié du diviseur 8234.

Cette remarque résume toute la théorie des approximations dans l'*évaluation en décimales* des nombres fractionnaires.

169. Second cas. — Celui-ci se subdivise en deux autres :

Premièrement. — Le dividende *renferme moins de chiffres décimaux* que le diviseur.

Alors, on écrit à la droite du dividende le nombre de zéros nécessaire pour qu'il y ait *le même nombre* de décimales dans les deux termes de la division ; et la question rentre ainsi, sans aucune modification, dans le premier cas.

Par exemple, soit 2,405 à *diviser par* 0,03497.

En plaçant *deux* zéros à la droite du dividende, ce qui donne 2,40500, puis, supprimant la virgule de part et d'autre, et effectuant la division des deux nombres résultants 240500 et 3497, d'après la règle du n° **166**, on trouve pour la valeur du quotient, à 0001 près, 68,7732.

Cette valeur est, *en moins*, approchée à $\frac{1}{2}$ 0,0001.

Deuxièmement. — Le dividende a *plus de chiffres décimaux* que le diviseur.

On peut alors employer *deux* procédés :

1°. Soit à *diviser* 3,470456 par 1,027.

Remarquons que, si l'on *supprime la virgule* dans le diviseur, ce qui le rend 1000 fois plus grand, et qu'on *avance*, dans le dividende, la virgule de *trois* rangs vers la droite, ce qui revient aussi (n° **161**) à le rendre 1000 fois plus grand, le quotient de la division des deux nombres résultants sera *le même* (n° **61**) que celui des nombres proposés.

La question est ainsi ramenée à diviser 3470,456 par 1027.

3470,456	1027
389 4	3,379217
81 35	
9 466	
2230	
1760	
7330	
141	

Après avoir trouvé la partie entière, 3, du quotient et le reste 389, au lieu de placer, comme au nº **167**, un 0 à la droite de ce reste, on abaisse le chiffre 4 qui exprime des *dizièmes*, et l'on effectue la division, ce qui donne pour quotient, 3, que l'on place à côté du premier, en les séparant par une virgule; puis, on abaisse à côté du reste 813, le chiffre 5 qui exprime des *centièmes*, et l'on continue ainsi jusqu'à ce que l'on ait abaissé tous les chiffres décimaux qui étaient restés dans le dividende.

Parvenu au reste 223, on place un zéro à côté de ce reste, et l'on opère ensuite comme dans le premier cas.

On voit que ce mode de procéder consiste à *supprimer la virgule* dans le diviseur, en ayant soin de l'*avancer*, dans le dividende, d'*autant de rangs vers la droite* qu'il y a de décimales au diviseur; puis à *opérer sur les nombres résultants*, comme dans le premier cas, avec cette seule différence, qu'au lieu de placer d'abord des zéros à la droite des différents restes, il faut *commencer par abaisser tous les chiffres décimaux* restant au dividende.

2°. Reprenons le même exemple, en commençant par écrire à la droite du diviseur 1,027, *trois* zéros, c'est-à-dire le *nombre* de zéros nécessaire pour qu'il y ait le *même nombre* de décimales dans les deux termes.

On a alors à *diviser* 3470456 *par* 1027000.

3470456	1027000
389456	3,379217
81356	
9466	
2230	
1760	
7330	
141	

Afin de déterminer la *partie entière* du quotient, on commence par appliquer la règle du n° **38** pour la division des nombres entiers, et relative au cas où le diviseur est terminé par des *zéros*.

On obtient ainsi le quotient 3 et le reste 389456.

Maintenant, pour trouver le chiffre des *dixièmes*, on remarque que, d'après le principe du n° **60**, au lieu de placer un o à la droite du reste, ce qui le *multiplierait* par 10, on peut *supprimer* le dernier o à droite du diviseur, ce qui *divise* celui-ci par 10.

On a ainsi le quotient 3 exprimant les *dixièmes* du quotient cherché, et le reste 81356.

De même, au lieu de placer un o à la droite de ce reste, on *supprime* un second o au diviseur, et l'on divise 81356 par 10270, en appliquant encore, si l'on veut, la règle, déjà mentionnée, du n° **38**.

On obtient le nouveau quotient 7 et le reste 9466.

Supprimant le dernier o à droite du diviseur, on est conduit à diviser 9466 par 1027; ce qui donne le quotient 9 et le reste 223.

A partir de ce reste, on suit la règle du n° **167** pour obtenir de nouveaux chiffres décimaux.

Ce second procédé est évidemment moins simple que le premier, et si nous en avons fait mention, c'est qu'il fournit l'occasion de montrer comment il convient d'*opérer lorsque l'on a des* ZÉROS *à placer à côté des restes d'une division dont le diviseur est terminé par* UN *ou* PLUSIEURS ZÉROS.

170. *Cas particuliers.* — Ce sont ceux où il n'y a de chiffres décimaux que *dans l'un des termes* de la division à effectuer.

Par exemple, on peut avoir 51,47876 à *diviser par* 849, ou bien 3145 à *diviser par* 23,479.

Dans le premier cas, on opère d'après le *premier* procédé indiqué au n° **169**, à l'article *deuxièmement*.

Dans le second, on *supprime* la virgule au diviseur, et l'on fait suivre le dividende d'*autant* de zéros qu'il y a de décimales au diviseur; ce qui revient à *multiplier* les deux termes par un *même nombre*. Ces cas sont trop simples pour exiger plus de développement.

PROPRIÉTÉS DES FRACTIONS DÉCIMALES PROVENANT DES FRACTIONS ORDINAIRES.

Conversion des fractions ordinaires en fractions décimales.

171. On a vu (n° **167**) comment on est amené à *convertir* une fraction ordinaire en fraction décimale; cette opération fait partie essentielle de la théorie de la *division des fractions décimales*.

Mais nous ferons ici une observation importante qui nous servira pour l'exposition des propriétés des fractions décimales, que nous avons à établir.

Cette observation consiste en ce qu'*au lieu de placer, au fur et à mesure, des zéros à la droite des différents restes que l'on obtient en appliquant la règle du* n° **167**, pour convertir en décimales un nombre fractionnaire, *on peut placer tout d'abord ces zéros à la droite du dividende,* et *effectuer la division du nombre résultant, par le diviseur,* en ayant le soin de *faire occuper à la virgule,* dans le quotient obtenu, *la place qui lui convient.*

Pour nous rendre compte de cette seconde manière d'opérer, proposons-nous de convertir en décimales la fraction $\frac{13}{47}$, et mettons en regard les deux modes d'opération :

130	47	13000000	47
360	0,276595	360	0,276595
310		310	
280		280	
450		450	
270		270	
35		35	

Dans le premier procédé, après avoir écrit un *zéro* au quotient pour tenir lieu de *la partie entière,* on fait suivre d'un *zéro* le *numérateur,* 13, de la fraction pour obtenir des *dixièmes,* puis on place encore un *zéro* à la droite du *reste* de la division pour avoir des *centièmes,* et l'on opère de même sur les *restes* suivants jusqu'à ce que l'on ait obtenu au quotient des *millionièmes,* par exemple, en sorte que le nombre total des *zéros* ainsi successivement abaissés est de *six.*

Dans le *second procédé* on multiplie d'abord le *numérateur* 13 par 1000000, c'est-à-dire par l'unité suivie de *six* zéros, et l'on effectue ensuite la division.

Il est évident que le quotient ainsi obtenu ne diffère de celui qu'a fourni le premier mode d'opérer qu'en ce qu'il est 1000000 fois *plus grand,* et qu'on le ramène *à sa vraie valeur* en le divisant par 1000000 ou en séparant, par une virgule, *six* chiffres décimaux vers la droite.

Fractions décimales d'un nombre limité ou illimité de chiffres décimaux ; fractions périodiques.

Nous allons maintenant établir les propriétés qui montrent que l'opération, dont nous venons de compléter le développement, peut conduire à des fractions d'un nombre *limité* ou *illimité* de chiffres décimaux, et que l'inspection seule du *dénominateur* de la fraction ordinaire à convertir en fraction décimale, suffit pour caractériser ces deux sortes de fractions.

172. Première propriété. — *Toute fraction ordinaire dont le dénominateur ne renferme que les facteurs premiers* 2 et 5 (facteurs de la base 10 du système décimal) *élevés respectivement à certaines puissances, donne lieu à une fraction décimale d'un nombre* limité *de chiffres décimaux.*

Soit, par exemple, la fraction $\frac{A}{2^4 . 5^6}$, dont le dénominateur contient les facteurs 2 et 5, l'un à la 4^e, l'autre à la 6^e puissance; A est d'ailleurs un nombre *entier* premier avec 2 et 5.

Je dis que cette fraction convertie en décimale doit conduire à une fraction d'un nombre *limité* et *égal* à 6, de chiffres décimaux, 6 étant *le plus grand* des deux exposants de 2 et de 5.

En effet, concevons que, pour opérer la conversion, on ait *commencé*, d'après la remarque du numéro précédent, par *multiplier* le numérateur A par 10^6 ou 1000000.

Comme 10^6 ou $2^6 \times 5^6$ est essentiellement divisible par $2^4 \times 5^6$, son *multiple* $A \times 1000000$ l'est aussi (n° 63); d'où il suit que le quotient de la division de ce produit par le *dénominateur* de la fraction proposée est un nombre *entier;* or, ce quotient n'est évidemment autre que le résultat de la conversion de cette fraction en fraction décimale, *multiplié* par 1000000; il faut donc diviser par 1000000 ou séparer *six* chiffres décimaux vers la droite, pour obtenir ce résultat.

Ainsi la *conversion de la fraction ordinaire en fraction décimale* donne lieu à un nombre *limité* de décimales et égal à 6.

Le même raisonnement s'appliquerait évidemment à tout autre produit des puissances de 2 et de 5 que renfermerait le *dénominateur* à l'exclusion de tout autre *facteur premier.*

Donc, etc.

C'est ainsi que les fractions

$$\frac{7}{8},\ \frac{13}{25},\ \frac{11}{40},\ \frac{317}{1250},$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{7}{2^3},\ \frac{13}{5^2},\ \frac{11}{2^3 \times 5},\ \frac{317}{2 \times 5^4},$$

étant converties en décimales, produisent les résultats :

$$0,875 \mid 0,52 \mid 0,275 \mid 0,2536.$$

La première et la troisième donnent lieu à 3 opérations, la seconde à 2, et la quatrième à 4.

Soit encore à *diviser* 71,34 *par* 0,00375; on a, d'après la règle générale de la division des fractions décimales, à diviser 7134000 par 375.

Or $\frac{7134000}{375}$ revient à $\frac{2378000}{125}$, par la suppression du facteur 3 commun aux deux termes.

Mais 1000 est divisible par 125, ou 5^3, et donne pour quotient 8; donc le quotient de 2378000 par 125 doit être *entier* et égal à 2378×8, ou 19024.

173. *Réciproquement*, on pourrait se proposer de *remonter d'une fraction d'un nombre* LIMITÉ *de chiffres décimaux, à la fraction ordinaire qui lui a donné naissance.*

Le moyen de résoudre cette question consiste évidemment : 1° à *former une fraction* dont le *numérateur soit le nombre décimal donné* et *qui ait pour dénominateur, l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de décimales* dans ce nombre; 2° à *réduire la fraction à sa plus simple expression.*

Par exemple, soit le nombre 3,475.

Il revient à $\frac{3475}{1000}$ (nº **160**); supprimant dans les deux termes de ce nombre le facteur commun 25 (nº **68**), on obtient $\frac{139}{40}$ pour la fraction demandée.

En traitant de même les fractions décimales du numéro précédent, on arriverait à des résultats analogues.

174. SECONDE PROPRIÉTÉ. — *Toute fraction ordinaire dont le dénominateur renferme* UN *ou* PLUSIEURS *facteurs premiers différents de 2 et de 5, qui n'entrent pas en même temps dans le numérateur, donne lieu à une fraction décimale d'un nombre de chiffres décimaux* ILLIMITÉ *ou* INFINI.

De plus, *cette fraction décimale* est PÉRIODIQUE, c'est-à-dire qu'*après un certain nombre d'opérations, les mêmes chiffres se reproduisent constamment et dans le même ordre.*

En effet, d'après l'observation qui a fait l'objet du nº **171**, il faudrait, pour que le nombre des chiffres décimaux fût *limité*, que le dénominateur de la fraction proposée pût diviser le numérateur suivi d'un nombre *limité* de zéros. Or, la multiplication du numérateur par 10, 100, 1000, etc., ne fait qu'introduire les *facteurs premiers* 2 et 5, chacun à une certaine puissance; ainsi, les *facteurs premiers* que l'on suppose exister dans le dénominateur, sans entrer dans le numérateur, ne se trouveront pas davantage (nº **93**) dans le produit du numérateur par une puissance quelconque de 10. Donc, quelque nombre de zéros que l'on place à la droite du numérateur, on ne pourra obtenir un produit *exactement divisible* par le dénominateur; et, par conséquent, les opérations se continueront à l'INFINI.

Je dis, en outre, que la fraction sera *périodique.*

En effet, comme chaque reste que l'on obtient en appliquant le procédé de la conversion en décimales, est toujours *moindre* que le diviseur, il est évident que, lorsqu'on aura fait *tout au plus* AUTANT d'opérations qu'il y a d'unités dans le DIVISEUR MOINS UN, on devra retomber sur l'un des restes déjà obtenus. Or, en écrivant un o à la droite de ce reste, on aura un *nouveau dividende partiel* qui sera *le même* que celui correspondant au *reste retrouvé* ; et, puisque le diviseur est *constant*, le nouveau quotient et le nouveau reste seront aussi *les mêmes* que ceux qu'avait donnés la division du *premier dividende retrouvé*, par le diviseur. Écrivant à la droite de ce reste un nouveau o, on reproduira le *dividende partiel* et le *quotient* qui suivent *immédiatement* ceux que l'on avait d'abord retrouvés ; et ainsi de suite.

D'où il suit que certains chiffres du quotient doivent se reproduire *périodiquement* et *dans le même ordre*.

Donc, etc.

Soient, pour exemples, les fractions

$$\frac{5}{7},\quad \frac{19}{37},\quad \frac{23}{148},\quad \frac{428}{315};$$

$$\begin{array}{l|l}
50 & 7 \\ \hline
10 & 0{,}714285 \mid 714285\ldots \\
\;30 & \\
\;\;20 & \\
\;\;\;60 & \\
\;\;\;\;40 & \\
\;\;\;\;\;5 & \\
\;\;\;\;\;\vdots &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
190 & 37 \\ \hline
50 & 0{,}513 \mid 513\ldots \\
130 & \\
19 & \\
\vdots &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
230 & 148 \\ \hline
820 & 0{,}15 \mid 540 \mid 540 \mid \ldots \\
\;800 & \\
\;\;600 & \\
\;\;800 & \\
\;\;\;\vdots &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
428 & 315 \\
1130 & 1{,}3 \mid 587301\ldots \\ \hline
\;1850 & \\
\;\;2750 & \\
\;\;\;2300 & \\
\;\;\;\;950 & \\
\;\;\;\;\;500 & \\
\;\;\;\;\;185 & \\
\;\;\;\;\;\;\vdots &
\end{array}$$

Dans le premier exemple, où l'on a 7 pour diviseur, il a fallu exécuter 6, ou 7 — 1 opérations, avant de retrouver un des restes déjà obtenus.

Dans le deuxième exemple, c'est après trois opérations qu'on a reproduit un reste déjà obtenu, quoique, d'après le diviseur, on eût pu en avoir 36 à exécuter.

Dans le troisième exemple, il a suffi de cinq opérations pour que l'un des restes se reproduisît, et que la période se manifestât.

Enfin, dans le quatrième exemple, ce n'est qu'après la huitième opération que la période s'est manifestée.

Mais ce qu'il importe de remarquer, c'est que, pour les deux premiers exemples, la première période commence immédiatement après la virgule, tandis que, pour les deux autres exemples, elle ne commence qu'après le *second*, et après le *premier* chiffre décimal.

Cette période est 540 pour le troisième exemple, et 587301 pour le quatrième.

Fractions périodiques SIMPLES *et* MIXTES. — *Détermination de la fraction génératrice.*

175. La remarque qui termine le numéro précédent montre qu'il y a lieu de distinguer *deux* sortes de *fractions décimales périodiques*, savoir :

1°. Les *fractions périodiques* SIMPLES, celles dont la première *période* commence au *premier* chiffre décimal ;

2°. Les *fractions périodiques* MIXTES, celles dont la première *période* est *précédée* d'*un* ou de *plusieurs* chiffres décimaux.

Cette distinction nous conduirait à établir encore plusieurs propriétés plus ou moins curieuses; mais nous nous bornerons ici à développer celle qui doit nous fournir le moyen de remonter d'*une fraction décimale périodique* à la *fraction ordinaire* qui lui a donné naissance, dite *fraction génératrice*, opération analogue à celle que nous avons traitée au n° **173** pour une fraction d'un nombre LIMITÉ de chiffres décimaux.

Nous renvoyons au huitième chapitre le développement des autres propriétés.

176. TROISIÈME PROPRIÉTÉ. — *Toute fraction périodique* SIMPLE, *sans* PARTIE ENTIÈRE, *est équivalente à une fraction ordinaire, ayant pour numérateur l'une des périodes, et pour dénominateur un nombre formé par* AUTANT DE 9, *écrits à la droite les uns des autres, qu'il y a de chiffres dans la période.*

Soit, en effet, la fraction *périodique*.

$$0,513513513\ldots,$$

et désignons par N le nombre, quel qu'il soit, qui lui a donné naissance; on a

$$N = 0,513513513\ldots; \qquad (1)$$

multiplions les deux membres de cette égalité par 1000, ce qui se fait (n° **161**) pour le deuxième membre, en avançant la virgule de trois rangs vers la droite; il vient

$$N \times 1000 = 513{,}513513513\ldots,$$

ou

(2) $$N \times 1000 = 513 + 0{,}513513513\ldots;$$

d'où l'on déduit, en retranchant membre à membre l'égalité (1) de l'égalité (2),

$$N \times 999 = 513;$$

donc

$$N = \frac{513}{999}.$$ C. Q. F. D.

Soit encore la fraction périodique

(1) $$N = 0{,}714285714285\ldots;$$

multiplions les deux membres par 1000000, on a

(2) $$N \times 1000000 = 714285{,}714285\ldots;$$

d'où, retranchant la première égalité de la deuxième,

$$N \times 999999 = 714285;$$

donc

$$N = \frac{714285}{999999}.$$

En réduisant les fractions $\frac{513}{999}$ et $\frac{714285}{999999}$ à *leurs moindres termes*, soit immédiatement par la suppression de *certains facteurs communs*, tels que 9, qui sont en évidence, soit par le procédé du n° **123**, on retomberait, comme on peut s'en assurer, sur les fractions $\frac{19}{37}$ et $\frac{3}{7}$ des deux premiers exemples du n° **174**.

Ainsi se trouve développé le moyen *de remonter d'une fraction périodique* SIMPLE *sans* PARTIE ENTIÈRE *à la fraction génératrice*.

177. Lorsque la *fraction périodique* a une PARTIE ENTIÈRE, on détermine de la même manière, sauf emploi d'un artifice de calcul, la *fraction génératrice*.

Soit, par exemple, la fraction 8,26732673....

On a, d'après ce qui vient d'être dit,

$$8{,}26732673\ldots = 8 + \frac{2673}{9999}.$$

Pour réduire cette expression en un seul nombre fractionnaire, on remarque que

$$8 \times 9999 = 8 \times (10000 - 1) = 80000 - 8;$$

donc

$$8 + \frac{2673}{9999} = \frac{80000 - 8 + 2673}{9999} = \frac{82665}{9999},$$

et, par conséquent,

$$8{,}26732673\ldots = \frac{82665}{9999}.$$

Réduisant cette dernière fraction à ses moindres termes, on trouve $\frac{835}{101}$ pour la *fraction génératrice*.

On peut vérifier ce résultat en opérant la conversion en décimales :

$$\begin{array}{l|l} 835 & 101 \\ \hline 270 & 8{,}26732673\ldots \\ \quad 680 & \\ \quad\quad 740 & \\ \quad\quad\quad 330 & \\ \quad\quad\quad\quad 27 & \end{array}$$

La *fraction périodique* ainsi trouvée, n'est autre que la proposée.

178. Enfin, on peut demander la *fraction génératrice* d'une *fraction périodique* MIXTE.

Soit, pour exemple, la fraction $3{,}4589189\ldots$.

En multipliant d'abord cette fraction par 100, on a

$$345{,}891891\ldots;$$

or, d'après le numéro précédent, cette expression a pour valeurs

$$345 + \frac{891}{999}, \quad \text{ou} \quad \frac{345 \times (1000 - 1) + 891}{999}, \quad \text{ou} \quad \frac{345546}{999}.$$

Mais, comme on a multiplié la fraction proposée par 100, il faut, pour ramener ce résultat à sa juste valeur, le diviser par 100; et l'on obtient (n° **111**)

$$\frac{345546}{99900},$$

nombre fractionnaire qui, réduit à sa plus simple expression, devient

$$\frac{6399}{1850}.$$

Telle est la *fraction génératrice de la fraction périodique* MIXTE, 3,45891891..., ce qu'on peut vérifier en appliquant le procédé du n° **167**.

Nous citerons comme remarquables les exemples suivants :

$$0,9999\ldots = \frac{9}{9} = 1,$$

$$0,012345679012345679\ldots = \frac{1}{81},$$

$$0,98765432098765432\text{o}\ldots = \frac{80}{81}.$$

Ainsi que nous l'avons déjà dit, nous renvoyons au huitième chapitre l'examen de plusieurs autres propriétés des fractions périodiques, soit *simples*, soit *mixtes*.

§ II. — SYSTÈME DÉCIMAL DES POIDS ET MESURES.

Nous sommes maintenant en état d'apprécier tous les avantages que présente le calcul des fractions décimales sur celui des fractions ordinaires, et de juger combien il était important d'établir un système de poids et mesures qui fût lié au Système décimal. C'est à quoi l'on est parvenu non sans beaucoup d'efforts, et malgré les obstacles occasionnés par l'ignorance et les préjugés.

Commençons par exposer la nomenclature de ce Système, auquel on a donné la dénomination de *système métrique* (*).

Mesures linéaires, ou de longueur.

179. L'unité de longueur, à laquelle on a donné le nom de MÈTRE, est la *dix-millionième partie* de la distance du pôle à l'équateur, comptée sur le méridien qui passe à Paris.

D'après des opérations exécutées et vérifiées avec la plus grande précision, on a reconnu que *le mètre*, évalué en pieds, pouces, lignes, etc., *vaut* $3^{pi}\ 0^{po}\ 11^{l},296$, à $\frac{1}{1000}$ de ligne près.

Pour désigner des mesures plus grandes ou plus petites que le mètre, on est convenu d'employer les mots (tirés du grec et du latin) :

MYRIA,	KILO,	HECTO,	DÉCA,	DÉCI,	CENTI,	MILLI,
dix mille,	*mille,*	*cent,*	*dix,*	*dixième de,*	*centième de,*	*millième de*

qui signifient (ligne 2 ci-dessus)

et que l'on place, au besoin, en tête du mot *mètre*.

(*) Pour l'intelligence complète de certains termes et de certaines expressions dont nous nous servirons dans le cours de cette nomenclature, nous sommes obligé de renvoyer à la *Géométrie*.

On a formé ainsi le tableau suivant :

Myriamètre,	ou mesure de	dix mille mètres ;
Kilomètre	»	mille mètres ;
Hectomètre	»	cent mètres ;
Décamètre	»	dix mètres ;
MÈTRE	»	*unité* principale ;
Décimètre	»	dixième de mètre ;
Centimètre	»	centième de mètre ;
Millimètre	»	millième de mètre.

N. B. — Le *myriamètre* et le *kilomètre* sont les mesures itinéraires actuellement adoptées ; le *myriamètre* est un peu plus que le *double* de la lieue de 2500 toises ; le *kilomètre* en est un peu plus que le *cinquième*, ou bien, est un peu plus que le *quart* de la lieue de *poste* ou de 2000 toises.

Mesures de superficie.

180. L'unité naturelle des surfaces est le *mètre carré ;* c'est un carré qui a *un mètre* de côté.

Le *décimètre carré*, ou le carré qui a un *décimètre* de côté, est le 100ᵉ du mètre carré ; le *centimètre carré*, ou le carré qui a un *centimètre* de côté, en est le 10000ᵉ : et ainsi de suite.

Le *décamètre carré*, ou le carré qui a un *décamètre* de côté, vaut *cent* mètres carrés. C'est cette mesure qui est prise pour *unité*, lorsqu'il s'agit de surfaces agraires ; et cette unité se nomme ARE.

Les multiples de l'ARE et ses subdivisions se désignent également à l'aide des mots *myria*, *hecto*, *déci*, *centi*, ...

Ainsi :

Myria-are	ou *myriare*,	signifie	dix mille ares ;
Kilo-are	ou *kilare*	»	mille ares ;
Hecto-are	ou *hectare*	»	cent ares ;
Déca-are	ou *décare*	»	dix ares ;
ARE		»	*unité* principale ;
Déciare		»	dixième d'are ;
Centiare		»	centième d'are ;
Milliare		»	millième d'are.

. . . .

. . . .

N. B. — Le *myriare*, l'*hectare*, l'*are*, le *centiare*, sont les seules mesures usitées ; l'*hectare* remplace l'arpent d'autrefois (*) ; le *centiare* n'est autre chose que *le mètre carré*.

(*) L'*arpent*, ancienne mesure, était un *carré* de 10 *perches* de côté ; la *perche* avait une longueur de 22, 20 et 18 *pieds ;* ce qui donnait lieu à *trois* sortes d'*arpent*. L'arpent *moyen* vaut à peu près les $\frac{2}{5}$ de l'*hectare*, ainsi que nous le verrons plus loin.

Mesures de volume.

181. L'unité de volume est LE MÈTRE CUBE ; c'est un cube (forme de dé à jouer) qui a *un mètre* de côté.

Les multiples et les sous-multiples du *mètre cube* n'ont pas, en général, reçu de dénominations particulières; le 1000^e du mètre cube est appelé *décimètre cube*, parce que c'est un cube qui a un *décimètre* de côté; le 1000000^e du mètre cube s'appelle aussi *centimètre cube*, parce que c'est un cube qui a un *centimètre* de côté ; etc....

Lorsque les mesures de volume s'appliquent au bois de chauffage ou aux matériaux de construction, l'unité principale, ou le *mètre cube*, s'appelle STÈRE. On considère ensuite le *décastère*, mesure de dix stères. Le *stère* est à peu près la *demi-voie* ancienne ; ainsi le *décastère* vaut cinq *voies* environ.

Mesures de capacité pour les liquides et pour les grains.

182. L'unité actuelle de capacité est *le décimètre cube*, qu'on nomme LITRE.

Quant aux multiples et sous-multiples décimaux, voici ceux dont on fait principalement usage :

Hectolitre,	ou mesure de	cent litres;
Décalitre	»	dix litres ;
LITRE	»	*unité* principale ;
Décilitre	»	dixième de litre ;
Centilitre	»	centième de litre.

N. B. — Le *litre* remplace la pinte pour les boissons, et le litron pour les grains. Il est un peu plus grand que la pinte et le litron.

Le *décalitre* tient lieu du *boisseau*, pour la mesure du blé et de toutes sortes de grains; l'*hectolitre* remplace le *setier*. On l'emploie encore à évaluer les futailles de vin ou de tout autre liquide.

Le *kilolitre*, qui a la capacité d'un mètre cube, et le *myrialitre*, ne sont guère usités.

Des poids.

183. L'unité de poids actuelle est le poids d'un *centimètre cube* d'eau distillée, et ramenée à son *maximum* de densité; on lui a donné le nom de GRAMME.

Sa valeur en poids anciens est de 18$^{\text{grains}}$,82715, c'est-à-dire un peu plus qu'*un quart de gros*.

Voici le tableau de ses multiples et sous-multiples décimaux :

Myriagramme,	valant	dix mille grammes ;
Kilogramme	»	mille grammes ;
Hectogramme	»	cent grammes ;
Décagramme	»	dix grammes ;
GRAMME	»	*unité* principale ;
Décigramme	»	dixième de gramme ;
Centigrammme	»	centième de gramme ;
Milligramme	»	millième de gramme.

N. B. — Le *kilogramme* étant mille fois plus fort que le gramme qui, comme nous l'avons dit, est égal à $18^{gr},82715$, vaut lui-même $18827^{gr},15$; et comme la *livre-poids* se subdivise en 9216 grains, il s'ensuit que le kilogramme est un peu plus que le double de la livre : ainsi, un *demi-kilogramme* peut remplacer la livre-poids ancienne (*).

Des monnaies.

184. La nouvelle unité de monnaie est LE FRANC. Pour l'obtenir, on a pesé *cinq grammes* d'un lingot renfermant 9 *dixièmes* d'argent pur et 1 *dixième* d'alliage ; c'est la valeur de cette partie du lingot, que l'on a appelée *franc*.

Par une heureuse coïncidence, il a été reconnu avoir à peu près la même valeur que la *livre tournois*. Il y a cependant une différence de $\frac{1}{80}$ en faveur du franc ; c'est-à-dire qu'un franc vaut $1^{\#}\frac{1}{80}$, ou $\frac{81}{80}$ de livre ; ou, ce qui revient au même, 80 francs valent 81 livres.

Le dixième d'un franc a été appelé *décime*, et le centième d'un

(*) Les savants auxquels on doit le Système décimal des poids et mesures avaient d'abord eu l'idée de prendre pour *unité* de poids, celui d'un décimètre cube d'eau distillée, parce que ce poids, qui correspond au *kilogramme* actuel, était très-propre à remplacer l'unité ancienne, ou la *livre*, dont il est à peu près le double : et ils lui avaient donné le nom de *grave ;* mais ils ne tardèrent pas à reconnaître les inconvénients suivants :

1°. Les multiples du grave étaient le *décagrave*, l'*hectograve*, le *kilograve* et le *myriagrave* ; or, le poids d'un décagrave étant égal à plus de 20 livres, les autres multiples se trouvaient de beaucoup supérieurs aux poids employés dans les arts et le commerce.

2°. Les sous-multiples étaient le *décigrave*, le *centigrave* et le *milligrave*. Comme ce dernier poids n'est autre chose que le *gramme* actuel, il équivaut à 19 grains environs, et il est, par conséquent, de beaucoup supérieur à ceux qu'on emploie dans les pesées un peu délicates ; en sorte que l'on avait été obligé d'établir de nouvelles subdivisions, telles que le *dix-milligrave*, le *cent-milligrave* et le *millionigrave*. A la vérité, les savants avaient affecté un nom particulier au *milligrave* et en avaient formé une unité secondaire appelée *gravet*, d'où ils avaient déduit le *décigravet*, le *centigravet* et le *milligravet*. La régularité de la nomenclature se trouvait ainsi détruite. La nomenclature adoptée n'offre pas les mêmes inconvénients, et elle comprend tous les poids dont on se sert ordinairement.

franc, *centime*. Quant à ses multiples décimaux, on n'a pas jugé à propos de leur donner de dénomination.

185. Tel est l'exposé de la nomenclature des mesures qui composent le *Système métrique*. On peut, dès à présent, juger des avantages que ce Système présente sur l'ancien.

1°. — Il est uniforme et simple, en ce que les unités principales et subdivisions de ces unités suivent toutes entre elles la loi du Système décimal de numération ; or, on sait déjà combien le calcul des fractions décimales est facile.

2°. — Il est fixe, invariable, et susceptible d'être adopté dans tous les pays, puisqu'il n'est propre à aucun climat, à aucune nation en particulier.

Toutes ces mesures découlent d'une mesure primitive, le *mètre*, que l'on a empruntée aux dimensions du globe terrestre. Les monnaies elles-mêmes s'y rattachent, puisqu'on a vu que le *franc* est la valeur de cinq *grammes* d'argent allié, et que le *gramme* est le poids d'un CENTIMÈTRE CUBE d'eau distillée.

OPÉRATIONS SUR LES MESURES MÉTRIQUES.

Nous insisterons peu sur les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique appliquées au Système légal des poids et mesures, puisque, toute collection d'*unités principales* et de *subdivisions* de cette unité, pouvant toujours, d'après la nomenclature, être exprimée par une fraction décimale, ces opérations reviennent finalement à des opérations sur des fractions décimales, considérées comme des nombres *abstraits*, et que nous avons établi pour celles-ci des règles fixes.

Cependant, nous nous proposerons quelques questions relatives à la multiplication et à la division, parce qu'elles donneront lieu à des remarques importantes, sous le rapport des calculs approximatifs.

Multiplication.

186. PREMIÈRE QUESTION. — *On demande le prix de* 35 *mètres* 429 *millimètres* (que l'on écrit : $35^{m},429$) *d'une certaine étoffe, sachant que le mètre coûte* 10 *francs* 76 *centimes* (ou $19^{f},76$)?

En multipliant 19,76 par 35,429, ou plutôt 35,429 par 19,76, on obtiendra un produit qui, exprimé en *francs, décimes* et *centimes*, sera le prix cherché.

Le produit abstrait est 700,07704 ; donc $700^{f},07$, ou plus exactement (n° **168**) $700^{f},08^{c}$ est le prix de $35^{m},429$.

Quelquefois, la fraction de mètre est exprimée par une *fraction ordinaire ;* dans ce cas, l'opération peut s'exécuter de deux manières.

DEUXIÈME QUESTION. — *Quel est le prix de* $23^{m}\frac{3}{4}$ *d'une certaine étoffe à* $8^{f}\ 25^{c}$ *le mètre ?*

1°. — La réduction de $\frac{3}{4}$ en décimales donne 0,75; et la question est ramenée à multiplier 8,25 par 23,75 ou 23,75 par 8,25 ; ce qui donne 195,9375; donc $195^f\ 94^c$ est le prix des $23^m\frac{3}{4}$ de *mètres à* $\frac{1}{2}$ *centime* près *en plus* (n° **168**).

2°. — On peut aussi opérer comme il suit :

$$\begin{array}{rr}
 & 8,25 \\
 & 23\frac{3}{4} \\
\hline
 & 24\ 75 \\
 & 165\ 0 \\
\hline
 & 189,75 \\
P\frac{1}{2} & 4,125 \\
P\frac{1}{4} & 2,0625 \\
\hline
 & 195,9375
\end{array}$$

Dans cette opération, après avoir formé le produit des deux parties entières, on a eu le soin d'ajouter les deux produits partiels, et de mettre immédiatement la virgule à la place qui lui convenait, afin d'éviter toute erreur dans la disposition de cette virgule au résultat final.

On a ensuite multiplié 8,25 par $\frac{3}{4}\left(\text{ou } \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$, en prenant d'abord la *moitié* de 8,25, ce qui a donné 4,125, puis la *moitié* de cette *moitié*; et l'on a obtenu 2,0625.

Après quoi, faisant la somme, on est arrivé au résultat 195,9375, comme par le premier moyen.

Ce dernier mode d'opérer est surtout préférable, lorsque la fraction ordinaire ne peut pas être convertie en un nombre *limité* de décimales.

Troisième question. — *Trouver le prix de* $89^m\frac{11}{12}$, *en supposant que le mètre coûte* $47^f,19$?

Opérons, *d'abord*, au moyen des *parties aliquotes :*

$$\begin{array}{rr}
 & 47,19 \\
 & 89\frac{11}{12} \\
\hline
 & 424\ 71 \\
 & 3775\ 2 \\
\hline
 & 4199,91 \\
P\frac{6}{12} & 23,595 \\
P\frac{3}{12} & 11,7975 \\
P\frac{2}{12} & 7,8650 \\
\hline
 & 4243,1675
\end{array}$$

donc $89^m\frac{11}{12}$ coûtent $4243^f,17$ à un *centime* près.

Autrement. — Commençant par convertir $\frac{11}{12}$ en décimales, on trouve 0,9166... ; et il faudrait alors multiplier 89,916666... par 47,19 :

89,91	89,916	89,9166
47,19	47,19	47,19
8 09 19	8 092 44	8 0924 94
8 99 1	8 991 6	8 9916 6
629 37	629 412	629 4162
3596 4	3596 64	3596 664
4242,85 29	4243,136 04	4243,1643 54

Ce tableau offre trois opérations distinctes, exécutées : 1° avec *deux* chiffres décimaux pris au multiplicande; 2° avec *trois;* 3° avec *quatre;* et l'on voit que c'est la dernière seulement qui donne l'approximation, *à moins* d'un *centime.*

La difficulté est ici de savoir combien on doit prendre de chiffres décimaux au multiplicande, pour être assuré d'avoir le degré d'approximation exigé par la nature de la question; tandis que, par le premier mode d'opérer, on obtient un résultat complet, dont il est ensuite permis de négliger plus ou moins de décimales.

Nous exposerons, à la fin de ce chapitre, un moyen direct de lever cette difficulté; mais le premier mode est préférable, au moins sous le rapport des approximations qu'on peut exiger.

N. B. — On pourrait également *réduire* $89\frac{11}{12}$ en un seul nombre fractionnaire, puis multiplier 47,19 par ce nombre (n° **129**); mais l'emploi de ce moyen serait, en général, moins simple que l'opération par les *parties aliquotes.*

DIVISION.

187. Quatrième question. — *Une propriété de* 23 *hectares* 9 *ares* 25 *centiares* (ou $23^{h}0925^{c}$) *a été achetée pour* $83719^{f},25$; *on demande la valeur de l'hectare?*

Il suffit de diviser 83719,25 par 23,0925 ; et le quotient, évalué en *francs, décimes* et *centimes,* représentera le prix de l'*hectare.*

On obtient ainsi $2625^{f}\,38^{c}$.

Cinquième question. — 28 *kilogrammes* $\frac{19}{24}$ de *kilogramme* d'une certaine marchandise, *ayant coûté* $519^{f},35$, *quel est le prix du kilogramme?*

Premier mode d'opérer.

$$28\frac{19}{24}=\frac{691}{24}$$

```
  519,35
      24
  2077 40
 10387 0
 12464,40 | 69,1
  5554    | 18,038
    26 40
     5 670
       142
```

Second mode.

```
 190 | 24
 220 | 0,79166
  40
 160
  16
```

```
 519,35 | 28,79
 231 45 | 18,039
   1 1300
     26630
       719
```

La première manière d'opérer consiste à *réduire* d'abord $28\frac{19}{24}$ en un seul nombre fractionnaire, puis à *multiplier* 519,35 par la fraction $\frac{691}{24}$ renversée (n° **151**); et l'on trouve pour résultat, 18,038.

Dans le second mode, on a *converti* $\frac{19}{24}$ en *décimales*, ce qui a donné 0,79166...; puis on a divisé 519,35 par 28,79, en ne tenant compte que des deux premières décimales au diviseur; et l'on a obtenu pour quotient 18,039;

D'où l'on peut conclure, suivant l'une et l'autre opération, que 18ᶠ04ᶜ est le prix du *kilogramme* de la marchandise achetée.

N. B. — Il est à remarquer que dans la seconde opération, il a suffi de laisser *deux* décimales au diviseur, pour obtenir l'approximation fournie par la première; mais il n'en est pas toujours ainsi, et il eût été convenable, pour plus de précision, de prendre *un* chiffre de plus, en *forçant* le chiffre 1 d'une unité, ce qui aurait donné 28,792 pour le diviseur.

Nous reviendrons sur les quotients approximatifs des divisions.

Ces exemples suffisent pour montrer comment on doit opérer toutes les fois que l'on a à *multiplier* ou à *diviser* entre eux des nombres *concrets*, relatifs au système décimal des poids et mesures.

Conversion des anciennes mesures en mesures métriques, et réciproquement.

La comparaison des deux systèmes a certainement perdu de son importance, depuis que le *système métrique* a été *exclusivement* prescrit par la loi; cependant, comme il trouve encore son utilité dans bien des circonstances, nous allons en faire un exposé, mais d'une manière succincte et en nous bornant aux mesures *linéaires* et *superficielles*, ainsi qu'aux *poids* et aux *monnaies*.

Mesures linéaires.

188. La *toise* valant 864 *lignes* (n° **140**), et le *mètre*, $3^{pi}\ 0^{po}\ 11^{l},296$ (n° **179**), ou $443^{l},296$, il suffit de diviser 864 par 443,296, ou 864000 par 443296; et le quotient, qui exprimera *combien de fois* le nombre de *lignes* contenu dans la *toise* renferme le nombre de *lignes* contenu dans le *mètre*, représentera nécessairement la valeur de la *toise* en *mètres*.

On obtient ainsi :

$$(1) \qquad 1^{T} = 1^{m},949036, \quad \text{ou} \quad 1^{T} = 1^{m},949,$$

à moins de un *dix-millimètre* près.

Réciproquement, si l'on divise 443,296 par 864, on aura la valeur du *mètre* en *toise*. On trouve, par cette division,

$$(2) \qquad 1^{m} = 0^{T},5130740, \quad \text{ou} \quad 1^{m} = 0^{T},513074,$$

à moins de un *dix-millionième* de toise près.

189. Les expressions (1) et (2) suffisent pour la conversion d'un nombre *complexe* de *toises* en *mètres* et *subdivisions décimales* du mètre; et réciproquement, d'un nombre quelconque de *mètres* et *subdivisions décimales* du mètre, en un nombre *complexe* de *toises*.

Soit, par exemple, à *convertir* $29^{T}\ 4^{pi}\ 7^{po}$ en *mètres* et *subdivisions* du mètre.

On peut d'abord opérer par *parties aliquotes :*

$$\begin{array}{rr}
 & 1^{m},949036 \\
 & 29^{T}\,4^{pi}\,7^{po} \\
\hline
 & 17\ 541324 \\
 & 38\ 98072 \\
\hline
 & 56,522044 \\
P\ 3^{pi} & 0,974518 \\
1^{pi} & 0,324839 \\
6^{po} & 0,162419 \\
1^{po} & 0,027070 \\
\hline
 & \overset{m}{58,010890}
\end{array}$$

Après avoir formé les deux produits partiels du multiplicande par l'entier 29 du multiplicateur, il convient de faire d'abord la somme de ces produits, et de séparer ensuite, par une virgule, les six derniers chiffres à droite. [C'est une attention qu'il faut avoir pour éviter toute erreur dans le placement de la virgule au résultat total.]

On passe ensuite à la formation des produits par 3^{pi}, 1^{pi}, 6^{po}, 1^{po}, en prenant la *moitié* du multiplicande, puis le *tiers* du nouveau produit, puis la *moitié* de celui-ci, etc.

On obtient ainsi, pour produit total, 58,010890 ; donc $29^T\ 4^{pi}\ 7^{po} = 58^m,011$ à 1 *millimètre* près.

Pour vérifier ce résultat, on pourrait convertir $29^T\ 4^{pi}\ 7^{po}$ en *lignes*, et diviser le nombre ainsi obtenu par 443,296.

On trouverait pour quotient 58,010900 ; ce qui donnerait de même, à 1 *millimètre* près, 58,011.

La légère différence des résultats trouvés par l'un et l'autre moyen provient de ce que, dans l'opération par les *parties aliquotes*, on a négligé plusieurs parties de l'unité de l'ordre du 6ᵉ chiffre décimal.

Réciproquement, soit à *convertir* $47^m,1984$ en *toises*, *pieds*, *pouces*, *etc.*

Il suffit de multiplier 0,513074, valeur du *mètre* en *toise*, par 47,1984 ; et le produit exprime en *toises* et *fraction décimale* de la toise, la valeur du nombre donné.

Cette opération, qui n'offre d'autre difficulté que sa longueur, donne pour résultat 24,21627188816.

On a donc $47^m,1984 = 24^T,21627$, à 0,00001 de *toise* près.

Il reste maintenant à convertir la fraction 0,21627 en *pieds*, *pouces*, *lignes* ; et, pour cela, on opère de la manière suivante :

$$\begin{array}{r l}
\overset{T}{0,21627} & \\
6 & \\
\hline
1,29762 & - 1^{pi} \\
12 & \\
\hline
3,57144 & - 3^{po} \\
12 & \\
\hline
6,85728 & - 6^l \text{ ou } 7^l.
\end{array}$$

On multiplie d'abord la fraction par 6, ce qui donne $1^{pi},29762$; puis on multiplie $0^{pi},29762$ par 12, ce qui donne $3^{po},57144$; puis $0^{po},57144$ par 12 ; et l'on trouve pour dernier résultat, $6^l,85728$ ou 7^l environ.

Donc enfin,

$$47^m,1984 = 24^T\ 1^{pi}\ 3^{po}\ 7^l ;$$

ce qu'on peut vérifier en traitant $24^T\ 1^{pi}\ 3^{po}\ 7^l$, comme dans le premier exemple.

N. B. — Les opérations que comportent les deux questions qui viennent d'être résolues, se servent mutuellement de preuve.

190. *Cas particuliers.* — 1°. Le *pied* étant le 6ᵉ de la *toise*, est égal au 6ᵉ de $1^m,949036$ ou à 0,324839, etc.,

$$1^{pi} = 0,32\ldots.$$

(un peu plus que 3 *décimètres*, ou que 32 *centimètres*).

Le *pouce* étant le 12ᵉ de 0,3248...., vaut 0,027... (un peu moins que 3 *centimètres*).

La *ligne* ou le 12ᵉ de 0,027, vaut 0,002.... (à peu près 2 *millimètres*).

L'*aune* de Paris, de 44^{po} ou $3^{pi}\ 8^{po}$, peut s'évaluer en *mètre*, de deux manières : soit par les *parties aliquotes*, en multipliant $0^{m},324839$, valeur du *pied*, par $3^{pi}\ 8^{po}$, soit en réduisant $3^{pi}\ 8^{po}$ en *lignes*, ce qui donne 528^{l}, et divisant 528000 par 443296.

On obtient, par l'un ou l'autre moyen,

$$1^{a} = 1^{m},191 \text{ à } 1 \textit{ millimètre} \text{ près.}$$

2°. *Réciproquement*, en ne considérant que les *multiples* du mètre, on reconnaît que

$$\begin{aligned} 1 \textit{ décam.} &= 5^{T},130740, \\ 1 \textit{ hectom.} &= 51^{T},30740, \\ 1 \textit{ kilom.} &= 513^{T},0740, \\ 1 \textit{ myriam.} &= 5130^{T},740. \end{aligned}$$

Les deux derniers résultats prouvent que le *kilomètre* surpasse le *quart* de la *lieue de poste* (2000^{T}) de 13^{T} environ, et que le *myriamètre* surpasse de 131^{T} à peu près, le *double* de la *grande lieue* (2500^{T}).

Mesures de superficie et *mesures agraires*.

191. Nous admettons (ce qui ne peut être démontré qu'en GÉOMÉTRIE) que, pour *évaluer* la superficie d'un *carré*, il faut multiplier par *lui-même*, le nombre qui exprime la valeur de son *côté* en *unités principales* et *subdivisions* de cette unité.

Cela posé, 1°. — la valeur de la *toise carrée* en *mètres carrés* s'obtient en multipliant l'expression (1) du n° **188**, ou 1,949036, par *elle-même*.

On trouve, tout calcul fait,

$$1^{Tq} = 3^{mq},798741329296,$$

ou, en ne tenant compte que des *six* premières décimales,

$$1^{Tq} = 3^{mq},798741,$$

c'est-à-dire que $1^{Tq} = 3$ *mètres carrés*, 79 *décimètres carrés*, 87 *centimètres carrés*, 41 *millimètres carrés*, puisque (n° **180**) le *décimètre carré* est la 100ᵉ partie du mètre carré ; le *centimètre carré*, la 10000ᵉ du mètre carré ; et ainsi de suite.

Réciproquement, la multiplication de l'expression (2) du n° **188**, ou 0,5130740, par *elle-même*, donnant pour produit 0,263244929746, on en conclut $1^{mq} = 0^{Tq},263245$ à 0,000001 *près*, pour la valeur du *mètre carré* en *toise carrée*.

Pour évaluer cette fraction en *pieds carrés*, il faut la multiplier par 6×6, ou 36, ce qui donne

$$1^{mq} = 9^{pi\,q},476820.$$

(Nous allons bientôt faire usage de cette dernière expression.)

La fraction qui lui correspond pourrait aussi être évaluée en *pouces carrés;* ce qui exigerait qu'on la multipliât par 12×12, ou 144; mais nous n'insisterons pas davantage sur ce point.

192. 2°. — Cherchons maintenant la valeur de l'*arpent* en *hectare*, et réciproquement.

Nous avons dit au n° **180**, que l'on distinguait *trois* sortes principales d'*arpents*, savoir : les arpents de 100 *perches carrées*, à 18, 20 et 22^{pi} la perche considérée comme le *côté* d'un *carré*. On a ainsi les trois nombres

$$18 \times 18 \times 100, \quad \text{ou} \quad 32400^{\text{pi q}},$$
$$20 \times 20 \times 100, \quad \text{ou} \quad 40000,$$
$$22 \times 22 \times 100, \quad \text{ou} \quad 48400,$$

pour la contenance de ces trois arpents en *pieds carrés*.

D'un autre côté, nous venons de voir que le *mètre carré* vaut

$$9^{\text{pi q}},476820;$$

d'où l'on déduit

$$100^{\text{mq}} \quad \text{ou} \quad 1^{\text{are}} = 947^{\text{pi q}},6820,$$

et

$$1^{\text{hect}} = 94768,20.$$

Donc, si l'on divise chacun des trois nombres

$$32400, \quad 40000 \quad \text{et} \quad 48400$$

par 94768,20, on aura leur valeur en *hectares*.

On obtient ainsi successivement

Pour l'arpent de 18^{pi}	la perche,	$0^{\text{h}},3419$,	ou	34 *ares* 19 *centiares*,
» 20^{pi}	»	$0^{\text{h}},4221$,	ou	42 *ares* 21 *centiares*,
» 22^{pi}	»	$0^{\text{h}},5107$,	ou	51 *ares* 7 *centiares*.

Réciproquement, en divisant 94768,20 par chacun des trois nombres

$$32400, \quad 40000, \quad 48400,$$

on aura la valeur de l'*hectare* en *arpents* des trois sortes.

De là résultent les valeurs suivantes :

	arp.		
L'*hectare* égale	2,9219	à	18^{pi} la perche.
»	2,3692	à	20
»	1,9580	à	22 (*)

(*) On ne doit pas perdre de vue que tous ces nombres ne sont qu'*approximatifs*, à cause des chiffres décimaux que l'on est obligé de négliger dans les *multiplications* et les *divisions*. Ils sont, du reste, concordants avec les résultats consignés dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1853.

Poids.

193. On a vu (n° **140**) que la *livre-poids* contient 9216 grains, et (n° **183**) que le *kilogramme* équivaut à $18827^{gr},15$. Donc, en divisant réciproquement ces deux nombres l'un par l'autre, on obtiendra la valeur de la *livre* en *kilogramme*, et celle du *kilogramme* en *livres*.

Ces opérations effectuées, on trouve

$1 ℔ = 0^{kil},489506$, à 1 *milligramme* près;
$1^{kil} = 2 ℔,042877$, à *moins* de 0,000001 *en plus*.

Ce dernier résultat indique que le kilogramme surpasse le *double* de la livre, de $\frac{4}{100}$, ou de $\frac{1}{25}$ environ, c'est-à-dire que $1^{kil} = \frac{51}{25}$ de livre ou bien que

$$25^{kil} = 51 ℔, \quad \text{ou} \quad 100^{kil} = 204 ℔.$$

On peut facilement, à l'aide des deux expressions ci-dessus, *convertir* un nombre complexe de *livres, marcs, onces, etc.*, en *kilogrammes* et *parties décimales* du kilogramme, puis, un nombre décimal de kilogrammes en *livres, marcs, onces, etc.*

Il suffirait, pour cela, d'exécuter des calculs analogues à ceux qui ont été exposés au n° **189**.

Nous nous bornerons ici à traiter quelques cas particuliers.

1°. *On demande la valeur du* MARC *d'or ou d'argent en* PARTIES *du kilogramme?*

Tout se réduit à prendre la moitié de $0^k,489506$, et l'on a $1^{marc} = 0^k,244753$, qui s'énonce ainsi : 2 *hectogrammes* 4 *décagrammes* 4 *grammes* 7 *décigrammes* 5 *centigrammes* 3 *milligrammes*, ou bien encore, 244 *grammes* 753 *milligrammes*.

2°. *Combien l'*ONCE *vaut-elle de* GRAMMES?

Réponse : Le 16^e de $0^k,489\ldots$ est $0^k,030\ldots$, ou 30 *grammes* environ.

3°. Quelle est la valeur de 125 *grammes* en *onces?*

Comme 125 est le 8^e de 1000, il faut prendre le 8^e de $2 ℔,042877\ldots$, ce qui donne $0 ℔,255359$, fraction qu'il faut *multiplier* par 16 pour en former des *onces*.

La *partie entière* à la gauche de la virgule représente les *onces*.

On trouve ainsi 125 *grammes* $= 4^o,08\ldots$, ou 4^o environ.

Des monnaies.

194. Nous avons dit (n° **184**) que le *franc* vaut $\frac{1}{80}$ de plus que la *livre;* cela signifie qu'il faut 81 *livres* pour faire 80 francs; donc

$$1^{\#} = \frac{80}{81} \text{ de } 1^f \quad \text{et} \quad 1^f = \frac{81}{80} \text{ de } 1^{\#}.$$

Réduisant ces *fractions ordinaires* en *décimales*, on obtient

$$1^{\#} = 0^{f},98765432098\ldots \quad (\textit{voyez la fin du n}^{o}\ \mathbf{178}),$$
$$1^{f} = 1^{\#},0125, \quad \text{fraction } \textit{limitée}.$$

Ces expressions suffiraient, à la rigueur, pour la *conversion* des anciennes monnaies en nouvelles, et réciproquement; mais on va voir que ces deux questions peuvent être plus simplement résolues au moyen de ce qui vient d'être dit.

En effet : 1°. Comme $\frac{1}{80}$ de $1^{\#} = \frac{20}{80}$ de *sou*, ou $\frac{1}{4}$ de *sou*, ou 3 *deniers*, et que, d'ailleurs (n° **140**), la *livre* vaut 240 *deniers*, il s'ensuit que, pour *convertir* un nombre quelconque de *livres*, *sous* et *deniers*, en *francs*, *décimes* et *centimes*, il n'y a qu'à *réduire* ce nombre en *deniers*, et à *diviser* le résultat par 243.

Exemple. — Soit le nombre $245^{\#}\ 19^{s}\ 7^{d}$.

On a d'abord

$$245^{\#}\ 19^{s}\ 7^{d} = 59035^{d};$$

d'où, en divisant par 243,

$$242^{f},9424,$$

donc

$$245^{\#}\ 19^{s}\ 7^{d} = 242^{f}\ 94^{c}.$$

2°. *Réciproquement*, pour remonter de ce résultat au nombre proposé, remarquons que 1^{f} valant $\frac{1}{80}$ de plus que $1^{\#}$, $242^{f},94$, ou plutôt $242^{f},9424$, valent $242^{\#},9424$ plus $\frac{1}{80}$ de $242^{\#},9424$:

$$\begin{array}{rr}
 & \overset{\#}{242},9\ 424 \\
\frac{1}{80} = & 3,0\ 367 \\
\hline
 & 245,9\ 791 \\
 & 20 \\
\hline
 & 1\ 9,582 \\
 & 12 \\
\hline
 & 6,984
\end{array}$$

Il suffit d'écrire $242^{\#},9424$, puis de prendre le 80ᵉ de ce même nombre (ce qui se fait en reculant la virgule d'un rang vers la gauche et prenant le 8ᵉ de 24,29...), et enfin d'ajouter les deux nombres.

Quant à la fraction 0,9791, on la convertit successivement en *sous* et *deniers*, d'après les moyens précédemment indiqués.

Ici se termine, à proprement parler, l'exposé de la comparaison des anciennes mesures avec les mesures métriques; mais nous y ajouterons, comme se rattachant aux théories précédentes, quelques notions sur les divisions du *cercle* et du *thermomètre*.

Des deux divisions du cercle.

195. Une *circonférence* de cercle se définit, en GÉOMÉTRIE, une ligne *rentrante et fermée*, dont tous les points sont *également distants* d'un même point, que l'on nomme *centre* du cercle ou de la circonférence.

Avant la réforme du système des poids et mesures, le cercle, ou plutôt sa circonférence se divisait en 360 parties *égales* appelées *degrés*, chaque degré en 60 parties égales appelées *minutes*, chaque minute en 60 *secondes*, chaque seconde en 60 *tierces*, etc.;

De là, la dénomination de *division sexagésimale*, donnée à ce mode de division.

Dans le nouveau système, on suppose la circonférence divisée en 400 parties égales appelées *grades*, chaque grade en 100 parties égales appelées *minutes*, chaque minute en 100 *secondes*, chaque seconde en 100 *tierces*, etc.

D'où résulte la dénomination de *division centésimale*, donnée à ce second mode.

Cela posé, comme, dans les usages ordinaires, et particulièrement dans les calculs de la marine, la première division du cercle est beaucoup plus fréquemment employée que la seconde, il importe de savoir comment on peut *convertir* un *nombre complexe* de la division *sexagésimale* en mesures *centésimales*, et réciproquement.

Or, d'après ce qui vient d'être dit, le *quart* de la circonférence (auquel on est convenu de donner le nom de *quadrant*) est divisé en 90 *degrés* et en 100 *grades*; d'où il suit que 1 *degré* vaut $\frac{100}{90}$, ou $\frac{10}{9}$ de *grade*; et réciproquement, 1 *grade* vaut $\frac{90}{100}$, ou $\frac{9}{10}$ de *degré*.

On est ainsi conduit aux deux règles suivantes :

1°. Pour *convertir* un nombre donné de *degrés, minutes, secondes, etc., sexagésimales*, en un nombre de *grades, minutes, secondes, etc., centésimales*,

Réduisez d'abord (nº **144**) en un seul nombre fractionnaire de degrés, le nombre donné, et *multipliez* ce nombre fractionnaire par $\frac{10}{9}$; puis *convertissez* le produit résultant en *décimales*.

Cette fraction décimale exprimera en *grades* et *subdivisions* du grade, le nombre proposé; c'est-à-dire que la *partie entière* représentera les *grades*, et la *partie décimale* séparée en tranches de *deux* chiffres, représentera successivement les *minutes, secondes, etc., centésimales*.

2°. Réciproquement, pour *transformer* un nombre donné de *grades*, *minutes*, *secondes*, *etc.*, *centésimales*, en un nombre de *degrés*, *minutes*, *secondes*, *etc.*, *sexagésimales*,

Retranchez du nombre donné, qui peut s'exprimer par une *fraction décimale*, le 10ᵉ de ce nombre.

La *partie entière* du résultat représentera le nombre de *degrés;* et il ne s'agira plus que de *convertir* la partie décimale en *minutes*, *secondes, etc.*, *centésimales*, d'après un procédé analogue à celui du n° **189**.

Exemple. — Soit le nombre 34 *degrés* 59 *minutes* 17 *secondes*, qu'on représente, pour abréger, par $34° 59' 17''$, à convertir en *grades*, *minutes*, *secondes*, *etc.*, *centésimales*.

$$\begin{array}{r} 34°59'17'' \\ \underline{60} \\ 2099' \\ \underline{60} \\ 125957'' \end{array} \qquad \frac{125957}{3600} \times \frac{10}{9} = \frac{125957}{3240} \qquad \begin{array}{l|l} 12595,7 & 3240 \\ \cline{2-2} 2875 & 38,875617 \\ 2837 & \\ 2450 & \\ 1820 & \\ 2000 & \\ 560 & \\ 2360 & \\ 92 & \end{array}$$

Ce tableau renferme *trois* opérations distinctes :

1°. La *conversion* en *secondes* (n° **142**), ce qui donne $125957''$;

2°. La *multiplication* de 125957 par $\frac{10}{9}$, produisant, après réduction, $\frac{125957}{3240}$;

3°. Enfin, la *division* de 125957 par 3240, ou plutôt de 12595,7 par 324.

Le résultat de cette division étant 38,875617..., on en conclut que

$$34°59'17'' = 38^{\text{grades}},875617,$$

ou, d'après une notation de convention,

$$34°59'17'' = 37^{g}87^{m}56^{s}17^{t}.$$

Réciproquement, soit à *convertir* $38^{g}87^{m}56^{s}17^{t}$ en *degrés*, *minutes*, *secondes*, *etc.*, *sexagésimales* :

$$\begin{array}{r} 38\overset{g}{,}8756170 \\ \underline{3,8875617} \\ 34,9880553 \\ \underline{60} \\ 59,283318 \\ \underline{60} \\ 16,99938 \end{array}$$

Après avoir *retranché* de 38,875617 le 10^e de ce nombre, et avoir obtenu le reste, 34,9880553, on a *multiplié* par 60 la *partie décimale* de ce reste; ce qui a donné 59,283318, produit qu'on a également *multiplié*, abstraction faite de la *partie entière*, par 60, et l'on est ainsi arrivé au résultat 16,99908, ou 17.

Donc,

$$38^g\,87^m\,56^s\,17^t = 34^\circ\,59'\,17'';$$

ce qui vérifie la première opération.

On voit assez ce qu'il faudrait faire pour tout autre exemple.

Des deux divisions principales du thermomètre.

196. Nous ne nous occuperons que des deux thermomètres le plus en usage, le thermomètre de RÉAUMUR, et le thermomètre *centigrade*.

Dans le *premier*, on conçoit l'intervalle qui sépare le point de *congélation* de l'eau, du point d'*ébullition*, *divisé* en 80 *parties égales* appelées *degrés* de RÉAUMUR; et dans le *second*, on conçoit ce *même* intervalle divisé en 100 *parties égales* appelées *degrés centésimaux*.

D'où il suit nécessairement que chaque *degré* de Réaumur vaut $\frac{100}{80}$, ou $\frac{5}{4}$ de *degré centigrade;* et réciproquement, chaque *degré centigrade* vaut $\frac{4}{5}$ de *degré* de Réaumur.

D'ailleurs, il est généralement reçu que les fractions de degré sont, dans l'un et l'autre cas, exprimées en *fractions décimales*. Ainsi, rien n'est plus simple que de transformer les unes dans les autres.

1°. Pour *convertir* un nombre décimal de *degrés* de Réaumur en *degrés centigrades*, il faut *ajouter* au nombre décimal le *quart* de ce *même* nombre.

Le résultat de l'addition est le nombre cherché.

2°. Pour *convertir* un nombre décimal de *degrés centésimaux* en *degrés* de Réaumur, *retranchez* du nombre donné le 5^e de ce *même* nombre, et vous avez le nombre cherché.

Ainsi, par exemple :

$$39^{d.R}, 4716 = 39,4716 + 9,8679 = 49^{d.c}, 3395;$$

réciproquement,

$$49^{d.c}, 3395 = 49,3395 - 9,8679 = 39^{d.R}, 4716.$$

De même,

$$119^{d.c}, 23076 = 119,23076 - 23,84615 = 95^{d.R}, 38461;$$

réciproquement,

$$95^{d.R}, 38461 = 95,38461 + 23,84615 = 119^{d.c}, 23076.$$

Etc.

MÉTHODE ABRÉGÉE POUR LA MULTIPLICATION AVEC UNE APPROXIMATION DONNÉE.

197. Nous terminerons ce chapitre par l'exposé d'une *méthode abrégée* pour obtenir le produit de deux nombres avec une approximation donnée, méthode dont les opérations précédentes font suffisamment ressortir l'utilité.

On a vu, en effet, que, pour évaluer les anciennes mesures en nouvelles, ou réciproquement, on est conduit à multiplier des fractions décimales d'un grand nombre de chiffres, quoique le plus souvent il suffise de tenir compte d'un petit nombre de décimales au produit.

Il importe donc d'avoir un moyen d'obtenir le produit de deux nombres décimaux quelconques avec le degré d'approximation qu'exige l'énoncé d'une question, sans être obligé de calculer tous les produits partiels que comporte le procédé ordinaire de la multiplication.

C'est ce moyen qui constitue la *méthode abrégée* que nous allons faire connaître.

Soit, pour exemple, à *évaluer* à moins de *un millième* près, le produit des deux nombres

$$84{,}0783647 \quad \text{et} \quad 72{,}46538.$$

On atteindrait évidemment le but proposé, si l'on pouvait former un nombre qui renfermât tous les *millièmes* et *unités* des ordres supérieurs, contenus dans le produit total.

Or, c'est à quoi l'on parvient en opérant comme nous allons le voir :

Opération proposée.	*Preuve de l'opération.*
84,0783647	72465380
8 356427	746387048
588 548548	579723040
16 815672	28986152
3 363132	507257
504468	57972
42035	2173
2520	434
672	28
6092,77047	4
	6092,77060

On commence par *poser* le multiplicateur au-dessous du multiplicande, *dans un ordre renversé* et de manière que le chiffre 2, de ses *unités simples*, se trouve *sous* le chiffre des *cent-millièmes*, c'est-à-dire sous le chiffre *tenant le second rang* vers la droite de celui dont l'ordre indique le degré d'approximation exigé; puis, le chiffre 4, de ses *dixièmes*, sous le chiffre des *dix-millièmes* du multiplicande; le chiffre 6, de ses *centièmes*, sous le chiffre des *millièmes ;* et ainsi de suite.

Par cette disposition, chaque chiffre du multiplicateur correspond au chiffre du multiplicande, dont le produit par le premier donne des *cent-millièmes*.

Ainsi, le chiffre 7 des *dizaines* du multiplicateur correspond au chiffre des *millionièmes* du multiplicande ; et des *dizaines* multipliées par des *millionièmes* donnent des *cent-millièmes*.

De même, s'il y avait des *centaines* au multiplicateur, le chiffre serait placé sous celui des *dix-millionièmes* du multiplicande.

Cela posé, on *multiplie* successivement *tous* les chiffres du multiplicande à partir de la droite, par chacun des chiffres du multiplicateur, *en ne tenant*, à chaque opération partielle, *aucun compte* des chiffres du multiplicande, qui sont placés à droite de celui par lequel on multiplie; et l'on *pose* les produits (considérés comme résultant de la multiplication de deux nombres entiers) les uns sous les autres de façon que leurs *unités simples* soient sur *une même* colonne verticale. On *additionne* ensuite tous ces produits, et l'on sépare, *vers la droite* de la somme, *cinq* chiffres décimaux dont on *barre* les deux derniers.

La *partie à gauche* de ces deux derniers chiffres est le PRODUIT DEMANDÉ.

Pour se rendre compte de ce mode d'opérer, et bien se convaincre que l'on obtient ainsi *le degré* d'approximation désiré, il suffit de remarquer qu'à chaque multiplication partielle, en ne tenant pas compte des chiffres du multiplicande, qui sont à la droite du chiffre multiplicateur, on néglige plusieurs *cent-millièmes*, dont la somme finit par donner même des *dix-millièmes* d'erreur. Mais en admettant que, *terme moyen*, on commît une erreur de 5 *cent-millièmes*, à chaque multiplication partielle, on voit qu'il faudrait 10 multiplications partielles, et, par conséquent, 10 chiffres au multiplicateur, pour que l'erreur commise fût de 50 *cent-millièmes*, ou de 5 *dix-millièmes*, et 20 chiffres au multiplicateur, pour que l'erreur s'élevât à 5×2 ou 10 *dix-millièmes*, ou *un seul millième*.

198. PREUVE DE L'OPÉRATION. Pour *vérifier* le résultat obtenu, voici ce qu'il convient de faire dans la pratique :

On prend le *multiplicateur* pour *multiplicande*, et réciproquement, ainsi que le tableau du numéro précédent l'indique; et l'on dispose le *nouveau multiplicateur* comme dans l'opération primitive, puis on effectue les multiplications partielles de la même manière, sauf quelques *modifications* qu'il est nécessaire d'indiquer :

1°. On a placé un 0 à la *droite du nouveau multiplicande*, afin que le dernier chiffre 8, du *nouveau multiplicateur*, eût son correspondant dans la multiplication par ce chiffre 8;

2°. On a barré le premier chiffre à gauche, 7, de ce multiplicateur, comme ne devant donner lieu à aucun produit partiel, d'après la règle établie plus haut;

3°. Dans chaque multiplication partielle, *au produit* du chiffre *multiplicateur* par le chiffre *supérieur* qui lui correspond immédiatement, on a le soin (et ceci est important) d'*ajouter* les *retenues* que donnerait le produit par ce chiffre multiplicateur, du chiffre qui est à sa droite dans le multiplicande.

Ainsi, dans la multiplication par le 4e chiffre 7 du multiplicateur, on a ajouté au produit de 5 par 7, ou à 35, les 2 unités de *retenue* que donnerait le produit par le même chiffre 7, du chiffre 3 qui est immédiatement à la droite du chiffre 5.

Pareillement, dans l'opération suivante, au produit de 6 par 8, on a ajouté les 4 unités de *retenue*, que donneraient 8 fois 5, ou 40, et ainsi de suite.

4°. Enfin, arrivé au chiffre 7 que l'on a *barré* dans le multiplicateur, on l'a multiplié *mentalement* par le chiffre 7 qui est à sa droite dans le multiplicande, et l'on a écrit la *retenue* 4 de ce produit *mental* au-dessous du produit précédent.

Cette dernière *modification* offre *deux* avantages : le premier, c'est d'*atténuer* beaucoup les erreurs commises ; et le second, c'est de faire juger s'il y a lieu de *forcer* d'une unité le chiffre auquel s'arrête l'approximation, afin d'obtenir un résultat plus exact.

Dans l'exemple que nous venons de traiter, on a trouvé 47 pour les *deux derniers* chiffres de l'opération primitive, tandis que pour la *preuve*, on a trouvé 60. Tous les autres chiffres sont d'ailleurs les mêmes.

Donc 6092,771 est la valeur du produit demandé à moins de *un demi-millième* près *en plus*.

Voici un autre exemple un peu plus compliqué :

Soient les deux nombres

1307,5103008964 72 et 256,10978641,

dont on veut avoir le produit à *moins de* 0,00001 *près*.

Opération proposée.	*Preuve de l'opération.*
1307,5103008964 72	256,1097864100
14 687901652	274698 0030157031
2615 020601792	256 1097864100
653 755150445	76 8329359230
78 450618048	1 7927685048
1 307510300	1280548932
117675927	25610978
9152570	768329
1046008	2048
78450	230
5228	15
130	334866,1838910
334866,1838898	

Le résultat demandé est ici 334866,18389 à moins de 0,00001 près.

Appliquons le procédé qui vient d'être développé, aux exemples des nos **186**, **189** et **191**.

1°. *Calculer* à 0,01 près, *le produit des deux nombres*

$$89,91666\ldots \quad \text{et} \quad 47,19.$$

En disposant ces nombres d'après le procédé, et tenant compte de *quatre* décimales au produit, on trouve 4243,1637; donc le produit demandé est 4243f 16c, comme au n° **186**.

2°. *Trouver le produit de* 0,5130740 *par* 47,1984 avec *cinq* décimales exactes.

On obtient 24,2162709 comme au n° **189**.

3°. *Multiplier* 1,949036 *par lui-même*, et obtenir le produit avec *six* décimales.

Résultat : 3,7987413 2, comme au n° **191**.

199. Remarque. — Le procédé peut s'appliquer également au calcul *approximatif* du produit de deux nombres *entiers*, composés d'un grand nombre de chiffres.

Exemple. — On demande à *un million* près le produit de 470256497 par 2305687 :

470256497	,00	
78650	32	
940512994	00	
141076949	10	
2351282	45	
282153	84	
37620	58	
3291	75	
1084264291	62	1084264292 *millions*.

On sera certain d'obtenir le produit à moins de *un million* près, en tenant compte des *centaines de mille* et des *dizaines de mille*, c'est-à-dire en calculant au produit *deux* chiffres de plus que le nombre exigé.

Pour cela, on *dispose* le multiplicateur au-dessous du multiplicande dans un *ordre renversé*, et de manière que le chiffre 7, de ses *unités simples*, soit sous le chiffre des *dizaines de mille* du multiplicande; alors, le chiffre 8 des *dizaines* du multiplicateur se trouve naturellement placé sous le chiffre des *mille* du multiplicande; et ainsi des autres chiffres. Toutefois, comme les chiffres des *centaines de mille* et des *millions* du multiplicateur n'auraient pas des chiffres correspondants dans le multiplicande, on y supplée par *deux* zéros que l'on place à la droite de celui-ci, et qui sont *censés* représenter des *dixièmes* et des *centièmes*.

Cela fait, on exécute les opérations partielles comme au numéro précédent; et l'on arrive au résultat 10842642916 2, dont les deux derniers chiffres doivent être *barrés* ou supprimés; ce qui donne enfin

$$108264292$$

pour le *nombre total* de millions auquel on arriverait en suivant le procédé ordinaire.

On trouverait de même que le nombre de *dizaines de millions* renfermées dans le produit 3780954×68574 est égal à 17992.

Nota. — Nous développerons, au huitième chapitre, une *méthode abrégée* pour obtenir le quotient de la division de deux nombres *entiers décimaux* avec une approximation donnée.

Exercices.

I. Une propriété rurale de 540 arpents $\frac{1}{2}$ (20^{pi} la perche) a coûté 146500 fr. On demande : 1° le nombre d'hectares, d'ares, qu'elle contient; 2° le prix de l'hectare de la propriété.

II. Un arc de circonférence contient 47° 19′ 30″ (ancienne division) : et l'on demande sa valeur : 1° en secondes *sexagésimales*; 2° en secondes *centésimales*.

III. Sous un égal volume, l'eau pèse 773 fois plus que l'air. On demande le poids de 945^{lit},479 d'air.

IV. Un chemin de fer prend, pour le transport des charbons, 0^{fr},097 par tonne (de 1000 kilogrammes) et par kilomètre. On paye, en outre, un droit fixe de 2^{fr},12 par wagon contenant 3240 *hectogrammes*. A combien reviendront 28275^{hect},65 achetés au prix de 2^{fr},85 l'hectolitre, et transportés, par le chemin de fer, à 15^{myriam},97, l'hectolitre de charbon pesant 82 kilogrammes ?

V. D'après la loi, 1 franc en argent doit peser 5 grammes; une pièce de 5 francs, qui ne pèse que 24^{gr},467, a-t-elle le poids, et, si elle ne l'a pas, combien a-t-elle perdu ?

VI. Un orfèvre fond 3 kilogrammes d'argent qui contiennent un *dixième* de cuivre, avec 5 kilogrammes d'argent contenant un *huitième* de cuivre. Quelle est la quantité de cuivre dans le métal ainsi obtenu ?

VII. Quelle est la capacité d'un vase renfermant de l'eau qui a pour valeur de son poids 2 pièces de 5 francs, 3 pièces de 1 franc et 1 pièce de 20 centimes ?

VIII. La monnaie d'or, à valeur égale, pèse 15,5 fois moins, et celle de cuivre 40 fois plus que celle d'argent.

On demande : 1° ce que pèsent 1000 francs en or; 2° combien il faut de pièces d'or de 20 francs pour faire le poids de 1 kilogramme; 3° ce que pèsent 100 francs en cuivre.

CHAPITRE CINQUIÈME.

Formation des puissances et extraction des racines secondes et troisièmes.

PREMIÈRE PARTIE.

SECONDE PUISSANCE OU CARRÉ, ET RACINE DEUXIÈME OU CARRÉE D'UN NOMBRE.

Notions et principes préliminaires.

200. On a vu (n° **45**) que la SECONDE PUISSANCE d'un nombre est le *produit de ce nombre multiplié par lui-même*, ou le *produit de deux facteurs égaux à ce nombre*, et que, réciproquement, la RACINE DEUXIÈME d'un nombre est un second nombre qui, *multiplié par lui-même*, ou *élevé à la deuxième puissance*, donne *pour résultat* le nombre proposé.

Cette SECONDE PUISSANCE et la RACINE DEUXIÈME se désignent aussi sous les noms de CARRÉ et de RACINE CARRÉE.

Ainsi le CARRÉ de 7 est 49; réciproquement, la RACINE CARRÉE de 49 est 7.

De même, 12 a pour CARRÉ, 12×12, ou 144; réciproquement, 144 a pour RACINE CARRÉE, 12.

Les CARRÉS des *neuf premiers* nombres *entiers* se trouvent dans la Table de Pythagore (n° **18**); et les carrés des diverses puissances de 10 se forment (n° **20**) en *doublant* le nombre des *zéros*.

La formation du CARRÉ d'un nombre n'exige que l'application des règles de la *multiplication;* mais il n'en est pas de même de L'EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE, qui a pour objet :

Un nombre étant donné, trouver le nombre qui, multiplié par lui-même, reproduit le nombre proposé.

Cette question ne peut être résolue que par une opération essentiellement différente de celles qui ont été exposées jusqu'ici; elle est d'ailleurs d'une très-grande importance dans la Géométrie et dans l'Algèbre.

Les *dix* premiers nombres *entiers*,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

ayant pour CARRÉS

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100,

réciproquement, les nombres de la seconde série ont, pour RACINES CARRÉES, les nombres de la première.

L'inspection de ces deux séries de nombres montre que, parmi les nombres *entiers d'un* ou de *deux* chiffres, il n'y en a que *neuf* qui soient des CARRÉS d'autres nombres *entiers*, et que tous les autres ont pour RACINE CARRÉE un nombre *entier* plus une *partie de l'unité*.

Ainsi, 53, qui est compris entre 49 et 64, a pour RACINE CARRÉE, 7 plus une *partie de l'unité*. De même 91 a pour RACINE CARRÉE, 9 plus une *partie de l'unité*, *etc*.

Les nombres 7, 9, . . . , sont dits les PARTIES ENTIÈRES des *racines carrées* de 53, 91, etc.

201. NOMBRES INCOMMENSURABLES. — En cherchant à évaluer la PARTIE DE L'UNITÉ qui doit s'ajouter à la PARTIE ENTIÈRE de la *racine carrée* d'un nombre, on est conduit à la proposition suivante :

Un nombre entier qui n'est pas le carré d'un autre nombre entier, ne saurait avoir pour racine un nombre fractionnaire exact.

En effet, pour qu'un NOMBRE FRACTIONNAIRE EXACT, tel que $\frac{a}{b}$, pût exprimer la *racine carrée* d'un nombre ENTIER, il faudrait que le produit $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$, ou (n° **129**) $\frac{a^2}{b^2}$, fût égal à un nombre ENTIER.

Or cela est impossible ; car supposons (ce qui est toujours permis) que la fraction $\frac{a}{b}$ soit *irréductible*, ou, en d'autres termes, que a et b soient *premiers entre eux*, a^2 et b^2 sont aussi (n° **92**) *premiers entre eux*, et, par conséquent, $\frac{a^2}{b^2}$ ne peut être égal à un nombre ENTIER.

Donc, etc.

Il suit de là que *la racine carrée d'un nombre* ENTIER *qui n'est pas le carré d'un autre nombre* entier ne peut être mesurée *exactement* au moyen de l'unité; elle est dite, en conséquence, nombre INCOMMENSURABLE OU IRRATIONNEL, par opposition au nombre qui peut se mesurer *exactement* au moyen de l'unité et que l'on appelle nombre COMMENSURABLE OU RATIONNEL.

Ainsi les *racines carrées* de 7, 28, 65, nombres d'*un* ou de *deux* chiffres, différents des nombres de la série (n° **200**), sont des nombres INCOMMENSURABLES OU IRRATIONNELS.

Pour *représenter* cette sorte de nombres, on *conserve*, en avant des quantités qui y donnent lieu, le signe *radical* $\sqrt{\ }$ (n° **45**), indicatif de la racine à extraire.

On écrit : $\sqrt{7}$, $\sqrt{28}$, $\sqrt{65}$, et on laisse ces nombres sous cette forme.

(On se dispense, pour la *racine carrée*, de placer en dedans du signe l'indice de la racine.)

Les *racines carrées* des nombres 7, 28, 65, ne pouvant s'extraire *exactement*, on dit que ces nombres ne sont pas des CARRÉS PARFAITS; et les PARTIES ENTIÈRES de leurs *racines*, 2, 5, 8, sont les *racines des plus grands carrés contenus dans ces nombres*, ou, en d'autres termes, les *racines carrées* de ces nombres A MOINS D'UNE UNITÉ PRÈS.

202. L'examen attentif des deux séries de nombres (nº **200**) montre encore que la DIFFÉRENCE entre *deux nombres consécutifs* de la seconde série est d'autant plus considérable, que leurs *racines* sont plus grandes; et si l'on forme ces DIFFÉRENCES, on reconnaît qu'elles suivent une loi *constante*.

Ainsi l'on a :

$$\begin{array}{l} 100 - 81 = 19 = 2 \text{ fois } 9 + 1 \\ 81 - 64 = 17 = 2 \text{ fois } 8 + 1 \\ 64 - 49 = 15 = 2 \text{ fois } 7 + 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

De cette observation on déduit la proposition générale que nous allons démontrer :

La différence entre les carrés de deux nombres entiers consécutifs est égale au double du plus petit de ces deux nombres, augmenté d'une unité.

Soient, en effet, a et $a+1$ deux nombres *entiers consécutifs;* on a, en appliquant la règle du nº **48** et en observant que le *carré* de 1 est 1,

$$(a+1)^2 \text{ ou } (a+1)(a+1) = a^2 + a \times 1 + 1 \times a + 1,$$

d'où

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1,$$

expressions différentes de a^2 (carré de a), de la quantité $2a+1$; ce qui justifie la proposition énoncée.

Ainsi, la DIFFÉRENCE des *carrés* de 348 et de 347 est égale à 2 fois 347 + 1 ou à 695.

D'où il suit qu'entre les *carrés* de ces deux nombres, il y a 694 nombres qui ne sont pas des *carrés parfaits*.

Ces notions établies, passons aux opérations de l'extraction de la racine carrée d'un nombre.

§ I. — EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE D'UN NOMBRE A MOINS D'UNE UNITÉ PRÈS.

Extraction de la racine carrée d'un nombre entier.

203. La racine carrée d'un *nombre entier* pouvant être (nº **201**) un nombre *commensurable* ou *incommensurable*, proposons-nous, d'abord, de rechercher soit *cette racine* si le nombre proposé est un *carré parfait*, soit la PARTIE ENTIÈRE de cette racine, ou, en d'autres termes, d'*extraire la racine du plus grand carré contenu dans un nombre entier*, ou bien encore, d'*extraire la racine carrée de ce nombre à moins d'une unité près*.

Si le nombre donné n'a qu'*un* ou *deux* chiffres, sa *racine* ou la PARTIE ENTIÈRE de sa *racine* s'obtient d'après l'inspection seule des deux séries de nombres (nº **200**).

204. Nous n'avons donc à considérer que des nombres *de plus de deux* chiffres.

Commençons par remarquer que la *racine* de tout nombre *entier* composé de *plus de deux* chiffres, a nécessairement *plus d'un* chiffre, et, par conséquent, renferme des *dizaines* et des *unités*.

Or, si l'on désigne par a et b les *dizaines* et les *unités* de la *racine*, le nombre proposé, quel qu'il soit, peut se représenter par l'expression $(a+b)^2$, qui, développée d'après le principe du nº **48**, donne pour résultat

$$a^2 + ab + ba + b^2 \quad \text{ou} \quad a^2 + 2ab + b^2;$$

d'où il suit que :

Le *carré* d'un nombre composé de *dizaines* et d'*unités* renferme *trois* parties distinctes, savoir : 1º le *carré des dizaines ;* 2º le *double produit des dizaines par les unités;* 3º le *carré des unités*.

205. Ce principe général posé, soit, pour premier exemple, à *extraire la racine carrée* de 6084 :

608 4	78
49	148
118.4	8
118 4	1184
0	

Ce nombre étant composé de *plus de deux* chiffres, mais étant *plus petit* que 10000, carré de 100, sa *racine* (le mot *racine* étant, afin d'abréger, pris pour exprimer soit la *racine exacte*, soit la PARTIE ENTIÈRE de la *racine*), n'a *ni plus ni moins* de *deux* chiffres, c'est-à-dire qu'elle renferme des *dizaines* et des *unités*.

Si l'on pouvait, donc, découvrir dans 6084 le carré des *dizaines* de la racine, on obtiendrait facilement ces *dizaines ;* mais le carré des *dizaines* ne pouvant donner MOINS QUE des *centaines*, doit se trouver *tout entier* dans la partie 60, à gauche des deux derniers chiffres, partie qui peut d'ailleurs renfermer, en outre, des *centaines* et des *mille* provenant des *autres termes du carré*.

Or le nombre 60 est compris entre les deux *carrés parfaits* 49 et 64; par suite, 6000 est lui-même compris entre 4900 et 6400, qui sont les carrés de 70 et de 80; il en est de même du nombre proposé 6084; 7 est donc le *chiffre des dizaines* cherché.

Ainsi la RACINE DEMANDÉE se compose de 7 *dizaines* et d'un certain nombre d'*unités* MOINDRE que DIX.

Le chiffre des *dizaines*, 7, étant trouvé, on l'écrit à droite du nombre donné, en les séparant par un trait vertical; puis on retranche son *carré* 49, de 60, ce qui donne 11 pour reste, à côté duquel on abaisse les deux autres chiffres, 84.

Le résultat, 1184, de cette première opération contient encore (n° **204**) :

Le double produit des dizaines par les unités et le carré des unités.

Or, des *dizaines* multipliées par des *unités* ne pouvant donner au produit MOINS que des *dizaines*, le dernier chiffre 4 ne fait pas partie du *double produit des dizaines par les unités;* ainsi ce *double produit* se trouve renfermé dans la partie à gauche, 118, qu'on sépare du chiffre 4 par un point.

Donc, si, après avoir DOUBLÉ les *dizaines*, ce qui donne 14, on divise 118 par 14, le quotient 8 est le chiffre des *unités*, ou un chiffre *plus fort* que celui des unités.

Ce quotient ne saurait être *plus faible* que le chiffre des *unités*, puisque 118 contenant le produit du *double des dizaines*, 14, par les *unités*, il faut qu'on puisse en retrancher le produit de 14 par le chiffre qu'on essaye; mais il peut être *plus fort*, parce que 118, outre ce double produit, peut contenir encore des *dizaines* provenant du *carré des unités*.

Pour vérifier si le quotient 8 exprime bien les *unités*, il suffit de l'écrire à la droite de 14, ce qui donne 148, puis au-dessous de lui-même, et de multiplier 148 par 8. On forme évidemment ainsi, si 8 est bien le chiffre des unités, 1° le *carré des unités;* 2° le *double produit des dizaines par les unités*.

Or, cette multiplication effectuée donne pour produit 1184, nombre égal au résultat de la *première* opération; et en le retranchant de ce résultat, on a 0 pour reste; donc 78 est la RACINE DEMANDÉE.

En effet, il résulte des opérations précédentes, que l'on a retranché successivement de 6084, le carré de 7 *dizaines* ou de 70, plus le *double produit* de 70 par 8, plus, enfin, le *carré* de 8, c'est-à-dire les TROIS parties qui entrent dans la composition du carré de 70 + 8 ou de 78; et comme le *reste* est 0, il s'ensuit que 6084 est le carré de 78, et, par conséquent, est (n° **201**) un CARRÉ PARFAIT.

Soit, pour deuxième exemple, le nombre 841 :

84.1	29
4	4.9
44.1	9
44 1	44 1
0	

Ce nombre étant compris entre 100 et 10000, sa racine se compose encore de *deux* chiffres, ou de *dizaines* et d'*unités*.

On prouverait, comme précédemment, que la racine du PLUS GRAND CARRÉ contenu dans 8, partie à *gauche* des deux chiffres que l'on a d'abord séparés, est le chiffre des *dizaines* de la racine demandée.

Or, le PLUS GRAND CARRÉ contenu dans 8 est 4, dont la racine est 2, que l'on place à la droite du nombre proposé ; puis on retranche 4 de 8, ce qui donne le reste 4.

Abaissant à côté de ce reste la tranche suivante 41, on obtient 441, nombre qui renferme encore le *double produit des dizaines par les unités*, plus le *carré des unités*.

On ferait voir encore, comme dans le premier exemple, que, si l'on sépare le dernier chiffre à droite, 1, par un point, et qu'on divise la partie à gauche, 44, par 4, *double des dizaines*, le quotient est le chiffre des *unités*, ou un chiffre *plus fort*.

Mais ici, le quotient est 11, et il est évident qu'on ne saurait avoir plus de 9 *unités simples*, car autrement ce serait supposer que le chiffre trouvé pour les *dizaines* ne serait pas le véritable chiffre.

Il faut donc essayer 9 : pour cela, on place 9 à la droite de 4, *double des dizaines*, puis au-dessous de lui-même, et l'on multiplie 49 par 9. Or, cette multiplication donne le produit 441, qui est égal au résultat de la *première* opération : ainsi, 29 est la *racine demandée*, et le nombre proposé est un CARRÉ PARFAIT.

En réfléchissant sur le procédé qu'on vient de suivre pour *extraire la racine carrée* d'un nombre de *trois* ou de *quatre* chiffres, on voit qu'il se compose de *deux* opérations principales :

La PREMIÈRE consiste, après avoir séparé les deux derniers chiffres à droite, *à extraire la racine du plus grand carré contenu dans la partie à gauche, et à retrancher ce carré*.

Cette racine exprime nécessairement les *dizaines* de la racine totale ; car le carré de cette racine suivie d'un *zéro*, et le carré de cette même racine *augmentée d'une unité* et suivie également d'un *zéro*, comprennent évidemment le nombre proposé.

La SECONDE opération consiste, après avoir abaissé les deux chiffres à droite du reste, et séparé le dernier de ces deux chiffres par un point, consiste, dis-je, *à diviser la partie à gauche par le double du chiffre déjà trouvé à la racine*.

Le quotient est le chiffre des *unités*, ou un chiffre *plus fort;*

Et pour s'assurer si c'est bien le chiffre cherché, on forme le *carré* de ce quotient, puis le produit du *double des dizaines* par ce quotient. Si la somme qu'on obtient est *égale* ou *inférieure* au résultat de la PREMIÈRE opération, on est sûr que le quotient exprime les *unités*, et on l'écrit alors à la *droite* des *dizaines;* dans le cas contraire, on *diminue* le quotient d'*une* ou de *plusieurs* unités.

N. B. — On ne pourrait pas mettre d'abord en évidence le *carré des unités* : car ce carré donne en général (n° **200**) des *dizaines* qui se combinent avec celles que fournit le double produit des *dizaines* par les *unités*; en sorte qu'il est impossible de déterminer d'une manière précise dans quelle partie du nombre proposé se trouve le *carré des unités*.

Soit, pour troisième exemple, le nombre 3719:

371 9	60
36	12
11.9	

La racine du *plus grand carré* contenu dans 37 est 6, chiffre que l'on écrit à la droite du nombre donné, et l'on retranche le *carré* de 6, ou 36, de 37, ce qui donne 1, à côté duquel on abaisse la tranche 19, dont on sépare le dernier chiffre à droite par un point.

On *double* le chiffre 6 déjà trouvé à la racine; puis on aurait à diviser par 12 la partie à gauche du dernier chiffre; mais comme ici le dividende partiel 11 est MOINDRE que le diviseur, on doit en conclure que la racine n'a pas d'*unités simples*, puisque, s'il y en avait seulement *une*, on devrait pouvoir retrancher de 119 le produit de 121 par 1; ce qui est impossible.

On place, en conséquence, un 0 à la droite des 6 *dizaines*, et l'on a 60 pour la *racine cherchée*, avec un reste égal à 119.

Il suit de là que le nombre proposé n'est pas un CARRÉ PARFAIT, et que 60 est la *racine du* PLUS GRAND CARRÉ *contenu dans ce nombre*, ou, en d'autres termes, la *racine* de ce nombre A MOINS D'UNE UNITÉ PRÈS.

Le *reste* est ce qu'il faudrait *retrancher* du nombre proposé pour que le nombre résultant fût un CARRÉ PARFAIT; il est, et *doit être*, en effet (n° **202**), MOINDRE QUE *le double de* 60, *plus un*.

Nous verrons, plus tard, comment on peut évaluer *approximativement* la *partie de l'unité* qui doit s'ajouter à la *partie entière* de la racine.

206. Passons à l'extraction de la racine carrée d'un nombre de *plus de quatre* chiffres.

Soit 56821444 le nombre proposé :

56.82.14.44	7538		
49	145	1503	15068
78.2	5	3	8
72 5	725	4509	120544
5 71.4			
4 50 9			
1 20 54.4			
1 20 54 4			
0			

Le nombre proposé surpassant 10000, sa racine doit être *plus grande* que 100, c'est-à-dire avoir *plus de deux* chiffres.

Mais, quel qu'en soit le nombre, on peut toujours regarder cette racine comme composée de *deux* parties distinctes : *dizaines* et *unités simples*. (Par exemple, 5367 est égal à 5360 ou 536 *dizaines*, plus 7 unités.)

Dès lors, le *carré de cette racine*, ou le nombre proposé, se compose de *trois* parties, savoir :

Le *carré des dizaines*, plus le *double produit des dizaines par les unités*, plus le *carré des unités*.

Or le carré des *dizaines* donne au moins des *centaines;* donc la dernière tranche, 44, ne peut en faire partie; et c'est dans la partie à *gauche* que se trouve ce carré.

Je dis maintenant que si l'on cherche la racine *du plus grand carré* contenu dans 568214, en considérant ce nombre comme s'il exprimait des *unités simples,* on aura le NOMBRE TOTAL des *dizaines* de la racine demandée.

En effet, soit a la racine du *plus grand carré* contenu dans 568214; il est clair d'abord que la racine demandée a au moins un nombre a de *dizaines*, puisque $a^2 \times 100$ peut être retranché de 56821400, et *à fortiori,* de 56821444.

D'ailleurs, la racine ne saurait avoir $(a+1)$ *dizaines;* car $(a+1)^2$ étant *plus grand* que 568214, $(a+1)^2 \times 100$ *surpasse* 56821400 d'une *centaine* au moins, et, par conséquent, est *plus grand* que 56821444.

Donc enfin, la racine demandée se compose de a *dizaines* plus d'un certain nombre d'*unités moindre* que *dix;* et la question est ainsi ramenée à extraire la racine carrée du nombre 568214, considéré (pour le moment) comme exprimant des *unités simples*.

En raisonnant sur ce nombre comme sur le nombre proposé, on est conduit, pour avoir les *dizaines* de sa racine, à extraire la racine du *plus grand carré* contenu dans la partie à gauche de 14, c'est-à-dire dans 5682; et pour obtenir les *dizaines* de cette *nouvelle racine,* il faut encore faire *abstraction* des deux derniers chiffres 82, et extraire la racine du *plus grand carré* contenu dans 56.

Extrayons donc la racine de 56 : il vient 7 pour 49; on écrit 7 à la *droite* du nombre proposé, et l'on retranche 49 de 56, ce qui donne le reste 7, à côté duquel on abaisse la tranche suivante 82 (parce qu'il faut maintenant déterminer le second chiffre de la racine du *plus grand carré* contenu dans 5682). Séparant le dernier chiffre à *droite* de 782, puis divisant 78 par 14, *double* de la racine déjà trouvée, on a pour quotient 5, que l'on écrit à la droite de 14, ce qui donne 145, puis écrivant 5 au-dessous de 145, on multiplie 145 par 5, et l'on soustrait le produit 725, de 782; 75 représente alors la *collection des dizaines* de la racine du nombre 268214.

Pour en obtenir les *unités*, on abaisse à côté du reste 57, la tranche 14, ce qui donne 5714, dont on sépare le dernier chiffre. Divisant 571 par 150, *double* de la racine déja trouvée, on a pour quotient 3, que l'on écrit *à droite de* 150, ce qui donne 1503; puis écrivant 3 au-dessous de 1503, on multiplie 1503 par 3, et l'on retranche le produit 4509, de 5714; 753 exprime alors le NOMBRE TOTAL des *dizaines* de la racine demandée.

Enfin, pour avoir le chiffre des *unités*, on abaisse à côté du reste 1205, la dernière tranche 44; puis faisant *abstraction* du dernier chiffre, on divise la partie *à gauche* 12054 par 1506, *double* de la racine déjà trouvée: il vient pour quotient 8, que l'on écrit à la *droite* de 1506, ce qui donne 15068. Multipliant 15068 par 8, et soustrayant le produit de 120544, on obtient *zéro* pour reste.

Donc 5738 est la RACINE DEMANDÉE.

Pour *vérifier* l'opération, il suffit de multiplier 7538 par lui-même, d'après les règles de la multiplication.

207. RÈGLE GÉNÉRALE. — Si l'on a bien saisi les différentes parties de l'opération qui vient d'être développée, on en déduira facilement la règle suivante :

Séparez, à partir de la droite, le nombre donné, en tranches de deux chiffres chacune, sauf la première à gauche qui PEUT *n'avoir* QU'UN SEUL *chiffre, et tracez, à la droite du nombre, deux lignes, l'une verticale et l'autre horizontale, disposées comme pour l'opération de la* DIVISION;

Cela fait, *pour avoir le* PREMIER CHIFFRE *de la racine, extrayez la racine du plus grand carré contenu dans cette première tranche à gauche;*

Écrivez CE PREMIER CHIFFRE *à la droite du trait vertical, formez-en le carré que vous retranchez de la première tranche à gauche, et abaissez à droite du reste la tranche suivante;*

Afin d'obtenir le SECOND CHIFFRE *de la racine, séparez par un point le dernier chiffre de la tranche abaissée; formez le double du premier chiffre de la racine, que vous écrivez au-dessous du trait horizontal; divisez la partie à gauche du chiffre séparé, par ce double du premier chiffre de la racine, en ayant soin de réduire le quotient à 9, s'il se trouvait plus fort; écrivez ce quotient à droite du nombre formé par le double du premier chiffre de la racine; multipliez le nombre résultant par ce quotient lui-même; essayez de retrancher le produit du premier reste suivi de la seconde tranche, et, si cette soustraction n'est pas possible, diminuez le quotient du nombre d'unités nécessaires pour qu'elle puisse s'effectuer;*

Écrivez le SECOND CHIFFRE *de la racine, ainsi trouvé, à la droite du premier, et abaissez à droite du reste de la dernière soustraction la troisième tranche;*

Pour avoir le TROISIÈME CHIFFRE *de la racine, faites absolument la même série d'opérations que pour obtenir* LE SECOND, *en séparant par un point le dernier chiffre de la troisième tranche abaissée, divisant la partie à gauche de ce chiffre par le double du nombre que forment les deux premiers chiffres de la racine, et opérant sur ce quotient comme sur le précédent;*

Faites de même pour obtenir les chiffres suivants de la racine, que vous écrivez successivement chacun, à la droite du précédent, jusqu'à ce que vous ayez abaissé toutes les tranches du nombre donné.

Le nombre proposé est ou n'est pas un *carré parfait*, suivant que le *dernier reste* de ces opérations est *nul* ou est *différent de zéro*.

208. REMARQUES. — 1°. Il résulte de la nature même du procédé que le *nombre des chiffres de la racine est égal au nombre des tranches séparées dans le nombre donné;* ce qu'on peut, du reste, démontrer *directement*.

2°. On a remarqué déjà (n° **205**, 3e ex.) que lorsque le nombre donné n'est pas un *carré parfait*, le *reste* doit être *moindre* que le *double de la racine*, AUGMENTÉE *d'une unité*. D'après le même principe, le *reste de chaque opération partielle* doit tre *au plus* égal au *double* du nombre formé par les chiffres de la racine précédemment trouvés, puisque ce nombre est lui-même, à proprement parler, la *racine* de LA PARTIE du nombre donné, qui lui correspond, considérée comme exprimant des unités simples.

On peut ainsi reconnaître, dans le cours de l'opération, qu'un chiffre trouvé pour la racine a été *mal déterminé* et doit être *augmenté* d'une ou de plusieurs unités.

3°. Il est évident que, pour faire la *preuve* de l'opération, il faut multiplier par lui-même le nombre trouvé pour la racine, et, s'il y a un *reste*, l'ajouter au produit, pour reproduire le nombre donné; c'est une conséquence de la définition même de la racine carrée.

209. AUTRE REMARQUE. — Il peut arriver, dans l'application du procédé à des exemples particuliers, qu'après avoir abaissé une tranche, et séparé par un point le dernier chiffre à droite de cette tranche, on reconnaisse que la partie à gauche de ce chiffre est *moindre que* le *double* du nombre formé par les chiffres de la racine, déjà trouvés. C'est un indice certain que la *racine demandée* n'a pas d'unités de l'ordre qui suit celui du dernier chiffre obtenu; il faut alors mettre un 0 à la racine, afin de conserver aux chiffres précédents leur valeur relative, puis abaisser la tranche suivante, et continuer l'opération d'après la règle générale.

On trouve ainsi :

$$\sqrt{17698849} = 4207, \quad \textit{exactement.}$$

210. *Manière d'obtenir la racine à moins d'*UNE DEMI-UNITÉ *près.* — On a vu que, lorsqu'un nombre *entier* n'est pas un *carré parfait*, l'application du procédé donne la racine *à moins d'une unité près*. Mais on déduit de l'inspection même du *reste* comparé à la *racine*, le moyen d'obtenir toujours cette racine *à moins d'une* DEMI-UNITÉ *près*, sans avoir besoin, pour cela, de pousser plus loin l'opération.

Soit, pour exemple, à extraire les *racines carrées* des nombres

$$697685 \quad \text{et} \quad 18308009;$$

on a, pour résultats,

835 avec le *reste* 460, et 4278 avec le *reste* 6725.

Ces restes sont, l'un *plus petit*, et l'autre *plus grand* que les PARTIES ENTIÈRES des *racines* correspondantes.

Or, je dis que, dans le premier cas, la *racine obtenue*, 835, exprime (EN MOINS) la *racine cherchée*, À MOINS D'UNE DEMI-UNITÉ PRÈS, et que, dans le second, la *racine obtenue plus un*, ou 4279, donne, EN PLUS, *la même* approximation.

En effet, soient a et $a+\frac{1}{2}$ deux nombres différant entre eux d'une DEMI-UNITÉ.

Si l'on développe $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$ d'après le principe du n° **48** et les règles pour les opérations sur les *fractions*, on a

$$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 = a^2 + 2a.\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = a^2+a+\frac{1}{4},$$

expression qui prouve que *la différence entre le carré d'un nombre et le carré du nombre qui* SURPASSE *le premier d'une* DEMI-UNITÉ, est *égale à ce premier nombre* AUGMENTÉ *de* $\frac{1}{4}$. Il suit de là, que si a représente la PARTIE ENTIÈRE de la *racine* d'un nombre, et r le *reste* de l'opération, la RACINE TOTALE sera *inférieure* ou *supérieure* à $a+\frac{1}{2}$, suivant que r sera *inférieur* ou *supérieur* à $a+\frac{1}{4}$, ou simplement à a, puisque a et r sont nécessairement des nombres *entiers*. Cette *racine* est d'ailleurs nécessairement *moindre* que $a+1$.

Donc, les nombres a ou $a+1$, selon le cas, diffèrent de la *racine totale*, l'un EN MOINS, l'autre EN PLUS, d'une quantité moindre que UNE DEMI-UNITÉ. C. Q. F. D.

Extraction de la racine carrée d'un nombre fractionnaire à moins d'une unité ou d'une demi-unité près.

211. Lorsque l'on a à extraire la racine carrée d'un *nombre fractionnaire* composé d'un *entier* et d'une *partie de l'unité*, et qu'on a besoin seulement de la PARTIE ENTIÈRE de cette racine, ou, en d'autres termes, qu'on ne doit extraire la racine qu'A MOINS D'UNE UNITÉ, ou d'UNE DEMI-UNITÉ PRÈS, *il n'y a pas lieu de tenir compte de la fraction*.

En effet, si l'ENTIER du nombre *fractionnaire* donné n'est pas un *carré parfait*, les *deux carrés consécutifs* qui le comprennent, différant nécessairement (n° **202**) de *plus d'une unité*, ce nombre *total* est lui-même compris entre *ces deux carrés*, et, par conséquent, sa *racine* est comprise entre celles *des deux carrés*, ou, en d'autres termes, a la MÊME PARTIE ENTIÈRE que la *racine de l'*ENTIER.

Ainsi, $47\frac{11}{15}$ étant compris entre les *deux carrés consécutifs* 36 et 49, sa *racine* est comprise entre 6 et 7, *racines de ces carrés*, ou bien, a pour PARTIE ENTIÈRE 6, aussi bien que la *racine de l'*ENTIER 47.

Si l'ENTIER était un *carré parfait*, le nombre *total* aurait pour PARTIE ENTIÈRE de sa *racine* la *racine* même de cet ENTIER, puisqu'il serait compris entre ce carré et le carré immédiatement supérieur.

Caractères particuliers d'un nombre entier non carré parfait.

212. On reconnaît souvent, à la seule inspection d'un nombre *entier*, qu'*il ne saurait être un carré parfait;* et cela peut être utile dans la pratique de l'*extraction de la racine carrée*. Voici les indices principaux :

1°. *Aucun nombre terminé par* 2, 3, 7, 8, *ne peut être un carré parfait.*

Car, d'après la composition du carré d'un nombre qui a *plus d'un chiffre* (n° **204**), *les unités simples* de ce carré ne peuvent évidemment provenir que du *carré des unités* de la racine. Or, le tableau des carrés des *neuf* premiers nombres (n° **200**) montre qu'aucun d'eux n'est terminé par 2, 3, 7, 8.

2°. *Aucun nombre terminé par le chiffre* 5 *ne peut être un carré parfait, si le chiffre de ses dizaines n'est pas* 2.

C'est encore une conséquence de la composition du carré d'un nombre de *plus d'un* chiffre.

En effet, les deux derniers chiffres du nombre proposé ne sauraient être produits que par le carré des *unités simples*, puisque, le chiffre de *ces unités* étant 5, le produit des *dizaines* par le *double* de 5, ou par 10, exprime nécessairement des *centaines*. Or le carré de 5 est 25; donc le nombre proposé doit être *terminé* par 25 pour qu'il puisse être un *carré parfait*.

3°. *Un nombre terminé par* UN SEUL ou *par un* NOMBRE IMPAIR *quelconque de zéros, ne peut être un carré parfait.*

Car, si la racine était *exacte*, elle ne pourrait être qu'un nombre terminé par *un* ou *plusieurs* zéros; et son *carré* ou le produit de cette racine par elle-même devrait (n° **200**) être terminé par *deux fois* autant de zéros qu'il y en aurait dans la racine, c'est-à-dire par un nombre *pair* de zéros ; ce qui serait contraire à l'énoncé de la proposition.

4°. *Un nombre, reconnu divisible par un* FACTEUR PREMIER *d, ne peut être un carré, s'il n'est divisible par le carré, d^2, de ce facteur.*

En effet, la *racine*, si elle pouvait être *exacte*, devrait contenir le facteur d ; et en la multipliant par elle-même, on obtiendrait un produit renfermant nécessairement le facteur d^2 ; donc, etc.

Ainsi, par exemple, tout nombre *pair* doit être *divisible* par 4, pour qu'il puisse être un *carré parfait.*

De même, tout nombre *divisible* par 3 doit l'être aussi par 9, pour être un *carré parfait.*

N. B. — Ces différents caractères ne sont, à proprement parler, que des indices *négatifs ;* mais ils peuvent souvent épargner des calculs inutiles.

Application de la théorie de la racine carrée pour la recherche des diviseurs premiers d'un nombre.

213. L'extraction de la racine carrée d'un nombre entier *à moins d'une unité près* donne le moyen d'obtenir une expression autre que celle du n° **100**, comme *limite* des *essais* pour la recherche des *diviseurs premiers* d'un nombre.

Il est aisé de voir, en effet, que le plus petit *nombre premier* qui, pris pour diviseur d'une division dont le nombre proposé est le dividende, donne un quotient *fractionnaire moindre* que ce diviseur, est précisément le *nombre premier immédiatement supérieur* à la racine du plus grand carré contenu dans le nombre donné.

La PARTIE ENTIÈRE de la *racine carrée* d'un nombre est donc la *limite des essais* pour la recherche de ses *diviseurs premiers.*

On parvient *directement* à cette expression par une démonstration tout à fait analogue à celle du n° **100** ; nous y reviendrons dans le huitième chapitre.

§ II. — EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE, PAR APPROXIMATION, D'UN NOMBRE ENTIER OU FRACTIONNAIRE.

Extraction de la racine carrée avec un degré d'approximation déterminé.

Lorsque le nombre dont on demande la racine carrée n'est pas un CARRÉ PARFAIT, il est toujours possible d'obtenir une valeur de cette racine *aussi approchée que l'on veut.*

214. ÉVALUATION APPROXIMATIVE DE LA RACINE CARRÉE EN UNITÉS D'UNE ESPÈCE QUELCONQUE. — Un nombre quelconque étant donné, déterminer sa racine carrée, *à moins d'une fraction près* $\frac{1}{n}$, n *étant entier;* ou, en d'autres termes, exprimer la racine carrée d'un nombre *par une fraction ayant* n *pour dénominateur et ne différant de la racine totale que d'une quantité* MOINDRE *que* $\frac{1}{n}$.

[Cette question est analogue à celle qui a été traitée au n° **155** pour l'évaluation approximative des *fractions*.]

Soit a le nombre donné (*entier* ou *fractionnaire*); on peut toujours (n° **155**) le mettre sous la forme $\frac{a \times n^2}{n^2}$, et si après avoir effectué le produit exprimé par $a \times n^2$, on *détermine le nombre entier* que contient ce produit; qu'ensuite *on cherche* la PARTIE ENTIÈRE a' de la *racine carrée* du nombre *entier*, *abstraction* faite de la *fraction* qui peut y être jointe (n° **211**), je dis que $\frac{a'}{n}$ sera la *racine démandée*.

En effet, il résulte de ces diverses opérations, que $a \times n^2$ est compris entre a'^2 et $(a'+1)^2$; donc aussi $\frac{a \times n^2}{n^2}$ est compris entre $\frac{a'^2}{n^2}$ et $\frac{(a'+1)^2}{n^2}$; par conséquent, la *racine carrée* de $\frac{a \times n^2}{n^2}$, ou de a, est elle-même comprise entre les deux nombres

$$\frac{a'}{n} \quad \text{et} \quad \frac{a'+1}{n},$$

quantités dont la différence est égale à $\frac{1}{n}$.

Ainsi, $\frac{a'}{n}$ et $\frac{a'+1}{n}$ ne diffèrent de $\sqrt{a}$ que d'une quantité *moindre* que $\frac{1}{n}$, n pouvant être un nombre *aussi grand que l'on veut*.

215. L'*approximation* fournie par l'une ou l'autre de ces deux fractions sera même (n° **210**) marquée par $\frac{1}{2n}$, soit en *moins*, soit *en plus*, suivant que *le reste* de l'opération exécutée sur $\sqrt{a \times n^2}$ sera *inférieur* ou *supérieur* à la PARTIE ENTIÈRE obtenue à la racine.

EXEMPLE. — *On demande la racine carrée* du nombre

$$379\frac{43}{59}, \text{ à } \frac{1}{40} \text{ près.}$$

Ce nombre peut être mis sous la forme

$$\frac{\left(379\frac{43}{59}\right) \times (40)^2}{(40)^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{22404}{59} \times 1600}{(40)^2}.$$

Effectuant la multiplication de 22404 par 1600, ce qui donne 35846400, puis la division de ce produit par 59, on obtient pour quotient

$$607566\,\frac{6}{59}.$$

Or la PARTIE ENTIÈRE de la *racine carrée* de ce dernier nombre, *abstraction* faite de $\frac{6}{59}$, est

779 avec le *reste* 725.

Donc $\frac{779}{40}$, ou $19\frac{19}{40}$, est la valeur de $\sqrt{379\frac{43}{59}}$, à *moins de* $\frac{1}{80}$ *près*, *en moins* (n° **210**) : car le reste 725 est *moindre* que 779, PARTIE ENTIÈRE de $\sqrt{607566}$.

On trouverait de même que

$$\sqrt{\frac{13}{19}}, \text{ à } \frac{1}{15} \text{ près, } = \frac{12}{15}, \text{ ou } \frac{4}{5}, \text{ à moins de } \frac{1}{30} \ (\textit{en moins});$$

$$\sqrt{3\frac{41}{72}}, \text{ à } \frac{1}{60} \text{ près, } = \frac{113}{60}, \text{ ou } 1\,\frac{53}{60}, \text{ à moins de } \frac{1}{120} \ (\textit{en moins}).$$

216. ÉVALUATION APPROXIMATIVE DE LA RACINE CARRÉE EN DÉCIMALES. — Le nombre dont on a à extraire la racine carrée peut être un *nombre entier*, ou une *fraction décimale*, ou une *fraction ordinaire*; nous aurons donc à distinguer trois cas, que nous allons développer successivement.

PREMIER CAS. — Soit à *évaluer* $\sqrt{4759}$, *à* $\frac{1}{1000}$ près.

Conformément à la règle du numéro précédent, il faut *multiplier* 4759 *par* $(1000)^2$, ou 1000000, ce qui revient à le faire suivre de *six* zéros, puis *extraire*, à une unité près, la *racine carrée* du nombre ainsi formé.

Mais si l'on remarque que, d'après la règle générale du n° **207**, le nombre doit être d'abord partagé en tranches de *deux* chiffres à partir de la *droite*, on comprendra qu'il est, pour le moment, inutile de placer les *six* zéros à la suite de 4759, et qu'il suffira d'abaisser, au fur et à mesure, une tranche de *deux* zéros à la droite du reste de chaque opération partielle.

Cela posé, voici comment il faut opérer :

47.6 9	68985			
11 5.9	12.8	136.9	1378.8	1379.65
1 3 50 0	8	9	8	5
1 17 90.0				
7 59 60.0				
69 77 5				

Après avoir extrait, suivant le procédé ordinaire, la racine du *plus grand carré* contenu dans 4759, ce qui donne le *reste* 135, on place *deux* zéros à sa droite, en séparant le *dernier* chiffre à *droite*, puis on opère comme précédemment.

Le reste de cette nouvelle opération étant 1179, on le fait suivre de *deux* zéros dont on sépare le *dernier* chiffre, et l'on opère de même.

Parvenu au reste 7596, on place les *deux* derniers zéros à sa droite, et l'on obtient, pour la *partie entière* de la racine, 68985.

Il faut maintenant diviser cette *partie entière* par 1000, ou séparer *trois chiffres décimaux* vers sa droite; et l'on trouve enfin, pour la RACINE DEMANDÉE,

$$68{,}985, \quad \text{ou plutôt} \quad 68{,}986,$$

à moins de un *demi-millième* près, puisque le reste 69775 SURPASSE la *partie entière de la racine* (*voyez* n° **210**).

N. B. — D'après ce mode de procéder, qui consiste à écrire, au fur et à mesure, les tranches de *deux* zéros dont on a besoin, on pourrait se dispenser de fixer d'avance le *degré d'approximation*; chaque tranche de *deux* zéros, que l'on place à côté du reste d'une opération partielle, fournit une nouvelle approximation.

Il pourrait arriver, d'ailleurs, que le nombre donné fût un *carré parfait*, ce dont on ne s'apercevrait qu'après avoir appliqué la règle ordinaire de l'extraction de la racine; et dès lors, les zéros que l'on aurait écrits tout d'abord deviendraient tout à fait inutiles.

217. RÈGLE GÉNÉRALE. — Pour évaluer en *décimales* la racine carrée d'un nombre *entier*, *concevez, écrits à la droite de ce nombre*, DEUX FOIS AUTANT *de zéros que la racine doit avoir de chiffres décimaux; extrayez, à une unité près, la racine carrée du nombre ainsi formé, en ayant soin de placer, au fur et à mesure, toutes les* TRANCHES DE DEUX ZÉROS *à la droite soit d'abord du nombre proposé lui-même, si besoin en est, soit des restes successifs; puis, enfin, séparez par une virgule, vers la droite de la racine obtenue, le nombre de décimales demandé.*

Vous trouverez, d'après cette règle,

$$\sqrt{2} = 1{,}4142136, \text{ à } \frac{1}{2}\cdot 0{,}0000001 \text{ près, en } \textit{plus};$$

$$\sqrt{7} = 2{,}64575, \text{ à } \frac{1}{2}\cdot 0{,}00001 \text{ près, en } \textit{moins};$$

$$\sqrt{227} = 15{,}0665, \text{ à } \frac{1}{2}\cdot 0{,}0001 \text{ près, en } \textit{moins};$$

$$\sqrt{98437} = 313{,}747, \text{ à } \frac{1}{2}\cdot 0{,}001 \text{ près, en } \textit{plus}.$$

218. SECOND CAS. — La règle pour l'extraction de la racine carrée d'*une fraction décimale* est une conséquence immédiate de la règle précédente.

Commencez par rendre le nombre des chiffres décimaux PAIR, s'il ne l'est pas, ce qui se fait [sans changer (n° **162**) la valeur du nombre donné] *en plaçant un* 0 *à la droite de ce nombre,* afin que son dénominateur étant alors 100, 10000, 1000000, . . . , puisse être mis sous la forme

$$(10)^2, \quad (100)^2, \quad (1000)^2, \ldots;$$

faites ensuite *abstraction de la virgule*, et *opérez* d'après la règle du numéro précédent.

Prenons pour exemple le nombre 7,14056. Ce nombre équivaut à 7,140560.

La PARTIE ENTIÈRE de la racine carrée de 7140560 est 2672; donc la racine demandée est 2,672, à 0,001 près.

Ici, le nombre des chiffres décimaux de la racine est indiqué par le nombre des décimales que renfermait le nombre proposé.

Si l'on voulait une plus grande approximation, il suffirait (n° **216**) d'écrire à la droite du reste de l'opération déjà exécutée, une tranche de *deux* zéros, puis à la droite du reste de la nouvelle opération, une seconde tranche de *deux* zéros; *ainsi de suite*.

On aurait, par ce moyen, pour la racine, à *moins* de $\frac{1}{2} \cdot 0{,}00001$ *près*, . . . , 2,67218.

Quelquefois, au contraire, le nombre des chiffres décimaux du nombre donné est *supérieur au double* du nombre des décimales exigé pour la racine.

On doit alors *supprimer*, vers la droite du nombre, les chiffres qui excèdent ce *double*, et *opérer* ensuite sur la partie à gauche des chiffres *supprimés*.

C'est une conséquence nécessaire de ce que le chiffre des *dixièmes* de la racine doit correspondre aux *deux* premiers chiffres à droite de la virgule, dans le nombre proposé ; le chiffre des *centièmes* aux *deux* chiffres suivants; et ainsi des autres.

Ainsi, soit proposé de trouver la racine carrée de 0,27934 à 0,01 *près*.

En supprimant le chiffre 4, on a 0,2793, dont la racine carrée, à 0,01 près, est 0,52.

Le chiffre suivant de la racine serait fourni par la tranche 40 *millioniémes*, etc.

219. TROISIÈME CAS. — L'opération à faire pour évaluer en *décimales* la racine carrée d'une *fraction ordinaire*, se déduit des deux précédentes :

Commencez par convertir la fraction ordinaire *en décimales* (n° **171**), en poussant l'opération jusqu'à ce que vous ayez obtenu *deux fois autant* de chiffres décimaux que vous voulez en avoir à la racine; puis *opérez* sur la fraction résultante, comme il vient d'être dit.

Ainsi,

$$\sqrt{23+\frac{13}{15}}=\sqrt{23,866666}=4,885, \text{ à } 0,001 \text{ près;}$$

de même,

$$\sqrt{\frac{14}{19}}=\sqrt{0,73684210}=0,8568, \text{ à } 0,0001 \text{ près.}$$

Voici de nouvelles applications de l'évaluation des racines carrées en *fractions décimales :*

$$\sqrt{31,027}=5,570, \text{ à } 0,001 \textit{ près;}$$

$$\sqrt{0,01001}=0,10004, \text{ à } 0,00001 \textit{ près;}$$

$$\sqrt{2\,\frac{29}{31}}=1,967, \text{ à } 0,001 \textit{ près;}$$

$$\sqrt{\frac{11}{14}}=0,856, \text{ à } 0,001 \textit{ près.}$$

N. B. — Le développement en décimales de la racine carrée d'un nombre *non carré parfait* conduisant toujours à une *suite infinie* de chiffres décimaux, on pourrait, au premier abord, être tenté d'en inférer que la fraction décimale doit finir par devenir *périodique* (n° **174**); mais il n'en saurait être ainsi; car, si cela pouvait être, comme toute *fraction périodique* est équivalente (n^{os} **176** et **178**) à une *fraction ordinaire*, il en résulterait qu'un nombre, *incommensurable* par sa nature, serait égal à un nombre *commensurable;* ce qui impliquerait contradiction.

Considérations sur l'extraction de la racine carrée d'un nombre fractionnaire.

Jusqu'ici, nous avons exposé les moyens d'*évaluer* les racines carrées des nombres, soit *exactement*, s'il y a lieu, soit *approximativement*, en *unités d'une espèce déterminée.*

Mais, quand il s'agit d'extraire la racine carrée d'une *fraction* en particulier, il arrive souvent que le *degré d'approximation* n'est pas fixé d'avance; et dans ce cas, il y a lieu d'établir d'autres règles.

220. Il résulte du procédé indiqué au n° **129** pour *multiplier* une fraction par une fraction, que *le carré d'une fraction,* qui n'est autre chose que le produit de cette fraction par elle-même, *est égal à une autre fraction* dont les deux termes sont *les carrés de ceux de la fraction proposée.*

Ainsi,

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25},\quad \left(\frac{7}{12}\right)^2=\frac{49}{144},\quad \left(\frac{17}{6}\right)^2=\frac{289}{36},$$

et généralement

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}.$$

Donc réciproquement

$$\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5},\quad \sqrt{\frac{49}{144}}=\frac{7}{12},\quad \sqrt{\frac{289}{36}}=\frac{17}{6},\quad \sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=\frac{a}{b}.$$

On conclut de là que, pour extraire la racine carrée d'une *fraction* dont les deux termes sont des CARRÉS PARFAITS, il suffit d'*extraire la racine carrée de chacun de ces termes*, puis de *former une nouvelle fraction ayant pour* NUMÉRATEUR *la première racine, et pour* DÉNOMINATEUR *la seconde*.

On déduit, d'ailleurs, de la définition même de la multiplication, que le *carré* d'une FRACTION PROPREMENT DITE est toujours *moindre que* sa *racine*, puisqu'il n'est qu'*une partie* de la fraction marquée par la fraction elle-même;

Donc, réciproquement, *la racine carrée* d'une FRACTION PROPREMENT DITE est *plus grande* que son *carré*.

Ainsi, par exemple,

$$\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}=\frac{15}{25},\quad \text{nombre } \textit{plus grand que } \frac{9}{25};$$

$$\sqrt{\frac{49}{144}}=\frac{7}{12}=\frac{84}{144},\quad \text{nombre } \textit{supérieur à } \frac{49}{144};$$

$$\sqrt{0,36}=0,6=0,60,\quad \text{nombre } \textit{plus grand que } 0,36.$$

221. Mais, le plus communément, les termes de la fraction ne sont pas des carrés parfaits; et alors il y a lieu de considérer *deux* cas principaux, savoir : le dénominateur *est*, ou *n'est pas* un CARRÉ PARFAIT.

Examinons chacun de ces cas successivement.

PREMIÈREMENT. — *Le dénominateur* SEUL *est un carré.*

Soit la fraction $\frac{53}{144}$.

Convenons, pour le moment, d'appliquer à cette fraction la règle qui vient d'être établie pour le cas où les deux termes sont des carrés parfaits.

On a $\sqrt{53}=7$, à *une unité près*, et $\sqrt{144}=12$; ce qui donne la fraction $\frac{7}{12}$; et l'on prouverait facilement, comme au n° **214**, que

$\sqrt{53}$ est compris entre $\frac{7}{12}$ et $\frac{8}{12}$, c'est-à-dire que chacune de ces fractions exprime la racine demandée, *à moins de* $\frac{1}{12}$ *près*, la première *en moins*, la seconde *en plus*. Celle-ci se réduit d'ailleurs à $\frac{2}{3}$, fraction dont on se forme une idée très-nette.

Soit encore le nombre $12\frac{253}{400}$ ou $\frac{5053}{400}$. On a

$$\sqrt{5053} = 71, \textit{ à une unité près}, \text{ puis } \sqrt{400} = 20;$$

ce qui donne

$$\sqrt{12\frac{253}{400}} = \frac{71}{30} = 3\frac{11}{20}, \text{ à } \frac{1}{20} \text{ près.}$$

Règle générale pour le cas où le dénominateur est un carré parfait :

Extrayez la partie entière *de la racine carrée du numérateur, et la racine exacte du dénominateur;* puis, *formez une nouvelle fraction ayant pour numérateur la première racine, et pour dénominateur la seconde.*

N. B. — Souvent, dans la pratique, on ne fait qu'indiquer l'extraction de la racine carrée du numérateur, et l'on a alors, par exemple,

$$\sqrt{\frac{a}{b^2}} = \frac{\sqrt{a}}{b}$$

en se réservant d'effectuer plus tard l'opération marquée par le numérateur.

222. Secondement. — *Le dénominateur n'est pas un carré parfait*, quel que soit d'ailleurs le numérateur.

On peut ramener ce cas au précédent par une simple transformation qui consiste à *multiplier les deux termes de la fraction par le dénominateur.*

Soit $\frac{19}{23}$ la fraction proposée. On a

$$\frac{19}{23} = \frac{19 \times 23}{(23)^2};$$

d'où

$$\sqrt{\frac{19}{23}} = \frac{\sqrt{437}}{23} = \frac{20}{23}, \text{ à } \frac{1}{23} \text{ près};$$

de même,

$$\sqrt{\frac{25}{48}} = \sqrt{\frac{25 \times 48}{(48)^2}} = \frac{\sqrt{1200}}{48} = \frac{34}{48} = \frac{17}{24}.$$

Cette dernière fraction qui ne diffère de $\frac{18}{24}$ ou $\frac{3}{4}$ que de $\frac{1}{24}$, exprime la *racine, à moins de* $\frac{1}{48}$ *près.*

225. La transformation qui vient d'être indiquée est quelquefois susceptible de *modification*.

Par exemple, $\frac{25}{48}$ pouvant être mis sous la forme $\frac{25}{16 \times 3}$, fraction dont le dénominateur renferme un facteur 16, CARRÉ PARFAIT, il est clair qu'en multipliant les deux termes seulement par 3, on rendra le *dénominateur* un CARRÉ PARFAIT.

Il vient ainsi

$$\frac{25}{48} = \frac{25 \times 3}{16 \times 9} = \frac{75}{144};$$

d'où

$$\sqrt{\frac{25}{48}} = \frac{\sqrt{75}}{12} = \frac{8}{12}, \quad \text{ou} \quad \frac{9}{12};$$

donc $\frac{8}{12}$ et $\frac{9}{12}$, ou bien $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$, expriment l'une et l'autre la racine demandée, *à moins de* $\frac{1}{12}$ *près*, la première en *moins*, la seconde en *plus*.

Soit encore la fraction $\frac{2321}{4320}$.

Le dénominateur, décomposé en ses facteurs premiers, revient à

$$2^5 \times 3^3 \times 5, \quad \text{ou} \quad 2^4 \times 3^2 \times 2 \times 3 \times 5;$$

et si l'on multiplie les deux termes de la fraction par $2 \times 3 \times 5$ ou 30, elle prendra la forme suivante :

$$\frac{2321 \times 30}{2^6 \times 3^4 \times 5^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{2321 \times 30}{(2^3 \times 3^2 \times 5)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{69630}{(360)^2}.$$

Donc

$$\sqrt{\frac{2321}{4320}} = \frac{\sqrt{69630}}{360} = \frac{263}{360},$$

à $\frac{1}{360}$ *près*.

N. B. — Cette modification consiste, ainsi qu'on le voit facilement : 1° *à décomposer le dénominateur en ses facteurs premiers*; 2° *à multiplier les deux termes de la fraction par le produit effectué des premières puissances des facteurs premiers qui entrent dans le dénominateur à une puissance de degré impair.*

Mais, si elle offre l'avantage de simplifier les calculs, elle a l'inconvénient de fournir une approximation moins grande que celle qui résulte de la multiplication des deux termes de la fraction par le dénominateur lui-même.

Ainsi, dans le dernier exemple, on aurait

$$\frac{2321}{4320} = \frac{2321 \times 4320}{(4320)^2} = \frac{10026720}{(4320)^2};$$

d'où l'on déduirait

$$\sqrt{\frac{2321}{4320}} = \frac{\sqrt{10026720}}{4320} = \frac{3166}{4320};$$

fraction qui ne diffère de la racine demandée que d'une quantité *moindre que* $\frac{1}{4320}$, au lieu de $\frac{1}{360}$, qu'on obtient en appliquant la modification ci-dessus indiquée.

Toutefois, elle n'en est pas moins *utile* dans les applications, parce que, souvent, on laisse, sous forme d'*opération à exécuter*, la racine carrée du numérateur de la fraction *modifiée*.

224. REMARQUE. — La condition de rendre un CARRÉ PARFAIT le *dénominateur* de la fraction proposée, est *indispensable* à remplir, avant que l'on procède à l'extraction de la racine des deux termes.

Car supposons, par exemple, qu'on veuille appliquer à une fraction telle que $\frac{219}{530}$, la règle du n° **221**; on aurait

$$\sqrt{\frac{219}{530}} = \frac{\sqrt{219}}{\sqrt{530}} = \frac{14}{23}.$$

Ce résultat, $\frac{14}{23}$, serait bien une valeur *approchée* de la racine demandée; mais on ne pourrait apprécier le degré d'approximation, puisque le dénominateur étant *incomplet, l'unité* ne serait plus *divisée* en un nombre *déterminé* de parties égales; tandis que, par la préparation indiquée, l'unité se trouve divisée en un nombre exact de parties égales, dont il faut prendre un nombre *plus* ou *moins grand*, marqué par la PARTIE ENTIÈRE de la *racine du numérateur*.

Cela explique pourquoi, quand il s'agit de *fractions décimales*, il faut toujours rendre le *nombre* des chiffres décimaux PAIR (n° **218**); c'est afin que le dénominateur soit un *carré parfait*.

Cette condition étant *préalablement* satisfaite pour toute fraction dont on veut avoir la racine carrée, on est conduit à étendre à toutes les fractions la règle du n° **220**, qui n'a été établie d'abord que pour le cas où les deux termes de la fraction sont des CARRÉS PARFAITS :

Pour extraire la racine carrée d'une fraction, commencez par rendre le dénominateur un CARRÉ PARFAIT; puis *extrayez la racine carrée du numérateur et celle du dénominateur de la fraction transformée.*

SECONDE PARTIE.

FORMATION DU CUBE ET EXTRACTION DE LA RACINE CUBIQUE DES NOMBRES.

Notions et principes préliminaires.

225. On appelle *cube* ou *troisième puissance* d'un nombre, le produit de trois facteurs égaux à ce nombre, et *racine cubique* ou *troisième* d'un nombre, le nombre qui, élevé au cube, ou à la 3e puissance, reproduit le nombre proposé.

La formation du *cube* d'un nombre entier ou fractionnaire se réduit donc à deux *multiplications* successives, que l'on effectue d'après les règles connues.

Les dix premiers nombres étant

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,$$

on trouvera pour expressions de leurs cubes :

$$1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216,\ 343,\ 512,\ 729,\ 1000.$$

Par exemple, le cube de 7 étant égal à $7\times7\times7$, on dit d'abord : 7 fois 7 font 49; et ensuite 7 fois 49 font 343; et ainsi des autres.

Réciproquement, les nombres de la seconde série ont pour *racines cubiques* les nombres de la première.

On reconnaît, à l'inspection de ces deux séries de nombres, que parmi les nombres *entiers* d'*un*, de *deux* ou de *trois* chiffres, il n'y en a que *neuf* qui soient des *cubes parfaits*, et que chacun des autres a pour *racine cubique* un nombre *entier* plus une *partie de l'unité*.

226. Cette *partie de l'unité* ne peut s'exprimer par un *nombre exact*.

Car, admettons pour un instant qu'un nombre *entier* N ait pour racine 3e *exacte*, un nombre *fractionnaire* tel que $\frac{a}{b}$, il faudrait qu'en élevant $\frac{a}{b}$ au cube, on pût reproduire N. Or, cela est impossible, car $\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}$ donne pour résultat $\frac{a^3}{b^3}$; et comme on peut toujours supposer que $\frac{a}{b}$ est un nombre fractionnaire *irréductible*, il s'ensuit que a et b sont *premiers entre eux;* donc (n° **92**) il en est de même de a^3 et b^3; ainsi $\frac{a^3}{b^3}$ est aussi un nombre fractionnaire *irréductible*, qui, par suite, ne peut être égal à un nombre *entier* N.

Cette démonstration s'appliquant à un nombre *entier quelconque*, on en conclut que *les racines cubiques des nombres entiers qui ne sont* *pas des cubes exacts d'autres nombres entiers, ne peuvent pas s'obtenir exactement, et sont, par conséquent* (n° **201**), *des nombres* INCOMMENSURABLES OU IRRATIONNELS.

227. De même que, pour découvrir le procédé de l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier quelconque, nous avons eu besoin de nous fonder sur l'expression du carré de la somme de deux nombres, $(a+b)$, de même, pour l'extraction de la *racine cubique*, il est indispensable de connaître la composition du *cube* de cette somme $(a+b)$.

Or, on a déjà trouvé (n° **204**) que

$$(a+b)^2 \quad \text{ou} \quad (a+b)\times(a+b) = a^2+2ab+b^2.$$

Si l'on multiplie ce résultat $\qquad a^2+2ab+b^2$

par $a+b$ . . . . $\qquad a+b$

d'après la règle établie (n° **48**), $\qquad a^3+2a^2b+ab^2$ $\qquad\qquad +a^2b+2ab^2+b^3$

on a en simplifiant . . . . $\qquad a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Donc

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2.b+3a.b^2+b^3.$$

228. Soit fait, dans cette formule, $b=1$; elle devient

$$(a+1)^3 = a^3+3a^2+3a+1;$$

d'où l'on déduit

$$(a+1)^3 - a^3 = 3a^2+3a+1;$$

ce qui montre que *la différence entre les cubes des deux nombres entiers consécutifs, est égale au triple du carré du plus petit nombre, plus le triple de ce même nombre, plus un*.

Ainsi la différence entre le cube de 90 et celui de 89 est égal à

$$3\times(89)^2+3\times 89+1 = 24031.$$

On peut juger, d'après cela, de l'intervalle qui sépare *deux cubes parfaits consécutifs*, lorsque leurs racines prises dans la série naturelle des nombres sont des nombres un peu considérables.

§ I. — EXTRACTION DE LA RACINE CUBIQUE D'UN NOMBRE A MOINS D'UNE UNITÉ PRÈS.

Extraction de la racine cubique d'un nombre entier.

229. Si le nombre n'a que *trois* chiffres au plus, *sa racine cubique* s'obtient immédiatement d'après l'inspection des cubes des *neufs premiers nombres*.

Ainsi, la racine cubique de 125 est *exactement* 5; la racine cubique de 72 est 4, plus une *partie de l'unité*, ou 4, à *une unité près*.

La racine cubique de 841 est 9, à *une unité près*, puisque 841 est compris entre 729 ou le *cube* de 9, et 1000 ou le *cube* de 10.

Les nombres 4 et 9, *parties entières* des racines cubiques de 72 et de 841, sont *les racines des plus grands cubes* contenus dans ces deux derniers nombres.

230. Considérons un nombre de *plus de trois* chiffres.

Soit, par exemple, 103823 le nombre proposé :

103.823	4		
64	48	48	47
398.23		48	47
		384	329
		192	188
		2304	2209
		48	47
		18432	15463
		9216	8836
		110592	103823

48 est donc *trop fort*.

Ce nombre étant compris entre 1000, *cube* de 10, et 1000000, *cube* de 100, sa *racine cubique* est nécessairement composée de *deux* chiffres, c'est-à-dire de *dizaines* et d'*unités*.

Désignons par a les *dizaines* et par b les *unités*; nous aurons (nº **227**)

$$103823 = (a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2 . b + 3\,a . b^2 + b^3.$$

D'où l'on voit que le cube d'un nombre composé de *dizaines* et d'*unités, contient le cube des dizaines, plus le triple produit du carré des dizaines par les unités, plus le triple produit des dizaines par le carré des unités, plus le cube des unités.*

Cela posé, le *cube des dizaines* ne pouvant donner des unités d'un ordre *inférieur* à celui des *mille*, les *trois* derniers chiffres à *droite* n'en peuvent faire partie; et c'est dans la partie 103 (qu'on sépare des trois derniers chiffres par un point) que se trouve le *cube des dizaines*.

Or, la racine du *plus grand cube* contenu dans 103 étant 4 pour 64, 4 est le chiffre des *dizaines* de la racine cherchée; car 103823 est compris entre 64000 ou $(40)^3$ et 125000 ou $(50)^3$.

Donc la racine est composée de 4 *dizaines*, plus d'un certain nombre d'*unités* MOINDRE que DIX.

Le chiffre des *dizaines* étant trouvé, retranchons son *cube*, 64, de 103; il reste 39, qui, suivi de la tranche 823, donne 39823; et ce résultat contient encore *le triple* produit du *carré des dizaines par les unités*, plus les deux autres parties énoncées précédemment.

Or, le *carré* d'un nombre de *dizaines* ne pouvant donner des unités d'*un ordre inférieur* à celui des *centaines*, il s'ensuit que le *triple* produit du *carré* des *dizaines* par les *unités* ne peut se trouver que dans la partie à gauche, 398, des deux derniers chiffres, 23 (qu'on sépare encore, pour cette raison, par un point).

D'un autre côté, l'on peut former le triple carré des 4 *dizaines*, ce qui donne 48; donc, si l'on divise 398 par 48, le quotient 8 sera le chiffre des *unités* de la racine, ou un nombre *plus fort* que ce chiffre, parce que les 398 *centaines* contiennent, outre le triple produit du *carré* des *dizaines* par les *unités*, des *retenues* provenant des deux autres parties.

Pour vérifier si le chiffre 8 n'est pas trop fort, on pourrait, comme pour la racine carrée, former, à l'aide de ce chiffre 8 et du chiffre 4 des *dizaines*, les *trois parties* qui entrent dans 39823; mais il est, en général, plus simple d'élever 48 au *cube*.

Or, on trouve pour ce cube, 110592, nombre *plus grand* que 103823; ainsi le chiffre 8 est *trop fort*.

En formant le *cube* de 47, on obtient 103823; donc le nombre proposé est un CUBE PARFAIT, et a pour *racine cubique* 47.

N. B. — On ne peut pas rechercher *d'abord* le chiffre des *unités*, par la raison que le *cube des unités* pouvant (n° 225) donner des *dizaines*, et même des *centaines*, ces *dizaines* et ces *centaines* se trouvent confondues avec celles qui proviennent des autres parties du cube.

Voici le tableau des calculs, pour le nombre 47954 :

47.954	36		
27	27	37	36
209.54		37	36
		259	216
		111	108
47954		1369	1296
46656		37	36
1298		9563	7776
		4107	3888
		50633	46656

37 est donc *trop fort*.

Le nombre proposé n'est pas un cube parfait, et sa racine, *à une unité près*, est 36; en d'autres termes, la racine *du plus grand* cube contenu dans 47954, est 36 pour 46656; et il reste 1298, ainsi que le montre le tableau.

251. Soit maintenant proposé d'extraire la racine cubique d'un nombre de *plus de six* chiffres, 43725658 par exemple :

43.725.658	352		
27	27	35	352
16 7		35	352
		175	704
43725		105	1760
42875		1225	1056
850 6		35	123904
		6125	352
43725658		3675	247808
43614208		42875	619520
reste.....111450			371712
			43614208

Quelle que soit la racine cherchée, elle a nécessairement *plus d'un* chiffre, et peut être regardée comme composée d'*unités* et de *dizaines* seulement, le *nombre des dizaines* pouvant avoir *plusieurs* chiffres.

Or, le cube des *dizaines* donne au moins des *mille;* ainsi, ce cube se trouve nécessairement dans la partie à *gauche* des *trois* derniers chiffres 658.

Je dis maintenant que, si l'on extrait la racine du *plus grand cube* contenu dans 43725 considéré comme exprimant des *unités simples,* on aura le *nombre total des dizaines* de la racine demandée.

En effet, soit a la racine du plus grand cube contenu dans 43725; il s'ensuit d'abord que la racine demandée a au moins un nombre a de dizaines, puisque $a^3 \times 1000$ peut être retranché de 43725000, et *à fortiori,* de 43725658.

D'ailleurs, la racine ne saurait avoir $(a+1)$ dizaines ; car $(a+1)^3$ étant *plus grand* que 43725, $(a+1)^3 \times 1000$ *surpasse* 43725000 d'au moins *un mille,* et est par conséquent *plus grand* que 43725658.

La racine demandée se compose donc de a *dizaines,* plus d'un certain nombre d'*unités* MOINDRE que DIX.

La question est alors ramenée à extraire la racine cubique de 43725; mais ce dernier nombre ayant *plus de trois* chiffres, sa racine en a *plus d'un,* c'est-à-dire renferme des *dizaines* et des *unités.*

Pour obtenir les *dizaines,* il faut séparer les *trois derniers* chiffres, 725, et extraire la racine du *plus grand cube* contenu dans 43.

(On voit assez ce qu'il faudrait faire si ce dernier nombre avait lui-même *plus de trois* chiffres.)

Le *plus grand cube* contenu dans 43 est 27, dont la racine est 3; et ce chiffre exprime alors les *dizaines* de la racine de 43725 (ou le chiffre des *centaines* de la racine totale). Retranchant le *cube* de 3, ou 27, de 43, on a pour reste 16, à côté duquel il suffit d'abaisser le premier chiffre 7 de la tranche suivante, 725, ce qui donne 167.

Formant le *triple carré des dizaines*, 3, on trouve 27 *mille;* et si l'on divise 167 par 27, le quotient est le chiffre des *unités* de la racine 43725, ou bien un nombre *plus fort*. Il est aisé de reconnaître ici que ce quotient, 6, est en effet *trop grand;* ainsi, il faut essayer 5, et pour cela, élever 35 au *cube;* il vient pour résultat, 42875, nombre qui, retranché de 43725, donne pour *reste*, 850.

Ce *reste* est évidemment *plus petit* que

$$3 \times (35)^2 + 3 \times 35 + 1,$$

puisque déjà le carré de 35 est, d'après le tableau ci-dessus, égal à 1225.

Ainsi, 35 est la racine du *plus grand cube* contenu dans 43725 : c'est donc *le nombre total des dizaines* de la racine cherchée.

Pour obtenir les *unités*, on abaisse à côté du reste 850, le *premier chiffre* 6 de la dernière tranche 658, ce qui donne 8506; on forme d'ailleurs le *triple carré des dizaines* 35 (ce qui est facile, puisque, dans la vérification du chiffre précédent, on a déja formé le carré de 35); puis, on divise 8506 par ce *triple carré* 3675; le quotient est 2 que l'on essaye en élevant 352 au *cube*.

On obtient ainsi, 43614208, résultat *moindre* que le nombre proposé; et en le soustrayant de celui-ci, on arrive au *reste* 111450.

Donc 352 est la *racine cubique* de 43725668, à *une unité* près.

232. Règle générale. — Pour extraire la racine cubique d'un nombre entier à moins d'une unité près, *divisez le nombre en tranches de trois chiffres chacune, à partir de la droite, jusqu'à ce que vous soyez parvenu à une tranche* d'*un*, de *deux*, ou de *trois* chiffres au plus.

(Le nombre des tranches est égal au nombre des chiffres de la racine.)

Cela fait, *extrayez la racine du plus grand cube contenu dans la première tranche à gauche*, et *retranchez de cette première tranche le cube de cette racine qui est le* PREMIER CHIFFRE *de la racine cherchée.*

Abaissez à droite du reste le premier chiffre à gauche de la seconde tranche; puis, *divisez le nombre ainsi formé, par le triple carré du chiffre déjà trouvé à la racine; écrivez le quotient à la droite de ce chiffre,* et *élevez au cube l'ensemble des deux chiffres.*

Si, comme cela arrive le plus généralement, le cube obtenu est PLUS FORT *que l'ensemble des deux premières tranches du nombre proposé,* DIMINUEZ, *pour avoir le* SECOND CHIFFRE *de la racine, le quotient d'*UNE *ou de* PLUSIEURS *unités, jusqu'à ce que vous obteniez un* CUBE *qui puisse se* RETRANCHER *de l'ensemble des deux premières tranches.*

La soustraction effectuée, *abaissez à côté du reste le premier chiffre à gauche de la troisième tranche;* puis, *divisez le nouveau nombre* *ainsi formé par le triple carré de l'ensemble des deux chiffres déjà trouvés. Le quotient*, S'IL N'EST PAS TROP FORT, *c'est-à-dire s'il est bien le* TROISIÈME CHIFFRE *de la racine, doit être* TEL, *qu'en l'écrivant à la droite des* DEUX PREMIERS CHIFFRES *de la racine, et élevant au cube le nombre résultant, on* PUISSE RETRANCHER *ce cube de l'ensemble des trois premières tranches.*

Cette nouvelle soustraction faite, *abaissez à côté du reste le premier chiffre à gauche de la quatrième tranche, et continuez la même série d'opérations jusqu'à ce que vous ayez abaissé toutes les tranches.*

On trouvera, d'après cette règle :

$$\sqrt[3]{483249} = 78, \text{ avec le } \textit{reste } 8697\,;$$
$$\sqrt[3]{91632508641} = 4508, \text{ avec le } \textit{reste } 20644129\,;$$
$$\sqrt[3]{32977340218432} = 32068 \textit{ exactement.}$$

233. *Première remarque.* — La règle générale, telle que nous venons de l'énoncer, dit que, pour s'assurer si un chiffre obtenu à la racine n'est pas *trop fort*, il faut l'*écrire à la droite de la partie déjà trouvée*, et *élever au cube* le nombre résultant.

Or, il existe un autre *moyen* de vérification, *analogue* à celui que comporte le procédé de la *racine carrée*, et consistant à *former les trois parties* qui entrent encore dans l'ensemble des tranches sur lesquelles on a été conduit à opérer, après qu'on en a *soustrait le cube des dizaines*.

Mais le premier moyen nous paraît de beaucoup préférable à celui-ci, pour plusieurs raisons :

1°. Pour obtenir un nouveau chiffre à la racine, on a besoin de connaître *le triple du carré de la racine déjà trouvée ;* et comme, pour former le cube de cette racine déjà trouvée, il a fallu l'*élever* d'abord *au carré*, il est facile d'avoir le *triple* de ce carré (lequel *triple* se trouve d'ailleurs déjà formé, toutes les fois que l'un des chiffres de la racine est égal à 3) ;

2°. Comme l'*élévation au cube* consiste dans deux multiplications successives ordinaires, la preuve par 9 et les preuves analogues s'y appliquent commodément ;

3°. Lorsqu'on emploie le *second* moyen, on n'est pas, pour cela, dispensé de *vérifier* la racine totale par la *formation de son cube ;* or le premier moyen comporte cette vérification.

234. *Deuxième remarque.* — Souvent, dans le cours des opérations, on est conduit à présumer qu'un chiffre qui doit être essayé, est *beaucoup trop fort ;* et alors, on croit pouvoir le *diminuer* tout d'abord de *plusieurs* unités. Mais, en élevant au cube le nombre formé par les chiffres déjà trouvés pour la racine et suivis du chiffre *présumé bon*, et retranchant ce cube de l'ensemble des tranches considérées jusqu'alors dans le nombre proposé, on peut obtenir *un reste* très-grand qui donne lieu de penser que le dernier chiffre trouvé est *trop faible*.

Or, on reconnaît que ce chiffre est, en effet, *trop faible*, à ce caractère, que le RESTE *surpasse ou égale le triple carré de la racine obtenue, plus le triple de cette racine*, *augmenté de* UN.

On doit donc, alors, l'augmenter d'*une* ou de *plusieurs* unités.

235. *Troisième remarque.* — On ne peut, comme pour le *carré* (voyez le nº **212**), reconnaître à l'inspection du chiffre qui *termine* un nombre donné, si ce nombre est un CUBE PARFAIT.

Mais on démontrerait de la même manière :

1°. *Qu'un nombre entier terminé par des zéros dont le nombre n'est pas un multiple de* 3, *ne peut être un* CUBE PARFAIT.

2°. *Qu'un nombre reconnu divisible par un facteur premier*, *ne peut être un cube parfait*, *s'il n'est divisible par le cube de ce facteur*.

Extraction de la racine cubique d'un nombre fractionnaire à moins d'une unité près.

236. Lorsque l'on a à extraire la racine cubique d'un *nombre fractionnaire* composé d'un *entier* et d'une *partie de l'unité*, et qu'on a besoin seulement de la PARTIE ENTIÈRE de cette racine, ou, en d'autres termes, qu'on ne doit extraire la racine qu'A MOINS D'UNE UNITÉ PRÈS, *il n'y a pas lieu de tenir compte de la fraction.*

En effet, si l'ENTIER du nombre *fractionnaire* donné n'est pas un *cube parfait*, les *deux cubes consécutifs* qui le comprennent, différant nécessairement (nº **228**) *de plus d'une unité*, ce nombre *total* est, lui-même, compris entre *ces deux cubes*; et, par conséquent, sa racine cubique est comprise entre celles *des deux cubes*, ou, en d'autres termes, a la MÊME PARTIE ENTIÈRE que *la racine cubique* de l'ENTIER.

Si l'ENTIER était un *cube parfait*, le nombre *total* aurait pour PARTIE ENTIÈRE de sa *racine cubique*, la *racine même* de cet ENTIER, puisqu'il serait compris entre ce *cube* et le cube immédiatement supérieur.

§ II. — EXTRACTION DE LA RACINE CUBIQUE, PAR APPROXIMATION, D'UN NOMBRE ENTIER OU FRACTIONNAIRE.

Extraction de la racine cubique avec un degré d'approximation déterminé.

Lorsque le nombre dont on demande la racine cubique n'est pas un CUBE PARFAIT, il est toujours possible d'obtenir une valeur de cette racine *aussi approchée que l'on veut.*

237. ÉVALUATION APPROXIMATIVE DE LA RACINE CUBIQUE EN UNITÉS

14.

D'UNE ESPÈCE QUELCONQUE. — Soit, en général, proposé d'extraire la racine cubique d'un nombre quelconque a (*entier* ou *fractionnaire*) à moins d'une fraction près $\frac{1}{n}$ (*voyez* le nº **155**).

Le nombre a peut être mis sous la forme

$$\frac{a \times n^3}{n^3};$$

et si l'on désigne par r la racine du plus grand cube contenu dans $a \times n^3$, c'est-à-dire la racine cubique de $a \times n^3$, *à une unité près*, le nombre $\frac{a \times n^3}{n^3}$, ou a, sera compris entre $\frac{r^3}{n^3}$ et $\frac{(r+1)^3}{n^3}$.

Donc aussi $\sqrt[3]{a}$ se trouvera compris entre

$$\frac{r}{n} \quad \text{et} \quad \frac{r+1}{n};$$

et par conséquent, $\frac{r}{n}$, ou $\frac{r+1}{n}$, exprimera la racine à moins d'une fraction près, marquée par $\frac{1}{n}$, n pouvant être un nombre *aussi grand que l'on veut.*

Ainsi, pour extraire la racine troisième ou cubique d'un nombre, à une fraction près $\frac{1}{n}$,

Multipliez le nombre par le cube du dénominateur de cette fraction; extrayez la partie entière de la racine cubique du produit, et divisez le résultat par ce dénominateur.

PREMIER EXEMPLE. — *On demande la racine cubique de* 15, *à* $\frac{1}{12}$ *près.*

On a

$$15 \times 12^3 = 15 \times 1728 = 25920:$$

or

$$\sqrt[3]{25920} = 29, \text{ à une unité près};$$

donc

$$\sqrt[3]{15} = \frac{29}{12}, \quad \text{ou} \quad 2\,\frac{5}{12}, \textit{ à moins de } \frac{1}{12} \textit{ près.}$$

SECOND EXEMPLE. — *Extraire la racine cubique de* $37\,\frac{8}{13}$, à $\frac{1}{20}$ *près.*

On a d'abord

$$\left(37 + \frac{8}{13}\right) \times 20^3 = \frac{489 \times 8000}{13} = 300923\,\frac{1}{3}:$$

or

$$\sqrt[3]{300923\frac{1}{3}},$$

ou (nº **236**)

$$\sqrt[3]{300923} = 67, \text{ à une unité près};$$

donc

$$\sqrt[3]{37\frac{8}{13}} = \frac{67}{20}, \quad \text{ou} \quad 3\frac{7}{20}, \textit{ à moins de } \frac{1}{20} \textit{ près.}$$

On trouverait pareillement :

$$\sqrt[3]{47} = \frac{72}{20} = 3\frac{3}{5}, \textit{ à moins de } \frac{1}{20} \textit{ près};$$

$$\sqrt[3]{23\frac{7}{8}} = \frac{37}{13} = 2\frac{11}{13}, \textit{ à moins de } \frac{1}{13} \textit{ près};$$

$$\sqrt[3]{\frac{5}{7}} = \frac{26}{30} = \frac{13}{15}, \textit{ à moins de } \frac{1}{30} \textit{ près}.$$

238. Évaluation approximative de la racine cubique en décimales. — L'approximation en *décimales* est une conséquence de la règle précédente.

Soit proposé d'évaluer $\sqrt[3]{25}$ *à* 0,001 près.

Il faut (nº **237**) multiplier 25 par le cube de 1000, ou par 1 000 000 000, c'est-à-dire placer *neuf* zéros à la droite de 25, ce qui donne 25 000 000 000. Or, la racine cubique de ce nombre est 2924, à une unité près; donc 2,924 est la racine demandée, à $\frac{1}{1000}$ près.

En général, *pour évaluer la racine cubique d'un nombre entier en décimales, écrivez à la droite du nombre,* TROIS FOIS *autant de zéros que vous voulez avoir de chiffres décimaux à la racine; extrayez, à une unité près, la racine cubique du nouveau nombre; puis séparez vers la droite du résultat le nombre de chiffres décimaux demandé.*

N. B. — On peut, comme pour la racine carrée (nº **216**), se dispenser d'écrire sur-le-champ toutes les tranches de *trois* zéros, et ne les placer que successivement et au fur et à mesure qu'on veut obtenir de nouveaux chiffres décimaux à la racine.

239. Lorsque le nombre proposé est *fractionnaire*, il y a deux cas à considérer : ou ce nombre est *décimal*, ou il est exprimé sous forme de *fraction ordinaire*.

Premier cas. — Soit *à extraire la racine cubique de* 3,1415, *à* $\frac{1}{100}$ *près.*

Comme, en vertu de la règle du nº **237**, il faut *multiplier* le nombre par $(100)^3$ ou 1000000, il suffit évidemment, pour cela, d'*écrire deux zéros à la droite de* 3,1415, puis de *supprimer la virgule*, ce qui donne 3141500.

Or, la racine cubique de ce dernier nombre, à une unité près, est 146.

Donc 1,146 est la racine demandée, à $\frac{1}{100}$ *près*.

Si l'on voulait un nouveau chiffre décimal à la racine, il suffirait de placer à la droite du reste obtenu une nouvelle tranche de *trois* zéros; et l'on continuerait l'opération.

Règle générale. — Pour extraire la racine cubique d'une fraction décimale, avec un degré d'approximation déterminé, *faites en sorte* (en plaçant à la droite de la fraction proposée un nombre convenable de zéros) *que le nombre des chiffres décimaux soit* TRIPLE *de celui que vous devez avoir à la racine; supprimez la virgule; puis extrayez la racine* 3e *du nombre résultant, à une unité près, et séparez vers la droite de cette racine le nombre de chiffres décimaux demandé.*

Second cas. — Lorsqu'il s'agit d'un nombre fractionnaire ordinaire, *on le convertit d'abord en fraction décimale* (n° **171**) *en poussant l'opération jusqu'à ce qu'on ait au quotient* TROIS FOIS *autant de chiffres décimaux que l'on veut en avoir à la racine; puis on opère comme dans le cas précédent.*

Voici de nouvelles applications :

$$\sqrt[3]{79} = 4,2908, \text{ à } \frac{1}{10000} \text{ près;}$$

$$\sqrt[3]{3,00415} = 1,4429, \text{ à } \frac{1}{10000} \text{ près;}$$

$$\sqrt[3]{0,00101} = 0,10, \text{ à } \frac{1}{100} \text{ près;}$$

$$\sqrt[3]{\frac{14}{25}} = 0,824, \text{ à } \frac{1}{1000} \text{ près.}$$

Considérations sur l'extraction de la racine cubique d'un nombre fractionnaire.

240. On est conduit, comme pour la racine carrée, à distinguer plusieurs cas (*voyez* les nos **220** et suivants) :

Ou les *deux* termes sont des *cubes parfaits; ou* le dénominateur *seul est* un cube parfait; *ou bien*, le dénominateur *n'est pas* un cube parfait, le numérateur pouvant d'ailleurs être quelconque.

Dans le *premier cas*, puisque l'on a

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3},$$

réciproquement, $\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}}=\frac{a}{b}$; d'où il suit que, pour extraire la racine cubique d'une fraction dont les deux termes sont des cubes parfaits, il suffit d'*extraire la racine cubique du numérateur*, puis *celle du dénominateur*, et de *donner la seconde pour dénominateur à la première*.

Ainsi

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3},\quad \sqrt[3]{\frac{343}{125}}=\frac{7}{5},\quad \sqrt[3]{\frac{729}{64}}=\frac{9}{4}.$$

Deuxième cas. — Soit $\frac{a}{b^3}$ la fraction proposée, a et b étant des nombres entiers quelconques.

Désignant par a' la partie entière de $\sqrt[3]{a}$, on a

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b^3}}=\frac{a'}{b},$$

à *une fraction près*, marquée par $\frac{1}{b}$.

Si l'on ne veut qu'indiquer l'opération à effectuer au numérateur, on trouve

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b^3}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{b}.$$

Troisième cas. — Lorsque le dénominateur n'est pas un cube parfait, *on multiplie les deux termes par le carré du dénominateur*; et alors on opère sur le résultat, comme dans le second cas.

Soit, par exemple, *la fraction* $\frac{19}{24}$ *dont on demande la racine cubique*.

On a

$$\frac{19}{24}=\frac{19\times 576}{(24)^3}=\frac{10944}{(24)^3},$$

d'où

$$\sqrt[3]{\frac{19}{24}}=\frac{\sqrt[3]{10944}}{24}=\frac{22}{24},\quad \text{ou}\quad \frac{11}{12},\ \text{à } \frac{1}{24} \text{ près.}$$

Généralement

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{ab^2}{b^3}}=\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}=\frac{a'}{b},$$

a' désignant la *partie entière* de $\sqrt[3]{ab^2}$.

N. B. — Cette transformation admet des modifications analogues à celles auxquelles on a recours pour la racine carrée.

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, $\frac{19}{24}$, comme 24 est égal à $2^3\times 3$, on voit qu'il suffit de multiplier les deux termes par 3^2, pour que le dénominateur devienne un cube parfait, et l'on a

$$\frac{19}{24} = \frac{19 \times 9}{(2 \times 3)^3} = \frac{171}{(6)^3};$$

d'où

$$\sqrt[3]{\frac{19}{24}} = \frac{\sqrt[3]{171}}{6} = \frac{5}{6}, \text{ à } \frac{1}{6} \text{ près.}$$

Soit encore proposé le nombre $21\,\frac{13}{72}$.

On a

$$21\,\frac{13}{72} = \frac{1525}{72} = \frac{1525}{2^3.3^2} = \frac{1525.3}{(2.3)^3} = \frac{4575}{(6)^3};$$

ce qui donne

$$\sqrt[3]{21\,\frac{13}{72}} = \frac{\sqrt[3]{4565}}{6} = \frac{16}{6} = 2\,\frac{2}{3}, \text{ à } \frac{1}{6} \text{ près.}$$

On voit assez ce qu'il faudrait faire pour tout autre exemple; et l'on est amené, comme pour la racine carrée, à cette conséquence, que, pour extraire la racine *cubique* d'une fraction, il faut *extraire la racine cubique* de chacun *des termes, après avoir,* par un moyen quelconque, *rendu le dénominateur un cube parfait.*

Remarque générale sur les extractions de racines.

241. Nous ne pouvons exposer dans ces éléments les procédés de l'extraction des racines d'un degré supérieur au troisième, parce que ces procédés sont fondés sur la composition d'une puissance quelconque de la somme indiquée de deux quantités, et que la *formule* ou l'expression qui a rapport à cette composition exige, pour être démontrée complétement, des notions assez étendues en Algèbre.

Mais les principes qui ont été développés pour l'extraction des racines *carrée* et *cubique,* suffisent pour faire pressentir que, lorsqu'il s'agit de l'*extraction des racines d'un degré quelconque,* si le nombre proposé n'est pas une puissance parfaite du *degré* de la racine à extraire, auquel cas la racine est *un nombre incommensurable*, on peut du moins *approcher* de cette racine de manière que l'*erreur commise* soit *moindre qu'aucune grandeur donnée.*

Rien n'empêche donc d'*assimiler,* dans les calculs numériques, ces sortes de nombres à des *nombres commensurables,* puisqu'on peut toujours les concevoir remplacés par des nombres commensurables qui n'en diffèrent que d'*aussi peu que l'on veut.*

Nous terminerons tout ce qui concerne les extractions de racines, par la *proposition suivante*, que nous aurons occasion de rappeler dans le septième chapitre.

Elle consiste en ce que les racines *quatrièmes, huitièmes, seizièmes*, et en général toutes celles dont l'indice est une puissance de 2, exprimée par 2^n, peuvent s'obtenir par des extractions de *racines carrées successives;* en sorte que l'on a

$$\sqrt[4]{a}=\sqrt{\sqrt{a}},\quad \sqrt[8]{a}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}},\quad \sqrt[16]{a}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}},\ldots$$

En effet, suivant la définition donnée au n° **200**, a est le produit de *deux* facteurs égaux à sa *racine carrée*, $\sqrt{a}$*;* or celle-ci est elle-même le produit de *deux* facteurs égaux à sa *racine carrée*, $\sqrt{\sqrt{a}}$; donc a est le produit de *quatre* facteurs égaux à $\sqrt{\sqrt{a}}$: d'ailleurs a est aussi (n° **45**) le produit de *quatre* facteurs égaux à $\sqrt[4]{a}$. Ainsi

$$\sqrt[4]{a}=\sqrt{\sqrt{a}}.$$

Raisonnant de même sur $\sqrt[8]{a}$, on dirait: a est le produit de *deux* facteurs égaux à sa *racine carrée;* celle-ci, de *deux* facteurs égaux à sa *racine carrée;* cette dernière, de *deux* facteurs égaux à sa *racine carrée*; par conséquent, a est, à la fois, le produit de *huit* facteurs égaux à $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$, et le produit de *huit* facteurs égaux à $\sqrt[8]{a}$.

Donc,

$$\sqrt[8]{a}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}.$$

On démontrerait également que

$$\sqrt[16]{a}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}};$$

et ainsi de suite; la proposition est donc générale.

Nous donnerons, dans le huitième chapitre, des applications de cette proposition, et nous exposerons en outre des *moyens abrégés* pour les extractions de *racines carrées*, en particulier.

Exercices.

I. Combien y a-t-il de *décimètres carrés, centimètres carrés, millimètres carrés* dans le carré de 429 *millimètres ?*

II. Trouver la somme des carrés de $0^{\text{m}},69$ | $1^{\text{m}},25$ | $3^{\text{m}},029$, et évaluer le résultat en *mètres carrés*, décimètres carrés, etc.

III. Tout carré impair donne 1 pour reste de sa division par 8.

IV. Trouver l'expression générale du carré de la différence de deux nombres.

V. Si un nombre pair est la somme de deux carrés, sa moitié est aussi la somme de deux carrés. — Cas particulier où les deux carrés sont égaux.

VI. Si un nombre entier, divisible par 5, est la somme de deux carrés, le *cinquième* de ce nombre est aussi la somme de deux carrés.

VII. Lorsque *plusieurs* nombres sont formés chacun par l'addition de deux carrés, leur produit est lui-même la somme de deux carrés.

VIII. Trouver, à moins de 0,001 près, la racine *cubique* du quotient de la division de 429 par le carré de 2,59.

IX. Un nombre entier étant donné, reconnaître s'il est la différence de deux cubes parfaits consécutifs, et trouver ces deux cubes.

X. Démontrer qu'un nombre entier ne peut être un cube parfait : 1° si, le chiffre des unités étant 2 ou 6, le chiffre des dizaines est *pair;* 2° si, le chiffre des unités étant 4 ou 8, le chiffre des dizaines est *impair;* 3° si, le chiffre des unités étant 5, le chiffre des dizaines n'est ni 2 ni 7.

CHAPITRE SIXIÈME.

§ I. *Des rapports et proportions et de leurs principales propriétés.* — § II. *Résolution des questions qui en dépendent, et de quelques autres questions usuelles.*

---

242. Introduction. — On a vu, dans le cours de l'exposé des diverses opérations de l'arithmétique, que ces opérations donnent lieu à *deux genres principaux* de questions, savoir : 1° celles qui ont pour objet de *démontrer* l'existence de certaines propriétés dont jouissent des nombres *connus et donnés ;* 2° celles où l'on se propose de *trouver certains nombres* d'après la connaissance d'autres nombres ayant avec les premiers des relations déterminées.

Les questions de la *première espèce,* auxquelles nous avons généralement donné le nom de principes ou de propositions, et dont plusieurs ont été proposées pour *exercices,* s'appellent aussi des théorèmes. Si elles n'ont pas été désignées sous ce titre, c'est parce que les autres dénominations nous ont paru mieux répondre à l'ordre d'idées dans lequel nous nous sommes placés pour initier les commençants à la science mathématique.

Les questions de la *seconde espèce,* qui ne sont que des applications particulières des *règles* et des *principes,* auxquelles nous avons, en général, conservé le nom générique de questions, et qui font l'objet principal des *exercices* placés à la fin de chaque chapitre, se nomment problèmes.

Les problèmes que nous avons résolus ou proposés jusqu'ici étaient faciles à résoudre, parce que les données en étaient simples, et que les relations entre les quantités *connues* et les quantités *inconnues* étaient, pour ainsi dire, en évidence.

Mais il n'en est pas généralement ainsi; et, le plus souvent, leurs *énoncés* sont tels, que, pour arriver à la *solution,* il faut une opération assez difficile qui consiste à *découvrir et déterminer la série d'opérations à exécuter sur les nombres connus et donnés pour parvenir à la connaissance des nombres cherchés;* cette opération constitue l'analyse du problème.

Cependant, il existe une certaine classe de *questions* dont la résolution peut être soumise à des *règles fixes et certaines;* ce sont particulièrement celles où l'on considère des grandeurs proportionnelles.

La plupart de ces questions sont précisément celles que font naître les besoins généraux de la société, en ce qui touche les intérêts commerciaux, industriels, financiers, etc., soit des particuliers entre eux, soit des nations et de leur gouvernement ; elles sont généralement connues sous la dénomination de *règle de trois*, *règle d'intérêt*, *règle d'escompte*, *règle de société*, *règle de change*, *etc.*

Pour arriver facilement à leur solution, nous commencerons par exposer la théorie des *rapports* et *proportions*.

§ I. — DES RAPPORTS ET PROPORTIONS ET DE LEURS PRINCIPALES PROPRIÉTÉS.

Des rapports.

243. Lorsque l'on compare deux grandeurs entre elles, on peut avoir besoin de savoir de *combien* la plus *grande* surpasse la plus petite, ou *combien de fois* l'une *contient* l'autre, ou y *est contenue*.

De là résultent deux espèces de *rapports* entre les nombres comparés, l'un que l'on appelait autrefois *rapport* ou *raison* ARITHMÉTIQUE, et l'autre, *rapport* ou *raison* GÉOMÉTRIQUE.

Mais ces locutions sont généralement abandonnées, et l'on est convenu de remplacer la dénomination de *rapport arithmétique* par le mot *différence*, pour exprimer le *résultat* de la comparaison de deux nombres par *soustraction*, en consacrant spécialement le nom de RAPPORT ou de RAISON, au *résultat* de la comparaison des deux nombres par DIVISION.

Il ne sera question, dans tout le cours de ce chapitre, que du *rapport* envisagé sous ce dernier point de vue.

Ainsi, le *rapport* ou la *raison* de deux grandeurs quelconques est le résultat ou le *quotient* de la *division* de ces grandeurs ou des nombres qui les expriment.

Ce *rapport* peut, d'ailleurs, être un nombre *entier* ou un nombre *fractionnaire*, *plus grand* ou *plus petit* que 1.

Par exemple, le rapport de 24 à 6 est $\frac{24}{6}$ ou 4; et celui de 6 à 24 est $\frac{6}{24}$, ou $\frac{1}{4}$.

De même, le rapport de 75 à 18 est $\frac{75}{18}$, ou $\frac{25}{6}$, et celui de 18 à 75 est $\frac{18}{75}$, ou $\frac{6}{25}$.

C'est du reste, en ce sens, que nous avons entendu jusqu'ici le résultat de la comparaison d'une grandeur quelconque à son *unité* (*voyez* le nº 1);

Dans la théorie des *nombres complexes*, le *rapport* de l'*unité prin-*

cipale à l'une de ses *subdivisions*, ou de *deux subdivisions* entre elles, est le *nombre de fois* que l'une contient l'autre;

Dans la comparaison du *système décimal* des poids et mesures à l'ancien, le *rapport* du *mètre* à la *toise*, ou de la *toise* au *mètre*, du *franc* à la *livre monnaie*, ou réciproquement, etc., est le *quotient* de la division des deux nombres exprimés en *unités* ou *parties* de l'unité de la même espèce.

244. Le rapport de deux grandeurs *concrètes* (nº **2**) suppose toujours que les grandeurs sont de *même espèce*, puisque l'on ne peut comparer entre elles des grandeurs d'*espèces* différentes.

Mais le *rapport* lui-même, d'après sa définition, est essentiellement un nombre *abstrait*, comme exprimant *combien de fois* l'une des grandeurs *contient* l'autre ou *y est contenue*.

Les grandeurs qui doivent former le rapport se nomment *les deux termes* du rapport; celui qu'on énonce le *premier* s'appelle *antécédent*, l'autre est dit le *conséquent*.

Ce sont, à proprement parler, le *numérateur* et le *dénominateur* de l'expression *fractionnaire* qu'on obtient en *indiquant* la division des deux grandeurs qui doivent constituer le rapport.

Ainsi, dans les rapports exprimés par $\frac{24}{8}$ ou $24:8$, $\frac{56}{27}$ ou $56:27$, $\frac{12}{18}$ ou $12:18$, 25, 56, 12, sont les *antécédents;* 8, 27, 18, les *conséquents* des trois rapports, qui ont d'ailleurs pour valeurs *effectives*, 3, $2\frac{2}{27}$, et $\frac{2}{3}$.

Des proportions.

245. Lorsque le *rapport* de deux grandeurs comparées entre elles est *égal au rapport* de deux autres grandeurs, on dit que ces quatre grandeurs sont *en proportion*, ou bien qu'elles sont *proportionnelles*.

Une proportion est donc l'expression de l'*égalité de deux rapports*, ou de *deux rapports égaux*.

Par exemple, le *rapport* de 48 à 12 étant 4, et celui de 36 à 6 étant aussi 4, on a l'égalité $\frac{48}{12}=\frac{36}{9}$, ou $48:12=36:9$; et les quatre nombres 48, 12, 36 et 9 sont dits *en proportion*.

Il est quelquefois plus commode de présenter la proportion sous la forme

$$48 : 12 :: 36 : 9;$$

et alors elle s'énonce de la manière suivante :

48 *est à* 12 *ce que*, ou *comme* 36 *est à* 9.

Les deux termes 48 et 36 de la proportion ainsi écrite, sont dits les *antécédents* de la proportion ; les termes 12 et 9 sont les *conséquents*, parce qu'en effet, le premier et le troisième terme, 48 et 36, sont les *antécédents* des deux rapports, tandis que le deuxième et le quatrième en sont les *conséquents*.

Le *premier* et le *dernier* terme, 48 et 9, sont appelés LES EXTRÊMES ; le *second* et le *troisième*, 12 et 36, LES MOYENS DE LA PROPORTION.

246. PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE. — Les *proportions* jouissent toutes d'une propriété qui peut servir de base à la résolution des problèmes dont les énoncés renferment des *grandeurs proportionnelles*.

Cette propriété consiste en ce que :

Dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.

Soit la proportion

$$(1) \qquad 24 : 18 :: 20 : 15,$$

dans laquelle les deux rapports $\frac{24}{18}$ et $\frac{20}{15}$ se réduisent l'un et l'autre au nombre fractionnaire $\frac{4}{3}$.

Je dis que l'on doit avoir

$$24 \times 15 = 18 \times 20.$$

En effet, la propriété serait évidente, si l'on avait la proportion

$$(2) \qquad 24 : 24 :: 20 : 20$$

(qu'on nomme *proportion identique*, aussi bien que le serait celle-ci : $48:48::48:48$).

Or, pour ramener la proportion (1) à la proportion (2), il suffit évidemment de multiplier chaque conséquent par le rapport commun $\frac{4}{3}$; mais l'un des moyens et l'un des extrêmes se trouvent ainsi multipliés par *un même* nombre ; donc (nº **57**) il en est de même du produit des extrêmes et du produit des moyens, et puisque alors les deux produits résultants sont *égaux*, les produits primitifs l'*étaient aussi*. C. Q. F. D.

247. RÉCIPROQUEMENT. — *Si quatre nombres énoncés* ou *écrits dans un certain ordre sont tels, que le produit* du *premier* par le *dernier* soit *égal à celui* du *second* par le *troisième*, *ces nombres forment une proportion dans l'ordre où ils sont énoncés* ou *écrits*.

Car s'il n'y avait pas proportion entre ces quatre nombres, il faudrait, pour rendre le *second* et le *quatrième* respectivement *égaux* au *premier* et au *troisième*, les multiplier, chacun, par un *nombre différent*, qui exprimerait, l'un le rapport du *premier* terme au *second*, l'autre, le rapport du *troisième* terme au *quatrième;* et comme les deux produits deviendraient alors *égaux*, il en résulterait qu'ils ne l'étaient pas avant la multiplication; ce qui serait contraire à l'énoncé de la proposition.

Donc, etc.

248. *Autre démonstration* de la propriété fondamentale et de sa réciproque.

(Employons les lettres pour rendre les raisonnements plus concis et plus généraux.)

Soient a, b, c, d, quatre nombres en proportion, de sorte que l'on ait

$$a:b::c:d \quad \text{ou bien} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Si l'on *multiplie* les deux membres de cette égalité par $b\times d$, produit des deux *conséquents*, il vient

$$\frac{a\times b\times d}{b}=\frac{c\times b\times d}{d}.$$

Supprimant, dans chaque membre, le facteur commun aux deux termes de la fraction, on a

$$a\times d=c\times b;$$

donc *le produit des extrêmes* est égal à *celui des moyens.*

Réciproquement, soient quatre nombres a, b, c, d, tels, que l'on ait

$$a\times d=b\times c.$$

Divisons les deux membres de cette égalité par $b\times d$, produit d'un facteur du premier membre par un facteur du second; on a

$$\frac{a\times d}{b\times d}=\frac{b\times c}{b\times d}, \quad \text{ou simplifiant,} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

et, par conséquent,

$$a:b::c:d.$$

Ainsi, *les quatre nombres forment une proportion dont les* EXTRÊMES *sont les facteurs du premier produit donné,* et les MOYENS, *les facteurs du second produit.*

249. PREMIÈRE CONSÉQUENCE. — *Dans toute proportion on peut échanger :* 1° *les moyens entre eux;* 2° *les extrêmes entre eux;* 3° *les moyens avec les extrêmes, sans que la proportion cesse d'exister entre les quatre nombres, dans l'ordre où ils sont nouvellement écrits.*

Car il est évident que ces mutations ne troublent en rien l'*égalité* des deux produits que donnent les *extrêmes* et les *moyens* de la proportion primitive; et puisque, dans les nouvelles expressions, le produit du *premier* nombre par le *dernier* reste constamment *égal* au produit du *second* par le *troisième*, il y a toujours proportion entre les quatre nombres, après les mutations effectuées.

Soit, par exemple, la proportion

(1) $$48:36::72:54,$$

dans laquelle le *rapport commun* est $\frac{4}{3}$.

On a :

En *échangeant les moyens*,

(2) $$48:72::36:54;$$

en *échangeant les extrêmes*,

(3) $$54:36::72:48;$$

en *mettant les moyens à la place des extrêmes*,

(4) $$36:48::54:72.$$

Dans les expressions (2), (3), (4), le produit du *second* nombre par le *troisième* est

$$36 \times 72 \quad \text{ou} \quad 48 \times 54,$$

et le produit du *premier* nombre par le *dernier*,

$$48 \times 54 \quad \text{ou} \quad 36 \times 72.$$

Or, ces produits sont *égaux*, en vertu de la proportion (1); donc (n° **247**) ces trois expressions sont aussi des proportions.

Le *rapport commun* est $\frac{4}{3}$ pour la proportion (1), $\frac{2}{3}$ pour la proportion (2), $\frac{3}{2}$ pour la proportion (3), et $\frac{3}{4}$ pour la proportion (4).

N. B. — On pourrait encore, dans chaque proportion, *renverser l'ordre des termes* de chaque rapport; mais il est aisé de reconnaître qu'on retomberait sur une des proportions déjà obtenues, ou bien, que cela reviendrait seulement à *intervertir l'ordre des rapports* dans l'une d'elles.

Ainsi, la proportion (1) devient, par le renversement des deux termes de chaque rapport,

$$36:48::72:54,$$

proportion identique avec (4).

Opérant de même sur la proportion (2), on a

$$72:48::54:36,$$

proportion qui rentre dans (3), puisque ces deux proportions peuvent se mettre sous la forme de deux égalités qui ne diffèrent qu'en ce que le *premier* membre de l'une est le *second* membre de l'autre, et *réciproquement*.

250. Seconde conséquence. — *On peut, dans toute proportion,* multiplier ou diviser, d'une part, *un extrême*, de l'autre, *un moyen*, par un même nombre, *sans troubler la proportion ;*

Ce qui veut dire qu'*il y a encore proportion* entre les quatre nombres résultants.

Car les deux produits des *extrêmes* et des *moyens* de la proportion donnée étant *égaux, les nouveaux produits* qui résulteront de la *multiplication* ou de la *division* d'*un extrême* et d'*un moyen* par un même nombre seront *encore égaux ;* ainsi (n° **247**) il y aura toujours proportion.

Nous renvoyons au septième chapitre l'exposition des autres propriétés des proportions, celles que nous venons de développer étant les seules dont on ait besoin pour la résolution des problèmes qui se rapportent à cette théorie.

§ II. — RÉSOLUTION DES QUESTIONS DÉPENDANT DES GRANDEURS PROPORTIONNELLES.

Règle de trois.

251. Une foule de problèmes concernant le commerce, l'industrie, la banque, etc., renferment, dans leur énoncé, des nombres ayant entre eux des relations susceptibles d'être exprimées par des *proportions ;* et parmi ces nombres, les uns sont *connus* et *donnés*, les autres sont *inconnus*, ou à déterminer.

Cela posé, on désigne sous le titre de règle de trois l'opération par laquelle,

Étant donnés trois *termes d'une proportion dont le* quatrième *est inconnu* (*), *il s'agit de déterminer ce quatrième terme.*

Or, de ce que, dans toute proportion, le produit des *extrêmes* est égal à celui des *moyens*, il résulte nécessairement que, pour obtenir la valeur de ce terme,

Il faut, si c'est *un extrême*, diviser *le produit des moyens par l'extrême connu ;*

Et si c'est *un moyen*, diviser *le produit des extrêmes par le moyen connu.*

Ainsi soient les deux proportions

$$24 : 9 :: 32 : x ; \quad 45 : 36 :: x : 24.$$

(*) On est dans l'usage de désigner, pour la résolution des problèmes, les quantités *inconnues* par les *dernières* lettres de l'alphabet, x, y, z.

Comme on doit avoir, pour la première,

$$24 \times x = 9 \times 32,$$

il en résulte

$$x = \frac{9 \times 32}{24} = \frac{288}{24} = 12\,;$$

on a, pour la seconde,

$$36 \times x = 45 \times 24,$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{45 \times 24}{36} = \frac{1080}{36} = 30.$$

Les proportions deviennent alors

$$24 : 9 :: 32 : 12\,; \quad 45 : 36 :: 30 : 24\,;$$

le *rapport commun* est $\frac{8}{3}$ pour la première, et $\frac{5}{4}$ pour la seconde.

Passons maintenant à la résolution de quelques problèmes, dont ceux du n° **41** peuvent être considérés comme des cas particuliers.

252. Premier problème. — On demande *le prix de* 384 *kilogrammes d'une certaine marchandise, en supposant que* 25 *kilogrammes aient coûté* 650 *fr.?*

Analyse. — Puisque 25 kilogrammes coûtent 650 fr., il est clair que 2, 3, 4,... *fois* 25 kilogrammes doivent coûter 2, 3, 4,... *fois* davantage; ainsi, les deux nombres donnés de kilogrammes sont entre eux dans *le même rapport* que *leurs prix respectifs*.

Donc, si l'on désigne par x le prix inconnu des 384 kilogrammes, et que l'on considère, pour le moment, les trois nombres donnés et x, comme des *nombres abstraits*, on a la proportion

(1) $$25 : 384 :: 650 : x\,;$$

d'où (n° **251**)

$$x = \frac{384 \times 650}{25} = \frac{249600}{25} = 9984\,;$$

et l'on conclut que les 384 *kilogrammes* de marchandise doivent coûter 9984 *fr.*

N. B. — Avant de chercher la valeur de x, au moyen de la proportion (1), on peut simplifier celle-ci en observant que *les antécédents*, c'est-à-dire *un extrême* et *un moyen*, sont *divisibles* par 25 (n° **68**), facteur qu'il est permis de *supprimer* (n° **250**), et il vient

$$1 : 384 :: 26 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 384 \times 26 = 9984.$$

Toutes les fois que de pareilles simplifications se présentent, on ne doit pas les négliger.

Autre méthode de résolution. — Si 25 kilogrammes coûtent 650 fr., *un seul* kilogramme doit coûter 25 *fois moins*, ou $\frac{1}{25}$ de 650 fr., c'est-à-dire $\frac{650}{25}$ fr.

Donc, 384 kilogrammes coûteront 384 *fois plus*, ou $\frac{650}{25} \times 384$; ce qui donne, tout calcul fait, 9984 fr.

SECOND PROBLÈME. — *Il a fallu* 20 *jours à* 135 *hommes pour faire un certain ouvrage; on demande combien il faut de jours à* 300 *hommes pour faire le même ouvrage?*

ANALYSE. — Si un certain nombre d'hommes ont employé 20 jours pour faire cet ouvrage, il est clair qu'un nombre d'hommes 2, 3, 4,... *fois plus* grand doivent employer 2, 3, 4,... *fois moins* de temps, toutes choses égales d'ailleurs; donc, autant de fois le *premier* nombre d'hommes, 135, sera contenu dans le *second*, 300, autant de fois le nombre de jours nécessaire au *second* nombre d'hommes, ou le nombre cherché, x, sera contenu dans le nombre de jours nécessaire au *premier* nombre d'hommes.

Ainsi, l'on a la proportion

$$135 : 300 :: x : 20,$$

ou, mettant les *moyens* à la place des *extrêmes* (n° **249**), afin d'avoir x comme dernier terme,

$$300 : 135 :: 20 : x,$$

d'où

$$x = \frac{135 \times 20}{300} = \frac{2700}{300} = 9.$$

Donc il faut 9 jours aux 300 hommes pour faire l'ouvrage.

On aurait pu supprimer dans la seconde proportion, 1° le facteur 15 commun aux deux premiers termes; 2° le facteur 20 commun aux deux antécédents; elle serait ainsi devenue

$$1 : 9 :: 1 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 9.$$

AUTRE MODE de résolution. — Si 135 hommes ont mis 20 jours pour faire l'ouvrage, il faudrait à *un seul* homme, pour le faire, 135 *fois plus* de temps, ou 20×135, et à 300 hommes, un nombre de jours 300 *fois moindre* que 20×135, c'est-à-dire

$$\frac{20 \times 135}{300} = \frac{2700}{300} = 9 \textit{ jours}.$$

RAPPORTS DIRECTS *et* INDIRECTS *ou* INVERSES.

253. Avant de traiter des problèmes plus compliqués, nous avons à faire connaître quelques dénominations auxquelles donne lieu la considération *des grandeurs proportionnelles*.

Dans toute question dont l'énoncé renferme *quatre* nombres en *proportion*, deux de ces nombres sont d'une *certaine espèce*, et les deux autres d'une *seconde espèce ;* mais chaque terme de la *seconde* est lié intimement, par les conditions de l'énoncé, à l'un des termes de la *première*.

C'est ainsi que, dans le premier problème du n° 252, deux des quatre nombres exprimant des *poids* d'une certaine marchandise, les deux autres sont les *prix respectifs* de ces poids.

De même, dans le second problème où il s'agit de deux nombres d'*hommes* et de deux nombres de *jours*, ceux-ci expriment les *temps respectifs* que doivent employer les deux nombres d'*hommes* à faire *le même* ouvrage.

On est convenu, pour cette raison, d'appeler CORRESPONDANTS les deux termes d'*espèces différentes, liés entre eux* par l'énoncé de la question.

Par exemple, pour le premier problème, *les prix* sont nommés les CORRESPONDANTS des *kilogrammes,* et *vice versâ,* les nombres de *kilogrammes* sont dits les CORRESPONDANTS des *prix* qu'ils doivent coûter.

Pareillement, pour le second, les nombres de *jours* sont nommés les CORRESPONDANTS des nombres d'*ouvriers*, et *vice versâ*.

Cela posé, on dit qu'il y a RELATION DIRECTE entre les nombres de la première espèce et entre les nombres de la seconde, ou bien, que les quatre nombres sont *directement proportionnels,* lorsque, la proportion ayant été constatée, on reconnaît, de plus, que chaque nombre *augmentant* ou *diminuant,* son CORRESPONDANT *augmente* ou *diminue ;* et, qu'au contraire, il y a RELATION INDIRECTE, ou que les quatre nombres sont *inversement* (ou *réciproquement*) *proportionnels*, lorsque, chaque nombre *augmentant* ou *diminuant*, son CORRESPONDANT *diminue* ou *augmente*.

L'énoncé du premier problème offre l'exemple d'une *relation directe ;* car *plus* il y a de kilogrammes de marchandise à payer, *plus* le prix doit être considérable.

Le second problème donne lieu à une *relation indirecte ;* car *plus* il y a d'hommes pour faire un certain ouvrage, *moins* il faut de jours pour le faire.

Si la relation est *directe*, et qu'on veuille écrire la proportion sous la forme

$$a : b :: c : d,$$

il faut que l'*un* des nombres et son *correspondant* forment les deux *antécédents*, et que les autres forment les deux *conséquents ;* en d'autres termes, que *chaque* nombre et son *correspondant* forment un *extrême* et un *moyen*.

Au contraire, si la relation est *indirecte*, l'*un* des nombres et son *correspondant* doivent former *les deux extrêmes*, tandis que l'*autre* nombre et son *correspondant* forment *les deux moyens*.

Quand on écrit la proportion sous la forme *équivalente* (nº **245**) de deux fractions *égales*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

il faut, dans le cas d'une relation *directe*, que l'*un* des nombres et son *correspondant* forment les *deux termes* de la *première* fraction, ou les *numérateurs* des deux fractions, tandis que les autres nombres forment les *deux termes* de la seconde fraction, ou les *dénominateurs* des deux fractions: et, dans le cas d'une relation *indirecte*, que chaque nombre et son *correspondant* forment, soit le *numérateur* de la première fraction et le *dénominateur* de la seconde, soit le *dénominateur* de la première et le *numérateur* de la seconde.

N. B. — Toutes ces distinctions dans la manière d'*écrire* les proportions fournies par les énoncés des problèmes sont *importantes à retenir;* autrement, on court le risque de commettre de graves erreurs.

254. On dit encore, lorsqu'une relation est *directe*, qu'une grandeur de chaque espèce est en RAISON DIRECTE de sa correspondante ; et si la relation est *indirecte*, que chaque grandeur est en RAISON INVERSE de sa correspondante.

Ainsi, par exemple, *deux fractions de* MÊME DÉNOMINATEUR *sont en raison directe de leurs numérateurs.*

Car on a vu (nº **111**) que, si le numérateur est rendu *double, triple, quadruple,...*, ou la *moitié*, le *tiers*, le *quart*,... de ce qu'il était, la fraction devient *double, triple, quadruple,...*, ou *deux*, *trois*, *quatre,...* fois *moindre* qu'elle n'était.

Par un raisonnement analogue, on prouverait que *deux fractions* de MÊME NUMÉRATEUR sont en RAISON INVERSE *de leurs dénominateurs.*

Lorsque les fractions ont des numérateurs et des dénominateurs *différents*, on commence par les réduire *au même dénominateur*, ou *au même numérateur;* et la question se trouve ainsi ramenée à l'un des deux cas précédents.

On est alors conduit à une nouvelle *locution* qui consiste à dire que les fractions données sont en RAISON COMPOSÉE, *directe* ou *inverse*, des *deux produits* du *numérateur* de la première par le *dénominateur* de la seconde, et du *numérateur* de la seconde par le *dénominateur* de la première.

Pour justifier cette locution, considérons, par exemple, les deux fractions $\frac{3}{7}$ et $\frac{4}{11}$.

En les réduisant *au même dénominateur*, on obtient

$$\frac{3\times 11}{7\times 11} \quad \text{et} \quad \frac{4\times 7}{7\times 11};$$

et ces deux fractions sont dans le *rapport direct* de 3×11 à 4×7, ou de 33 à 28.

Si, au contraire, on les réduit *au même numérateur*, il vient

$$\frac{3 \times 4}{7 \times 4} \quad \text{et} \quad \frac{3 \times 4}{7 \times 11};$$

auquel cas le rapport des deux fractions est *inverse*, et égal à celui de 3×11 à 7×4, ou de 33 à 28, comme ci-dessus.

Mais on voit que les deux termes de ce rapport sont, l'*un le produit du numérateur* de la première fraction *par le dénominateur* de la seconde, l'*autre*, le *produit du numérateur* de la seconde *par le dénominateur* de la première.

Cette *raison composée* est donc, en quelque sorte, le *résultat* de la multiplication de deux *rapports simples*, lesquels sont *directs* ou *inverses* l'un de l'autre, selon les cas.

253. Applications. — Comme application de ce qui vient d'être dit, nous devons indiquer le moyen de faire entrer dans un *calcul de proportion*, certaines *surfaces* et certains *volumes*, parce qu'il existe une foule de questions où l'on a besoin de faire usage de ces *évaluations numériques*.

Soit à comparer entre elles les *étendues superficielles* de deux pièces d'étoffe, dont l'une ait

$$24 \text{ mètres de } \textit{long} \text{ sur } \frac{2}{3} \text{ de } \textit{large},$$

l'autre

$$17 \text{ mètres de } \textit{long} \text{ sur } \frac{5}{4} \text{ de } \textit{large}.$$

Par un raisonnement analogue à celui qui a été fait au n° **252**, on reconnaît facilement que 24 mètres de *long* sur $\frac{2}{3}$ de *large* reviennent à $24^{m} \times \frac{2}{3}$ de *long* sur 1 mètre de *large*.

De même, 17 mètres de long sur $\frac{5}{4}$ de large reviennent à $17 \times \frac{5}{4}$ de *long* sur 1 mètre de *large*.

Donc, puisque les largeurs sont actuellement les mêmes, *le rapport* des étendues superficielles *est égal* à celui des deux *longueurs ;* et l'on trouve pour ce *rapport*

$$24 \times \frac{2}{3} : 17 \times \frac{5}{4},$$

$$\text{ou} \quad \frac{24 \times 2}{3} : \frac{17 \times 5}{4}, \quad \text{ou} \quad \frac{24 \times 2 \times 4}{3 \times 4} : \frac{3 \times 7 \times 5}{3 \times 4},$$

ou bien, en simplifiant,

$$64:85.$$

Soient encore deux rouleaux de papier de tenture, dont l'un ait

15 mètres de *long* sur $\frac{4}{5}$ de *large*,

l'autre

19 mètres de *long* sur $\frac{7}{8}$ de *large*.

On trouverait de la même manière, pour *le rapport* des *étendues superficielles* des deux rouleaux,

$$15\times\frac{4}{5}:19\times\frac{7}{8},$$

ou $\frac{15\times4}{5}:\frac{19\times7}{8}$, ou $\frac{15\times4\times8}{5\times8}:\frac{19\times7\times5}{5\times8}$

ou, simplifiant,

$$96:133.$$

Concluons de là que, toutes les fois que l'énoncé d'une question donne lieu à la comparaison d'étendues superficielles, *pour les ramener à* l'UNITÉ *de largeur*, il faut *former le produit de la longueur par la largeur, et comparer ensuite les deux grandeurs résultantes*.

Quant aux *volumes*, il nous suffira de prendre un exemple pour déterminer la marche qu'il convient de suivre.

Soit *à déterminer le rapport en* MÈTRES CUBES *des étendues de deux murs en maçonnerie*.

On suppose que le premier ait

60 mètres de *long* sur $\frac{3}{4}$ de mètre d'*épaisseur* et 3 mètres de *hauteur* ;

et le second,

125 mètres de *long* sur $\frac{7}{8}$ de mètre d'*épaisseur* et $4^{m}\frac{1}{2}$ de *hauteur*.

En raisonnant comme précédemment, on trouve que, pour le premier mur, c'est comme si l'on avait $60\times\frac{3}{4}\times3$ mètres de *long* sur 1 mètre d'*épaisseur* et 1 mètre de *hauteur*; et pour le second, $125\times\frac{7}{8}\times\frac{9}{2}$ mètres de *long* sur 1 mètre d'*épaisseur* et 1 mètre de *hauteur*. En d'autres termes, les deux murs doivent contenir,

le 1[er], $60\times\frac{3}{4}\times3$ mètres cubes; le 2[e], $125\times\frac{7}{8}\times\frac{9}{2}$.

Donc le *rapport* des deux étendues en volume est *égal à celui* de

$$60\times\frac{3}{4}\times3 \text{ à } 125\times\frac{7}{8}\times\frac{9}{2},$$

ou de $\dfrac{60\times3\times3\times4}{16}$ à $\dfrac{125\times7\times9}{16}$,

ou bien enfin, de 48 à 175.

D'où l'on voit que, pour obtenir les deux ouvrages exprimés en *mètres cubes*, il suffit de *faire*, pour chacun d'eux, le *produit de la longueur par l'épaisseur* et *par la hauteur*, ou, comme on dit en géométrie, *le produit des trois dimensions*. Après quoi, on trouve facilement le *rapport* des ouvrages exécutés ou à exécuter.

Règle de trois composée. — *Méthode générale de* RÉDUCTION A L'UNITÉ.

256. Souvent l'énoncé d'une question renferme *plus de quatre* nombres entre lesquels il y a lieu d'établir des rapports soit *directs*, soit *inverses*; et de là sont venues les dénominations de *règle de trois*, SIMPLE OU COMPOSÉE, *directe* ou *inverse*.

Ces dénominations sont tirées du mode de résolution auquel elles se rapportent, et qui est une application de la théorie des *proportions*.

Mais on a remplacé généralement ce mode par la méthode dite de RÉDUCTION A L'UNITÉ, que nous allons développer sur de nouvelles questions, en faisant remarquer que le deuxième mode de résolution des problèmes du n° **252** n'en est qu'un cas *particulier*.

257. TROISIÈME PROBLÈME. — *Il a fallu* 1800 *mètres de drap de* $\frac{5}{4}$ *de mètre en largeur, pour habiller* 500 *hommes;* on demande *le nombre de mètres à* $\frac{7}{8}$ *de large, pour habiller* 960 *hommes?*

Tableau des calculs.

$$\begin{array}{ccc}
1800^{\text{m. long}} & \frac{5}{4}^{\text{larg}} & 500^{\text{hom}} \\
x & \frac{7}{8} & 960 \\
\hline
1800\times\frac{5}{4}^{\text{m. long}} & 1^{\text{larg}} & 500^{\text{hom}} \\
x\times\frac{7}{8} & 1 & 960 \\
\hline
\dfrac{1800\times5^{\text{m}}}{4\times500} & 1^{\text{larg}} & 1^{\text{hom}} \\
\dfrac{x\times7}{960\times8} & 1 & 1
\end{array}$$

donc $$\frac{x\times7}{960\times8}=\frac{1800\times5}{4\times500}.$$

Analyse. — Après avoir disposé sur *deux lignes* les *six* nombres que comprend l'énoncé, et dont le nombre de mètres cherché, x, fait partie, on raisonne de la manière suivante :

1800 mètres à $\frac{5}{4}$ de *large*, et x mètres à $\frac{7}{8}$, sont la même chose que $\frac{1800 \times 5}{4}$ et $\frac{x \times 7}{8}$, à 1 mètre de *large* (n° 255).

On écrit alors ces nombres sur *deux nouvelles lignes*, en conservant les nombres 500 et 960, puis on continue le raisonnement :

Puisqu'avec $\frac{1800 \times 5}{4}$ mètres de *long* sur 1 mètre de *large*, on a pu habiller 500 hommes, 1 *seul* homme sera habillé avec $\frac{1800 \times 5}{4 \times 500}$.

De même, si avec $\frac{x \times 7}{8}$ mètres, on a pu habiller 960 hommes, 1 *seul* sera habillé avec $\frac{x \times 7}{8 \times 960}$ mètres, ce qui donne encore *deux nouvelles lignes* qu'on place au-dessous des précédentes.

Or les deux dernières expressions qu'on vient d'obtenir, représentant, l'une et l'autre, la quantité d'étoffe nécessaire pour habiller *un seul* homme, sont nécessairement *égales*. On a donc

$$\frac{x \times 7}{8 \times 960} = \frac{1800 \times 5}{4 \times 500},$$

ou, réduisant au même dénominateur, et supprimant ensuite ce dénominateur,

$$x \times 7 \times 4 \times 500 = 1800 \times 5 \times 8 \times 960.$$

Divisant les deux membres de l'égalité par le multiplicateur de x, on obtient enfin

$$x = \frac{1800 \times 5 \times 8 \times 960}{7 \times 4 \times 500} = \frac{36 \times 960}{7} = \frac{34560}{7} = 4937\frac{1}{7};$$

ce qui veut dire qu'on doit employer 4937 mètres $\frac{1}{7}$ pour habiller 960 hommes.

Vérification.

$\frac{1800 \times 5}{4 \times 500}$ se réduit évidemment à $\frac{18}{4}$ ou $4\frac{1}{2}$: d'un autre côté, $\frac{34560}{7} \times \frac{7}{8 \times 960}$ se réduit aussi à $\frac{3456}{768}$ ou $4\frac{1}{2}$.

Le nombre $4\frac{1}{2}$ ou $4^{m},50$ exprime, dans les deux cas, la quantité d'étoffe nécessaire pour habiller *un seul* homme.

258. Quatrième problème. — 500 *hommes, travaillant* 12 *heures par jour, ont employé* 57 *jours à creuser un canal de* 1800 *mètres de long sur* 7 *mètres de large et* 3 *de profondeur;* on demande *en combien de jours* 860 *hommes, travaillant* 10 *heures par jour, creuseront un autre canal ayant* 2900 *mètres de long sur* 12 *mètres de large et* 5 *mètres de profondeur, dans un terrain* 3 *fois plus difficile que le premier.*

[Cette question est une des plus compliquées qu'on puisse se proposer.]

Tableau du calcul.

$$\begin{array}{llll}
500^{\text{hom}} & 12^{\text{heur}} & 57^{\text{j}} & (1800 \times 7 \times 3 \times 1)^{\text{mc}} \\
860 & 10 & x & (2900 \times 12 \times 5 \times 3) \\
\hline
1^{\text{hom}} & 1^{\text{heur}} & 1^{\text{j}} & \left(\dfrac{1800 \times 7 \times 3 \times 1}{500 \times 12 \times 57}\right)^{\text{mc}} \\
1 & 1 & x & \left(\dfrac{2900 \times 12 \times 5 \times 3}{860 \times 10}\right)
\end{array}$$

$$\text{donc } \frac{x}{1} = \frac{2900 \times 12 \times 5 \times 3}{860 \times 10} \times \frac{500 \times 12 \times 57}{1800 \times 7 \times 3 \times 1}$$

$$\text{ou } \quad x = \frac{2900 \times 12 \times 5 \times 3 \times 500 \times 12 \times 57}{860 \times 10 \times 1800 \times 7 \times 3 \times 1}.$$

Analyse. — Il faut, avant tout, et conformément à ce qui a été prescrit au n° **255**, convertir en *mètres cubes* les deux travaux, l'un déjà exécuté, l'autre à exécuter; ce que l'on fait en multipliant entre elles les dimensions respectives de ces ouvrages.

De plus, comme, d'après l'énoncé, le terrain est trois fois *plus difficile* à exploiter que le premier, si l'on exprime par 1 et 3 les *difficultés relatives,* il convient d'introduire dans les deux produits dont nous venons de parler, les facteurs 1 et 3, que l'on peut, en quelque sorte, *assimiler* à une *quatrième* dimension, pour chaque ouvrage.

Cela posé, après avoir placé, comme dans le problème précédente sur deux lignes différentes, tous les nombres compris dans l'énoncé, on est conduit, par des raisonnements tout à fait pareils à ceux qui ont été faits pour la résolution du troisième problème, à former deux nouvelles lignes représentant :

L'*une,* l'ouvrage fait par 1 *seul* homme, en 1 heure et dans 1 jour;

L'*autre,* l'ouvrage fait par 1 *seul* homme, en 1 heure et dans x jours.

Maintenant, il est clair que ces deux quantités d'ouvrage doivent être entre elles dans le *rapport direct* des deux nombres de jours employés à les exécuter; on a donc l'égalité

$$\frac{x}{1} = \frac{2900 \times 12 \times 5 \times 3}{860 \times 10} : \frac{1800 \times 7 \times 3 \times 1}{500 \times 12 \times 57};$$

d'où l'on déduit (n° **151**)

$$x = \frac{2900 \times 12 \times 5 \times 3}{860 \times 10} \times \frac{500 \times 12 \times 57}{1800 \times 7 \times 3 \times 1},$$

ou

$$x = \frac{2900 \times 12 \times 5 \times 3 \times 500 \times 12 \times 57}{860 \times 10 \times 1800 \times 7 \times 3 \times 1};$$

et si l'on exécute toutes les *simplifications*, qu'ensuite on effectue les calculs indiqués, on obtient enfin

$$x = 549\frac{51}{301};$$

c'est-à-dire qu'il faut 549 jours et $\frac{51}{301}$ ou $\frac{1}{6}$ de jour environ, aux 860 hommes pour exécuter le second canal.

259. Les problèmes qui précèdent suffisent pour mettre au fait de la marche à suivre quand on emploie la méthode dite *de réduction à l'unité*, que nous aurons d'ailleurs l'occasion d'appliquer aux règles ultérieures qui dépendent de la *règle de trois*.

Mais nous croyons utile, pour terminer tout ce qui concerne celle-ci, de reprendre les résultats fournis par les deux derniers problèmes, afin d'en déduire de nouvelles conséquences sur l'usage des rapports *directs* ou *inverses*.

L'*analyse* du problème du n° **257** a conduit à une première expression du nombre de mètres cherché,

$$x = \frac{1800 \times 5 \times 8 \times 960}{7 \times 4 \times 500}.$$

Or, si l'on remonte à l'énoncé de la question pour reconnaître les termes *correspondants* de chaque espèce, et qu'on sépare au moyen du signe $\times$ les différents rapports de chaque terme à son *correspondant*, on pourra mettre l'expression précédente sous la forme

$$\frac{x}{1800} = \frac{5}{4} \times \frac{8}{7} \times \frac{960}{500},$$

ou bien encore sous celle-ci (n° **151**),

$$\frac{x}{1800} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{7}{8}} \times \frac{960}{500}.$$

En réfléchissant sur le composition du produit indiqué dans le second membre, on voit que le second facteur, qui est celui des deux *nombres d'hommes* à habiller, est *direct* avec le rapport des deux nombres de mètres de drap, $\frac{x}{1800}$; tandis que le premier facteur, ou le rapport des deux largeurs, est *inverse* du même rapport, $\frac{x}{1800}$; ainsi, ce *dernier* rapport, dit *composé* (nº 254), *est égal au produit des rapports* des deux nombres d'hommes et des deux largeurs, *direct* pour les hommes et *inverse* pour les largeurs.

Et, en effet, *plus* il y a d'hommes à *habiller, plus* il faut d'étoffe; mais *plus* il y a de largeur dans l'étoffe, *moins* elle doit avoir de longueur, pour que la quantité d'étoffe soit la même.

L'expression obtenue pour x, dans le problème du nº 258, étant

$$x = \frac{2900 \times 12 \times 5 \times 3 \times 500 \times 12 \times 57}{860 \times 10 \times 1800 \times 7 \times 3 \times 1},$$

peut être présentée sous la forme

$$\frac{x}{57} = \frac{2900}{1800} \times \frac{12}{7} \times \frac{5}{3} \times \frac{3}{1} \times \frac{500}{860} \times \frac{12}{10};$$

et l'on voit encore ici que le *rapport* des deux nombres de jours nécessaires pour la confection des travaux *est égal au produit des rapports* des nombres *correspondants* de chaque espèce, *directs* quant aux dimensions des canaux à construire et à la difficulté du terrain, mais *inverses* pour les nombres d'ouvriers à employer et pour les heures de travail par jour.

D'où l'on pourrait conclure cette sorte de RÈGLE GÉNÉRALE pour résoudre toute question dont l'énoncé renferme des rapports :

Formez un produit de tous les rapports DIRECTS OU INVERSES, *des nombres correspondants de chaque espèce autre que celle dont l'inconnue fait partie;* puis *égalez ce produit au rapport de l'inconnue à la quantité de même espèce qu'elle.*

Vous obtenez ainsi l'expression de l'*égalité de deux rapports* dont vous tirez facilement la valeur de x, en ayant soin, toutefois, de n'effectuer les calculs indiqués qu'après toutes les simplifications qui peuvent se faire à la seule inspection de cette valeur.

Nous rappellerons d'ailleurs que (nº 253) les rapports à établir sont *directs* ou *inverses,* suivant que, dans l'*analyse* du problème, on passe du *plus* au *plus*, ou du *moins* au *moins*, ou bien, au contraire, du *plus* au *moins,* ou du *moins* au *plus.*

RÈGLE D'INTÉRÊT SIMPLE.

260. On appelle INTÉRÊT SIMPLE d'une somme, le bénéfice résultant du *prêt* que l'on fait de *cette somme* pendant un *certain temps;* la somme prêtée ou placée, se nomme le CAPITAL.

L'*intérêt* d'une somme dépend de la *quotité* de ce *capital,* du *temps* pendant lequel il est placé, et de ce que l'on nomme le *taux* d'intérêt ou le *bénéfice* que rapporte une somme déterminée et *constante* pendant un temps aussi *déterminé*.

Ordinairement, le *taux* est le bénéfice que doivent rapporter 100 fr. placés pendant 1 an.

Ce *taux*, qui peut être considéré comme une sorte d'*unité* d'intérêt, est de pure convention entre le *prêteur* et l'*emprunteur ;* il dépend généralement de l'abondance ou de la rareté des *capitaux*. Cependant il y a, dans le commerce et dans la banque, des limites (fixées, soit par l'usage, soit par la loi) au delà desquelles le *taux* ne peut s'élever sans être appelé *usure*.

Il est évident que les *intérêts* de deux *capitaux* placés pendant *le même temps*, doivent être *proportionnels* à ces *capitaux*, et que les *intérêts* d'un *même capital* sont aussi *proportionnels* au *temps* pendant lequel ce capital doit rester placé.

D'où il suit que la *règle d'intérêt* n'est qu'un cas particulier de la *règle de trois :* ainsi, les questions qui s'y rapportent, doivent être traitées de la même manière que les précédentes.

261. Premier exemple. — On demande *l'intérêt d'une somme de* 4500 *fr., placée pendant* $2^{\text{ans}}\,5^{\text{m}}$ *à raison de* 7 *fr. pour* 100 *fr. par an* $\left(\text{ou, par } \textit{abréviation}, \ 7 \text{ p. } \frac{0}{0}\right)$.

Cet énoncé revient à celui-ci :

100 fr. *devant rapporter* 7 *fr. en* 1 *an*, ou 12 *mois*, combien 4500 fr. doivent-ils rapporter en $2^{\text{ans}}\,5^{\text{m}}$ ou 29 mois?

Les nombres peuvent être ainsi disposés :

$$\begin{array}{ccc} 100 & 12^{\text{m}} & 7^{\text{f}} \\ 4500 & 29^{\text{m}} & x \\ \hline \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{ccc} 1^{\text{f}} & 1^{\text{m}} & \dfrac{7}{100 \times 12} \\[2ex] 1^{\text{f}} & 1^{\text{m}} & \dfrac{x}{4500 \times 29} \end{array}$$

Les quantités $\dfrac{7}{100 \times 12}$ et $\dfrac{x}{4500 \times 29}$, exprimant l'une et l'autre ce que rapporte 1 fr. en 1 mois, doivent être égales, et l'on a

$$\frac{x}{4500 \times 29} = \frac{7}{100 \times 12};$$

ce qui donne

$$x = \frac{4500 \times 29 \times 7}{100 \times 12} = \frac{45 \times 29 \times 7}{12} = \frac{15 \times 29 \times 7}{4},$$

ou, effectuant les calculs et réduisant en décimales,

$$x = 761^{\text{f}},25.$$

Tel est l'intérêt de 4500 fr. placés à 7 p. $\frac{0}{0}$ pendant 2 ans 5 mois.

Vérification.

$$\begin{array}{ccc} 100^{\mathrm{f}} & 12^{\mathrm{m}} & 7^{\mathrm{f}} \\ 4500^{\mathrm{f}} & 29^{\mathrm{m}} & 761^{\mathrm{f}},25 \\ \hline \end{array}$$

1°. $$\frac{7}{1200} = \frac{0,07}{12} = 0,005833\ldots;$$

2°. $$\frac{761,25}{4500 \times 29} = \frac{7.6125}{45 \times 29} = \frac{7,6125}{1305} = 0,005833\ldots.$$

Second exemple. — On demande *l'intérêt d'une somme de* $2524^{\mathrm{f}},65$, *placée pendant* $2^{\mathrm{ans}}\ 7^{\mathrm{m}}$ à $4\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$.

$$\begin{array}{ccc} 100^{\mathrm{f}} & 12^{\mathrm{m}} & 4^{\mathrm{f}}\ 50^{\mathrm{c}} \\ 2524,65 & 31 & x \\ \hline 1^{\mathrm{f}} & 1^{\mathrm{m}} & \dfrac{4,50}{1200} \\ 1 & 1 & \dfrac{x}{2524,65 \times 31} \end{array}$$

donc $$x = \frac{2524,65 \times 31 \times 4,50}{1200} = \frac{25,2465 \times 31 \times 4,5}{12},$$

ou, effectuant les calculs,

$$x = 293,4905325.$$

Ainsi, l'intérêt demandé est $293^{\mathrm{f}},49$ à *un centime* près.

Vérification.

$$\frac{4,50}{1200} = \frac{0,0450}{12} = 0,00375,$$

$$\frac{293,49}{2524,65 \times 31} = \frac{29349}{7949175} = 0,003749.$$

262. Généralement, désignons par a un capital placé pendant un temps t, à raison de i p. $\frac{0}{0}$, et par I l'intérêt du capital a.

On aura

$$\begin{array}{ccc} 100^{\mathrm{f}} & 1^{\mathrm{an}} & i^{\mathrm{fr}} \\ a & t & \mathrm{I} \\ \hline 1 & 1 & \dfrac{i}{100}, \text{ intérêt de } 1^{\mathrm{f}} \text{ pour } 1 \text{ an}, \\ 1 & 1 & \dfrac{\mathrm{I}}{a \times t}, \text{ intérêt de } 1^{\mathrm{f}} \text{ pour } 1 \text{ an}; \end{array}$$

donc

$$\frac{\mathrm{I}}{a \times t} = \frac{i}{100},$$

et par conséquent,

$$\mathrm{I} = \frac{a \times t \times i}{100} = \frac{a \times i \times t}{100}.$$

Cette expression de I est ce que l'on nomme une FORMULE, en mathématiques, parce qu'elle représente, en termes simples et concis, les opérations à exécuter dans chaque cas particulier.

Elle tient donc lieu de l'énoncé d'une *règle;* mais il faut bien remarquer que le temps t peut être un *nombre fractionnaire* de l'unité d'*année*, ayant pour *dénominateur* soit le nombre de *mois*, soit le nombre de *jours* compris dans l'année.

Du reste, présentée sous la forme $\mathrm{I} = \dfrac{a \times i}{100} \times t$, elle peut encore se traduire dans la règle suivante :

Pour déterminer l'intérêt I, *multipliez* le capital donné par le taux d'intérêt *pour* 1 *an*, et *divisez* le produit par 100, puis *cherchez*, par les PARTIES ALIQUOTES (n° **150**), le résultat pour le temps t.

Appliquons cette règle au deuxième exemple.

On a d'abord

$$2524{,}65 \times 4{,}5 = 11360{,}925,$$

et divisant par 100	113,60925
cherchant ensuite l'intérêt pour. . .	$2^{\text{ans}}\ 7^{\text{m}}$
on trouve d'abord pour 2^{ans}.	227,21850
puis, pour 6^{m}.	56,804625
puis, pour 1^{m}.	9,467437
	293,490562 ou $293^{\text{f}},49$

même résultat que ci-dessus.

265. Ce second mode d'opérer est surtout préférable lorsqu'il s'agit de *déterminer l'intérêt* d'une somme pour *un certain nombre de jours*, ainsi que cela se pratique assez souvent dans la banque et le commerce.

Soit proposé de *déterminer l'interêt de* $1748^{\text{f}},19$ *pour* 113 *jours* à raison de $4\frac{3}{4}$ p. $\frac{0}{0}$, pour 1 an (que nous supposerons, pour simplifier, de 360 jours, en prenant 30 jours pour chaque mois).

On peut d'abord *multiplier* 1748,19 *par* $4\frac{3}{4}$, au moyen même des *parties aliquotes;* puis, après avoir *décomposé* 113 en $60 \times 30 \times 20 \times 3$, on applique de nouveau la méthode des *parties aliquotes* à la *multiplication* du premier produit obtenu, par les diverses parties de 113.

Tableau du calcul.

		1748,19
		$4\frac{3}{4}$
		6992,76
	$\frac{1}{2}$	874,095
	$\frac{1}{4}$	437,0475
		8303,9025
et divisant par	100	83,039025
Pour	60^{j}	13,839837
	30	6,919918
	20	4,613279
	3	0,691992
		26,065026

(Pour 20 jours, on a pris le *tiers* du produit pour 60, et pour 3 jours, le 10^{e} du produit pour 30.)

Ainsi, l'intérêt de $1748^{f},19$ pour 113 jours, est $26^{f},06$.

On reconnaîtra facilement, en appliquant au même exemple le premier procédé, que celui qui vient d'être suivi est plus expéditif.

264. *N. B. — Certains taux* d'intérêt ont donné naissance à des dénominations singulières.

Placer une somme à 10 pour 100, ou 1 pour 10, c'est la placer au *denier* 10; à 5 pour 100, ou 1 pour 20, c'est la placer au *denier* 20; à $2\frac{1}{2}$ pour 100, ou 1 pour 40, c'est la placer au *denier* 40.

Enfin, la prêter à 4 pour 100, ou 1 pour 25, c'est la prêter au *denier* 25.

Les nombres 10, 20, 40, 25 sont, comme l'on voit, les *dénominateurs* des fractions qui expriment le *taux* pour 1 franc, les *numérateurs* étant réduits à l'*unité*.

Le mot *denier* avait, sans doute, la signification du mot *dénominateur*, pour ceux qui l'ont inventé.

On dit encore : 10 pour 100 d'un nombre, c'est le 10^{e} de ce nombre; 5 pour 100, c'est le 20^{e}; $2\frac{1}{2}$ pour 100, c'est le 40^{e}; 4 pour 100, c'est le 25^{e}.

265. La formule (1) du n° **262** comprend *implicitement* les *solutions* de *quatre* problèmes généraux différents.

1°. *Connaissant a, t* et *i, trouver* I?

C'est le problème déjà traité sur plusieurs exemples particuliers.

2°. *Connaissant* I, *t et i, trouver a*?

3°. *Connaissant* I, *a* et *t, trouver i*?

4°. Enfin, connaissant *a*, I et *i*, trouver *t*?

Nous proposerons comme exercices, à la fin de ce chapitre, plusieurs applications de ces différents problèmes; et nous nous bornerons, pour le moment, à un exemple du *quatrième*, en le traitant par les deux modes de procéder que nous avons exposés précédemment :

Une somme de $2524^{f},65$ *ayant rapporté* $293^{f},40$, *à raison de* $4\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$ PAR AN, *on* DEMANDE *pendant combien de temps cette somme a dû rester placée?*

Premier mode de procéder.

$$\begin{array}{ccc} 100 & 1^{an} & 4\frac{1}{2} \\ 2524,65 & t & 293,49 \\ \hline 1 & 1 & \dfrac{4,50}{100} \\ 1 & t & \dfrac{294,49}{2524,65} \end{array}$$

$$\frac{t}{1} = \frac{293,49}{2524,65} \times \frac{100}{4,5} = \frac{29349}{252,465 \times 45} = \frac{29349000}{11360925}.$$

$$\begin{array}{r|l} 29349000 & 11360925 \\ \hline 6627150 & 2^{ans}\ 7^{m} \\ 12 & \\ \hline 79525800 & \\ \hline 9325 & \end{array}$$

réduction en *mois*

La fraction négligée est *moindre que* 0,001 de *mois*.

Second mode.

$$\begin{array}{r} 2524,65 \\ 4\frac{1}{2} \\ \hline 10098,68 \\ 1262,325 \\ \hline 11360,925 \\ 113,60925 \end{array}$$

pour $\frac{1}{2}$.

ou, divisant par 100, 113,60925 *intérêt* pour 1^{an};

et comme, d'après l'énoncé, 293,49 est *l'intérêt* pour t années, il faut, pour obtenir le temps cherché, diviser 29349000 par 11360925, comme ci-dessus.

RÈGLE D'ESCOMPTE.

266. L'*escompte* est une retenue faite sur le *montant* d'un billet qui n'est payable qu'au bout d'un *certain temps*, et dont on voudrait se faire payer avant son *échéance*.

La retenue se fait ordinairement à *tant* pour 100 par an ; et c'est ce qu'on nomme le TAUX de l'escompte.

Le BANQUIER ou l'ESCOMPTEUR est celui qui rembourse le billet *par anticipation*.

Il est aisé de reconnaître que la *règle d'escompte* rentre dans la *règle d'intérêt*, avec cette différence, que, pour celle-ci, l'*emprunteur* est obligé de rendre au *prêteur* la somme prêtée, augmentée de son intérêt, tandis qu'en fait d'escompte, le *possesseur du billet* ne doit recevoir que l'*excédant* entre le *montant* du billet et la *retenue* qu'on lui fait à raison de l'anticipation du payement de ce billet.

PREMIER EXEMPLE. — *On demande d'escompter à raison de* $4^f,80$ *p* $\frac{0}{0}$, *par an, un billet de* $875^f,49$, *payables dans* 18 *mois.*

Premier procédé.

$$\begin{array}{ccc}
100^f & 12^m & 4^f\,80 \\
875,49 & 18 & x \\
\hline
1 & 1 & \dfrac{4,80}{1200}
\end{array}\text{, retenue pour } 1^f \text{ et pour } 1^m.$$

$$\begin{array}{ccc}
1 & 1 & \dfrac{x}{875,49\times 18}
\end{array}\qquad id.$$

donc

$$\frac{x}{875,49\times 18}=\frac{4,80}{1200};$$

d'où

$$x=\frac{4,80\times 875,49\times 18}{1200}=\frac{40\times 87549\times 18}{1000000},$$

ou, effectuant les calculs, $x=63,035280=63,04$.

Ainsi, la retenue à faire sur le billet est 63,04 à 1 *centime* près.

Montant du billet . .	$875^f,49$
Escompte	63, 04
Différence. . . .	812, 45

Donc le POSSESSEUR du *billet* ne doit recevoir de l'*escompteur* que $812^f,45$.

Vérification.

$$\begin{array}{ccc}
100 & 12 & 4,80 \\
875,49 & 18 & 63,04 \\
\hline
\end{array}$$

$$\frac{4,80}{1200}=\frac{48}{12000}=0,004$$

$$\frac{63,04}{875,49\times 18}=\frac{6304}{87549\times 18}=\frac{6304}{1575882}=0,004\ldots$$

Second procédé.

montant du billet	875,49
retenue p. $\frac{0}{0}$ et p. 1^{an}	4.8
	700 392
	3501 96
	4202,352
divisant par 100	42,02352
retenue pour	$1^{an}\ 6^{m}$
1^{an}	42,02352
6^{m}	21,01176
	63,03528 comme ci-dessus.

Cet exemple suffit pour faire voir qu'il y a identité, sous le rapport des calculs, entre les deux règles d'*intérêt* et d'*escompte*.

La question suivante va être traitée par le second procédé seulement.

SECOND EXEMPLE. — *Escompter un billet de* $3478^{f},19$ *payable dans* 286 *jours, le taux d'escompte de* $6^{f},25$ *pour* 360 *jours.*

Commençons par décomposer le nombre 286 en

$$180+90+10+5+1.$$

Cela posé, voici le tableau du calcul :

	3478,19
	6,25
	1 7390 95
	6 9563 8
	208 6914
retenue p. 360^{j}	217,3868 75
180	108,6934 37
90	54,3467 19
10	6,0385 24
5	3,0192 62
1	0,6038 52
	172,7017 94
montant du billet	3478,19
retenue à faire	172,70
somme à recevoir	3306,49

On ferait la PREUVE de l'opération, en reprenant le même calcul sur le *double* de 3478, 19, et *divisant* le nouveau résultat par 2.

267. La généralisation de la règle d'escompte conduirait à la formule

$$E = \frac{a \times e \times t}{100}, \tag{2}$$

dans laquelle e, E désigneraient les escomptes pour 100 fr. et pour le *montant* du billet; ces lettres remplaceraient i, I de la formule du nº **262**.

On pourrait également, d'après la formule (2), établir les énoncés de *quatre* problèmes généraux, analogues à ceux du nº **265**; mais nous renvoyons, pour les applications, à la fin de ce chapitre.

263. Il existe une *autre règle d'escompte*, dont nous ne pouvons nous dispenser de parler; car, bien qu'elle ne soit généralement pas employée, elle paraît plus *rationnelle* et surtout *plus juste* à l'égard de celui qui veut faire *escompter* un billet.

Un exemple suffira pour donner une idée de cette seconde manière d'*escompter*.

Un billet de 1500 *fr. n'étant payable que dans* 15 *mois, est présenté à un banquier qui consent à l'encaisser moyennant un escompte de* 4,60 *p.* $\frac{0}{0}$ *par an.* ON DEMANDE *ce que le propriétaire du billet doit recevoir?*

Analyse. — Admettons, pour le moment, que $4^f,60$, qui est ici le *taux* d'escompte, soit en même temps le *taux* d'intérêt d'une somme placée à *intérêt*.

Il est clair que le *possesseur du billet* devrait recevoir actuellement une somme qui, placée à intérêt, à $4^f,60$ p. $\frac{0}{0}$, pendant 15 mois, lui donnât, y compris le capital et l'intérêt, la valeur du *montant* de son billet.

Or, l'intérêt de 100 fr. pour 1 an, étant $4^f,60$, devient pour 15 mois, $4^f,60 + \frac{1}{4}$ de $4^f,60$ ou $5^f,75$.

Ce qui prouve, déjà, que 100 fr. placés maintenant, rapporteraient $105^f,75$ en capital et intérêt.

Par suite, $105^f,75$ *payables dans* 15 *mois*, équivalent à 100 fr. *payables actuellement*; donc 1 *seul* franc payable dans 15 mois, revient à $\frac{100}{105,75}$ payable maintenant, et par conséquent, enfin, 1500 fr. *payables dans* 15 *mois*, peuvent être représentés par

$$\frac{100 \times 1500}{105,75}, \quad \text{ou} \quad \frac{15000000}{10575}, \quad \text{ou} \quad 1418^f,4397,$$

payables actuellement.

D'où il suit que le *possesseur du billet* devrait recevoir du banquier une somme de $1418^f,44$, pour le *montant* de son billet escompté.

En effet, si l'on calcule, d'après la règle d'intérêt, en appliquant le second mode par exemple, ce que doivent rapporter $1418^f,44$ au bout de 15 mois, à raison de $4^f,60$ *par an*, on obtient

	$I = 81^f,5603$
valeur qui ajoutée à	$1418^f,4397$
donne	$1500^f,0000$

c'est-à-dire le *montant* du billet.

Or, au lieu de suivre ce procédé, que fait le banquier?

Il détermine l'intérêt de 1500 fr. pour 15 mois, et *au taux* de $4^f,60$,

ce qui donne	$86^f,25$
qu'il *soustrait* de	$1500^f,00$
la différence est de	$1413^f,75$

qu'il donne au possesseur du billet.

N. B. — Il est à remarquer que l'excès de $86^f,25$ sur $81^f,56$ ou $4^f,69$, dont le banquier se trouve avoir bénéficié, n'est autre chose que l'*intérêt* des $81^f,56$, ou de l'*intérêt* des 1500 fr. montant du billet. Car, en multipliant 81,56 par 5,75, et divisant par 100, on obtient $4^f,6897$ ou $4^f,69$.

Ce bénéfice que s'attribue le banquier, indépendamment de celui qui lui appartient de droit, à raison de l'anticipation du payement, est en pure perte pour le possesseur du billet.

Il y aurait bien un moyen d'opérer suivant la première règle, sans léser les intérêts de celui qui veut faire escompter : ce serait d'établir un *taux d'escompte* un peu moins élevé que le *taux d'intérêt*; mais la difficulté serait de les proportionner l'un à l'autre, dans toutes les circonstances habituelles.

Quoi qu'il en soit, la *première règle* est généralement reçue dans le commerce, parce qu'elle est plus expéditive et plus commode, sous le rapport des calculs. C'est d'ailleurs une affaire de convention entre le *banquier* et le *possesseur* du billet, qui, après tout, trouve ainsi l'avantage de réaliser immédiatement, en raison de ses besoins, la valeur de son billet.

Nous renvoyons au septième chapitre les questions d'intérêt et d'escompte *composés*, parce qu'elles exigent, pour être traitées complétement, la connaissance et l'usage des Tables de logarithmes.

Rentes sur l'État et Assurances.

269. Quoique les questions qui se rattachent aux opérations, soit sur les *rentes*, soit sur les *assurances*, n'offrent que des applications fort simples de la règle d'intérêt, nous ne saurions les passer sous silence; et nous allons en traiter quelques-unes.

PREMIÈRE QUESTION. — *Une personne possède* 400 *fr. de rente sur l'État*, $4\frac{1}{2}$ *p.* $\frac{0}{0}$, *et veut réaliser le capital. Quelle somme doit-elle recevoir?*

Puisque l'on a $4\frac{1}{2}$ ou $\frac{9}{2}$ fr. pour 100 fr., 1 *seul* franc est la rente de $100 : \frac{9}{2}$, ou de $\frac{200}{9}$; donc 400 fr. expriment la rente de $\frac{200}{9} \times 400$, c'est-à-dire $\frac{80000}{9}$, ou 8888,888....

Ainsi la personne doit recevoir $8888^{f},89$.

SECONDE QUESTION. — *Quelle somme faut-il placer sur le* 3 *p.* $\frac{0}{0}$, *à* 80 *fr., pour se faire* 1200 *fr., de rente?*

Si 80 fr. rapportent 3 fr., 1 *seul* franc sera l'intérêt de $\frac{80}{3}$, et 1200 fr. celui de $\frac{80}{3} \times 1200$ ou 80×400 ou 32000 fr.

Ainsi, l'on doit placer une somme de 32000 fr.

TROISIÈME QUESTION. — Quelle *rente* pourrait-on se faire en *rente* 3 p. $\frac{0}{0}$, à 82, avec une somme de 12000 fr.?

82 fr. rapportant 3 fr. de rente, 1 *seul* franc doit rapporter $\frac{3}{82}$ de franc; donc 12000 fr. rapporteront 12000 fois $\frac{3}{82}$, ou $439^{f},03$ de *rente*.

Mais comme les *coupons* de rente ne comprennent pas de *fraction* de franc, et que même, s'il s'agit de rentes AU PORTEUR, le *coupon* MINIMUM est de 10 fr. par an, le *capital* à placer, que nous avons indiqué en *nombre rond*, devrait être, suivant le *chiffre de rente* auquel on voudrait s'arrêter, *augmenté* ou *diminué* d'une manière *convenable*.

Il est entendu que le calcul est effectué ici, abstraction faite du *droit* de l'AGENT DE CHANGE, intermédiaire *obligé*, dans ce cas, entre l'acheteur et le vendeur.

270. Les questions sur les *assurances* ne sont pas moins faciles à résoudre.

PREMIÈRE QUESTION. — *Une maison estimée* 150000 *fr. est assurée moyennant* UNE PRIME *de* $0^{f},15^{c}$ *pour* 1000 *fr. par an. On demande le montant de l'assurance.*

Puisque 1000 fr. exigent *une prime* de $0^{f}15^{c}$, il en résulte que 1 *seul* franc doit exiger $0^{f},00015$; et 150000 fr.

$$0,00015 \times 150000, \quad \text{ou} \quad 1,5 \times 15, \quad \text{ou} \quad 22,5;$$

donc le *montant* de la prime totale est de

$$22^{f}\,50^{c}.$$

SECONDE QUESTION. — *Quelle est la valeur d'une maison pour laquelle on paye 18 fr. de prime par an, au* TAUX *de* $0^{f},20^{c}$ *pour 1000 fr. ?*

1000 fr. payant $0^{f},20$ de prime, 1 *seul* franc doit payer 0,0002; donc, en cherchant *combien de fois* 18 *fr., prime annuelle*, contient 0,0002, on obtiendra la valeur de la maison.

Or

$$\frac{18}{0,0002} = \frac{180000}{2} = 90000.$$

Donc la maison vaut 90000 fr.

TROISIÈME QUESTION. — *Un navire portant* 250000 *fr. de marchandises, est assuré à* 6 *p.* $\frac{0}{0}$ *jusqu'à son arrivée à destination ; mais, dans le trajet, les marchandises éprouvent* UNE AVARIE *estimée* 40000 *fr., dont les assureurs doivent tenir compte. Quelle est la situation de ceux-ci à l'égard des propriétaires du navire ?*

Le *taux* d'assurance étant de 6 p. $\frac{0}{0}$, les assureurs doivent toucher *une prime* de $\frac{250000 \times 6}{100}$ ou de 15000 fr. ; mais ils ont à rembourser le prix de 40000 fr. de marchandises avariées ; donc, en définitive, les propriétaires doivent recevoir 25000 fr. des assureurs.

Nous ne pousserons pas plus loin ces sortes d'applications, qui, comme on le voit, n'offrent aucune difficulté réelle.

RÈGLE DE SOCIÉTÉ.

271. La règle dite *de société* a pour objet de

Partager entre plusieurs personnes associées dans une affaire commerciale ou industrielle, le BÉNÉFICE *ou la* PERTE *qui résulte de leur entreprise.*

Il est généralement admis (et cela est d'ailleurs conforme à l'équité) que la part de *gain* ou de *perte* de chaque associé est : 1° *proportionnelle à sa mise*, quand *les temps sont égaux* ; 2° *proportionnelle au temps*, quand les *mises* sont *égales*.

De là il résulte que, pour des mises et des temps *différents*, les parts sont *proportionnelles aux produits* des *mises* par les *temps*, puisqu'en multipliant les mises par les temps respectifs, on ramène les mises à être placées pendant *le même temps*.

Ainsi, la question considérée sous le point de vue le plus général, revient à *partager un nombre donné en parties* DIRECTEMENT *proportionnelles à d'autres nombres donnés.*

Traitons d'abord quelques exemples particuliers :

PREMIER PROBLÈME. — *Trois personnes se sont associées pour une entreprise, avec action égale dans la gestion; la première a placé* 15000 *fr., la deuxième* 22540 *fr., et la troisième* 25600 *fr. Au bout d'un an, elles ont fait un bénéfice de* 12000 *fr.; on* DEMANDE *ce qui revient à chacun des associés?*

ANALYSE. — Comme c'est avec les *trois* mises réunies que le *bénéfice total* a été obtenu, on est conduit à faire d'abord la *somme* de ces mises, pour en déduire le bénéfice qu'a pu produire 1 fr., et, par suite, ceux qui correspondent aux trois mises partielles.

Or, la somme de ces mises étant 63140 fr., on raisonne de la manière suivante :

63140 fr. ont donné un bénéfice de 12000 fr., donc 1 *seul* franc a dû produire $\frac{12000}{63140}$ de bénéfice.

$$15000 \ldots \frac{12000}{63140} \times 15000 = \frac{18000000}{6314} = 2850,807$$

$$22540 \ldots \frac{12000}{63140} \times 22540 = \frac{27048000}{6314} = 4283,813$$

$$25600 \ldots \frac{12000}{63140} \times 25600 = \frac{30720000}{6314} = 4865,378$$

$$\overline{11999,998}$$

Ainsi, la première personne doit recevoir $2850^{f},81$; la deuxième, $4383^{f},81$; et la troisième, $4865^{f},38$.

En effet, ces trois sommes additionnées, comme on le voit, reproduisent le gain total, 12000 fr.

SECOND PROBLÈME. — *Un particulier commence une entreprise avec un fonds de* 25000 *fr.*

CINQ MOIS *plus tard, voulant étendre son entreprise, il y intéresse un capitaliste qui lui fournit un capital de* 40000 *fr.*

SIX MOIS *après ce premier emprunt, il trouve un second capitaliste qui lui apporte une somme de* 60000 *fr.*

Au bout de DEUX *ans, la société se dissout après avoir réalisé un bénéfice de* 80000 *fr.; il était d'ailleurs stipulé que le particulier, restant seul chargé des opérations, recevrait une prime de* 5 *p.* $\frac{0}{0}$ *sur le bénéfice total, outre la part qui doit lui revenir* PROPORTIONNELLEMENT *aux fonds qu'il a placés.*

ON DEMANDE *la part de chaque associé.*

La première opération à exécuter consiste à retrancher de 80000 fr. les $\frac{5}{100}$ ou le 20^{e} de ce nombre, c'est-à-dire 4000 fr. qui doivent former la *prime* stipulée pour l'entrepreneur.

Il reste ainsi 76000 fr. à partager entre les trois associés *proportionnellement* aux *produits* de leurs *mises* par les *temps respectifs* pendant lesquels ces fonds sont restés dans l'entreprise.

Or, 1°. 25000 fr. placés pendant 24 mois équivalent à 25000×24, ou 600000 fr. placés pendant 1 mois;

2°. 40000 fr. placés pendant 19 mois, à 760000 fr.;

3°. 60000 fr. placés pendant 13 mois, à 780000 fr.; et alors la question rentre dans le premier problème.

Après avoir formé la *somme* des *trois* mises, ce qui donne 2140000 fr., on obtient successivement, pour les trois parts :

Première part . . $\dfrac{76000}{2140000} \times 600000 = \dfrac{4560000}{214} = 21308,411$

à quoi il faut ajouter les 4000 fr. de *prime*. 4000

$\overline{25308,411}$

Deuxième part. . $\dfrac{76000}{2140000} \times 760000 = \dfrac{5776000}{214} = 26990,654$

Troisième part. . $\dfrac{76000}{2140000} \times 780000 = \dfrac{5868000}{214} = 27700,934$

$\overline{79999,999}$

Ces parts sont donc respectivement

$$25308^{f},42;\quad 26990^{f},65;\quad 27700^{f},93.$$

N. B. — Le moyen de faire la preuve de l'opération totale se présente tout naturellement : il consiste à ADDITIONNER toutes les parts obtenues; et la *somme* doit être égale au *bénéfice* à partager.

272. Soit, *en général*, un nombre quelconque, a, à partager en *parties proportionnelles* à d'autres nombres donnés, m, n, p, q, ...

Faites d'abord la somme des nombres m, n, p, q,...., puis *multipliez successivement par chacun de ces nombres, le rapport*

$$\frac{a}{m+n+p+q+\ldots}.$$

Vous obtenez ainsi

$$\frac{a\times m}{m+n+p+\ldots},\quad \frac{a\times n}{m+n+p+\ldots},\quad \frac{a\times p}{m+n+p+\ldots},\ldots,$$

fractions qui, ayant le même dénominateur, sont nécessairement entre elles (n° 254) dans *le rapport direct* de leurs numérateurs, ou, à cause du facteur commun a, qu'on peut supprimer, dans le *rapport direct* des nombres m, n, p, q, ...

Lorsque les nombres m, n, p, ... sont *fractionnaires*, on commence par les réduire au même dénominateur, après quoi la question rentre dans le cas précédent.

Partager 360 en *quatre* parties qui soient entre elles comme les nombres $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{17}{32}$.

Ces fractions, réduites au plus petit dénominateur commun (nº **115**), deviennent $\frac{64}{96}$, $\frac{84}{96}$, $\frac{88}{96}$, $\frac{51}{96}$.

Donc les quatre parts doivent être respectivement *proportionnelles* aux nombres 64, 84, 88, 51.

La *somme* de ces nombres étant 287, on a successivement :

$$\text{pour la } \textit{première part}, \quad \frac{360}{287}\times 64 = \frac{23040}{287} = \quad 80,28$$
$$\text{pour la } \textit{deuxième part}, \quad \frac{360}{287}\times 84 = \frac{30240}{287} = \quad 105,37$$
$$\text{pour la } \textit{troisième part}, \quad \frac{360}{287}\times 88 = \frac{31680}{287} = \quad 110,38$$
$$\text{pour la } \textit{quatrième part}, \quad \frac{360}{287}\times 51 = \frac{18360}{287} = \quad \underline{63,97}$$
$$360,00$$

273. Les *contributions* perçues annuellement au nom de l'État se déterminent au moyen de la *règle de société*.

La *contribution foncière*, par exemple, après avoir été fixée en totalité, est répartie entre les départements en *raison directe* du revenu territorial de chacun d'eux, puis, de même, entre les arrondissements qui composent chaque département, ensuite entre les communes de chaque arrondissement; enfin, pour chaque commune, entre les propriétaires du sol.

274. Les questions suivantes se rattachent aussi plus ou moins directement à cette même règle.

TROISIÈME PROBLÈME. — *On demande de partager une somme de* 36000 *fr. entre* QUATRE *personnes, de manière que la seconde ait* DEUX FOIS *autant que la première; que la troisième ait* AUTANT, à elle seule, *que les deux premières ensemble; enfin, que la quatrième ait* TROIS *fois autant que la troisième.*

Appelons x la *première* part; la *deuxième*, d'après l'énoncé, sera $2x$; la *troisième*, $x+2x$, ou $3x$; et la *quatrième*, $3x\times 3$, ou $9x$.

Les *quatre* parts seront proportionnelles aux nombres x, $2x$, $3x$ $9x$, ou, supprimant le facteur commun x, aux nombres 1, 2, 3 et 9.

La question rentre donc dans le cas du nº **272**.

On obtient ainsi, pour les quatre parts :

$$\textit{première part.}\ \frac{36000}{1+2+3+9}\times 1,\quad \text{ou}\quad \frac{36000}{15} = 2400$$

$$\textit{deuxième part}\ldots\ldots\ldots\ \frac{36000}{15}\times 2,\quad \text{ou}\quad \frac{72000}{15} = 4800$$

$$\textit{troisième part}\ldots\ldots\ldots\ \frac{36000}{15}\times 3,\quad \text{ou}\quad \frac{108000}{15} = 7200$$

$$\textit{quatrième part}\ldots\ldots\ldots\ \frac{36000}{15}\times 9,\quad \text{ou}\quad \frac{324000}{15} = 21600$$

$$\overline{36000}$$

QUATRIÈME PROBLÈME. — Une personne laisse en mourant quatre héritiers, et elle a fait ce singulier testament :

Le PREMIER doit avoir le 6^e, le SECOND les $\frac{2}{5}$, le TROISIÈME les $\frac{4}{9}$, et le DERNIER le *tiers* du bien total, montant à 40000 fr. On demande ce qui revient à chaque héritier?

ANALYSE. — Si la somme des *quatre* fractions était égale à 1, les conditions du testament seraient facilement remplies; il n'y aurait qu'à prendre successivement le 6^e, les $\frac{2}{5}$, les $\frac{4}{9}$, et le *tiers* de 40000 fr.

Mais si l'on réduit les fractions $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{3}$ au même dénominateur, on trouve $\frac{15}{90}$, $\frac{36}{90}$, $\frac{40}{90}$, $\frac{30}{90}$, dont la somme fait $\frac{121}{90}$ ou $1\frac{31}{90}$, résultat *plus grand* que 1; d'où l'on voit que l'héritage serait plus qu'absorbé par les *trois premières* parts.

Mais si l'on réfléchit sur l'énoncé de la question, on comprendra que les intentions du testateur étaient que son bien fût partagé *proportionnellement* aux quatre nombres $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{3}$, et par conséquent aux nombres 15, 36, 40 et 30.

Ce problème rentre donc également dans le cas du n° **272**; on trouvera, à la fin de ce chapitre, comme exercices, d'autres applications de la *règle de société*.

Nous placerons encore ici deux *règles* usitées dans les opérations financières ou commerciales, et désignées sous les noms de règle CONJOINTE ou de CHANGE, et de règle D'ALLIAGE.

RÈGLE CONJOINTE OU DE CHANGE.

273. Cette règle a pour objet de *déterminer le rapport des mon-*

naies de deux pays, connaissant déjà les rapports de ces monnaies avec celles d'autres pays.

On l'appelle *règle conjointe,* parce qu'elle consiste à ramener à un seul rapport, par voie de multiplication, plusieurs rapports donnés, d'où résulte *un rapport composé.*

Les deux exemples suivants suffiront pour donner une idée de cette règle et de la manière de l'exécuter.

Premier exemple.

48 *francs*... étant supposés valoir.... 39 *shillings d'Angleterre;*
13 *shill. d'Angl*.................... 8 *florins d'Allemagne;*
50 *flor. d'Allem*..................... 9 *ducats de Hambourg;*
15 *duc. de Hamb*...................... 43 *roubles de Russie;*
on demande combien 2500 *fr.* vaudraient de *roubles de Russie?*

N. B. — Nous faisons remarquer que les nombres ci-dessus ne sont pas les expressions exactes des rapports des diverses monnaies; on sait d'ailleurs que ces rapports sont soumis à des variations, suivant le change d'une place sur une autre.

Analyse. — Désignons par a, b, c, d, e, *les valeurs intrinsèques* (*) des cinq monnaies qui entrent dans l'énoncé, et par x le nombre de roubles qu'il faut pour former 2500 fr.; on aura évidemment, d'après l'énoncé, les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} 48\,a &= 39\,b, \\ 13\,b &= 8\,c, \\ 50\,c &= 9\,d, \\ 15\,d &= 43\,e, \\ x \times e &= 2500\,a, \end{aligned}$$

d'où, multipliant ces égalités membre à membre, et omettant les facteurs communs a, b, c, d, e,

$$48 \times 13 \times 50 \times 15 \times x = 39 \times 8 \times 9 \times 43 \times 2500.$$

Donc,

$$x = \frac{39 \times 8 \times 9 \times 43 \times 2500}{48 \times 13 \times 50 \times 15} = 645^{\text{R}}.$$

Il faut observer qu'on ne doit effectuer les calculs indiqués au numérateur et au dénominateur, qu'après avoir *supprimé les facteurs communs* aux deux termes.

(*) On appelle VALEURS INTRINSÈQUES, les valeurs de différentes sortes de monnaies, rapportées à une même unité, par exemple AU FRANC.

Dans la pratique, voici comment on exécute ces simplifications :

$$\begin{array}{rcl}
1\ldots 2\ldots 16\ldots 48\,a & = & 39\,b\ldots 13\ldots 1\\
1\ldots 13\,b & = & 8\,c\ldots 1\\
1\ldots 50\,c & = & 9\,d\ldots 3\\
1\ldots 5\ldots 15\,d & = & 43\,e\\
x\times e & = & 2500\,a\ldots 50\ldots 5
\end{array}$$

Après avoir disposé les unes au-dessous des autres les cinq égalités, comme on l'avait fait plus haut, on commence par *supprimer* les facteurs communs a, b, c, d, e.

On *supprime* ensuite le facteur 3, commun à 48 et à 39, ce qui donne les quotients respectifs 16 et 13.

On *supprime* encore le facteur 8, commun à 16 et à 8, qu'on remplace respectivement par 2 et 1.

On continue ainsi, jusqu'à ce qu'on ait *supprimé* tous les facteurs communs aux premiers et aux seconds membres des égalités; et toute simplification faite, on parvient au résultat

$$x = 3\times 43\times 5 = 645.$$

Ces opérations demandent un peu d'habitude; mais elles ne sont pas difficiles. Il faut seulement avoir le soin de *barrer* chacun des nombres que l'on divise par un facteur, et de le remplacer par le quotient correspondant.

Second exemple.

Un fabricant français voudrait faire passer à Londres, sans rien débourser, une somme de 1200 *livres sterling, prix des matières premières qu'il a achetées; n'ayant pas de relation d'affaires avec cette ville, il s'adresse à son correspondant de Saint-Pétersbourg, qui a recours lui-même à un correspondant de Hambourg, et celui-ci prend également un intermédiaire en Espagne.* On demande, en FRANCS, *la somme payée par le fabricant français, eu égard aux changes d'une place sur l'autre?*

On suppose que, suivant les cours du moment,

26 *livres sterling* vaudraient.	165 *roubles de Russie;*
75 *roubles*	26 *ducats de Hambourg;*
20 *ducats de Hambourg* . . .	42 *piastres d'Espagne;*
12 *piastres d'Espagne*.	65 *francs.*

Désignant par *a, b, c, d, e,* les *valeurs intrinsèques* des monnaies, et par x la somme cherchée, on a les égalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl}
1\ldots 26\,a & = & 165\,b\ldots 11,\\
1\ldots 5\ldots 75\,b & = & 26\,c\ldots 1,\\
1\ldots 10\ldots 20\,c & = & 42\,d\ldots 21,\\
1\ldots 12\,d & = & 65\,e\ldots 13,\\
x\times e & = & 1200\,a\ldots 100\ldots 10;
\end{array}$$

d'où l'on tire, en effectuant les réductions d'après la marche indiquée ci-dessus,

$$x = 30030^{\mathrm{f}},$$

pour la somme EN FRANCS, payée par le fabricant français.

276. Cette *règle* n'est du reste, à proprement parler, qu'un cas particulier de la règle des *fractions de fractions* (n° **154**).

Reprenons, en effet, le premier exemple :

Dire que 48 fr. valent 39 shillings d'Angleterre, revient à dire que 1 fr. vaut $\frac{39}{48}$ du shilling d'Angleterre. De même, si 13 shillings valent 8 florins d'Allemagne, 1 shilling vaut $\frac{8}{13}$ du florin d'Allemagne; et par conséquent, 1 franc vaut $\frac{39}{48}$ des $\frac{8}{13}$ du florin d'Allemagne. Pareillement, si 50 florins valent 9 ducats de Hambourg, 1 florin vaut $\frac{9}{50}$ de ducat de Hambourg; et par conséquent, 1 florin vaut les $\frac{39}{48}$ des $\frac{8}{13}$ des $\frac{9}{50}$ d'un ducat de Hambourg.

En continuant ces raisonnements, on trouve que

$$2500^{\mathrm{f}} = 2500 \text{ fois les } \frac{39}{48} \text{ des } \frac{8}{13} \text{ des } \frac{9}{50} \text{ des } \frac{43}{15} \text{ du } \textit{rouble}.$$

Donc (n° **154**) $2500^{\mathrm{f}} = \dfrac{39 \times 8 \times 9 \times 43 \times 2500}{48 \times 13 \times 50 \times 15}$ du R^{e}; expression trouvée précédemment.

DE LA RÈGLE D'ALLIAGE.

277. Les questions qui appartiennent à cette règle sont de deux espèces :

Ou l'on a pour but de *trouver la valeur moyenne de plusieurs sortes de choses, connaissant le nombre et la valeur particulière de chaque sorte;*

Ou bien, il s'agit de *déterminer les quantités de chaque sorte de choses qui doivent entrer dans un mélange ou* ALLIAGE, *connaissant déjà le prix ou la valeur de chaque espèce, et le prix ou la valeur totale du mélange.*

Nous ne nous occuperons que de la première espèce, la seconde étant tout à fait du ressort de l'Algèbre.

PREMIER EXEMPLE. — *Un marchand de vin a mêlé des vins de différentes qualités, savoir,* 250 *litres à* 60^{c} *le litre,* 180 *litres à* 75^{c}, *et* 200 *à* 80^{c}; *on demande le prix de revient du litre de* MÉLANGE?

Observons d'abord que 250 litres à 60^c donnent pour le prix de ces 250 litres, 250×60^c ou. . . . . 150^f
De même, 180 litres à 75^c font 180×75^c ou. . . . 135
Enfin, 200 litres à 80^c font 200×80^c ou. 160
ce qui donne 445 fr. pour le prix total des trois quantités de vins mélangés. 445

Si maintenant on forme la somme, 630, des trois nombres 250, 180 et 200, la question sera évidemment ramenée à celle-ci :

$$\begin{array}{r} 250 \\ 180 \\ 200 \\ \hline 630 \end{array}$$

630 *litres de vin coûtent* 445 *fr.; à combien revient le litre?*

Pour obtenir ce prix, il suffit de diviser 445 fr. par 630, et le quotient $0^f,706$ ou 71^c, exprime le prix demandé.

Règle générale. — Pour avoir le prix de l'unité de mélange, il faut, 1° *multiplier le prix de l'unité de chaque sorte de chose que l'on veut mêler, par le nombre d'unités de cette sorte, et ajouter tous ces produits;* 2° *faire la somme des nombres d'unités des différentes sortes de choses;* 3° *diviser la somme des produits, ou le prix total, par la somme des nombres d'unités.*

Second exemple. — *On veut fondre ensemble* 23 *kilogrammes d'argent à* 826 *millièmes de fin,* 14 *kilogrammes à* 910; 19 *à* 845, *et l'on demande le titre de l'*ALLIAGE *de ces trois lingots?*

N. B. — Pour comprendre cet énoncé, il faut savoir que, dans l'orfévrerie, l'or et l'argent sont toujours combinés avec d'autres métaux, tels que le cuivre.

Cela posé, on dit qu'un lingot d'or ou d'argent est à *tel titre* ou *à tel degré de fin*, lorsque, sur un poids déterminé, par exemple sur *un* kilogramme, il contient tel poids d'or ou d'argent pur.

Ainsi, un lingot est *à* $\frac{9}{10}$ *de fin*, ou bien, est *au titre de* $\frac{9}{10}$, lorsque sur 1 kilogramme de ce lingot, il se trouve $\frac{9}{10}$ de kilogramme d'or ou d'argent pur. (Ce titre est celui des monnaies actuelles.) De même, un lingot est à 825 *millièmes de fin,* lorsque, sur *un* kilogramme, il contient $\frac{825}{1000}$ d'or ou d'argent pur.

Maintenant il résulte de l'énoncé, que

1°.	23^k à 825^{mill}	font 23×825	ou	18975^{mill}
2°.	14 à 910	14×910	ou	12740
3°.	19 à 845	19×845	ou	16055
	56			47770

Donc, les 56 kilogrammes alliés ensemble, contiennent $47^k,77$ d'argent pur.

Ainsi, le titre du nouveau lingot sera exprimé par $\frac{47,770}{56}$ ou 0,853; c'est-à-dire que le lingot résultant de l'alliage des trois premiers est à 853 *millièmes de fin*.

TROISIÈME EXEMPLE. — *On a employé* 500 *ouvriers, dont* 160 *à raison de* 2 *fr. par jour*, 200 *à* $1^f 75^c$, *et* 140 *à* $1^f 50^c$; *on demande à combien, l'un dans l'autre, chaque ouvrier revient par jour?*

$160^{ouv.}$	à 2^f coûtent	320^f
200	à $1^f\ 75^c$	350
140	à $1^f\ 50^c$	210
500		880^f

Donc, puisque *la paye* de 500 ouvriers a coûté 880 fr., la paye d'*un seul* coûte $\frac{880}{500}$ ou $1^f\ 76^c$.

278. *Valeurs et mesures moyennes.* — La détermination des *valeurs moyennes* de plusieurs choses de valeurs différentes, est un cas particulier de la *règle d'alliage* de la première espèce.

On appelle *valeur moyenne* de plusieurs choses dont les valeurs particulières sont déjà connues, *la somme des valeurs de ces choses, divisée par la somme d'autant d'unités qu'il y a de choses*, ou, plus simplement, *divisée par leur nombre*.

Ainsi, dans le cas où l'on n'a que *deux* choses, la *valeur moyenne* est la *demi-somme* des valeurs de ces choses.

QUATRIÈME EXEMPLE. — *On a mesuré, à quatre reprises différentes, la longueur d'un parc. On a trouvé la première fois, pour cette longueur*, $250^m,439$; *la seconde*, $250^m,695$; *la troisième*, $249^m,750$; *enfin la quatrième*, $251^m,158$. *On demande la longueur du parc?*

Puisque, dans les quatre opérations, les mesures obtenues ne s'accordent pas, il est clair que le seul moyen de répondre à la question, est d'établir la *mesure moyenne* entre toutes ces mesures.

On trouve d'abord pour la *somme* des quatre mesures, le résultat 1002,042; *divisant* ce résultat par 4, on obtient 250,5105 pour la *mesure moyenne*.

De quelques problèmes qui, sans dépendre de RÈGLES FIXES ET GÉNÉRALES, *peuvent se résoudre* ARITHMÉTIQUEMENT.

279. Dans les questions précédentes, les moyens de parvenir à la solution cherchée sont fixes et généraux, c'est-à-dire susceptibles d'être appliqués à toutes les questions de même espèce. Mais on peut en proposer une infinité d'autres qui ne se rattachent à celles-là qu'en partie, ou qui n'en dépendent en aucune manière. Dans ce cas, l'*Algèbre* fournit seule des méthodes sûres et directes de résolution. Cependant, nous allons montrer comment on peut traiter ces sortes de questions par le secours du seul raisonnement, ou, en d'autres termes, les résoudre *arithmétiquement*.

Rappelons-nous que résoudre ou analyser un problème, c'est (nº **242**), *en réfléchissant sur son énoncé, tâcher de découvrir dans les relations établies entre les nombres qui en font partie, la suite des opérations à effectuer sur les nombres connus, pour en tirer les valeurs des nombres inconnus.*

Premier problème. — On demande *un nombre dont la moitié, le tiers, le quart et les* $\frac{2}{7}$ *reunis, forment en somme* le nombre 575.

Commençons par remarquer que prendre successivement la *moitié*, le *tiers*, le *quart* et les $\frac{2}{7}$ d'un nombre, puis ajouter toutes ces parties, revient à multiplier ce nombre par la somme des fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{2}{7}$, c'est-à-dire par $\frac{115}{84}$. Or, puisque le produit du nombre cherché, par $\frac{115}{84}$, doit être égal à 575, il résulte de la définition de la division, que ce nombre est égal au quotient de 575 divisé par $\frac{115}{84}$, et par conséquent (nº **131**) à $575 \times \frac{84}{115}$.

Effectuant le calcul indiqué, on trouve enfin 420 pour le nombre demandé.

Vérification		420
	la moitié	= 210
	le tiers	= 140
	le quart	= 105
	le 7^e	= 60
	le 7^e	= 60
	Total	575

Second problème. — *On demande trois nombres dont la somme soit égale à* 96, *et tels, que le second surpasse le premier de* 2, *que le troisième surpasse de* 4 *la somme des deux autres.*

Il est d'abord évident que, si l'on diminuait le second nombre de 2, il deviendrait égal au premier, et que si l'on diminuait le troisième de 2 + 4 ou de 6 unités, il deviendrait égal au double du premier; ainsi, la somme des trois nombres serait, après ces deux soustractions, quadruple du premier nombre.

Or, la différence de 96 à 2 + 6, ou 8, est 88; d'où l'on voit que le *premier* nombre est égal au *quart* de 88, ou 22
donc le *deuxième* est 22 + 2, ou 24
et le *troisième* 22 × 2 + 6, ou 50

Vérification 96

TROISIÈME PROBLÈME. — *On emploie* TROIS *ouvriers pour faire un certain ouvrage : le* PREMIER *le ferait* SEUL *en* 12 *jours, travaillant* 10 *heures par jour; le* DEUXIÈME *dans* 15 *jours, en travaillant* 6 *heures par jour; le* TROISIÈME *dans* 9 *jours, en travaillant* 8 *heures par jour. On demande,* 1° *dans combien de temps ces trois ouvriers, travaillant ensemble, feront cet ouvrage;* 2° *ce que chacun en fera;* 3° *ce qu'il gagnera, l'ouvrage total étant payé* 108 *fr.*

SOLUTION. — Observons que, d'après l'énoncé, le premier ouvrier ferait, *seul*, le travail dans 12×10, ou 120 heures; donc, en 1 heure, il ferait $\frac{1}{120}$ de l'ouvrage.

Le deuxième le ferait dans 15×6, ou 90 heures; ainsi, en 1 heure il en ferait $\frac{1}{90}$.

Le troisième le ferait dans 9×8, ou dans 72 heures; donc, en 1 heure, il en ferait $\frac{1}{72}$.

Ces trois ouvriers, travaillant ensemble, feraient donc, en 1 heure, $\frac{1}{120} + \frac{1}{90} + \frac{1}{72}$, $\frac{12}{360}$, c'est-à-dire $\frac{1}{30}$ de l'ouvrage.

Or, s'il leur faut 1 heure pour faire $\frac{1}{30}$ de l'ouvrage, il est clair qu'ils emploieront 30 heures pour faire l'ouvrage tout entier.

Maintenant, puisqu'en 1 heure le premier ouvrier fait $\frac{1}{120}$, en 30 heures il fera $\frac{1}{120} \times 30$, ou $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$. De même, le deuxième fera en 30 heures, $\frac{1}{90} \times 30$, ou $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$. Enfin, le troisième fera en 30 heures, $\frac{1}{72} \times 30$, ou $\frac{5}{12}$.

Il ne reste plus actuellement qu'à savoir ce qui revient à chaque ouvrier, en raison du travail qu'il a fait. Or, pour cela, il suffit de diviser 108 en parties proportionnelles aux trois fractions $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{5}{12}$, ou plutôt, aux trois nombres 3, 4, 5; ce qui donne (n° **272**)

$$27^{f}, \quad 36^{f}, \quad \text{et} \quad 45^{f}$$

pour les gains respectifs des ouvriers.

Les diverses questions que nous venons de résoudre sont du genre de celles que plusieurs auteurs traitent par la règle dite de *fausse position, simple* ou *double*.

Exercices.

I. Un vaisseau n'a plus que pour 19 jours de vivres, et cependant il est obligé de tenir en mer pendant 25 jours. On demande à combien il faut réduire la ration ordinaire?

II. Vingt ouvriers travaillant pendant 15 jours, 10 heures par jour, ont creusé un fossé de 65 mètres de long sur $2^{m},30$ de large et $0^{m},75$ de profondeur. On demande *combien il faudra de jours* à 36 ouvriers travaillant 12 heures par jour, pour creuser un fossé de 200 mètres de long sur 3 mètres de large et $1^{m},25$ de profondeur; la difficulté du premier terrain étant à celle du second dans le rapport de 3 à 4?

III. Pendant *quel temps* un capital de 3000 francs est-il resté chez un banquier pour rapporter au propriétaire de ce capital une somme de $1325^{f}\,50^{c}$ à raison de 6 pour 100?

IV. Quel est *le taux* d'escompte d'un billet de 2500 francs payable dans 18 mois, pour lequel on a payé une somme de $1860^{f}\,45^{c}$?

V. Quatre associés ont mis la *même* somme dans une entreprise : le *premier* y a laissé ses fonds pendant 8 mois, le *deuxième* pendant 7 mois, le *troisième* pendant 10 mois, et le *quatrième* pendant 1 an. Partager le bénéfice de 1800 francs, *proportionnellement* aux mises augmentées de leur intérêt à 4 pour 100?

VI. On veut partager 60000 francs entre *trois* personnes, de manière que la *deuxième* ait deux fois *autant* que la *première* moins 2500 francs; que la *troisième* ait *trois fois* autant que la première moins 5000 francs. Que revient-il à chaque personne?

VII. On fond 2 kilogrammes de *cuivre* à $1^{f}\,45^{c}$; 7 kilogrammes de *zinc* à $0^{f}\,70^{c}$; 9 kilogrammes d'*antimoine* à $1^{f}\,50^{c}$. Quel est le prix du kilogramme d'alliage?

VIII. On demande à une personne combien elle a d'argent dans sa bourse; elle répond : Si l'on ajoutait à la somme que je possède, le *tiers*, les $\frac{2}{7}$ et les $\frac{3}{4}$ de cette même somme, je me trouverais avoir 175 francs. Quelle somme a-t-elle?

CHAPITRE SEPTIÈME.

§ I. *Complément de la théorie élémentaire des proportions et principales propriétés des équidifférences.* — § II. *Des progressions par différence et par quotient.* — § III. *Des logarithmes et de leur application à la résolution de quelques questions qui dépendent des grandeurs proportionnelles.*

---

280. Introduction. — Dans le chapitre précédent, nous avons énoncé que, de la comparaison de deux grandeurs entre elles, résultent deux espèces de *rapports*, rapports par *différence* et rapports par *division*.

Mais nous avons considéré seulement ceux de la seconde espèce ainsi que les *proportions* qui en découlent, et nous nous sommes alors bornés à faire connaître les propriétés pouvant servir à la résolution des questions qui comprennent des expressions de *rapports égaux*.

Nous allons ici, d'abord, compléter la théorie élémentaire des proportions, qui joue un grand rôle dans l'étude de la Géométrie, et ensuite exposer les principales propriétés des *équidifférences* auxquelles donnent lieu les *rapports* de la première espèce : les principes que nous développerons, devant servir de base aux théories des progressions et des logarithmes.

§ I. — COMPLÉMENT DE LA THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES PROPORTIONS ET PRINCIPALES PROPRIÉTÉS DES ÉQUIDIFFÉRENCES.

Des proportions.

Nous commencerons par rappeler le principe essentiel qui se rattache à la propriété fondamentale des proportions et à sa réciproque, savoir que :

Tout changement peut être opéré sur une proportion sans qu'il cesse d'exister une proportion entre les nombres qui résultent de ce changement, pourvu que ces nombres soient toujours disposés de telle sorte, que le produit du premier par le dernier soit égal au produit du second par le troisième.

Nous insistons sur ce principe, parce qu'il fournit un moyen sûr de reconnaître l'exactitude ou la fausseté de l'énoncé d'une proposition relative aux proportions.

Passons maintenant à l'exposé des principales propriétés qui doivent s'ajouter à celles précédemment développées.

281. Première propriété. — Dans toute proportion, *la somme* ou *la différence des deux premiers termes est au second terme, comme la somme* ou *la différence des deux autres termes est au quatrième.*

Ainsi, dans la proportion

$$72:24::45:15,$$

on a, par *addition*,

$$72+24:24::45+15:15,$$

et, par *soustraction*,

$$72-24:24::45-15:15,$$

proportion dont il serait facile de constater l'exactitude en effectuant *le produit des extrêmes* et *celui des moyens.*

Mais pour se rendre compte de cette propriété d'une manière générale, c'est-à-dire indépendante de tout exemple particulier, il suffit de remarquer qu'en *augmentant* ou *diminuant* chaque *antécédent* de *son conséquent* (n° **245**), on ne fait qu'augmenter ou diminuer d'*une unité* chacun des deux rapports; et puisque les rapports primitifs étaient *égaux*, les rapports résultants le sont aussi.

De la proportion $72 \pm 24:24::45 \pm 15:15$ ($\pm$ se prononce *plus* ou *moins*), on déduit, par le changement de place des moyens (n° **249**)

$$72 \pm 24:45 \pm 15::24:15;$$

mais on a déjà

$$72:24::45:15,$$

ou bien

$$72:45::24:15;$$

donc, comme le rapport $24:15$ est commun à la première et à la troisième de ces proportions, on a nécessairement

$$72 \pm 24:45 \pm 15::72:45,$$

ou bien

$$72 \pm 24:72::45 \pm 15:45.$$

On peut donc dire aussi que, dans toute proportion, *la somme* ou *la différence des deux premiers termes est au* PREMIER TERME, *comme la somme* ou *la différence des deux derniers termes est au* TROISIÈME; énoncé qu'on pourrait comprendre en un seul avec l'énoncé primitif de la propriété.

N. B. — La partie de ce dernier énoncé, qui correspond au mot *différence*, semble supposer que chaque antécédent est *plus grand* que son conséquent, comme cela a lieu dans la proportion prise pour exemple. Mais si l'on avait

$$16:48::32:96,$$

il faudrait d'abord échanger les extrêmes avec les moyens (n° **249**);

ce qui donnerait

$$48:16::96:32;$$

et alors on pourrait dire

$$48\pm16:16::96\pm32:32,$$

proportion dont l'énoncé serait le même que l'énoncé primitif. Ainsi la propriété est toujours *vraie*, dans le sens où elle a été établie.

282. Deuxième propriété. — Dans toute proportion, *la somme* ou *la différence des antécédents est à la somme* ou *la différence des conséquents, comme un quelconque des antécédents est à son conséquent.*

Reprenons la première proportion du n° **281**,

$$72:24::45:15,$$

et changeons les moyens de place; il vient

$$72:45::24:15,$$

nouvelle proportion à laquelle on peut appliquer la propriété précédente; ce qui donne

$$72\pm45:45::24\pm15:15,$$

ou, échangeant les moyens,

$$72\pm45:24\pm15::45:15, \quad \text{ou} \quad ::72:24.$$

Or, cette proportion, traduite en langage ordinaire et comparée à la proportion primitive, donne évidemment lieu à la nouvelle propriété telle qu'elle a été énoncée.

283. Conséquence I. — Dans toute proportion, *la somme des antécédents est à leur différence, comme la somme des conséquents est à leur différence.*

Si, dans la dernière proportion qu'on vient d'obtenir, on considère successivement les signes *supérieurs* et les signes *inférieurs*, il vient

$$72+45:24+15::45:15,$$
$$72-45:24-15::45:15;$$

donc, à cause du rapport commun $45:15$,

$$72+45:24+15::72-45:24-15,$$

ou, changeant les moyens de place,

$$72+45:72-45::24+15:24-15.$$

C. Q. F. D.

284. Conséquence II. — *Dans une suite de* rapports égaux, *la somme de tous les antécédents* ou *d'un certain nombre d'entre eux, est à la somme de leurs conséquents, comme l'un quelconque des antécédents est à son conséquent.*

Soit la suite de rapports égaux

$$84:56::75:50::72:48::45:30::36:24.$$

(Ici, le rapport *simplifié* est $\frac{3}{2}$.)

En ne considérant d'abord que les deux premiers rapports, ce qui constitue une proportion, on a

$$84:56::75:50;$$

d'où, en vertu de la propriété du n° **282**,

$$84+75:56+50::75:50.$$

Mais comme $75:50::72:48$, on peut remplacer $75:50$ par $72:48$, et il vient

$$84+75:56+50::72:48;$$

d'où, appliquant de nouveau la même propriété,

$$84+75+72:56+50+48::72:48,$$

ou bien encore

$$84+75+72:56+50+48::45:30;$$

et, par conséquent,

$$84+75+72+45:56+50+48+30::45:30;$$

ainsi de suite.

Les antécédents que l'on *ajoute* peuvent être en nombre quelconque, pourvu que l'on fasse en même temps la *somme* des conséquents de ces antécédents.

On peut dire également que, *dans une suite de rapports égaux, la* DIFFÉRENCE *entre la* SOMME *de plusieurs antécédents et la* SOMME *de plusieurs autres, est à la* DIFFÉRENCE *entre la* SOMME *des conséquents des premiers et la* SOMME *des conséquents des seconds, comme un antécédent est à son conséquent.*

En effet, on a, d'après ce qui vient d'être dit,

$$84+75+72:56+50+48::72:48$$

et

$$45+36:30+24::45:30::72:48;$$

d'où, à cause du rapport commun $72:48$,

$$84+75+72:56+50+48::45+36:30+24;$$

et, en appliquant la partie de la propriété du n° **282**, qui correspond au signe inférieur —,

$$(84+75+72)-(45+36):(56+50+48)-(30+24)$$
$$::(45+36):(30+24),$$

ou

$$::45:30.$$

Application aux fractions ordinaires. — Soit une série de fractions égales

$$\frac{24}{56}=\frac{21}{49}=\frac{12}{28}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}.$$

elles forment une suite de *rapports égaux* dont les numérateurs sont les *antécédents*, et les dénominateurs les *conséquents*.

Il résulte de la proposition précédente que, si l'*on fait la somme de tous les numérateurs* ou de *plusieurs d'entre eux*, puis *la somme des dénominateurs correspondants, on formera avec ces deux sommes une nouvelle fraction équivalente à l'une quelconque des fractions proposées*.

Ainsi l'on aura

$$\frac{24+21}{56+49}=\frac{24+21+12}{56+49+28}=\frac{24+21+12+6}{56+49+28+14}=\frac{3}{7},$$

ce qu'on peut vérifier en exécutant les calculs.

On aura pareillement

$$\frac{24-21}{56-49}=\frac{3}{7},\quad \frac{24-12}{56-28}=\frac{12}{28}=\frac{3}{7},\quad \frac{24-6}{56-14}=\frac{18}{42}=\frac{3}{7}.$$

Ces derniers résultats s'accordent avec le mode de *simplification des fractions*, indiqué au nº **124**.

285. Troisième propriété. — Si l'on a *plusieurs proportions, et qu'on les multiplie par ordre, ou terme à terme, les produits résultants seront encore en proportion.*

Soient les proportions

$$3:8::12:32 \mid 7:15::28:60 \mid 40:12::50:15;$$

elles peuvent être mises sous la forme

$$\frac{3}{8}=\frac{12}{32},$$
$$\frac{7}{15}=\frac{28}{60},$$
$$\frac{40}{12}=\frac{50}{15}.$$

Si l'on multiplie entre elles respectivement les fractions qui composent les premiers membres, et les fractions qui composent les seconds membres de ces égalités, on a nécessairement des *produits égaux*; et il vient

$$\frac{3}{8}\times\frac{7}{15}\times\frac{40}{12}=\frac{12}{32}\times\frac{28}{60}\times\frac{50}{15},$$

ou, appliquant la règle de la multiplication des fractions,

$$\frac{3\times 7\times 40}{8\times 15\times 12}=\frac{12\times 28\times 50}{32\times 60\times 15},$$

ou bien, enfin,

$$3 \times 7 \times 40 : 8 \times 15 \times 12 :: 12 \times 28 \times 50 : 32 \times 60 \times 15.$$

Les fractions qui composent les deux membres de la dernière égalité deviennent, en effet, toute simplification faite,

$$\frac{7}{12} = \frac{7}{12},$$

proportion *identique*.

Le rapport $\frac{7}{12}$ provient, comme on le voit, de la multiplication de trois autres rapports appartenant chacun à une proportion différente; c'est donc un *rapport composé*, dans le sens que nous avons attribué (n° **234**) à cette dénomination.

286. Conséquence. — Si quatre nombres sont en proportion, *leurs carrés, leurs cubes, leurs quatrièmes, cinquièmes,..., puissances sont aussi en proportion.*

Ce n'est, évidemment, qu'un cas particulier de la proposition précédente : il suffit de supposer que toutes les proportions qu'on multiplie entre elles *terme* à *terme* sont les *mêmes*.

On peut dire encore : soit la proportion

$$a : b :: c : d, \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Puisque les deux fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ sont égales, leurs *carrés*, leurs *cubes*, etc., sont aussi égaux ; et l'on a

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{d}\right)^2; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{c}{d}\right)^3; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^4 = \left(\frac{c}{d}\right)^4 \cdots$$

Mais

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}, \cdots;$$

pareillement,

$$\left(\frac{c}{d}\right)^2 = \frac{c^2}{d^2}, \quad \left(\frac{c}{d}\right)^3 = \frac{c^3}{d^3}, \quad \left(\frac{c}{d}\right)^4 = \frac{c^4}{d^4}, \cdots;$$

donc

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}, \quad \text{ou} \quad a^2 : b^2 :: c^2 : d^2,$$

$$\frac{a^3}{b^3} = \frac{c^3}{d^3}, \quad \text{ou} \quad a^3 : b^3 :: c^3 : d^3;$$

et ainsi de suite.

On remarquera que cette démonstration ne suppose pas d'autre propriété des proportions, que leur définition même.

Réciproquement, la même proportion

$$a:b::c:d, \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

donne

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{c}{d}}, \quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\sqrt[3]{\frac{c}{d}}, \quad \sqrt[4]{\frac{a}{b}}=\sqrt[4]{\frac{c}{d}},\ldots,$$

d'où, en appliquant les règles établies aux nos **224** et **240** pour l'extraction des racines *carrée* et *cubique* des fractions,

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}, \quad \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{d}}, \quad \text{et par } \textit{extension}, \quad \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}=\frac{\sqrt[4]{c}}{\sqrt[4]{d}},\ldots,$$

ou

$$\sqrt{a}:\sqrt{b}::\sqrt{c}:\sqrt{d}; \quad \sqrt[3]{a}:\sqrt[3]{b}::\sqrt[3]{c}:\sqrt[3]{d};\ldots.$$

Donc, *les racines carrées, cubiques, quatrièmes, cinquièmes,...* de QUATRE *nombres en proportion, sont elles-mêmes en proportion.*

287. REMARQUE. — Lorsque les nombres a, b, c, d ne sont pas des *carrés*, des *cubes parfaits*, les quantités $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$ et $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{c}$, $\sqrt[3]{d}$ sont des nombres *irrationnels* ou *incommensurables;* et les proportions établies ci-dessus existent alors entre des *nombres incommensurables*, c'est-à-dire que l'on est conduit à considérer des rapports entre des nombres incommensurables, *rapports* qui sont eux-mêmes, en général, *incommensurables*.

Il s'agirait, dans ce cas, de savoir si l'on peut attribuer à des proportions de cette espèce toutes les propriétés précédemment établies.

Or, la réponse ne peut être qu'affirmative, si l'on se rappelle ce qui a été dit au n° **241**, savoir : qu'un nombre *irrationnel* (*) peut toujours être remplacé, *mentalement*, par un nombre *fractionnaire exact* qui ne diffère du nombre proposé que d'une quantité *aussi petite que l'on veut*, et pouvant, par conséquent, être prise tellement petite, qu'on ne doive avoir aucun égard à l'erreur que l'on commettrait en négligeant cette quantité; c'est donc alors entre les nombres *commensurables* substitués aux grandeurs *irrationnelles*, que les rapports sont censés établis.

Quant aux rapports entre des nombres *fractionnaires exacts*, il est facile de reconnaître qu'ils peuvent toujours être remplacés par des rapports entre des nombres *entiers*.

(*) Il ne saurait être question ici que des nombres irrationnels provenant des extractions de racines *carrée* et *cubique;* mais on conçoit que la remarque doit *s'étendre* à tous les nombres irrationnels fournis par des extractions de racines de *degré quelconque*, et, en général, à toute sorte de nombres irrationnels, dont la fin du septième chapitre fournira de nouveaux exemples.

Par exemple, le rapport de $\frac{3}{7}$ à $\frac{5}{11}$ étant (n° **245**) le quotient de la division de ces deux fractions, revient (n° **131**) à $\frac{3}{7}\times\frac{11}{5}$ ou $\frac{33}{35}$.

De même, celui de $3+\frac{7}{8}$ à $1+\frac{15}{23}$, ou de $\frac{31}{8}$ à $\frac{38}{23}$, revient à $\frac{31}{8}\times\frac{23}{38}$, ou $\frac{953}{304}$.

Ainsi, toutes les propriétés démontrées sur les proportions, dans le cas où les termes sont des nombres *entiers*, sont toujours *vraies*, quelle que soit la nature de ces termes.

DES ÉQUIDIFFÉRENCES.

288. Définitions. — Lorsque la différence de deux nombres est égale à la différence de deux autres, on exprime cette propriété par le mot ÉQUIDIFFÉRENCE.

Une *équidifférence* est donc l'*expression de l'égalité* de deux différences.

(On l'appelait autrefois *proportion arithmétique*, comme on appelait *proportion géométrique* l'égalité de deux *rapports géométriques*.)

Soient *quatre* nombres a, b, c, d, tels que a surpasse b, ou en est surpassé, de la *même* quantité que c surpasse d, ou en est surpassé.

Ces quatre nombres constituent une *équidifférence* que l'on peut écrire de deux manières :

1°. $\qquad a.b:c.d;$

2°. $\qquad a-b=c-d, \quad \text{ou} \quad b-a=d-c,$

suivant que l'on a

$$a>b,c>d, \quad \text{ou bien} \quad a<b,c<d.$$

Sous la *première* forme, on l'énonce comme une proportion, savoir : a *est à* b *comme* c *est à* d.

Le premier et le troisième terme sont dits les *antécédents*; le deuxième et le quatrième sont alors les *conséquents* de ces antécédents.

Enfin, de même que dans les proportions, le premier et le quatrième forment les *extrêmes*, le deuxième et le troisième, les *moyens* de l'équidifférence.

Quant à la *seconde* forme, les dénominations précédentes peuvent être conservées, tant que l'on a

$$a>b \quad \text{et} \quad c>d.$$

Mais, au contraire, dans le cas de $a<b$, $c<d$, comme l'équidifférence doit s'écrire

$$b-a=d-c,$$

pour que son énoncé ait un sens en arithmétique, ces dénominations doivent être *échangées* les unes dans les autres; c'est-à-dire que ce qu'on appelait *antécédent* doit s'appeler *conséquent*, et réciproquement; de même, les *extrêmes* sont devenus les *moyens*, et réciproquement.

Il n'y a pas lieu de faire cette distinction pour les *proportions*, parce que les *rapports* qui la constituent peuvent être, ARITHMÉTIQUEMENT, *plus grands* ou *plus petits* que l'unité.

289. PREMIÈRE PROPRIÉTÉ. — *Dans toute équidifférence, la somme des extrêmes est égale à celle des moyens.*

Soit l'équidifférence

$$47 . 19 : 63 . 35;$$

je dis qu'on doit avoir

$$47 + 35 = 19 + 63.$$

En effet, si l'on avait

$$47 . 47 : 63 . 63$$

(équidifférence qu'on nomme *identique*), la proposition serait évidente, puisque les extrêmes seraient alors respectivement *les mêmes* que les moyens.

Or, pour ramener l'équidifférence à cet état, il suffit d'*augmenter* chaque conséquent de la *différence commune*, 28, qui existe entre le premier et le deuxième terme, entre le troisième et le quatrième; et, puisque *après* cette addition d'*un même* nombre, tant à l'un des moyens qu'à l'un des extrêmes, la *somme des moyens* est égale à la *somme* des extrêmes, c'est qu'elles étaient égales *avant* l'addition.

N. B. — Si l'on avait l'équidifférence

$$7 . 24 : 19 . 36,$$

il suffirait, afin de conserver le même mode de démonstration, d'*ajouter*, non plus aux deux *conséquents*, mais aux deux *antécédents*, *le même nombre*, 17, pour les rendre égaux à leurs conséquents.

290. DEUXIÈME PROPRIÉTÉ. — Réciproquement, si *quatre* nombres, écrits sur une même ligne ou énoncés dans un certain ordre, *sont tels, que la somme* du *premier* et du *dernier soit égale à la somme* du *second* et du *troisième*, *les quatre nombres forment une équidifférence* dans l'ordre où ils sont écrits ou énoncés.

Car s'il n'y avait pas *équidifférence*, c'est-à-dire, si la différence entre les deux premiers nombres n'était pas égale à la différence entre les deux autres, il faudrait, pour rendre les conséquents *égaux* à leurs antécédents, *ajouter* à chaque conséquent (ou à chaque antécédent) *un nombre différent*; et, puisque *après* cette addition, les *deux sommes* seraient nécessairement égales, c'est qu'*avant* l'addition, ces deux sommes n'*étaient pas* égales; ce qui serait contraire à l'énoncé de la proposition.

291. CONSÉQUENCE. — *Dans toute équidifférence*, on peut (comme pour les proportions) : 1° *échanger les moyens entre eux;* 2° *mettre les moyens à la place des extrêmes*, sans que l'équidifférence cesse d'exister.

Car il est évident qu'après ces diverses mutations, la somme du *premier* et du *dernier* terme n'en reste pas moins égale à celle du *second* et du *troisième;* donc, en vertu de la réciproque précédente, il y a toujours *équidifférence.*

Ainsi, reprenant l'équidifférence

$$47.19:63.35,$$

on en déduit successivement

$$47.63:19.35$$
$$19.47:35.63$$
$$63.47:35.19$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

292. *Équidifférences et proportions continues.* — Il arrive quelquefois que, dans une *équidifférence*, les *deux moyens* sont *égaux*, comme dans celle-ci,

$$75.49:49.23$$

(la différence commune est ici 26).

Dans ce cas, l'équidifférence reçoit la dénomination d'*équidifférence continue;* et il est d'usage de la mettre sous la forme

$$\div 75.49.23,$$

que l'on énonce ainsi : *Comme* 75 *est à* 49, 49 *est à* 23, ou simplement, 75 *est à* 49 *est à* 23.

De même, on peut avoir *une proportion* dont les *moyens* soient *égaux*, par exemple

$$48:12::12:3.$$

Elle porte alors le nom de *proportion continue*, que l'on écrit

$$\because 48:12:3,$$

et qu'on énonce en disant :

Comme 48 *est à* 12, 12 *est à* 3, ou 48 *est à* 12 *est à* 3.

Dans toute *équidifférence continue*, la somme des extrêmes est DOUBLE du *moyen terme* (n° **289**);

Donc celui-ci, qu'on désigne alors sous la dénomination de MOYEN DIFFÉRENTIEL (autrefois *moyen proportionnel arithmétique*), a, pour expression de sa valeur, *la* DEMI-SOMME *des extrêmes.*

Dans toute *proportion continue*, le produit des extrêmes est égal *au* CARRÉ du *moyen terme* (n° **246**);

Donc celui-ci, qu'on appelle MOYEN PROPORTIONNEL (anciennement *moyen proportionnel géométrique*), a, pour valeur, *la* RACINE CARRÉE *du produit des extrêmes.*

Nous pouvons conclure de là que, toutes les fois qu'un problème donne lieu à une *équidifférence continue* entre deux nombres donnés, considérés comme *extrêmes*, et un troisième nombre *inconnu* formant les *deux moyens*, il faut, pour obtenir le moyen terme, *former la* DEMI-SOMME *des deux extrêmes.*

Si la relation fournie par l'énoncé du problème est une *proportion continue* dont le nombre *inconnu* forme les *deux moyens*, il faut *multiplier les deux extrêmes l'un par l'autre*, puis *extraire la* RACINE CARRÉE *du produit.*

1°. De l'*équidifférence continue*

$$a.x:x.b,$$

on déduit

$$2x = a + b, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{a+b}{2};$$

2°. De la *proportion continue*

$$a:x::x:b,$$

on tire

$$x \times x \quad \text{ou} \quad x^2 = a \times b; \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt{a \times b}.$$

Par exemple, l'*équidifférence* $64.x:x.36$ donne

$$x = \frac{64+36}{2} = 50;$$

par suite,

$$64.50:50.36; \quad \textit{différence commune}, \ 14.$$

De même, la *proportion* $64:x::x:36$ donne

$$x = \sqrt{64 \times 36} = \sqrt{2304} = 48;$$

par suite,

$$64:48::48:36; \quad \textit{rapport commun}, \ \frac{4}{3}.$$

N. B. — Nous avons cru devoir réunir sous *un même* numéro ce qui concerne le *moyen différentiel* et le *moyen proportionnel* entre deux nombres, à cause du rapprochement immédiat qu'on peut en faire. L'un s'obtient en *additionnant* les deux nombres donnés et *divisant* la somme par 2; l'autre, en *multipliant* les deux nombres l'un par l'autre et *extrayant la racine deuxième* ou *carrée* du produit.

Nous ne tarderons pas à étendre ces sortes de considérations.

§ II. — DES PROGRESSIONS PAR DIFFÉRENCE ET PAR QUOTIENT.

Progressions par différence (ou *arithmétiques*).

293. DÉFINITIONS. — On nomme PROGRESSION PAR DIFFÉRENCE une suite de nombres tels, que chacun *surpasse* celui qui le précède, ou *en est surpassé*, d'un NOMBRE CONSTANT que l'on appelle la *raison* ou la *différence* de la progression.

Ainsi, soient les deux suites

$$\div\ 2\,.\,5\,.\,8\,.\,11\,.\,14\,.\,17\,.\,20\,.\,23\,.\,26\,.\,29\ldots,$$
$$\div\ 60\,.\,55\,.\,50\,.\,45\,.\,40\,.\,35\,.\,30\,.\,25\,.\,20\ldots.$$

Dans la première, appelée progression *croissante*, chaque terme *surpasse* le *précédent* du nombre 3, qui est dit alors la *raison* de la progression.

Dans la seconde, dite *décroissante*, chaque terme *surpasse* celui *qui le suit*, du nombre 5; en sorte que 5 est la *raison* de la progression.

Pour écrire une progression *par différence*, on place ordinairement en tête le signe $\div$, puis un *point* entre les termes consécutifs.

Cette notation est fondée sur ce qu'une progression *par différence* n'est, à proprement parler, qu'une suite d'*équidifférences continues* (n° **292**), dont chaque terme est à la fois *antécédent* et *conséquent*, excepté le *premier*, qui n'est qu'*antécédent*, et le *dernier* des termes considérés, qui n'est que *conséquent*.

La progression s'énonce d'ailleurs ainsi :

Comme 2 *est à* 5, 5 *est à* 8, 8 *est à* 11, ..., ou simplement : 2 *est à* 5 *est à* 8 *est à* 11 *est à*....

294. PREMIÈRE PROPRIÉTÉ. — Dans toute progression par différence, *un terme de rang quelconque est égal au premier* PLUS ou MOINS *autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui*, selon que la progression est *croissante* ou *décroissante*.

Soit, en général, la progression

$$\div\ a.b.c.d.e\ldots i.k.l,$$

et r la raison de cette progression.

On a successivement, d'après la définition :

1°. Dans le cas d'une progression *croissante*,

$$\begin{aligned}
b &= a + r,\\
c &= b + r = a + r + r = a + 2r,\\
d &= c + r = a + 2r + r = a + 3r,\\
e &= d + r = \ldots\ldots\ldots = a + 4r;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

donc, si n désigne le nombre total des termes jusqu'à l inclusivement,

$$l = a + (n-1)r, \tag{1}$$

formule qui, traduite en langage ordinaire, revient à l'énoncé ci-dessus, en ce qui concerne la première espèce de progression.

2°. Dans le cas d'une progression *décroissante*,

$$b = a - r,$$
$$c = b - r = a - r - r = a - 2r,$$
$$d = c - r = b - r - r = a - 2r - r = a - 3r;$$

. . . .

. . . .

et enfin

(2) $$l = a - (n - 1) r.$$

On voit que ces deux formules peuvent servir à déterminer un terme de rang quelconque dans la série, sans qu'on soit obligé de calculer *tous* ceux qui précèdent, puisqu'il suffit de connaître le premier terme a, la raison r et le nombre n des termes compris depuis le premier jusqu'à celui que l'on veut former.

Soit, pour exemple, la progression $\div 2.5.7.11\ldots$; on a, pour le *vingtième* terme,

$$l = 2 + 19 \times 3 = 59;$$

pour le *soixantième*,

$$l = 2 + 59 \times 3 = 179.$$

De même, dans la progression $\div 80.74.68\ldots$, on a, pour le *douzième* terme,

$$l = 80 - 11 \times 6 = 14.$$

295. Remarque. — Telle est la nature des progressions par différence, que, lorsqu'une série de termes de cette espèce est écrite, rien n'empêche de la considérer comme *commençant* à un terme de rang quelconque, a' par exemple, et s'arrêtant à un autre terme l'.

Dès lors, on peut appliquer aux deux termes a' et l' ce qui vient d'être dit pour le premier terme a, et pour le dernier terme l de la progression proposée; d'où il suit que, si l'on désigne par n' le nombre des termes compris depuis a' inclusivement jusqu'à l' exclusivement, on a

$$l' = a' + n' \times r, \text{ si la progression est } \textit{croissante},$$

et

$$l' = a' - n' \times r, \text{ si elle est } \textit{décroissante}.$$

296. Deuxième propriété. — Dans toute progression par différence, *la somme de deux termes, pris à égale distance des extrêmes, est constante et égale à la somme des extrêmes.*

Reprenons, en effet, la progression générale

$$\div a.b.c.d\ldots i.k.l,$$

et appelons x et y deux termes quelconques de cette suite, mais de rangs relatifs tels, que l'un, x, ait un nombre p de termes *avant* lui, et que l'autre, y, en ait p *après* lui.

On a, d'après la remarque précédente,

$$x = a + p \times r, \quad \text{et} \quad l = y + p \times r, \quad \text{ou} \quad y = l - p \times r;$$

d'où l'on déduit, en ajoutant, membre à membre, la première et la troisième égalité,

$$x + y = a + l,$$

puisque les deux termes $+p \times r$ et $-p \times r$ se détruisent.

Donc, etc.

Ainsi, soit la progression

$$\div 2.7.12.17.22\ldots47.52.57.62.$$

Si l'on considère le terme 17 qui en a 3 *avant* lui et le terme 47 qui en a 3 *après* lui, on reconnaît que

$$17 + 47 = 2 + 62 = 64;$$

de même,

$$12 + 52 = 2 + 62 = 64.$$

N. B. — On pourrait encore déduire cette propriété de celle qui a été démontrée au n° **289**, sur les *équidifférences*.

En effet, les *quatre* termes a, x, y, l de la progression sont évidemment tels, que x surpasse a de la *même* quantité $p \times r$, que l surpasse a; ainsi ces quatre nombres forment une *équidifférence* à laquelle la propriété du n° **289** est applicable.

297. Conséquence. — Lorsque le nombre des termes que l'on considère dans une progression est *impair*, le terme du *milieu* est égal à *la demi-somme des deux extrêmes.*

C'est, en effet, le *moyen différentiel* (n° **292**) d'une équidifférence *continue* dont les deux extrêmes sont ceux de la progression.

298. Troisième propriété. — *La somme des termes d'une progression par différence est égale au produit de la somme des extrêmes par la moitié du nombre des termes,* ou *au produit de la demi-somme des extrêmes par le nombre des termes.*

Considérons encore la progression générale

$$(1) \qquad \div a.b.c.d\ldots i.k.l,$$

et écrivons cette suite de termes, au-dessous d'elle-même, mais dans un ordre renversé ; il vient

$$(2) \qquad \div l.k.i\ldots\ldots c.b.a.$$

Cela posé, ajoutons terme à terme ces deux suites, et désignons par 2 S la somme totale des nombres qui les composent; on trouve

$$2\,\mathrm{S} = (a + l) + (b + k) + (c + i) + \ldots \\ + (i + c) + (k + b) + (l + a).$$

Or, toutes les sommes partielles entre parenthèses sont égales entre elles et égales à $a + l$ (n° **296**); donc, si l'on désigne par n le nombre des termes de la première progression, on a la nouvelle égalité

$$2S = (a+l)n,$$

et, par conséquent,

$$S = \frac{(a+l)n}{2} = (a+l) \times \frac{n}{2} = \frac{(a+l)}{2} \times n;$$

ce qui démontre que la *somme* S des termes de la progression donnée a pour *valeur numérique* une expression qui, en langage ordinaire, peut s'énoncer de trois manières différentes, dont les deux dernières sont conformes à l'énoncé ci-dessus.

On voit, d'après cela, que pour obtenir la *somme d'un nombre quelconque de termes* d'une progression par différence, il suffit de connaître le *premier* terme, le *dernier* et le *nombre* des termes. Or, on a donné, au n° **294**, le moyen de trouver le *dernier* terme, connaissant le *premier*, la *raison* et le *nombre* des termes.

Soit, pour exemple, la progression

$$\div 3.7.11.15\ldots,$$

pour laquelle on demande la *somme* des 60 premiers termes.

On a d'abord

$$l = 3 + 59 \times 4 = 239;$$

par suite,

$$S = (239+3) \times 30 = 242 \times 30 = 7260.$$

On obtiendrait de même, en s'arrêtant au 100ᵉ terme,

1°. $l = 3 + 99 \times 4 = 399$; 2°. $S = 402 \times 50 = 20100$.

299. Cas particuliers de l'expression de la somme des termes d'une progression par différence. — Prenons pour applications particulières de la formule qui donne S, la suite des *nombres naturels* et celle des *nombres impairs*, savoir :

$$\div 1.2.3.4.5\ldots n$$
$$\div 1.3.5.7.9\ldots 2n-1.$$

Remarquons que, dans la première suite, le *dernier* terme l est nécessairement égal au nombre n des termes considérés, et que la seconde donne, d'après la formule (1) du n° **294**,

$$l = 1 + 2(n-1) = 1 + 2n - 2 = 2n - 1.$$

D'où l'on déduit, pour l'expression de la somme S,

1°. $$S = (1+n)\frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2};$$

2°. $$S = (2n - 1 + 1)\frac{n}{2} = n^2.$$

Cette dernière expression est surtout remarquable en ce que la *somme* S est égale au *carré du nombre* des termes que l'on considère.

Ainsi la somme des *douze* premiers termes est 144 ; la somme des *vingt* premiers est 400 ; celle des *trente* premiers, 900.

300. Insertion de moyens différentiels entre deux nombres donnés. — Soit proposé d'insérer entre deux nombres a et b un nombre m de *moyens différentiels*.

On nomme ainsi d'autres nombres devant former une *progression par différence* avec les nombres a, b, considérés comme les *extrêmes* de cette progression.

Il est d'abord évident que si l'on connaissait la *raison* r de cette progression, tout serait déterminé, puisqu'il suffirait, a étant $< b$ par exemple, d'*ajouter* au premier terme, la raison, *deux fois* la raison, *trois fois* la raison, etc., pour obtenir successivement le *deuxième*, le *troisième*, le *quatrième*, etc., terme de la progression, ou le premier, le deuxième, le troisième, etc., *moyen différentiel*.

Or, en appelant n le nombre des termes y compris les deux termes a, b, ce qui donne $n = m + 2$, on a (n° **294**)

$$b = a + (n - 1) \times r = a + (m + 1) \times r;$$

d'où
$$b - a = (m + 1) \times r;$$

et, par suite,
$$r = \frac{b - a}{m + 1}.$$

Ainsi, la *raison cherchée* est égale au *quotient de la division de la différence des deux nombres donnés par le nombre des termes à insérer*, plus un.

La raison une fois connue, on obtient, pour les différents termes de la progression,

$$\div\, a \,.\, a + \frac{b - a}{m + 1} \,.\, a + \frac{2(b - a)}{m + 1} \,.\, a + \frac{3(b - a)}{m + 1} \ldots .$$

[La formule (1) du n° **294**, $l = a + (n - 1)\, r$, devient, par la substitution de $m + 1$ et de $\frac{b - a}{m + 1}$, à la place de $n - 1$ et de r,

$$l = a + (m + 1) \times \frac{b - a}{m + 1} = a + b - a = b;$$

ce qui *vérifie* la valeur $\frac{b - a}{m + 1}$ trouvée pour r.]

Soit, par exemple, à *insérer huit moyens différentiels* entre les nombres 3 et 48.

On a d'abord

$$r = \frac{48 - 3}{9} = 5;$$

d'où

$$\div 3.8.13.18.23.28.33.38.43.48.$$

On trouverait également pour $m = 50$,

$$r = \frac{48-3}{51} = \frac{45}{51} = \frac{15}{17};$$

d'où

$$\div 3.3\frac{15}{17}.4\frac{13}{17}.5\frac{11}{17}\ldots 48 \text{ ou } 3 + \frac{15}{17} \times 51.$$

N. B. — Cas particulier.... $m = 1$ donne

$$m + 1 = 2; \quad \text{d'où} \quad r = \frac{b-a}{2}.$$

donc le *moyen différentiel* à insérer entre a et b est

$$+\frac{b-a}{2} = \frac{2a+b-a}{2} = \frac{a+b}{2}. \quad [\textit{Voyez} \text{ le n}^{\text{o}}\ \mathbf{292}.]$$

301. Quatrième propriété. — *Si, entre deux termes consécutifs,* à partir du *premier*, et jusqu'au *dernier* terme inclusivement, *on insère* un même nombre *de moyens différentiels, toutes les progressions partielles ainsi formées constituent une seule et même progression,* dont la *raison* est celle de l'une quelconque des *progressions partielles.*

Soit toujours la progression

$$\div a.b.c.d.e\ldots\ i.k.l,$$

que, pour fixer les idées, nous supposerons croissante; et proposons-nous d'insérer successivement m *moyens différentiels* entre a et b, puis entre b et c, puis entre c et d, . . . , enfin entre k et l.

On a, pour la première progression,

$$r = \frac{b-a}{m+1},$$

pour la deuxième,

$$r' = \frac{c-b}{m+1},$$

pour la troisième,

$$r'' = \frac{d-c}{m+1};$$

et ainsi de suite.

Mais, d'après la définition même d'une progression par différence,

$$b - a = c - b = d - c \ldots;$$

d'où

$$\frac{b-a}{m+1} = \frac{c-b}{m+1} = \frac{d-c}{m+1} = \ldots$$

Donc, déjà, toutes les progressions ainsi formées ont la *même raison*.

De plus, il est évident que chaque *dernier* terme b, c, d, etc., de la première, deuxième, troisième, etc., progression partielle, est en même temps le *premier* de la progression suivante.

Donc, etc.

302. Remarque. — On doit faire ici une observation importante, c'est que la fraction qui exprime la raison de chaque progression partielle a *un numérateur constant*, et que son dénominateur peut être supposé *aussi grand que l'on veut;* d'où il suit qu'on peut même la concevoir *moindre que toute grandeur donnée,* en assignant au nombre m des moyens différentiels à insérer, une valeur *suffisamment grande.*

Par exemple, soient $a=6$, $b=7$; on a

pour $m=9$, $\qquad b-a=\frac{1}{10}$;

pour $m=99$, $\qquad b-a=\frac{1}{100}\cdots$;

et ainsi de suite.

Progressions par quotient (ou *géométriques*).

303. On appelle progression par quotient une suite de nombres tels, que le *rapport* d'un terme quelconque à celui qui le précède est *constant* dans toute l'étendue de la série.

Ce *rapport constant*, qui existe entre un terme et celui qui le précède immédiatement, se nomme la raison de la progression.

Soient les deux suites de nombres

$$2,\quad 4,\quad 8,\quad 16,\quad 32,\quad 64,\ldots,$$

$$256,\quad 64,\quad 16,\quad 4,\quad 1,\quad \frac{1}{4},\ldots;$$

de la première on déduit la suite de *rapports égaux*,

$$\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\frac{16}{8}\ldots=2;$$

et de la seconde,

$$\frac{64}{256}=\frac{16}{64}=\frac{4}{16}=\ldots=\frac{1}{4}.$$

La raison peut être *entière* ou *fractionnaire, plus grande* ou *plus petite* que l'unité, suivant que la progression est *croissante* ou *décroissante.*

Les progressions par quotient s'écrivent ainsi :

$$\because\!\cdot\; 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64\ldots,$$

$$\because\!\cdot\; 256 : 64 : 16 : 4 : 1 : \frac{1}{4}\ldots,$$

et s'*énoncent* comme les progressions par différence. Le seul caractère distinctif de leur écriture consiste dans le nombre de points dont chaque terme est précédé.

Une progression *par quotient* n'est autre chose qu'une suite de *proportions continues* (n° **292**), dans laquelle chaque terme est à la fois *antécédent* et *conséquent*, à l'exception du *premier* qui n'est qu'*antécédent*, et du *dernier* qui n'est que *conséquent*.

304. Première propriété. — Dans toute progression par quotient, *un terme de rang quelconque est égal au produit du premier terme par une puissance de la raison dont l'exposant est égal à* AUTANT DE FOIS l'*unité qu'il y a de termes avant lui*.

Soit, en général, la progression

$$\div\!\div a : b : c : d : e : f : \ldots i : k : l ;$$

et désignons par q la *raison* ou le *rapport* d'un terme à celui qui le précède.

On a successivement, d'après la définition,

$$b = a \times q, \quad c = b \times q = a \times q^2, \quad d = c \times q = a \times q^3,$$
$$e = a \times q^4, \ldots ;$$

donc, n désignant le nombre total des termes jusqu'au terme l inclusivement, on arrive à la formule

$$l = a \times q^{n-1}, \qquad (1)$$

dans laquelle, ainsi que nous l'avons déjà dit, q est $>$ ou $<$ 1, suivant que la progression est *croissante* ou *décroissante*.

Prenons, pour exemples, les deux progressions

$$\div\!\div 2 : 6 : 18 : 54 : \ldots,$$
$$\div\!\div 12 : 6 : 3 : \frac{3}{2} : \frac{3}{4} : \ldots.$$

Dans la première, la raison est 3, et l'on a, pour le 8ᵉ terme,

$$2 \times 3^7 = 2 \times 2187 = 4374;$$

pour le 12ᵉ,

$$2 \times 3^{11} = 2 \times 2187 \times 81 = 354294.$$

Dans la seconde, dont la raison est $\frac{1}{2}$, on obtient pour le 10ᵉ terme,

$$12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 12 \times \frac{1}{512} = \frac{3}{128};$$

pour le 20ᵉ,

$$12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = 12 \times \frac{1}{512} \times \frac{1}{1024} = 12 \times \frac{1}{524288} = \frac{3}{131072}.$$

305. Seconde propriété. — Dans toute progression par quotient, *le produit de deux termes quelconques, pris à égale distance des extrêmes, est* CONSTANT et *égal au produit des extrêmes.*

Soient x et y deux termes ayant, l'un un nombre p de termes *avant* lui, l'autre p termes *après* lui. Il est évident que les quatre nombres $a, x, y, l,$ dont le second est égal à $a \times q^p$, et le quatrième est égal à $y \times q^p$, forment entre eux une proportion ayant pour extrêmes, a, l, et pour moyens, $x \times y \ldots$; donc (nº **246**)

$$x \times y = a \times l.$$

Cette propriété, rapprochée de celle du nº **296**, montre que l'*addition*, pour une progression *par différence*, est remplacée par une *multiplication*, pour une progression *par quotient*.

Nous aurons occasion de tirer parti de ce rapprochement.

306. TROISIÈME PROPRIÉTÉ. — Pour obtenir la SOMME des termes d'une progression par quotient, il faut, si la progression est CROISSANTE, *multiplier le dernier terme par la raison, retrancher du produit le premier terme*, puis *diviser la différence par la raison diminuée de* 1 ; et si la progression est DÉCROISSANTE, *retrancher*, au contraire, *du premier terme le produit du dernier terme par la raison*, puis *diviser la différence par l'unité diminuée de la raison.*

Soit, en effet, la progression générale

$$\dot{\dot{:}}\ a : b : c : d : e : f \ldots : k : l,$$

que l'on peut (nº **304**) mettre sous la forme

$$\dot{\dot{:}}\ a : a \times q : a \times q^2 : a \times q^3 : \ldots : a \times q^{n-2} : a \times q^{n-1}.$$

En désignant par S la somme des n premiers termes, posons

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} S = a + a \times q + a \times q^2 + a \times q^3 + \ldots \\ + a \times q^{n-2} + a \times q^{n-1}; \end{aligned} \right.$$

puis, multiplions les deux membres de cette égalité par q ; il vient

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} S \times q = a \times q + a \times q^2 + a \times q^3 + \ldots \\ + a \times q^{n-1} + a \times q^n. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, si la progression est *croissante*, on *retranche* l'égalité (1) de l'égalité (2) et l'on obtient

$$S \times q - S \quad \text{ou} \quad (\text{nº } \mathbf{49}) \quad S \times (q - 1) = a \times q^n - a,$$

en observant que, dans la soustraction, tous les termes des deux seconds membres s'entre-détruisent, à l'exception du dernier terme, $a \times q^n$, de la série (2), et du dernier terme a, de la série (1).

D'où l'on déduit

$$(3) \qquad S = \frac{a \times q^n - a}{q - 1}.$$

Si la progression est *décroissante*, on *retranche*, au contraire, l'égalité (2) de l'égalité (1); ce qui donne

$$S - S \times q \quad \text{ou} \quad S \times (1 - q) = a - a \times q^n;$$

et par suite,

$$(4) \qquad S = \frac{a - a \times q^n}{1 - q}.$$

Enfin, remplaçant dans l'une et l'autre des deux expressions (3) et (4), $a \times q^{n-1}$ par sa valeur l (nº **504**), on parvient à celles-ci :

$$(5) \qquad S = \frac{l \times q - a}{q - 1},$$

$$(6) \qquad S = \frac{a - l \times q}{1 - q},$$

qui, traduites en langage ordinaire, donnent lieu à l'énoncé ci-dessus, pour la *somme des termes d'une progression par quotient.*

N. B. — Cette double expression est particulièrement utile pour la résolution des questions relatives à l'*intérêt composé*.

Reprenons les deux progressions du nº **504** :

$$\div\!\!\div\ 2 : 6 : 18 : 54 : \ldots,$$
$$\div\!\!\div\ 12 : 6 : 3 : \frac{3}{2} : \frac{3}{4} : \ldots.$$

Le 8ᵉ terme de la *première* a pour valeur $l = 4374$; donc il vient, pour la somme des *huit* premiers termes,

$$S = \frac{4374 \times 3 - 2}{3 - 1} = \frac{13120}{2} = 6560;$$

de même, le 12ᵉ est 354294; donc

$$S = \frac{354294 \times 3 - 2}{2} = 531440.$$

Le 10ᵉ terme de la *seconde*, $l = \frac{3}{128}$; ainsi,

$$S = \frac{12 - \frac{3}{128} \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{12 \times 256 - 3}{128} = \frac{3069}{128} = 24 - \frac{3}{128}.$$

(Comme $128 = 2^7$, la conversion de la fraction $\frac{3069}{128}$ en décimales peut (nº **172**) s'opérer *exactement*, et l'on trouve

$$S = 23,9765625).$$

Pareillement, le 20ᵉ terme est $\frac{3}{131072}$; donc

$$S = \frac{12 - \frac{1}{2} \times \frac{3}{131072}}{\frac{1}{2}} = \frac{3145725}{131072} = 24 - \frac{3}{131072}.$$

On voit facilement que la partie laborieuse du calcul, pour ces sortes de questions, est la *détermination de la valeur numérique* du terme auquel on s'est arrêté.

307. Insertion de moyens proportionnels entre deux nombres donnés. — Soit proposé d'*insérer entre deux nombres a et b un nombre m de moyens proportionnels, c'est-à-dire m nombres formant une progression par quotient* avec les nombres a et b considérés comme *les extrêmes*.

On a, comme pour les progressions par différence (nº **300**),

$$n = m + 2, \quad \text{d'où} \quad n - 1 = m + 1.$$

Mais de la formule (1) du nº **304**, on déduit

$$b = a \times q^{n-1} = a \times q^{m+1}; \quad \text{d'où} \quad q^{m+1} = \frac{b}{a};$$

on a donc (nº **45**), pour la *raison* de la progression,

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}.$$

La raison étant une fois *déterminée*, il vient successivement

$$\because a : a \times \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} : a \times \left(\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}\right)^2 : \ldots : b.$$

Cas particulier. — Soit

$$m = 1; \quad \text{d'où} \quad n - 1 = m + 1 = 2,$$

la raison est égale à $\sqrt{\frac{b}{a}}$; donc le *moyen proportionnel* unique a pour valeur

$$x = a \times \sqrt{\frac{b}{a}} = a \times \sqrt{\frac{a \times b}{a^2}} \quad (\text{nº } \mathbf{224}),$$

et, par suite,

$$x = \frac{a}{a} \times \sqrt{a \times b} = \sqrt{a \times b},$$

comme au nº **292**.

Nous n'insistons pas sur les *moyens proportionnels*, à cause de l'impossibilité où nous sommes, pour le moment, d'étendre les applications au delà de l'extraction d'une racine *carrée* ou *cubique*.

Cependant nous ne pouvons nous dispenser d'établir une propriété analogue à celle qui a été établie au n° **301**, pour les progressions par différence.

308. QUATRIÈME PROPRIÉTÉ. — *Si, entre tous les termes consécutifs,* pris *deux* à *deux*, depuis le *premier* jusqu'au *dernier* inclusivement, *on insère* UN MÊME NOMBRE *de moyens proportionnels, toutes les progressions partielles ainsi formées constituent une seule et même progression par quotient.*

En effet, puisqu'on obtient la *raison* pour chacune de ces progressions, en extrayant une racine de *degré marqué par* $m+1$, des quotients égaux $\frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{d}{c}, \ldots$, cette raison est *la même* pour toutes; et comme, d'ailleurs, chaque terme de la progression donnée, à partir de b, forme le *dernier* terme d'une progression déjà obtenue et le *premier* de celle qui suit immédiatement, toutes ces progressions n'en forment nécessairement *qu'une seule.*

§ III. — DES LOGARITHMES ET DE LEUR APPLICATION A LA RÉSOLUTION DE QUELQUES QUESTIONS QUI DÉPENDENT DES GRANDEURS PROPORTIONNELLES.

Origine et définition des Tables de logarithmes.

309. L'analogie qui existe entre les propriétés des progressions *par différence* et celle des progressions *par quotient*, analogie consistant en ce que les *additions*, *soustractions*, *multiplications* et *divisions*, dans les unes, correspondent à des *multiplications*, *divisions*, *formations de puissances* et *extractions de racines*, dans les autres, a conduit quelques savants à imaginer des méthodes de simplification pour les calculs numériques les plus compliqués.

Ces méthodes reposent sur l'existence de certaines Tables connues sous le nom de TABLES DE LOGARITHMES, dont l'invention est généralement attribuée à NÉPER, savant écossais.

Ne pouvant, dans cet Ouvrage élémentaire, exposer les moyens dont il s'est servi pour arriver à la confection de pareilles Tables, nous allons, du moins, essayer de faire comprendre, par quelques considérations simples, comment, à la rigueur et sauf la longueur des calculs, elles auraient pu être formées.

Il résulte de la propriété du n° **301** que, r désignant la *raison* d'une progression *par différence*, entre tous les termes consécutifs de laquelle se trouve inséré un nombre m de *moyens différentiels*, la raison de la progression totale est exprimée par $\frac{r}{m+1}$, fraction qui peut être conçue *moindre que* toute quantité donnée, lorsque l'on assigne à m une valeur suffisamment grande.

Donc, si l'on prend pour point de départ une progression, telle que

$$\div 0 . r . 2r . 3r . 4r . 5r \ldots,$$

qui a 0 pour *premier* terme, et qu'ensuite on forme une série de progressions partielles par le moyen qui vient d'être indiqué, on obtient une progression totale

$$\div 0 . \frac{r}{m+1} . \frac{2r}{m+1} . \frac{3r}{m+1} \ldots r . r + \frac{r}{m+1} \ldots$$

$$r + \frac{2r}{m+1} \ldots 2r . 2r + \frac{r}{m+1}, \ldots,$$

dont les termes vont en augmentant par *intervalles égaux* AUSSI PETITS que l'on veut, depuis 0 jusqu'à *une limite* plus ou moins grande, suivant l'étendue de la progression primitive.

C'est, en quelque sorte, à partir de 0, une suite *presque continue* de nombres, conservant toutefois la propriété d'être en *progression par différence*.

Prenons maintenant une progression CROISSANTE *par quotient*, et commençant par l'unité :

$$\div\!\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : q^5 : q^6 : \ldots,$$

q désignant *la raison*, ou le *rapport constant* d'un terme quelconque à celui qui le précède.

Si, entre tous les termes consécutifs de cette série, on insère un nombre m de *moyens proportionnels*, on obtient (nº **308**) $\sqrt[m+1]{q}$, pour *la raison constante* de chaque progression partielle.

Cela posé, pour être certain qu'il en est de la progression totale ainsi formée, comme de la progression *par différence* obtenue précédemment, c'est-à-dire qu'elle constitue une suite *presque continue* de nombres, il faudrait pouvoir établir que $\sqrt[m+1]{q}$ peut être rendu *aussi voisin de l'unité* que l'on veut, q étant un nombre *constant*, et donné *à priori*, mais m recevant une valeur *suffisamment grande*.

Or, c'est ce que nous ne pouvons ici prouver *directement*, puisque nous ne connaissons pas encore le moyen d'extraire une racine de *degré quelconque*.

Mais voici, du moins, une manière *indirecte* de le démontrer :

Soit 4759 un nombre pris au hasard dans la suite naturelle des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . ; et proposons-nous d'en extraire des racines carrées successives.

On trouve

$$\sqrt{4759} = 68 \text{ à moins d'une unité près;}$$

$$\sqrt{\sqrt{4759}}, \quad \text{ou} \quad (\text{n}^\circ \mathbf{241}) \quad \sqrt[4]{4759} = \sqrt{68 + \ldots} = 8, \qquad id.$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{4759}}}, \quad \text{ou} \quad \sqrt[8]{4759} = \sqrt{8 + \ldots} = 2, \qquad id.$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4759}}}}, \quad \text{ou} \quad \sqrt[16]{4759} = \sqrt{2 + \ldots} = 1, \qquad id.$$

Et ainsi de suite.

On voit avec quelle rapidité les *parties entières* de ces racines carrées successives *décroissent*.

Quant aux *parties décimales*, elles décroissent aussi indéfiniment, sans que, pour cela, le résultat final cesse d'être plus grand que l'unité; mais la *différence* entre ce résultat et 1 n'en est pas moins susceptible de devenir MOINDRE QU'AUCUNE GRANDEUR DONNÉE.

La proposition étant ainsi établie pour les racines dont les indices sont 2, 4, 8, 16, .., ou $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$, il doit en être de même pour toute racine de degré $m+1$, c'est-à-dire pour toute expression de la forme $\sqrt[m+1]{\text{N}}$; N étant un nombre quelconque *plus grand* que 1.

Car on a nécessairement, d'après la signification même du mot *racine*, $\sqrt[m+1]{\text{N}} < \sqrt[2n]{\text{N}}$, 2^n désignant la puissance de 2 immédiatement inférieure à $m+1$.

Or $\sqrt[2n]{\text{N}}$ peut différer de 1, en *plus*, d'aussi peu que l'on veut; donc il en est à plus forte raison de même pour $\sqrt[m+1]{\text{N}}$.

Nous pouvons donc regarder comme suffisamment *constatée* la possibilité de l'existence de deux progressions CROISSANTES, l'une *par quotient* et commençant par 1, dont les termes soient aussi peu différents, les uns des autres, que l'on veut, l'autre *par différence* et commençant par 0, dont les termes soient également aussi peu différents, les uns des autres, que l'on veut.

N. B. — Tout nombre N *commensurable* ou *incommensurable*, et *plus grand que* 1, s'il n'est pas un des termes mêmes de la progression *par quotient*, se trouve nécessairement *compris entre deux* de ces termes, lesquels peuvent, l'un ou l'autre indifféremment, être substitués à N, puisque, par hypothèse, ces termes ne diffèrent entre eux que d'une quantité *moindre qu'aucune grandeur donnée*.

310. DÉFINITION DES TABLES DE LOGARITHMES. — Rien de plus facile maintenant que de définir une *Table de logarihmes*, quels que soient d'ailleurs les moyens qu'on ait pu employer pour la construire.

C'est une Table qui renferme :

D'*une part*, tous les nombres *entiers*, compris depuis 1 jusqu'à une limite déterminée, 100000 par exemple, ces nombres étant considérés comme des termes d'une progression par *quotient*, où ils occupent chacun un certain rang;

De l'*autre part*, en regard de ces nombres, des termes d'une progression par *différence* commençant par 0, qu'on appelle alors les *logarithmes* des nombres.

Le Logarithme d'un nombre déterminé est donc le terme de la progression *par différence*, qui occupe, dans cette progression, *le même rang* que celui qu'occupe ce nombre dans la progression *par quotient*.

Un nombre et son logarithme sont dits alors des *termes correspondants*, dans ces deux progressions.

Les termes 1 et 0 formant, l'un le *premier* terme de la progression par quotient, l'autre le *premier* terme de la progression par différence, on est conduit à cette espèce de proposition, que nous rappellerons souvent par la suite : *Le logarithme* de 1 est 0, ou, pour abréger, log. $1 = 0$.

(Nous nous servirons habituellement des *trois* lettres initiales log., suivies d'*un point*, et du nombre représenté soit en chiffres, soit par une lettre, pour écrire d'une manière abrégée le logarithme du nombre. Quelquefois, cependant, la première lettre l seule sera employée.)

311. Remarque. — Quoique la Table, telle que nous venons de la définir, ne renferme que les logarithmes des nombres *entiers*, on peut concevoir que *tout nombre plus grand que l'unité*, considéré comme faisant partie de la progression par quotient, dont nous avons expliqué la formation, s'y trouve, au moins implicitement, compris avec le *terme correspondant* de la progression par différence. Nous verrons, du reste, comment, à l'aide des logarithmes des nombres *entiers*, on obtient ceux des nombres *fractionnaires plus grands que l'unité*.

Quant aux *fractions proprement dites*, elles ont aussi leurs logarithmes; mais la détermination de ces logarithmes suppose des notions étrangères à l'Arithmétique élémentaire, où l'on ne considère que des *nombres absolus*.

Toutefois, nous indiquerons le moyen de faire l'application des Tables à des questions où figurent des nombres fractionnaires *plus petits* que l'unité.

Propriétés générales des logarithmes.

Après avoir montré, sinon le vrai moyen, au moins la possibilité de construire des *Tables de logarithmes*, nous allons établir les propriétés générales sur lesquelles reposent les simplifications que l'usage de ces Tables apporte dans les calculs numériques, en faisant remarquer *que nous considérons* UNIQUEMENT *ici les logarithmes de nombres plus grands que l'unité.*

312. PREMIÈRE PROPRIÉTÉ. — *Le logarithme du* PRODUIT *de deux nombres* est égal à la SOMME *des logarithmes des deux facteurs.*

Soient A et B (A étant $<$ B), deux nombres pris au hasard dans la progression *par quotient* commençant par 1, dont les termes diffèrent entre eux d'une quantité *moindre qu'aucune grandeur donnée* (voir le *N. B.* du nº **309**) et désignons par P le terme de cette progression, précédé d'*autant de termes* à partir de B inclusivement, qu'*il y a* de termes avant A, dans la même progression.

On a ainsi *quatre* nombres,

$$1, A, B \quad \text{et} \quad P,$$

dont les termes 1 et P peuvent être supposés les *extrêmes* d'une progression arrêtée au terme P; en sorte que A et B, étant deux termes à *égale distance* des extrêmes, forment les deux *moyens* d'une *proportion* ayant pour extrêmes 1 et P.

La propriété du nº **246** leur est, par conséquent, applicable, et l'on a

$$1 \times P = A \times B, \quad \text{ou} \quad P = A \times B.$$

D'un autre coté, prenons, dans la progression *par différence* (nº **310**), les logarithmes correspondant aux quatre nombres 1, A, B, P, logarithmes que nous pouvons, suivant la notation *indiquée* au même numéro, exprimer par

$$\log. 1, \text{ ou } 0, \quad \log. A, \quad \log. B, \quad \log. P.$$

Ces quatre nombres formant évidemment une *équidifférence*, ayant 0 et log. P pour *extrêmes*, log. A et log. B pour *moyens*, on a (nº **289**)

$$0 + \log. P, \quad \text{ou} \quad \log. P = \log. A + \log. B.$$

Or, de cette égalité on déduit, à cause de la relation $P = A \times B$,

$$\log. A \times B = \log. A + \log. B.$$

Donc, etc.

313. CONSÉQUENCE. — *Le logarithme du* PRODUIT *d'un nombre quelconque de facteurs est égal à la* SOMME *des logarithmes des différents facteurs.*

Appelons A, B, C, D, . . ., les nombres donnés.

On a, d'après ce qui vient d'être dit,

$$\log. A \times B = \log. A + \log. B.$$

Maintenant, comme $A \times B \times C = (A \times B) \times C$, il en résulte

$$\log. A \times B \times C = \log. (A \times B) + \log. C,$$

ou mettant pour log. (A $\times$ B), sa valeur log. A + log. B,

$$\text{log. } A \times B \times C = \text{log. } A + \text{log. } B + \text{log. } C.$$

Pareillement, A $\times$ B $\times$ C $\times$ D étant la même chose que (A $\times$ B $\times$ C) $\times$ D, on trouverait

$$\text{log. } A \times B \times C \times D = \text{log. } A + \text{log. } B + \text{log. } C + \text{log. } D;$$

et ainsi de suite.

314. Deuxième propriété. — *Le logarithme du* QUOTIENT *d'une division est égal à la* DIFFÉRENCE *entre le logarithme du dividende et le logarithme du diviseur.*

[Le quotient est, comme le dividende et le diviseur, supposé *plus grand que l'unité.*]

Soient D le dividende, d le diviseur, et q le quotient d'une division.

Comme on a $D = d \times q$, il en résulte

$$\text{log. } D = \text{log. } d \times \text{log. } q,$$

d'où l'on tire

$$\text{log. } q = \text{log. } D - \text{log. } d. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

315. Troisième propriété. — *Le logarithme d'une* puissance *quelconque d'un nombre est égal au* PRODUIT *du logarithme du nombre par l'*EXPOSANT *de la puissance.*

En effet, A^m est la même chose que $A \times A \times A \times A \times \ldots$; donc

$$\text{log. } A^m = \text{log. } A + \text{log. } A + \text{log. } A + \ldots = \text{log. } A \times m,$$

ou bien

$$\text{log. } A^m = m \times \text{log. } A.$$

316. Quatrième propriété. — *Le logarithme d'une* RACINE *de degré quelconque d'un nombre est égal au* QUOTIENT *de la division du logarithme du nombre, par l'*INDICE *de la racine.*

Désignons par R la racine $n^{ième}$ d'un nombre A; on a, d'après la définition du n° **45**,

$$A = R^n, \quad \text{d'où (n° 315)} \quad \text{log. } A = n \times \text{log. } R;$$

et, par conséquent,

$$\text{log. } R. \quad \text{ou} \quad \text{log. } \sqrt[n]{A} = \frac{\text{log. } A}{n}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

317. Remarque. — De ces deux dernières propriétés, on déduit une démonstration simple de quelques principes importants du calcul des expressions affectées du signe radical $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, ...

1°. $$(\sqrt[n]{A})^m = \sqrt[n]{A^m}.$$

En effet, on a d'abord (nº 315)

$$\log.\,(\sqrt[n]{A})^m = m \times \log.\,\sqrt[n]{A};$$

mais (nº 316)

$$\log.\,\sqrt[n]{A} = \frac{\log.\,A}{n};$$

donc

$$\log.\,(\sqrt[n]{A})^m = \frac{m}{n} \times \log.\,A.$$

D'un autre côté, les mêmes propriétés donnent

$$\log\,\sqrt[n]{A^m} = \frac{\log.\,A^m}{n} = \frac{m \times \log.\,A}{n} = \frac{m}{n} \times \log.\,A.$$

Les deux expressions $(\sqrt[n]{A})^m$, $\sqrt[n]{A^m}$, ayant *même* logarithme (dans le *même* système), sont nécessairement *égales* en *valeur numérique*; elles peuvent donc être remplacées l'une par l'autre.

2°. $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[m \times n]{A};$$

car on a, *d'une part*,

$$\log.\,\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \frac{\log.\,\sqrt[n]{A}}{m} = \frac{\log.\,A : n}{m} = \frac{\log.\,A}{m \times n};$$

et *de l'autre*,

$$\log.\,\sqrt[m \times n]{A} = \frac{\log.\,A}{m \times n};$$

donc les deux expressions $\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}$, $\sqrt[m \times n]{A}$, ayant *même* logarithme, sont *numériquement* égales.

On trouverait, en généralisant, que

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{A}}}} = \sqrt[m \times n \times p \times q]{A},$$

puisque les logarithmes de ces expressions ont pour valeur

$$\frac{\log.\,A}{m \times n \times p \times q}.$$

Par un raisonnement analogue, on prouverait que

$$\left((A^m)^n\right)^{p\cdots} = A^{m \times n \times p \times \cdots}$$

Usage des propriétés générales des logarithmes pour la simplification des calculs numériques.

318. On conçoit maintenant l'usage que l'on peut faire d'une Table de logarithmes pour simplifier les calculs de toute espèce. Les

règles à suivre ressortent explicitement des propriétés que nous venons d'établir.

1°. Pour former le PRODUIT de plusieurs facteurs :

Prenez dans la Table les logarithmes *de ces facteurs; faites-en la* SOMME, puis *cherchez à quel nombre* de la Table elle *correspond;* ce nombre est le produit demandé;

Ainsi, le résultat d'une MULTIPLICATION est donné par une ADDITION.

2°. Pour une DIVISION à effectuer :

Prenez dans la Table le *logarithme* du dividende et *celui* du diviseur; *soustrayez* le second du premier, puis *cherchez* le nombre correspondant à cette *différence* de logarithmes;

Vous obtenez ainsi le *quotient* de la DIVISION au moyen d'une SOUSTRACTION.

3°. Pour la FORMATION DES PUISSANCES :

Prenez dans la Table le *logarithme* du nombre que vous voulez élever à une certaine puissance; *multipliez* ce logarithme par l'*exposant* de la puissance, puis *cherchez* à quel nombre *correspond* ce produit; le nombre ainsi trouvé est la puissance demandée.

La multiplication d'un nombre par un autre qui n'est ordinairement que d'*un* ou de *deux* chiffres au plus, suffit donc pour donner le résultat de la multiplication de *plusieurs* nombres égaux.

4°. Pour EXTRAIRE UNE RACINE de degré quelconque d'un nombre :

Prenez le logarithme du nombre, et *divisez-le* par l'*indice* de la racine; puis *cherchez*, dans la Table, à *quel nombre* correspond le quotient;

Ce nombre est la *racine demandée*.

Une DIVISION fort simple suffit donc pour donner le résultat d'une EXTRACTION DE RACINE, quel que soit son degré.

On voit ainsi que c'est principalement dans l'*extraction des racines* que l'avantage de l'emploi des logarithmes se fait sentir.

Ces règles posées, nous devons, avant de les appliquer, faire connaître la disposition et les propriétés particulières des Tables dont on se sert ordinairement.

Disposition et propriétés particulières des Tables de logarithmes vulgaires.

319. La construction des Tables de logarithmes dits *logarithmes vulgaires* ou *logarithmes* de BRIGGS, du nom du premier auteur d'une Table de cette espèce, est fondée sur le système des deux progressions

$$\begin{array}{l} \because 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : \ldots, \\ \div\ 0 .\ 1 .\ 2 .\ 3 .\ 4 .\ 5 \ \ldots, \end{array}$$

dont la *première* est formée par les *diverses puissances* de 10, *base* du système décimal, et la *seconde* n'est autre chose que la *suite naturelle* des nombres.

Conformément à ce qui a été dit au n° **309**, on est *censé* avoir inséré entre tous les termes consécutifs des deux progressions, un nombre de *moyens proportionnels* et de *moyens différentiels*, SUFFISAMMENT GRAND pour que tous les nombres *entiers*, à partir de 1, soient compris dans la Table, ayant en regard leurs *logarithmes*, c'est-à-dire les termes *correspondants* de la progression par différence.

Or, l'inspection seule des deux progressions fondamentales suffit pour faire reconnaître :

1°. Que le *logarithme* de 1 est 0, ce que nous avons déjà vu au n° **310**;

2°. Que le *logarithme* de 10 est 1 ; le nombre 10, base du système décimal, est aussi appelé LA BASE du système ordinaire de logarithmes (pour des raisons qui ne sauraient être développées ici);

3°. Que les *logarithmes* des nombres compris entre 1 et 10 sont *plus petits que* l'unité ;

4°. Que les *logarithmes* des nombres compris entre 10 et 100 se composent d'*une* unité et d'*une partie* de l'unité;

5°. Que les *logarithmes* des nombres compris entre 100 et 1000 se composent de 2 unités et d'*une partie* de l'unité; et ainsi de suite.

Les parties d'unité qui doivent s'ajouter aux *parties entières* ont été, dans la confection des Tables ordinaires, évaluées approximativement en décimales.

Les petites Tables, celles de Lalande, Reynaud,. . . , qui ne s'étendent que jusqu'au nombre 10000, ne renferment que *cinq* chiffres décimaux.

Les grandes Tables, celles de Callet en particulier, les seules dont nous nous servirons, renferment tous les nombres *entiers* depuis 1 jusqu'à 108000, ainsi que leurs *logarithmes* calculés généralement avec *sept* décimales.

[Les nombres depuis 1 jusqu'à 1200 et depuis 102000 jusqu'au dernier, font exception en ce que leurs logarithmes comprennent *huit* décimales.]

Les *sept* décimales de chaque logarithme sont *exactes, à une demi-unité près*, soit en *moins*, soit en *plus* de l'ordre du 7[e] chiffre, c'est-à-dire à *moins de* $\frac{1}{2}\cdot 0{,}0000001$ *près*.

Cela posé, voici plusieurs propositions sur lesquelles est fondé l'usage de ces Tables.

320. PREMIÈREMENT. — On a vu qu'aux nombres compris entre

1 et 10, 10 et 100, 100 et 1000, 1000 et 10000, . . . ,

c'est-à-dire aux nombres dont les parties entières, s'ils sont fractionnaires, renferment

UN, DEUX, TROIS, QUATRE, . . . , chiffres,

correspondent respectivement des logarithmes ayant pour *parties entières*

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots$$

Il suit de là que la *partie entière* d'un *logarithme* contient *autant d'unités moins* UNE *que* le nombre a de chiffres dans sa partie entière. Ainsi, les logarithmes des nombres

$$47, \quad 273, \quad 4569\tfrac{2}{3}, \quad 19684\tfrac{15}{23},$$

ont respectivement pour *parties entières*

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \ldots$$

Réciproquement, les logarithmes qui ont pour *partie entière*

$$1, \quad 3, \quad 4, \quad 7, \ldots,$$

appartiennent à des nombres dont les parties entières ont

deux, *quatre*, *cinq*, *huit*, ... chiffres.

La *partie entière* d'un logarithme suffisant, d'après cela, pour faire connaître de *combien de chiffres* se compose la partie entière du nombre correspondant, a reçu la dénomination de CARACTÉRISTIQUE.

Par exemple, le logarithme 2,3075604 appartient à un nombre de *trois* chiffres, ou à un nombre dont la partie entière se compose de *trois* chiffres, suivant que le nombre est *entier* ou *fractionnaire*.

Cela explique pourquoi, dans les Tables de Callet, on a pu se dispenser de placer les *caractéristiques* des logarithmes ; elles se déterminent à la seule *inspection des nombres correspondants*.

521. SECONDEMENT. — Désignons par N un nombre quelconque. On a (nº **512**)

$$\log.\ N \times 10 = \log.\ N \times \log.\ 10 = \log.\ N + 1\,;$$

de même

$$\log.\ N \times 100 = \log.\ N + \log.\ 100 = \log.\ N + 2\,;$$

. . . .

. . . .

et, en général,

$$\log.\ N \times 10^n = \log.\ N + n.$$

On a pareillement, d'après la propriété du nº **514**,

$$\log.\ \frac{N}{10} = \log.\ N - \log.\ 10 = \log.\ N - 1, \quad \log.\ \frac{N}{100} = \log.\ N - 2,$$

et, en général,

$$\log. \frac{N}{10^n} = \log. N - n.$$

D'où l'on voit que, connaissant le logarithme d'un nombre, pour obtenir celui d'un autre nombre $10, 100, \ldots, 10^n$ fois *plus grand* ou *plus petit*, il faut *ajouter* à la caractéristique du logarithme de ce premier nombre, ou bien en *retrancher* $1, 2, 3, \ldots, n$ unités, *sans rien changer à la partie décimale.*

Ainsi les logarithmes des nombres décimaux tels que

$$487,59 \mid 4875,9 \mid 4,8759,$$

qui ne diffèrent entre eux que par la place de la virgule, ont *la même partie décimale;* leurs CARACTÉRISTIQUES sont d'ailleurs (nº **320**)

$$2, \quad 3, \quad 0.$$

N. B. — On remarquera que ces propriétés sont *particulières* au système de Briggs; ce qui le rend *préférable* à tout autre, puisque les fractions décimales sont les fractions sur lesquelles on a à opérer le plus souvent.

Usage des Tables de logarithmes vulgaires.

322. Une Table de logarithmes ne pouvant évidemment comprendre que des nombres *entiers*, et ceux-ci même, en nombre *limité*, l'usage à en faire pour les applications aux calculs numériques est fondé sur la résolution de deux questions que nous allons traiter successivement sur des exemples particuliers, savoir :

1°. *Un nombre quelconque entier ou fractionnaire* (*plus grand que* 1) *étant donné, trouver son logarithme.*

2°. Réciproquement, *un logarithme étant donné, trouver le nombre entier ou fractionnaire* (*plus grand que* 1) *qui lui correspond.*

[Nous avons dit (nº **311**) pourquoi nous ne devons, quant à présent, considérer que les logarithmes des nombres *plus grands que l'unité.*]

323. PREMIÈRE QUESTION. — *Un nombre étant donné, trouver son logarithme.*

Supposons d'abord que le nombre donné soit *entier*. S'il ne dépasse pas la limite des Tables (fixée, comme on l'a vu, à 108000 pour celles de Callet) (*), il suffit, pour trouver son logarithme, d'être

(*) Les Tables de Callet ont été disposées de telle façon, qu'à partir du nombre 1020, chaque page contient 600 nombres avec leurs logarithmes. Ne pouvant entrer dans aucun détail à ce sujet, nous supposerons que l'on ait été *initié* à la disposition de ces Tables, et qu'ainsi l'on y sache trouver le logarithme d'un nombre *entier* qui n'excède pas leur *limite*.

initié à la disposition particulière des Tables où ce logarithme est compris.

Nous n'avons donc à nous occuper ici que des nombres *entiers* qui dépassent la limite des Tables.

Soit, pour *premier exemple*, le nombre 4789635.

Remarquons d'abord que, si l'on sépare *deux* chiffres vers la droite par une virgule, ce qui donne

$$47896,35,$$

on ne changera rien (n° **321**) à la *partie décimale* du logarithme.

Quant à la *caractéristique*, on sait déjà qu'elle doit être égale à 6 pour le nombre proposé (n° **320**).

Il ne s'agit, par conséquent, que de chercher la *partie décimale* qui correspond au logarithme 47896, 35.

Or, ce nombre étant compris entre 47896 et 47897, son logarithme doit être lui-même compris entre ceux de 47896 et 47897, ou bien est égal à celui de 47896 augmenté d'*une partie* de ce même logarithme *correspondant* à la fraction 0,35, dont 47896,35 surpasse 47896.

On a, d'après les Tables (la caractéristique sous-entendue)

$$\begin{array}{r} \log.\ 47897 = 6803083 \\ \log.\ 47896 = \underline{6802992} \\ 91 \end{array}$$

ce qui donne pour différence 91 *dix-millionièmes*.

Admettant, en principe (*voyez* la remarque ci-après, n° **326**), que *les différences entre les logarithmes sont proportionnelles aux différences entre les nombres*, on dira :

Puisque, pour 1 de différence entre 47897 et 47896, on a 91 *dix-millionièmes* de différence entre leurs logarithmes, il s'ensuit que pour 0,35 de différence entre 47896,35 et 47896, on doit avoir *une différence* entre leurs logarithmes, *exprimée* par le produit $91 \times 0,35$; ce qui donne 31,85, ou simplement 32 *dix-millionièmes* à ajouter à 6802992; et l'on obtient ainsi 6803024 pour la *partie décimale* du logarithme de 47896,35.

Donc, enfin,

$$\log.\ 4789635 = 6,6803024.$$

Règle générale. — Pour obtenir le logarithme d'un nombre entier *supérieur* à la limite des Tables (108000), *séparez vers la droite du nombre*, par une virgule, *assez de chiffres pour que la partie à gauche reste la* PLUS GRANDE *possible* (voir ci-après le n° **326**), *sans excéder la limite;*

Cherchez dans la Table *le logarithme de cette partie à gauche; prenez la différence* (que la Table donne également *toute calculée*) entre les logarithmes des deux nombres qui comprennent le nombre *décimal* substitué au nombre proposé, et *multipliez cette différence* (considérée comme un nombre entier), par la *partie décimale* de ce nombre (opération que la Table donne aussi le moyen d'effectuer simplement).

Ajoutez la partie entière de ce produit (laquelle exprime des *dix-millionièmes*) aux derniers chiffres à droite du *plus petit* des deux logarithmes pris dans la Table, et vous obtenez ainsi la *partie décimale* du logarithme cherché, auquel vous donnez pour *caractéristique autant* d'*unités* moins *une* (n° **320**) qu'il y a de chiffres dans le nombre proposé.

Dans la pratique, il convient de disposer ainsi les calculs :

Nombre proposé 4789635....47896,35.

Différence tabulaire	9 1	log. 47896 = 6802992
p. 0,3	27,3	
p. 0,05	4,55	32
	31,85	6803024

donc log. 4789635 = 6,6803024.

Prenons *pour second exemple*,

23947684....23947,684.

Différence tabulaire	18 2	log. 23947 = 3792511
p. 0,6	109,2	
p. 0,08	14,56	
p. 0,004	0,728	124
	124,488	3792635

donc log. 23947684 = 7,3792635.

324. Supposons, maintenant, que le nombre dont il s'agit de trouver le logarithme, soit *fractionnaire* (toujours plus grand que l'unité), exprimé en décimales ou sous forme de fraction ordinaire (l'entier étant ou non réduit en fraction).

1°. — Soit donné le nombre 347,2586.

On *commence par avancer* la virgule vers la droite, de manière que la *partie à gauche* soit la *plus grande possible* (voir la remarque n° **326**) sans excéder la limite des Tables; ce qui donne, ici, le nombre

34725,86.

Différence tabulaire	12 6	log. 34725 = 5406423
p. 0,8	100,8	
p. 0,06	7,56	108
	108,36	5406531

donc log. 347,2586 = 2,5406531.

2°. — Soit donné le nombre $373\frac{47}{65}$.

Réduisant l'entier en fraction, on a $\frac{24292}{47}$; d'où (nº **314**)

$$\log.\frac{24292}{47} = \log.\ 24292 - \log.\ 47.$$

$$\begin{array}{lr} \log.\ 24292 = & 4,3854633 \\ \log.\ \quad 47 = & 1,6720979 \\ \hline & 2,7133654 \end{array}$$

donc

$$\log.\ 373\frac{47}{65} = 2,7133654.$$

3°. — Soit $\frac{5629489}{678456}$.

Voici le tableau des calculs :

$$\log.\frac{5629489}{678456} = \log.\ 5629489 - \log.\ 678456.$$

$$\begin{array}{llr} 1^{o}.\ \text{Différence tabul.} & 78 & \log.\ 56294 = \quad 7504621 \\ \cline{2-2} \text{p. } 0,8 & 62,4 & \\ \text{p. } 0,09 & 7,02 & \\ \cline{2-2} & 69,42 & \\ & & 69 \\ \cline{3-3} & & \log.\ 5629489 = 6,7504690 \end{array}$$

$$\begin{array}{llr} 2^{o}.\ \text{Différence tab.} & 64 & \log.\ 67845 = 8315178 \\ \text{p. } 0,6 & 38,4 & 38 \\ \cline{3-3} & & 8315216 \end{array}$$

donc

$$\log.\ 678456 = 5,8315216$$

et

$$\log.\ 5629489 - \log.\ 678456 = 0,9189474$$

Ainsi le *logarithme demandé* est 0,9189474, résultat qui répond bien à la valeur du nombre donné, dont l'*entier* supposé *extrait*, n'a qu'*un seul chiffre*.

325. Seconde question. — *Un logarithme étant donné, trouver le nombre correspondant.*

Soit 1,4708475 le *logarithme* donné.

On commence par *chercher* dans la Table, parmi les logarithmes des nombres de *cinq* chiffres (*voir* encore le nº **326**), si la *partie décimale* donnée s'y trouve. Dans le cas de l'affirmative, on prend le nombre *correspondant*, dont on sépare *trois* chiffres décimaux vers la droite, puisque la *caractéristique* 1 indique que la *partie entière* du nombre cherché ne doit avoir que *deux* chiffres.

Mais le plus ordinairement (et c'est ce qui arrive ici), la *partie décimale donnée* se trouve comprise entre deux parties décimales consécutives de la Table.

Ainsi, dans l'exemple proposé, on reconnaît que la partie décimale la plus rapprochée de 4708475

est 4708366

ce qui donne 109 pour *différence*, 109

D'un autre côté, 147 est la *différence tabulaire*.

On fait alors le raisonnement suivant, fondé sur le principe énoncé au n° 323 :

Puisque la différence tabulaire 147 *dix-millionièmes* correspond à 1 de différence entre deux nombres, *un seul* dix-millionième correspond à $\frac{1}{147}$ d'*unité*, et 109 *dix-millionièmes* doivent correspondre à $\frac{109}{147}$ d'*unité*.

Cette fraction $\frac{109}{147}$, évaluée en décimales jusqu'aux centièmes *seulement*, donne la *fraction* 0,74 qui, ajoutée au nombre 29569 *correspondant* à la partie décimale 4708366, forme le nombre 29569,74.

Mais comme la *caractéristique* du logarithme proposé est 1, on en déduit que le nombre cherché ne doit avoir que *deux* chiffres à sa partie entière.

Donc, enfin,

$$29,56974$$

est le nombre correspondant au logarithme donné.

RÈGLE GÉNÉRALE. — Pour obtenir le nombre *correspondant* à un logarithme donné,

Cherchez parmi les logarithmes des nombres de *cinq* chiffres, la *partie décimale* qui se rapproche le plus de celle du logarithme donné, et *retranchez* ces deux parties décimales l'une de l'autre, ce qui donne une différence exprimée par *deux* ou *trois* chiffres. *Divisez cette différence par la différence tabulaire*, et *évaluez le quotient* en *décimales*, en ne poussant l'opération que *jusqu'aux* centièmes (*voir* la remarque du n° 326).

Écrivez les deux chiffres obtenus, à la droite du nombre de *cinq* chiffres, qui correspond à la *partie décimale* trouvée dans la Table ; puis *disposez*, dans le nombre ainsi formé, la virgule de manière que la partie à gauche ait *autant de chiffres*, plus *un*, qu'il y a d'unités à la *caractéristique* du logarithme proposé.

Nous nous bornons, pour le moment, à ce seul exemple, parce que les *applications logarithmiques* nous fourniront l'occasion d'en traiter d'autres.

326. REMARQUE. — Le principe de la *proportionnalité entre les* *différences de* deux *logarithmes et les différences des nombres correspondants*, qui a servi de base à la résolution des deux questions précédentes, n'est jamais rigoureusement vrai : mais on démontre en Algèbre que son emploi donne un résultat *suffisamment approximatif* toutes les fois qu'on opère sur des nombres *supérieurs* à 10000.

C'est pour cela que, dans la résolution de ces deux questions, il faut toujours faire en sorte que le nombre dont on *cherche* le logarithme, ou auquel doit appartenir un logarithme *donné*, soit *au-dessus* de 10000.

Pour la PREMIÈRE question, l'*erreur* que l'on commet n'affecte pas les *sept premières* décimales du logarithme cherché.

Pour la *seconde* question, la fraction décimale fournie par la division des deux différences de logarithmes peut être poussée jusqu'aux *centièmes* sans aucun inconvénient, mais *jamais au delà*.

On voit ainsi que l'emploi des Tables de logarithmes dans les calculs numériques ne donne que des valeurs *approchées* pour les quantités que l'on cherche ; mais ces approximations, quelquefois *très-bornées*, sont le plus communément *suffisantes*.

Applications des Tables de logarithmes.

327. PREMIÈRE QUESTION. — Trouver le résultat du calcul indiqué par l'expression

$$x = \frac{37 \times 49 \times 17 \times 175}{29 \times 69 \times 154},$$

que l'on peut considérer comme provenant de la résolution d'un problème dont l'énoncé renferme des rapports, les uns *directs*, les autres *inverses*.

On a, en vertu des propriétés démontrées aux nos **313** et **314**,

$$\text{l. } x = \text{l. } 37 + \text{l. } 49 + \text{l. } 17 + \text{l. } 175 - \text{l. } 29 - \text{l. } 69 - \text{l. } 154.$$

Or	log. 37 = 1,5682017		log. 29 = 1,4623980
	log. 49 = 1,6901961		log. 69 = 1,8388491
	log. 17 = 1,2304489		log, 154 = 2,1875207
	log. 175 = 2.2430380		5,4887678
	6,7318847		
	— 5,4887678		
Donc	log. x = 1,2431169		

Il faut maintenant trouver à quel nombre correspond ce logarithme dont la *partie décimale* est 2431169

Les Tables donnent log. 17503 = 2431125

Différence 44

Divisant cette différence par la *différence tabulaire* 248, on trouve 0,18.

Donc

$$x = 17{,}50318, \quad \textit{à moins de } 0{,}00001 \textit{ près.}$$

Les Tables ne peuvent donner une plus grande approximation, puisque (nº 326) on doit s'arrêter aux *centièmes* dans l'évaluation en décimales du quotient de la division des deux *différences*.

Des compléments arithmétiques et de leur usage dans les calculs.

328. Dans l'exemple précédent, on a été conduit à retrancher la somme de plusieurs logarithmes, de la somme de plusieurs autres. Mais on peut remplacer les *deux additions* et la *soustraction*, qu'on est obligé d'effectuer pour arriver au résultat, par *une seule addition* en employant les COMPLÉMENTS.

On appelle COMPLÉMENT ARITHMÉTIQUE d'un logarithme, ce qu'il faut ajouter à ce logarithme pour faire 10 unités; en d'autres termes, c'est *le résultat qu'on obtient en retranchant ce logarithme de* 10.

Ainsi,

$$\textit{comp. arith.} \text{ de } \quad 2{,}4271614 = 7{,}5728386.$$

Il suffit, d'après la règle nº **12** de la soustraction, de retrancher le dernier chiffre à droite, de 10, et tous les autres chiffres, de 9.

Le COMPLÉMENT s'obtient donc, pour ainsi dire, d'après l'inspection seule du logarithme.

Soient encore les logarithmes

$$3{,}0784159; \quad 0{,}4752649.$$

On a, pour leurs *compléments* respectifs,

$$6{,}9215841; \quad 9{,}5247351.$$

N. B. — Si le logarithme donné est terminé par un ou plusieurs *zéros*, il faut, en conservant les zéros, retrancher le *premier chiffre significatif* à droite, de 10, et tous les autres de 9.

Par exemple,

$$\begin{aligned}\text{comp. arith. de } \quad 1{,}7080360 &= 8{,}2919640,\\ \text{comp. arith. de } \quad 5{,}6309800 &= 4{,}3690200.\end{aligned}$$

Cela posé, soit à soustraire de la somme des *quatre* logarithmes, L, L′, L″, L‴, la somme de *trois* autres, l, l', l''; et désignons par D la différence entre ces deux sommes. On a évidemment

$$D = L + L' + L'' + L''' + \overline{10 - l} + \overline{10 - l'} + \overline{10 - l''} - 30,$$

ou, ce qui revient au même,

$$D = L + L' + L'' + L''' + \text{comp. } l + \text{comp. } l' + \text{comp. } l'' - 30;$$

d'où l'on déduit cette RÈGLE GÉNÉRALE :

Prenez les compléments arithmétiques des logarithmes *soustractifs; faites une* SOMME TOTALE de ces compléments et des logarithmes *additifs;* puis *retranchez* de la *caractéristique* du résultat, *autant de fois* 10, ou *autant de dizaines que vous avez pris de compléments.*

Vous obtenez ainsi la différence demandée.

Ainsi, reprenant l'exemple du numéro précédent, on a

$$\begin{array}{rrl}
\text{l.} & 37 = & 1,5682017 \\
\text{l.} & 49 = & 1,6901961 \\
\text{l.} & 17 = & 1,2304489 \\
\text{l.} & 175 = & 2,2430380 \\
\text{comp. l.} & 29 = & 8,5376020 \\
\text{comp. l.} & 69 = & 8,1611509 \\
\text{comp. l.} & 154 = & \underline{7,8124793} \\
 & & 31,2431169
\end{array}$$

ou, retranchant 30, 1,2431169 comme ci-dessus.

329. SECONDE QUESTION. — On demande d'insérer, par exemple, 25 *moyens proportionnels* entre les deux nombres 3 et 4.

On a trouvé (n° **307**), pour l'expression générale de la *raison* de la progression,

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}.$$

Dans le cas particulier qui nous occupe, on a

$$a = 3,\ b = 4,\ m = 25,\quad \text{d'où}\quad q = \sqrt[26]{\frac{4}{3}}.$$

Si l'on applique les logarithmes, il vient

$$\log. q = \frac{\log. 4 - \log. 3}{26}.$$

Les Tables donnent

$$\begin{array}{rl}
\log. 4 = & 0,60205999 \\
\log. 3 = & \underline{0,47712125} \\
\text{Différence} = & 0,12493874
\end{array}$$

laquelle, divisée par 26, conduit au résultat

$$0,00480533;$$

et il s'agit de trouver à quel nombre correspond la *partie décimale* de ce logarithme. Or, on reconnaît que

$$\begin{array}{rl}
\log. 101113 = & \underline{00480270} \\
\text{Différence} & 263
\end{array}$$

La différence tabulaire étant d'ailleurs 430, on *divise*, suivant la règle du n° **325**, 263 par 430, ce qui donne en décimales, 0,6.

La raison q a donc pour valeur 1,011136, à *moins d'un millionième* près.

On aurait pu, à la rigueur, se dispenser de calculer la fraction 0,6, et l'on aurait obtenu

$$q = 1,01113 \quad \text{à} \quad 0,00001 \text{ près.}$$

Veut-on maintenant former le dixième *moyen proportionnel* de la progression, ou le *onzième* terme?

Appelant x ce *moyen proportionnel*, on a (n° **304**)

$$x = 3 \times \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right);$$

d'où, en employant les logarithmes,

$$\log. x = \log. 3 + \frac{10\,(\log. 4. - \log. 3)}{26}.$$

On a déjà trouvé $\dfrac{\log. 4 - \log. 3}{26} =$	0,00480533
ce qui donne $\dfrac{10\,(\log. 4 - \log. 3)}{26} =$	0,0480533
et, en ajoutant log. 3.	0,4771212
on a à déterminer le nombre correspondant à	0,5251745
Cherchant dans la Table, on reconnaît que 33510 a pour logarithme	5251744
Différence	1

qui peut être négligée; et l'on obtient enfin $x = 3,3510$ pour le *moyen proportionnel demandé*.

330. Troisième question. — *On demande le douzième terme* et la *somme* des douze premiers termes de *la progression par quotient* $\div\!\div\, 2 : \frac{7}{3} : \frac{49}{18} : \frac{33}{108} : \ldots$?

Appelons x le *douzième* terme de cette progression, dont la raison q est $\frac{7}{6}$.

1°. On a (n° **304**)

$$x = 2 \times \left(\frac{7}{6}\right)^{11};$$

par suite,

$$\log. x = \log. 2 + 11\,(\log. 7 - \log. 6).$$

Or les Tables donnent $\log. 7 = 0,8450980$
$\log. 6 = 0,7781512$

Différence $0,0669467$

d'où $11 (\log. 7 - \log. 6) = 0,7364146$

ajoutant log. 2 ou $0,3012999$

on a $\log. x = 1,0377146$

$\log. 10907 = \quad 0377053$

Différence $\quad 094$

La différence tabulaire est 398; d'où $\dfrac{94}{398} = 0,24$.

Donc $x = 10,90724$.

2°. La formule $S = \dfrac{l \times q - a}{q - 1}$ du n° **306** devient ici

$$S = \frac{x \times \frac{7}{6} - 2}{\frac{7}{6} - 1} = \frac{x \times 7 - 12}{1} = x \times 7 - 12.$$

Or, le produit de x ou de 10,90724 par 7, est 76,35068; d'où, retranchant 12, l'on déduit... 64,35068.

Ainsi la somme demandée est

64,351 à 0,001 près *en plus*.

N. B. — On voit que la première partie de la question est la partie principale à résoudre, comme conduisant à la *formation d'une puissance* d'un degré plus ou moins considérable, suivant le nombre des termes que l'on veut considérer dans la progression, opération que l'emploi des logarithmes permet de remplacer par une *multiplication*.

Quant à la *somme des termes*, sa détermination est facile, sans le secours des logarithmes, d'après l'expression

$$\frac{l \times q - a}{q - 1}.$$

Applications des logarithmes au calcul des fractions proprement dites.

331. Ainsi que nous l'avons déjà dit au n° **310**, on ne saurait donner une idée nette et précise du logarithme d'un nombre *plus petit que l'unité*, sans introduire dans l'Arithmétique des notions qui lui sont étrangères. Mais nous allons faire voir que l'on peut néanmoins soumettre les *fractions proprement dites* au calcul logarithmique, aussi bien que les nombres *entiers* ou *fractionnaires plus grands* que 1, au moyen de quelques transformations exécutées sur les expressions qui renferment des fractions.

Première question. — *On demande d'effectuer par logarithmes le calcul indiqué par l'expression*

$$x = \frac{23}{49} \times \frac{16}{63} \times \frac{5}{7}.$$

Remarquons que, si l'on multiplie par 10 chacun des facteurs du second membre, ce qui donne

$$\frac{230}{49},\quad \frac{190}{63} \quad \text{et} \quad \frac{50}{7},$$

on aura multiplié le produit total par 1000; et il en résultera la nouvelle égalité

$$x \times 1000 = \frac{230}{49} \times \frac{190}{63} \times \frac{50}{7},$$

égalité telle, qu'en effectuant les calculs indiqués dans le second membre, on devra, pour obtenir la valeur numérique de x, diviser le résultat par 1000; ce qu'on pourra faire par un simple déplacement de virgule.

Or on a

$$\text{l.}\ \frac{230}{49} \times \frac{190}{63} \times \frac{50}{7} = \text{l.}\,230 + \text{l.}\,190 + \text{l.}\,50 - \text{l.}\,49 - \text{l.}\,63 - \text{l.}\,7;$$

et cette expression calculée soit *directement*, soit au moyen des *compléments arithmétiques* (n° 328), donne pour résultat : 101,115 à 0,001 près.

Divisant par 1000, on obtient

$$x = 0,101115 \quad \text{à} \quad 0,000001 \text{ près.}$$

332. Deuxième question. — *Soit à évaluer par logarithmes l'expression*

$$x = \left(\frac{23}{59}\right)^{12}.$$

On peut évidemment lui donner la forme suivante :

$$\times 10^{12} = \left(\frac{230}{59}\right)^{12}.$$

Le second membre étant calculé d'après les règles connues, il suffira ensuite de diviser le résultat obtenu par l'*unité suivie* de 12 *zéros*.

On a d'abord

$$\log.\ \left(\frac{230}{59}\right)^{12} = 12\,(\log.\ 230 - \log.\ 59).$$

Or, les Tables donnent	log. 230 =	2,36172784
	log. 59 =	2,77085201
	Différence	0,59087583
		12
d'où, multipliant par 12,		7,09050996

Cherchant dans les Tables la partie décimale la plus rapprochée de 09050996, on trouve 0905049, qui correspond au nombre 12317.

Mais comme le logarithme 7,0905099 a 7 pour caractéristique, le nombre correspondant doit avoir *huit* chiffres, et, par suite, est égal à 12317000.

Séparant *douze* chiffres décimaux vers la droite, on obtient 0,000012317000, ou 0,000012317, pour le résultat demandé.

N. B. — On s'est dispensé d'établir ici le calcul *proportionnel* que comporte l'usage des Tables, parce que l'approximation qu'on vient d'obtenir est déjà plus que suffisante.

333. Troisième question. — *Évaluer par logarithmes l'expression*

$$x = \sqrt[7]{\frac{19}{43}}.$$

Principe préliminaire. — Avant d'exécuter la transformation qui doit conduire au résultat, il est nécessaire d'établir le principe suivant :

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}},$$

A et B étant l'un et l'autre *plus grands* que 1, et $A > B$.

Or on y parvient en raisonnant comme au n° **317**.

En effet, on a, d'après les propriétés des n^{os} **316** et **314**,

$$\text{l.}\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{1}{n} \times \text{l.}\frac{A}{B} = \frac{\text{l.}A - \text{l.}B}{n},$$

et

$$\text{l.}\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} = \text{l.}\sqrt[n]{A} - \text{l.}\sqrt[n]{B} = \frac{1}{n} \times \text{l.}A - \frac{1}{n} \times \text{l.}B = \frac{\text{l.}A - \text{l.}B}{n};$$

d'où il suit que les deux expressions $\sqrt[n]{\frac{A}{B}}$, $\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$ ont le *même* logarithme (dans le *même* système); donc elles sont égales.

Ainsi

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}, \text{ ou (n° 44)} \quad \sqrt[n]{A:B} = \sqrt[n]{A} : \sqrt[n]{B}.$$

Cela posé, remarquons que l'expression $\sqrt[7]{\frac{19}{43}}$ peut recevoir les formes suivantes :

$$\sqrt[7]{\frac{19}{43}\times 10^7 : 10^7} = \sqrt[7]{\frac{190000000}{43}} : \sqrt[7]{10^7} = \sqrt[7]{\frac{190000000}{43}} : 10.$$

D'où l'on voit qu'après avoir calculé par logarithmes le nombre

$$\sqrt[7]{\frac{190000000}{43}},$$

il suffira de *diviser* par 10 le résultat, pour obtenir le nombre cherché.

Voici le calcul :

$$\text{l. }\sqrt[7]{\frac{190000000}{43}} = \frac{\text{l. }19+\text{l. }10^7-\text{l. }43}{7} = \frac{\text{l. }19+7-\text{l. }43}{7}.$$

On a	log. 19 + 7 =	8,2787536o
	log. 43 =	1,63346846
	Différence	6,64528514
ou, divisant cette différence par 7,		0,94932645
La partie décimale des Tables la plus rapprochée est et correspond au nombre 88986.		3217
	Différence	47

$$\text{Différence tabulaire } 49;\ \frac{47}{49} = 0,95;$$

donc

$$\sqrt[7]{\frac{190000000}{43}} = 8,898695;$$

divisant maintenant par 10, on obtient enfin

$$0,8898695$$

pour la *racine demandée*.

334. Quatrième question. — *Soit* encore *à évaluer l'expression*

$$\sqrt[11]{\left(\frac{3}{7}\right)^6}.$$

On peut faire subir à cette expression les transformations suivantes :

$$\sqrt[11]{\left(\frac{3}{7}\right)^6\times 10^{11} : 10^{11}},\quad \text{ou}\quad \sqrt[11]{\left(\frac{3}{7}\right)^6\times 10^6\times 10^5 : 10^{11}},$$

$$\text{ou}\ \sqrt[11]{\left(\frac{30}{7}\right)^6\times 10^5 : 10^{11}},$$

ou bien encore, d'après le *principe* du n° 333,

$$\sqrt[11]{\left(\frac{30}{7}\right)^6\times 10^5} : \sqrt[11]{10^{11}},\quad \text{ou enfin}\quad \frac{1}{10}\cdot\sqrt[11]{\left(\frac{30}{7}\right)^6\times 10^5}.$$

D'où l'on voit qu'après avoir calculé par logarithmes l'expression $\sqrt[11]{\left(\frac{30}{7}\right)^6 \times 10^5}$, ce qui donne

$$\log. \sqrt[11]{\left(\frac{30}{7}\right)^6 \times 10^5} = \frac{6(\log. 30 - \log. 7) + 5}{11},$$

il suffira de *diviser* le nombre obtenu par 10; et l'on aura ainsi le résultat cherché.

Nous proposons la fin de ce calcul pour exercice.

335. Conclusion. — Les questions que nous venons de traiter suffisent pour faire comprendre que, sans savoir ce que c'est que le logarithme d'une *fraction proprement dite*, on peut exécuter sur cette sorte de nombres toute espèce de *calcul logarithmique*.

Tout l'artifice consiste à *transformer* les expressions de telle manière qu'on n'ait à opérer que sur *des nombres plus grands que l'unité*.

Règles d'intérêt et d'escompte composés.

Dans toutes les questions du sixième chapitre qui ont rapport à l'intérêt de l'argent, nous avons considéré l'*intérêt simple*, c'est-à-dire ce que doit produire un *capital* prêté pour un temps déterminé et à un certain *taux*. Mais on peut supposer que les *intérêts eux-mêmes* restant entre les mains de la personne qui a emprunté, rapportent aussi un *intérêt*, et de là naissent les questions d'intérêt et d'escompte composés, qui peuvent être considérées comme se rattachant à la théorie des *progressions par quotient*.

336. Intérêt composé. — *Une somme* a *étant placée pendant un nombre* n *d'années* (ou de *mois*), *à raison de* i *p.* $\frac{0}{0}$, par *an*, ou par *mois*, *on demande la valeur de cette somme au bout du temps* n, *en y comprenant non-seulement le capital* a *et ses intérêts simples accumulés, mais encore les intérêts des intérêts pendant ce même temps.*

Analyse. — Pour plus de simplicité, nous désignerons par r le *taux* d'intérêt pour 1 fr., que l'on obtient en divisant i par 100 $\left(r = \frac{i}{100}\right)$.

Puisque 1 fr. rapporte r, il est clair qu'une somme a rapportera $a \times r$; ainsi le capital a placé pendant 1 an, produit, y compris le capital,

$$a + a \times r, \quad \text{ou (n° 47)} \quad a(1 + r).$$

Cette nouvelle somme, qui comprend le capital primitif et son intérêt pendant la première année, peut être regardée comme un nouveau capital placé pendant la seconde année; et en la désignant, pour le moment, par a', on trouvera qu'elle devient au bout de la deuxième année, y compris le capital,

$$a'(1+r), \quad \text{ou } a(1+r)(1+r),$$

ou bien

$$a(1+r)^2.$$

Désignant ce nouveau capital par a'', on obtiendra pour la valeur de ce capital et de son intérêt, au bout de la troisième année,

$$a''(1+r), \quad \text{ou} \quad a(1+r)^2(1+r),$$

ou bien

$$a(1+r)^3;$$

et ainsi de suite.

Donc, en général, n exprimant le nombre d'années pendant lequel le capital a est placé, et A la valeur de ce capital réuni à ses intérêts et aux intérêts des intérêts, on obtient la formule

$$A = a(1+r)^n.$$

Premier exemple. — *Quelle est la valeur, en intérêt composé, d'une somme de 12000 fr. placée à 4 pour $\frac{0}{0}$ pendant 6 ans?*

Il faut poser

$$a = 12000, \quad r = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}, \quad n = 6;$$

ce qui donne

$$A = 12000 \left(\frac{26}{25}\right)^6,$$

ou, appliquant les logarithmes,

$$\text{l. } A = \text{l. } 12000 + 6\,(\text{l. } 26 - \text{l. } 25),$$

l. 26 =	1,41497335
l. 25 =	1,39794001
Différence	0,01703334
Multiplication par 6	0,10220004
ajoutant log. 12000 =	4,07918125
Somme	4,18138129
La *partie décimale* la plus rapprochée est et correspond à 15183.	1813576
Différence	237

Différence tabulaire 286; $\frac{237}{286} = 0,82.$

Donc

$$A = 15183^{f},82.$$

N. B. — L'intérêt simple de 12000 fr., pour les 6 années, serait

$\frac{1}{25} \times 12000 \times 6$, ou 2880 fr.; et si l'on prend la différence entre $3183^f,82$ et 2880, on obtient $303^f,82$ pour les *intérêts des intérêts*.

Second exemple. — *On demande, en intérêt composé, la valeur de* 5628 *fr. placés pendant* 9 *mois* $\frac{1}{2}$, *à raison de* $\frac{3}{4}$ *ou de* 0,75 *pour* $\frac{0}{0}$ *par mois?*

Le *mois* étant pris ici pour *unité* de temps, et la formule générale n'ayant été établie que dans le cas où n est entier, il est nécessaire de scinder la question en deux parties : 1° *déterminer* la valeur de A au bout de 9 mois, en *intérêt composé;* 2° *trouver l'intérêt simple* de cette valeur de A pour un *demi-mois*, puis *ajouter* cet intérêt à la valeur de A déjà obtenue.

On a d'abord

$$a = 5628, \quad r = \frac{3}{400} \quad \text{ou} \quad 0,0075, \quad n = 9,$$

d'où

$$A = 5628\,(1,0075)^9,$$

	log. 1,0075 =	0,00324505
Multiplication par 9		0,02920545
	log. 5628 =	3,7503541
		3,7795595
La partie décimale la plus rapprochée est		5532
et correspond au nombre 60194.	Différence	63

Différence tabulaire 72; $\frac{63}{72} = 0,87$.

Ainsi l'on a déjà

$$A = 6019^f,49.$$

Déterminons maintenant l'intérêt de $6019^f,49$ pour *un demi*-mois.

L'intérêt de 1 fr., pour $\frac{1}{2}$ mois, est la *moitié* de 0,0075, ou 0,00375; multipliant 6019,49 par 0,00375, on obtient le produit $22^f,57$, intérêt qui, ajouté au capital A, donne

$$6042^f,06$$

pour le résultat demandé.

337. ESCOMPTE COMPOSÉ. — Les deux quantités A et a, qui entrent dans la formule

$$A = a\,(1 + r)^n,$$

ont entre elles une relation telle, que, si a est un capital placé actuellement, A est sa valeur au bout d'un certain temps.

Donc, RÉCIPROQUEMENT, A désignant une somme payable au bout d'un nombre n d'unités de temps, a exprime sa *valeur actuelle ;* on suppose d'ailleurs que l'on ait égard aux *intérêts accumulés* et aux *intérêts des intérêts* du capital A.

Comme on déduit de la formule ci-dessus

$$a = \frac{A}{(1+r)^n},$$

on peut regarder celle-ci comme donnant la *valeur actuelle* d'un billet dont le montant est A, et qui est payable dans n années, en admettant qu'on ait égard à l'*intérêt composé* de cette valeur actuelle.

Exemple. — *On demande la valeur actuelle d'une somme de* 30000 *fr. qui n'est payable que dans* 7 *ans, en supposant que le taux d'intérêt soit à* 6 *pour* $\frac{0}{0}$ *par an, et qu'on ait égard à l'intérêt composé?*

La formule devient

$$a = \frac{30000}{(1,06)^7}, \quad \text{d'où} \quad \log. a = \log. 30000 - 7 \log. 1,06,$$

$$\log. 30000 = 4,47712125$$

$$\log. 1,06 = 0,02530587$$
$$\underline{7}$$
$$7 \log. 1,06 = 0,17714109 \qquad \underline{0,1771410}$$

Différence $4,3000802$

La partie décimale la plus rapprochée est $\underline{3000735}$

et correspond au nombre 19956. Différence 67

Différence tabulaire 218; $\frac{67}{218} = 0,31$.

Donc 19956,31 est la *valeur actuelle* des 30000 fr.

En cherchant la *valeur actuelle* de 30000 fr., d'après la seconde règle d'escompte (n° **268**), on trouverait pour cette valeur

$$\begin{array}{r} 21126,76 \\ \underline{19956,31} \end{array}$$

Différence des deux résultats 1270,45

338. Annuités. — Un seul exemple suffira pour donner une idée de ce genre de problèmes dont la solution repose sur l'expression de la *somme des termes* d'une progression par *quotient*.

Un particulier emprunte une somme de 60000 *fr. qu'il s'engage à rembourser en* 12 *payements égaux, d'année en année. On demande quelle doit être la* QUOTITÉ *de chaque payement, en ayant égard aux intérêts des intérêts, et en supposant le taux d'intérêt à* $4\frac{1}{2}$ *pour* $\frac{0}{0}$ *par an?*

Analyse. — Il est clair que si, d'*une part*, on *calcule* la valeur en *intérêt composé*, au bout de 12 ans, des 60000 fr. que le particulier a empruntés; que, d'*autre part*, on *calcule* successivement les valeurs en intérêt composé, des sommes payées d'année en année, jusqu'à la fin de la douzième, puis, qu'on *égale* la *première* valeur à la *somme* de toutes les autres, on obtiendra ainsi la relation qui doit exister entre la *somme empruntée* et la *quotité* de chaque payement.

Pour simplifier, nous poserons $a = 60000$, et nous désignerons par x la somme qui doit être payée annuellement, et par r l'intérêt de 1 fr. par an.

Cela posé, on a d'abord (n° **336**) pour la valeur de a, au bout de 12 ans,

(1) $$a(1+r)^{12};$$

d'un autre côté, la quotité x du *premier* payement, c'est-à-dire de celui qui est fait à la fin de la *première* année, produira entre les mains de la personne qui reçoit le premier remboursement, et au bout des 11 années restantes, une somme exprimée par

$$x(1+r)^{11}.$$

Pareillement, la même quotité x remboursée à la fin de la *deuxième* année, produira, au bout des 10 années restantes,

$$x(1+r)^{10},$$

et ainsi de suite jusqu'à la fin de la *onzième* année, ce qui donnera encore

$$x(1+r),$$

et enfin, pour le *dernier* remboursement qui est censé fait à la fin de la *dernière* année, la *quotité* même x.

Écrivons maintenant sur une même ligne les diverses sommes partielles, mais en renversant l'ordre des termes ; il vient

$$x,\quad x(1+r),\quad x(1+r)^2\ldots,\quad x(1+r)^{10},\quad x(1+r)^{11},$$

série qui n'est autre chose qu'une *progression par quotient* dont le premier terme est x, la raison $1+r$, et le dernier terme $x(1+r)^{11}$

Or, en appliquant la formule $S = \dfrac{l\times q - a}{q-1}$ du n° **306**, on a

$$S = \frac{x(1+r)^{12} - x}{r},\quad \text{ou}\quad S = \frac{x[(1+r)^{12} - 1]}{r};$$

et c'est cette valeur de S qu'il faut égaler à l'expression (1) obtenue d'abord.

On a ainsi l'égalité

$$\frac{x[(1+r)^{12}-1]}{r} = a(1+r)^{12};$$

d'où l'on déduit, en *multipliant* les deux membres par r, et divisant ensuite par $(1+r)^{12}-1$, multiplicateur de x,

$$(2) \qquad x=\frac{a\times r\times(1+r)^{12}}{(1+r)^{12}-1}.$$

Si l'on remplaçait 12 par n dans cette égalité, on aurait

$$x=\frac{a\times r(1+r)^n}{(1+r)^n-1},$$

pour la formule générale du problème des *annuités*.)

Mais, pour arriver à la solution de la question particulière que nous nous sommes proposée, il faut remettre dans l'égalité (2), 60000 pour a, et $4\frac{1}{2}$: 100, ou 0,045 pour r; ce qui donne

$$x=\frac{60000\times 0{,}045\times(1{,}045)^{12}}{(1{,}045)^{12}-1},$$

ou supprimant, dans le numérateur, *trois* des *zéros* qui terminent le premier facteur et la *virgule* du second facteur, ce qui revient à *multiplier* et *diviser* ce numérateur par 1000,

$$x=\frac{60\times 45\times(1{,}045)^{12}}{(1{,}045)^{12}-1},$$

expression qui diffère particulièrement de la précédente, en ce que ses deux termes ne contiennent que des nombres *plus grands* que l'unité, et à laquelle on peut, par conséquent, sans difficulté, appliquer les logarithmes.

Voici le tableau des calculs, qui pourra servir de type pour toutes les questions de même espèce :

$$\text{l. } x=\text{l. } 60+\text{l. } 45+12\text{ l. } 1{,}045-\text{l. }[(1{,}045)^{12}-1].$$

On doit commencer par exécuter le calcul qui se rapporte à la parenthèse carrée.

$$\begin{array}{lr}
 & \text{l. } 1{,}045 = 0{,}01911629 \\
 & 12 \\
\hline
 & 12\text{ l. } 1{,}045 = 0{,}22939548 \\
\text{Partie décimale de la Table} & 3746 \\
\hline
\text{Nombre correspondant, 16958.} \quad \text{Différence} & 209
\end{array}$$

Différence tabulaire 256; $\frac{209}{256}=0{,}8$, approximation suffisante; d'où

$$(1{,}045)^{12}=1{,}69588$$

et

$$(1{,}045)^{12}-1=0{,}69588.$$

Comme ce nombre est *plus petit* que l'unité, on le multiplie par 10 afin de pouvoir lui appliquer le calcul logarithmique ; ce qui donne 6,9588.

On trouve ainsi	l. 6,9588 = 0,8425344
D'un autre côté, l'on a	l. 60 = 1,7781513
	l. 45 = 1,6532125
	12 l. 1,045 = 0,2293955
Somme	3,6607593
dont il faut retrancher l. 6,9588, ou	0,8425344
ce qui donne pour différence	2,8182249

Mais comme on vient de retrancher le *logarithme* d'un nombre 10 fois *trop fort*, la *caractéristique* du résultat obtenu est *trop faible d'une unité*.

Ainsi le véritable résultat doit être	3,8182249
et il ne s'agit plus que de trouver le *nombre correspondant* à ce logarithme.	
Partie décimale de la Table	2193
Nombre correspondant 65709. Différence	56

Différence tabulaire 66 ; $\frac{56}{66} = 0,8$.

Donc le *nombre cherché* est $6579^{f}\,98^{c}$.

L'emprunteur doit donc verser tous les ans une somme de 6580 fr. environ pour être entièrement libéré au bout de 12 années.

339. Le problème suivant se rattache également aux *annuités*.

Une personne prélève tous les ans sur ses économies une somme de 2500 *francs qu'elle place en* INTÉRÊT COMPOSÉ à 5 pour 100 par an. On demande le capital qu'elle devra retirer au bout de 12 ans?

Traitant la question généralement, désignons par a la somme placée annuellement, par r l'intérêt de 1 franc, et par n le nombre d'années, au bout duquel doit avoir lieu le remboursement de tous les capitaux placés, de leurs intérêts et des intérêts des intérêts.

Si l'on suppose que, dès le commencement de la *première* année, un premier placement a ait été fait, cette somme deviendra

$$a(1+r)^n.$$

Le placement a fait au commencement de la *deuxième* année produira

$$a(1+r)^{n-1};$$

et ainsi de suite, jusqu'au commencement de la *dernière* année, où le placement de la somme a produira

$$a(1+r).$$

Si, maintenant, nous concevons écrites sur une même ligne toutes ces quantités, à partir de la *dernière*, il vient

$$a(1+r), \quad a(1+r)^2, \quad a(1+r)^3\ldots, \quad a(1+r)^n,$$

progression par quotient, dont le premier terme est $a(1+r)$, la raison $(1+r)$, et le dernier terme $a(1+r)^n$; ce qui donne (nº **306**)

$$S = \frac{a(1+r)^n(1+r) - a(1+r)}{r}.$$

ou, mettant en évidence le facteur commun $a(1+r)$,

$$S = \frac{a(1+r)\times[(1+r)^n - 1]}{r},$$

Il ne s'agit plus, maintenant, pour résoudre la question proposée, que de remplacer, dans cette expression, a, r, n par 2500,.. 0,05 et 12. On trouve ainsi

$$S = \frac{2500\times 1{,}05\times[(1{,}05)^{12} - 1]}{0{,}05};$$

ou, divisant 2500 et 0,05 par 5, et supprimant ensuite la virgule dans 1,05 et 0,01,

$$S = 500\times 105[(1{,}05)^{12} - 1].$$

Voici le détail du calcul :

$$\begin{array}{rr}
\log.\ 1{,}05 = & 0{,}0211893 \\
 & 12 \\ \hline
12\log.\ 1{,}05 = & 0{,}2542716 \\
\text{Partie décimale de la Table} & 2580 \\
\text{Nombre correspondant, 17958.} & \\ \hline
\text{Différence} & 136
\end{array}$$

Différence tabulaire 242; $\frac{136}{242} = 0{,}56$;

$$\begin{array}{lrr}
\text{d'où} & (1{,}05)^{12} = & 1{,}795856 \\
 & (1{,}05)^{12} - 1 = & 0{,}795856 \\
\textit{Multiplication}\text{ par 10 (nº 333)} & & 7{,}95856 \\ \hline
 & \log.\ 7{,}95856 = & 0{,}9008345 \\
 & \log.\ 105 = & 2{,}0211893 \\
 & \log.\ 500 = & 2{,}6989700 \\ \hline
 & & 5{,}6209938
\end{array}$$

ou, retranchant de la *caractéristique* l'*unité* provenant de la *multiplication* par 10, 4,6209938

Partie décimale de la Table 892

Nombre correspondant, 41782.

Différence 46

Différence tabulaire 104; $\frac{46}{104} = 0{,}44$;

donc $S = 41782{,}44.$

Ainsi, la somme $41782^f,44$ exprime la valeur des 2500 fr. placés annuellement à intérêt composé pendant 12 années consécutives.

On trouvera, à la fin de ce chapitre, d'autres exercices sur les *annuités*.

Rapprochement des opérations arithmétiques.

340. Euler, dans ses *Éléments d'Algèbre*, a établi entre les diverses opérations de l'Arithmétique un rapprochement que nous allons faire connaître, parce qu'il donne lieu à une manière particulière d'envisager les logarithmes.

Désignons par a, b, c, trois nombres quelconques, et proposons-nous cette question générale :

Deux quelconques de ces trois quantités étant données, déterminer la troisième au moyen de l'une des opérations arithmétiques, effectuée sur les deux quantités données.

Soit, d'abord, à trouver c par l'*addition* des nombres a et b.

On a $$a + b = c,$$

d'où $$a = c - b, \quad \text{ou} \quad b = c - a.$$

Ce qui montre que si, au lieu de chercher c, on demandait la valeur de a ou de b, la même égalité donnerait la quantité *inconnue* par une *soustraction*.

L'ADDITION et la SOUSTRACTION sont donc *liées entre elles* par la même égalité

(1) $$a + b = c.$$

Si, dans l'égalité $a = c - b$, on suppose le nombre $c <$ le nombre b, la soustraction est *impossible*, et l'on est conduit à une expression qu'on nomme, en Algèbre, quantité *négative*; en sorte que les quantités *négatives* tirent leur origine d'une *soustraction* qu'on ne peut exécuter.

L'addition de plusieurs nombres *égaux* conduisant à la *multiplication*, on demande de trouver c par la multiplication des nombres a et b.

On a $$a \times b = c, \quad \text{ou} \quad ab = c;$$

d'où l'on déduit

$$a = \frac{c}{b}, \quad \text{ou bien} \quad b = \frac{c}{a}.$$

Donc si, au lieu de chercher c, on veut obtenir soit a, soit b, la *division* donnera la valeur du nombre *inconnu*.

Ainsi, la MULTIPLICATION et la DIVISION sont *liées entre elles* par la même égalité

(2) $$ab = c.$$

Dans l'hypothèse de c non divisible par b ou par a, l'expression $\frac{c}{b}$ ou $\frac{c}{a}$ est un nombre *fractionnaire*, *plus grand* ou *plus petit* que l'unité, suivant que c est *plus grand* ou *plus petit* que b ou a ; les *fractions* tirent donc leur origine de *divisions* qui ne peuvent se faire *exactement*.

Enfin, la *multiplication* de plusieurs nombres *égaux* conduisant à la *formation des puissances*, supposons qu'on veuille obtenir c en élevant a à une puissance marquée par le nombre b.

On a
$$a^b = c;$$
d'où
$$a = \sqrt[b]{c};$$
ce qui prouve que si, pour obtenir c, connaissant a et b, on doit effectuer *une formation de puissance*, il faut, pour obtenir a, connaissant b et c, effectuer *une extraction de racine.*

Donc la FORMATION DES PUISSANCES et l'EXTRACTION DES RACINES sont *liées entre elles* par la même égalité

$$(3) \qquad a^b = c.$$

Lorsque c n'est pas *une puissance exacte* du degré marqué par b, l'expression $\sqrt[b]{c}$ est un nombre *incommensurable ;* donc les nombres *incommensurables* ou *irrationnels* tirent leur origine d'une *extraction de racine* qui ne peut s'effectuer *exactement.*

Manière particulière d'envisager les logarithmes.

341. Il reste encore, pour résoudre complétement la question générale que nous nous sommes proposée, à déterminer b d'après l'égalité (3), connaissant a et c.

Or cette égalité ne donne pas, comme les égalités (1) et (2), le moyen d'obtenir a ou b par *une même* opération effectuée sur les deux quantités connues.

Il faut, pour trouver b, une opération toute particulière, qui constitue, en quelque sorte, une *septième* opération de l'Arithmétique ; et ce sont les *logarithmes* qui fournissent le moyen de l'effectuer.

A cet effet, on applique à l'égalité $a^b = c$ la propriété du n° **315** ; ce qui donne
$$b \times \log.\ a = \log.\ c;$$
d'où
$$b = \frac{\log.\ c}{\log.\ a}.$$

L'égalité $a^b = c$, ou plutôt, $a^x = c$ (b étant l'inconnue) est dite une *équation exponentielle.*

Faisons quelques applications.

342. Soit posé, dans l'égalité $a^x = c$,

$$a = 3, \quad c = 81,$$

il vient

$$3^x = 81, \quad \text{d'où} \quad x \log. 3 = \log. 81,$$

et

$$x = \frac{\log. 81}{\log. 3}.$$

Or,

$$\log. 81 = 1{,}90848502,$$
$$\log. \ 3 = 0{,}47712125;$$

donc

$$x = \frac{190848502}{47712125} = 4 + \frac{2}{47712125}.$$

Négligeant la fraction qui est très-petite et provient de ce que les logarithmes ne sont pas des nombres *exacts*, on trouve

$$x = 4;$$

et, en effet, 3^4 est bien égal à 81.

343. Soit encore à résoudre la question suivante :

La *population d'un pays s'accroît chaque année de* $\frac{1}{50}$ *de ce qu'elle était au commencement de cette année;* on demande *au bout de combien d'années elle sera doublée?*

Désignons par a l'état de la population au commencement de la première année, par a', a'', . . . , ce qu'elle est devenue au commencement de chacune des autres années.

Faisant un raisonnement analogue à celui qui a servi pour la résolution des questions d'*intérêt composé* (n° **336**), on dira :

Puisqu'à la fin de la *première* année la population est augmentée de $\frac{1}{50}$, elle sera devenue

$$a + \frac{1}{50} \cdot a, \quad \text{ou} \quad a \cdot \left(1 + \frac{1}{50}\right) \quad \text{ou} \quad a\left(\frac{51}{50}\right), \quad \text{ou} \quad a',$$

d'après les notations convenues.

De même, puisqu'à la fin de la *deuxième* année elle a augmenté de $\frac{1}{50}$ de ce qu'elle était au commencement de cette année, elle sera devenue

$$a'\left(\frac{51}{50}\right), \quad \text{ou bien} \quad a\left(\frac{51}{50}\right) \times \left(\frac{51}{50}\right), \quad \text{ou} \quad a\left(\frac{51}{50}\right)^2;$$

et ainsi de suite

Donc, au bout de x années, elle sera exprimée par

$$a\left(\frac{51}{50}\right)^x;$$

et puisque, par hypothèse, à cette époque, *encore inconnue*, la population doit être *double* de ce qu'elle était d'abord, on aura l'égalité

$$a\left(\frac{51}{50}\right)^x = 2a;$$

d'où, supprimant le facteur a commun aux deux membres,

$$\left(\frac{51}{50}\right)^x = 2.$$

Si l'on prend les logarithmes des deux membres, il vient

$$x\,(\log.\ 51 - \log.\ 50) = \log.\ 2;$$

et, par suite,

$$x = \frac{\log.\ 2}{\log.\ 51 - \log.\ 50}.$$

Cherchant dans les Tables les logarithmes de 2, de 51 et de 50, on trouve, tout calcul fait,

$$x = 35 + \frac{3}{860018}.$$

Ainsi, c'est au bout de 35 ans, à très-peu près, que la population se trouvera *doublée*.

Les LOGARITHMES donnent donc les moyens d'effectuer un *genre particulier d'opération*, INDISPENSABLE *pour la résolution de certaines questions*.

N. B. — On remarquera que, dans la question précédente, la valeur de x est tout à fait *indépendante* de l'état primitif de la population, puisque a a disparu dans le calcul.

Exercices.

I. Lorsque, dans une suite de nombres, $a, b, c, d, e, f, g, \ldots$, chacun est égal à la *demi-somme* des deux qui le comprennent, ces nombres forment une progression *par différence*, et si chacun est égal à la *racine carrée du produit* des deux qui le comprennent, ces nombres forment une progression *par quotient*.

II. La production du fer, en France, a été, en 1826, de 1156850 *quintaux métriques* (100 kilogrammes); elle s'élevait, en 1847, à 3601901 *quintaux métriques*. Calculer sa production, en 1835, en supposant l'accroissement *égal* pour *chaque année*?

III. Un monceau de sable est distant d'une allée d'arbres, de 40 mètres; elle exige, pour être sablée, 100 voitures à 6 mètres d'intervalle l'une de l'autre. On demande le chemin que doit faire le voiturier, le *premier chargement* étant déposé à 40 mètres du monceau de sable, et la voiture devant, à la fin, revenir à l'endroit d'où elle était partie?

IV. Former la somme des 20 premiers termes de chacune des deux progressions par quotient

$$1 : 3 : 9 : 27 : \ldots, \quad 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \ldots,$$

en opérant, d'abord *directement*, puis par *logarithmes?*

V. Un particulier dépose chez son notaire une somme de 60000 fr. que celui-ci fait valoir en *intérêt composé*, à raison de $4^{f},75$ pour 100 par an. Le client venant à mourir au bout de 5 ans 8 mois, on demande ce que le notaire doit payer aux *héritiers*, en ne tenant compte, suivant l'usage, que de l'*intérêt simple* pour les *huit* derniers mois?

VI. Une compagnie d'assurances sur la vie reçoit d'un particulier, à titre de *fonds perdus*, une somme de 45000 fr., pour laquelle elle s'engage à lui faire une *rente viagère*, calculée à raison de 9 pour 100 par an (en *intérêt composé*) et pour 12 *années* d'existence, d'après les Tables de mortalité. On demande la *quotité* de la rente viagère à servir?

VII. Une personne ayant hérité d'une somme de 40000 fr. qu'elle place chez son notaire, en *intérêt composé*, à raison de 5 pour 100, économise tous les ans, sur son propre revenu, une somme de 2000 fr. qu'elle place également chez le même notaire. On demande la *quotité* du capital à payer par celui-ci au bout de 10 ans?

VIII. On demande la somme que l'on doit placer à présent, pour retirer pendant 12 ans, et à la fin de chaque année, une somme de 1500 fr., de manière à être remboursé entièrement du capital et des intérêts au bout de ces 12 années, le *taux* d'intérêt étant de $5\frac{1}{2}$ pour 100 par an?

CHAPITRE HUITIÈME.

(COMPLÉMENTAIRE DES PRÉCÉDENTS.)

§ I. *Propriété du nombre* 11. — § II. *Des nombres premiers.* — § III. *Des fractions décimales périodiques.* — § IV. *Méthodes abrégées pour la division et l'extraction de la racine carrée.* — § V. *Opérations sur les nombres approximatifs.*

Nous nous sommes attaché à simplifier autant que possible l'exposé des théories qui ont fait l'objet des précédents chapitres, et à éviter tout développement qui nous paraissait sortir des *éléments* de l'Arithmétique.

Ce dernier chapitre est, en conséquence, destiné à compléter quelques-unes de ces théories.

§ I. — PROPRIÉTÉ DU NOMBRE 11.

Reste de la division d'un nombre par 11.

344. Le nombre 11 jouit d'une propriété analogue à celle du nombre 9, et pouvant s'énoncer ainsi :

Si un nombre entier quelconque est tel, que la *somme* des chiffres de rang *impair*, à partir de la droite, soit *plus grande* que la *somme* des chiffres de rang *pair*, tous ces chiffres étant considérés avec leur valeur *absolue*, *le reste de la division du nombre total par* 11 *est égal à celui que donne la division, par* 11, *de la différence entre ces deux sommes;* et si, au contraire, la seconde *somme* SURPASSE la première, *le reste est égal au* COMPLÉMENT *à* 11 (*) *du reste que donne la division, par* 11, *de la différence entre la seconde et la première somme.*

Lorsque *la différence* des deux sommes est 0 ou un *multiple* de 11, *le nombre lui-même est divisible par* 11.

Exemples: 1°. — 37098526.

Somme des chiffres de rang *impair*.	27
Somme des chiffres de rang *pair*.	13
Différence.	14

(*) On appelle *complément* d'un nombre à un autre nombre, ce qui manque au premier nombre pour former le second (*voir* le n° 328).

Le 11^e de 14 est 1, et il reste 3; donc 3 est le reste de la division du nombre total par 11.

2°.— 851462.

Somme des chiffres de rang *impair*.....	11
Somme des chiffres de rang *pair*.......	15
Différence $15 - 11 =$	4

donc $11 - 4$ ou 7 (*complément* de 4 à 11) est le reste de la division du nombre total par 11.

Pour démontrer cette propriété, nous commencerons par établir les deux propositions suivantes :

1°. *Toute puissance de* DEGRÉ PAIR $(2n)$, *de* 10, *diminuée de* 1, *donne un nombre multiple de* 11 ;

2°. *Toute puissance de* DEGRÉ IMPAIR $(2n+1)$, *de* 10, *augmentée de* 1, *donne aussi un multiple de* 11.

La première proposition est évidente, car on a

$100 - 1 = 99$, $10000 - 1 = 9999$, $1000000 - 1 = 999999$,.....

et tous ces nombres, essentiellement divisibles par 11, donnent, pour quotients respectifs,

$$9, \quad 909, \quad 90909, \quad 9090909, \ldots$$

Quant à la seconde, on a

$$10^{2n+1} = 10^{2n} \times 10 = 10.(10^{2n} - 1) + 10;$$

ou, ajoutant 1 de part et d'autre,

$$10^{2n+1} + 1 = 10.(10^{2n} - 1) + 11.$$

Or le second membre de cette dernière égalité se compose de deux parties, *multiples* de 11, l'une en vertu de la première proposition et du principe n° 63, l'autre parce que 11 se *divise* lui-même.

Donc le premier membre $10^{2n+1} + 1$ est aussi un *multiple* de 11.

Cela posé, revenons à la propriété énoncée :

Soit N un nombre entier quelconque. Désignons les chiffres qui le composent par a', a'', a''', a^{IV}, a^{V}, a^{VI}, ... (ces notations étant choisies de manière à *distinguer* les chiffres du 1^{er}, 3^e, 5^e ordre, de ceux du 2^e, 4^e, 6^e,...).

On a, d'après le principe fondamental de la numération,

$$N = a' + a''.10 + a'''.10^2 + a^{\text{IV}}.10^3 + a^{\text{V}}.10^4 + \ldots,$$

expression qui peut se transformer ainsi :

$$(\text{A})\ N = \begin{cases} \quad\ \, + a''(10+1) + a'''(10^2 1) + a^{\text{IV}}(10^3+1) + a^{\text{V}}(10^4-1) + \ldots \\ + a' - a'' \qquad\qquad + a''' \qquad\qquad - a^{\text{IV}} \qquad\qquad + a^{\text{V}} + \ldots \end{cases}$$

Cette égalité donne lieu d'examiner *deux* cas différents, suivant que la somme des chiffres de *rang impair* est *plus grande* ou *plus petite* que celle des chiffres de *rang pair*.

Premier cas. — Soit $a' + a''' + a^{v} + \ldots > a'' + a^{iv} + a^{vi} \ldots$; et posons $a' + a''' + a^{v} + \ldots - (a'' + a^{iv} + a^{vi} + \ldots) = 11 . q + r$, r désignant le *reste* de la division par 11 de la *différence* exprimée par le premier membre de cette égalité.

La valeur de N devient ainsi :

$$(\mathrm{B})\ \mathrm{N} = \left\{ \begin{array}{l} \qquad + a''(10+1) + a'''(10^2-1) + a^{iv}(10^3+1) + \ldots \\ + 11 . q + r. \end{array} \right.$$

Or toutes les parties du second membre, excepté r, sont *nécessairement*, d'après les deux propositions préliminaires, des *multiples* de 11.

Donc (n° **64**), le *reste de la division de* N *par* 11 est égal au reste r que donne la division par 11 de l'EXCÈS *de la somme des chiffres de* RANG IMPAIR *sur celle des chiffres de* RANG PAIR ; ce qui est conforme à l'énoncé de la première partie de la propriété.

Second cas. — Soit $a'' + a^{iv} + a^{vi} + \ldots > a' + a''' + a^{v} + \ldots$; et posons $a'' + a^{iv} + a^{vi} + \ldots - (a' + a''' + a^{v} + \ldots) = 11 . q' + r'$, r' étant le reste de la division par 11 de la *différence* exprimée par le premier membre de cette égalité.

On a, en changeant les signes de *tous* les termes dans les *deux* membres (ce qui ne trouble pas l'égalité), la nouvelle égalité

$$a' + a''' + a^{v} + \ldots - (a'' + a^{iv} + a^{vi} + \ldots) = - 11 . q' - r',$$

dont le *second membre* peut (par un simple artifice de calcul qui consiste à *ajouter* et à *retrancher* le *même* nombre 11) être mis sous la forme $- 11(q'+1) + 11 - r'$; en sorte que la valeur de N devient

$$(\mathrm{C})\ \mathrm{N} = \left\{ \begin{array}{l} \qquad + a''(10+1) + a'''(10^2-1) + a^{iv}(10^3+1) + \ldots \\ - 11(q'+1) + 11 - r', \end{array} \right.$$

égalité telle, que l'ensemble des parties qui composent le second membre, à l'exception de la quantité $11 - r'$, forme évidemment un *multiple* de 11.

Donc, d'après le principe du n° **64**, le *reste de la division de* N *par* 11 est égal à l'*excès de* 11 sur r', ou, suivant l'énoncé de la propriété, au COMPLÉMENT *à* 11 *du reste de la division, par* 11, *de l'*EXCÈS *de la somme des chiffres de* RANG PAIR *sur celle des chiffres de* RANG IMPAIR.

Il résulte nécessairement de l'expression (A) du nombre N que, *lorsque la différence des deux sommes de chiffres de rang impair et de rang pair est* NULLE *ou un* MULTIPLE *de* 11, *auquel cas* r *et* r' *sont* NULS *dans les expressions* (B) *et* (C), *le nombre* N *est* DIVISIBLE *par* 11.

La propriété énoncée se trouve ainsi complétement démontrée.

Preuve par 11 *de la multiplication et de la division.*

345. On voit maintenant comment on peut, ainsi que nous l'avons énoncé au nº **73**, faire servir le nombre 11 à la vérification de la multiplication et de la division, puisque (nº **74**) le reste de la division d'un nombre quelconque par *ce nombre particulier* peut aussi être facilement déterminé.

Cette preuve ne différant de la *preuve par* 9 que par la manière d'obtenir les restes de la division des facteurs de l'opération à vérifier, se justifie absolument de la même manière.

On comprend, d'ailleurs, que la *preuve par* 11 n'est pas sujette à autant de causes d'erreur (nº **72**) que la *preuve par* 9.

§ II. — DES NOMBRES PREMIERS.

Moyen de simplifier les essais à faire pour reconnaître si un nombre est premier.

346. Nous avons indiqué (nº **213**) une expression simple de la *limite des essais* à faire pour la recherche des *diviseurs premiers* d'un nombre.

Il en résulte que :

Un nombre est reconnu premier lorsqu'il n'est divisible par aucun nombre inférieur à la partie entière de sa racine carrée;

Ce qu'on peut d'ailleurs démontrer *directement* au moyen de l'égalité *évidente* $N = \sqrt{N} \times \sqrt{N}$.

On déduit, en effet, de cette égalité que, si un nombre premier *plus grand que le premier* facteur $\sqrt{N}$, et, par conséquent, *plus grand que* LA PARTIE ENTIÈRE de $\sqrt{N}$, pouvait *diviser* N, un autre nombre premier *plus petit que le second* facteur $\sqrt{N}$, et nécessairement *plus petit que* cette PARTIE ENTIÈRE de $\sqrt{N}$, devrait, *par compensation*, *diviser* également N; ce qui serait contraire à l'énoncé de la proposition.

Soit, pour exemple, le nombre 5479.

La PARTIE ENTIÈRE de sa *racine carrée* étant 74, on ne devra pousser les *essais* que jusqu'à 73, dernier des *nombres premiers* compris dans la suite des nombres depuis 1 jusqu'à 74.

347. La connaissance de cette *limite* donne un moyen de restreindre beaucoup les opérations à faire pour reconnaître si un nombre est *premier*.

Mais ces opérations sont encore généralement assez laborieuses pour qu'il y ait intérêt à les abréger autant que possible.

C'est l'objet d'une *méthode* (*) que nous allons développer, mé-

(*) Nous avons puisé l'idée de cette *méthode d'essai* dans nos fréquents entrethode qui consiste particulièrement à faire juger, *sans effectuer la division*, si un nombre est *divisible* par un autre, et a l'avantage de fournir en même temps le *quotient* de la division dans le cas où elle doit s'effectuer *exactement*.

Disons d'abord qu'elle ne peut, évidemment, avoir d'application *utile* qu'à l'égard des nombres qui, pris pour *diviseurs*, ne sont pas tels, que la division s'opère facilement, soit à l'aide de caractères particuliers de divisibilité, soit à la seule inspection du nombre pris pour *dividende*.

Ainsi, il n'y a pas lieu d'en faire usage pour les *diviseurs premiers* 2, 3, 5, 7 et 11.

Reprenant le nombre 5479, nous aurons à considérer comme *diviseurs à essayer* les nombres *premiers* depuis 13 jusqu'à 73 inclusivement.

Raisonnons sur le diviseur 13.

Il s'agit de reconnaître, *sans effectuer la division*, si 13 est un *diviseur exact* de 5479.

Or, des *trois* chiffres dont se compose le *quotient*, le premier (celui des *centaines*), 4, s'obtient à la seule inspection des deux premiers chiffres 54, du *dividende ;* le dernier (celui des *unités*) est, évidemment, 3, puisqu'il n'y a que 3 qui, multiplié par 3, chiffre des *unités* du *diviseur* 13, puisse reproduire 9, chiffre des *unités* du *dividende*.

Reste donc à trouver le chiffre des *dizaines* de ce *quotient*. Ici, l'opération connue sous le nom de *preuve par* 9 reçoit une remarquable application.

On observe, en effet, que le *reste* de la division par 9, 1° du *dividende* 5479, est 7 ; 2° du *diviseur* 13, est 4; d'où l'on conclut que le *reste* de la division par 9 du *quotient*, si la division devait se faire

---

tiens avec le jeune Grandemange, d'*Épinal*, qui, né tout à fait infirme, et hors d'état de se livrer à aucun travail manuel, est doué d'une merveilleuse facilité pour exécuter *mentalement* les calculs *numériques* les plus compliqués, et même effectuer des opérations qui supposent la connaissance des principes d'*Algèbre* dont il paraît pourtant n'avoir aucune notion. Mais comme ce jeune homme n'a pas pu recevoir l'instruction nécessaire pour bien rendre compte de sa manière d'opérer, il nous a fallu, en quelque sorte, *deviner* les moyens vraiment simples et ingénieux auxquels il a recours.

La théorie des *nombres premiers* lui fournit particulièrement l'occasion de faire emploi de la faculté remarquable qu'il possède.

Ainsi, il reconnaît, avec une promptitude extraordinaire, si un nombre est *premier*. — Invité par nous à *trouver un nombre dont les diviseurs tant simples que composés formaient une* somme *déterminée*, il n'a eu besoin que de quelques instants pour donner *deux* solutions sur les *quatre* que comportait la question.

Les *extractions de racines* ont été également pour lui l'objet d'un exercice spécial.

Nous donnons à la fin de cet ouvrage une *Note* pour faire connaître comment il parvient au résultat de l'opération marquée par $\sqrt{a^2+b^2}$, *sans extraire la racine carrée*, et en se dispensant même de former l'*un des carrés*.

exactement, serait 4 (puisque 4×4 ou 16, divisé par 9, donne 7 pour *reste*); et comme *deux* des chiffres de ce *quotient* (que nous appellerons *quotient présumé*, mais qui serait le *vrai quotient* si la division se faisait *exactement*), sont 4 et 3, le *seul* chiffre *restant à trouver* ne pourrait être que 6.

La question est maintenant de savoir si ce *quotient présumé*, 463, répond à un *diviseur exact*, 13, du nombre proposé 5479.

Or, en déterminant *seulement* le chiffre des *dizaines* du produit de 463 par 13, on reconnaît qu'il est *différent* de 7, chiffre des *dizaines* du nombre donné, et, par suite, que 13 *n'est pas diviseur* de ce nombre.

Si les *deux* chiffres des *dizaines* ainsi comparés eussent été les *memes*, on aurait comparé également les *deux* chiffres de *centaines*, et, au besoin même, on aurait achevé la *multiplication*; mais, le plus souvent, on s'arrête au chiffre des *dizaines* (*).

En raisonnant absolument de la même manière sur les *diviseurs premiers*

17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 47, 53,

on trouve pour les *quotients présumés*,

317, 241, 203, 161, 139, 187, 149, 107, 173,

et l'on reconnaît, sans avoir besoin de pousser la multiplication au delà du *chiffre des dizaines*, si ce n'est pour le diviseur 19, qu'aucun de ces *diviseurs premiers* ne divise le nombre proposé.

Enfin, pour les *derniers diviseurs à essayer*,

59, 61, 67, 71 et 73,

(*) On juge aisément que, pour tirer de cette méthode tout le parti possible dans la pratique, on a avantage à faire emploi de la règle de multiplication connue sous le nom de RÈGLE D'UN SEUL PRODUIT.

Cette règle, dont l'usage commence à se répandre et qu'on enseigne particulièrement dans les écoles primaires de degré supérieur, consiste en ce qu'au lieu d'écrire successivement les *produits partiels* et de les additionner ensuite, suivant la règle générale du n° **21**, on n'écrit que le *produit total*, en déterminant d'abord le chiffre des *unités simples*, puis le chiffre des *unités de dizaines*, provenant, tant de la *retenue* du produit des *unités simples* que de la multiplication des *unités* et des *dizaines* du *multiplicande* respectivement par les *dizaines* et les *unités* du *multiplicateur*, de même, le chiffre des *unités de centaines*, et ainsi de suite, comme dans l'exemple ci-contre :

$$\begin{array}{r} 463 \\ 13 \\ \hline 6019 \end{array}$$

On dit :
3 fois 3 font 9; on pose 9 *unités simples*;
3 fois 6 (18), et 1 fois 3 font 21, ou 1 *unité de dizaine* et 2 *centaines*;
1 fois 6, 3 fois 4 (12) et 2 de *retenue* font 0 *unité de centaine* et 2 *mille*;
1 fois 4 et 2 de *retenue* font 6 *unités de mille*.

C'est ainsi qu'opère, *toujours mentalement*, le jeune GRANDEMANGE, avec une facilité telle, que si on lui demande le produit de deux nombres entiers ou décimaux de *dix* chiffres, il forme presque instantanément ce produit.

les *quotients présumés*,

$$91, \quad 89, \quad 87, \quad 79 \quad \text{et} \quad 73,$$

n'étant composés que de *deux* chiffres, s'obtiennent à la seule inspection du nombre donné.

On reconnaîtrait de même, en s'arrêtant au *chiffre des dizaines* du produit de chacun de ces *quotients présumés* par le *diviseur correspondant*, qu'aucun de ces *diviseurs premiers* n'est *diviseur exact* du nombre donné.

Mais comme, dans ce cas, les *quotients présumés* sont déterminés sans le secours de la *preuve par* 9, on peut utiliser *autrement* cette *preuve* en l'appliquant aux *deux facteurs* dont le produit devrait être égal au nombre proposé, si le *diviseur essayé* était *diviseur exact* de ce nombre.

Ainsi l'on verrait que le *reste* de la division par 9 du *produit* 89×61 est 2, et non pas 7, *reste* de la division par 9 du *nombre donné*.

On pourrait encore et l'on doit même, pour deux des diviseurs

$$59 \quad \text{et} \quad 67,$$

se dispenser de cette opération, en remarquant que les quotients correspondants

$$91 \quad \text{et} \quad 87$$

ne sont pas des *nombres premiers*, étant divisibles l'un par 7 et l'autre par 3.

On est donc, ainsi, bien certain que le nombre proposé, 5479, est un *nombre premier*.

Il est aisé de voir que nous avons choisi ce nombre de manière à y trouver l'occasion de faire ressortir, autant que possible, toutes les *ressources pratiques*, si nous pouvons ainsi dire, de cette *méthode d'essai*, et, qu'en général, les *essais* peuvent se faire rapidement.

Lorsque le nombre proposé n'a que *trois* chiffres, la détermination des *quotients présumés* se fait d'après la seule inspection de ce nombre, puisqu'ils ne sont composés que de *deux* chiffres, et alors la *seconde partie* de l'opération peut se faire très-simplement.

Quant aux nombres de plus de *quatre* chiffres, la *méthode* leur est également applicable; mais il faut alors déterminer plusieurs chiffres du quotient d'après l'inspection du nombre, pour pouvoir ensuite le *compléter* au moyen de la *preuve par* 9.

Formation d'une Table de nombres premiers.

348. Les principes que nous avons exposés sur les *nombres premiers*, les applications qui en ont été faites et les développements dans lesquels nous venons d'entrer sur les essais à faire pour reconnaître si un nombre est *premier*, montrent assez l'utilité d'une *Table*, aussi étendue que possible, de cette sorte de nombres.

Il existe plusieurs de ces *Tables* dont une, celle de Burckhardt, comprend les *nombres premiers* depuis 1 jusqu'à 3036000.

Pour donner une idée de la manière dont peut se faire ce travail, nous supposerons qu'on veuille former une *Table* des nombres *premiers* de 1 à 1000.

Les *mille* premiers nombres étant supposés écrits à la suite les uns des autres de la manière la plus commode possible, par exemple sur *dix* colonnes, comprenant, chacune, *cent* nombres, voici le procédé qui peut être suivi (*) :

On commence par *barrer*, 1° tous les nombres *pairs*, excepté le nombre 2 ; 2° tous les *multiples* de 3, excepté 3, qui *restent* après la première opération ; 3° et de même, les *multiples* de 5, autres que 5, qui n'ont pas encore été *barrés*.

Cela fait, on peut déjà affirmer que tous les nombres *non barrés*, de 1 à 7×7 ou 49, sont des *nombres premiers*, puisque tous les multiples de 2, 3 et 5, ainsi que les multiples de 7 *inférieurs* à cette limite, ont nécessairement été *barrés ;* et l'on a ainsi la suite des *nombres premiers*,

de 1 à 47.

De même, si l'on *barre* tous les multiples de 7 à partir de 49 jusqu'à 11×11 ou 121 (11 étant le *nombre premier* qui vient *immédiatement après* 7), on est certain que les nombres précédant 121, qui *ne sont pas barrés*, sont des *nombres premiers ;* et l'on obtient tous les *nombres premiers*,

de 47 à 113.

Sans que nous ayons besoin de pousser plus loin les détails de cette opération, il est aisé de voir qu'on est ainsi conduit à *barrer* ou *supprimer* successivement tous les MULTIPLES *non encore supprimés*, des nombres *premiers* DÉJA CONNUS, 11, 13, 17, . . . , jusqu'à ce qu'on soit parvenu au nombre 997, *dernier restant* des *mille* premiers nombres après la suppression, *tout d'abord opérée*, des trois nombres 998, 999 et 1000, comme étant *multiples* de 2 et de 3.

On trouve ainsi la suite des 169 *nombres premiers* compris entre 1 et 1000, dont nous joignons ici la *Table* comme *spécimen*, en y ajoutant les six *nombres premiers* suivants, pour compléter le tableau.

(*) Ce procédé est connu sous le nom de *Crible* d'Ératosthène.

Table des nombres premiers depuis 1 jusqu'à 1033.

1	97	229	379	541	691	863
2	101	233	383	547	701	877
3	103	239	389	557	709	881
5	107	241	397	563	719	883
7	109	251	401	569	727	887
11	113	257	409	571	733	907
13	127	263	419	577	739	911
17	131	269	421	587	743	919
19	137	271	431	593	751	929
23	139	277	433	599	757	937
29	149	281	439	601	761	941
31	151	283	443	607	769	947
37	157	293	449	613	773	953
41	163	307	457	617	787	967
43	167	311	461	619	797	971
47	173	313	463	631	809	977
53	179	317	467	641	811	983
59	181	331	479	643	821	991
61	191	337	487	647	823	997
67	193	347	491	653	827	1009
71	197	349	499	659	829	1013
73	199	353	503	661	839	1019
79	211	359	509	673	853	1021
83	223	367	521	677	857	1031
89	227	373	523	683	859	1033

§ III. — DES FRACTIONS DÉCIMALES PÉRIODIQUES.

Caractères auxquels on reconnaît qu'une fraction ordinaire doit donner lieu à une fraction décimale périodique SIMPLE *ou* MIXTE.

Nous avons été amené par le développement de la propriété établie au n° **174**, à distinguer (n° **175**) *deux* sortes de *fractions décimales périodiques*, les unes SIMPLES, les autres MIXTES; et, sans nous arrêter aux diverses propriétés qui peuvent être déduites de cette distinction, nous nous sommes borné à démontrer celle qui devait nous fournir le moyen de *remonter à la fraction ordinaire génératrice*.

Nous allons maintenant faire connaître les caractères auxquels on reconnaît qu'une *fraction périodique* provenant d'une *fraction ordinaire donnée* doit être SIMPLE OU MIXTE.

349. Commençons par remarquer que les résultats auxquels nous sommes parvenu (nos **176**, **177** et **178**) peuvent s'exprimer par les formules suivantes.

1°. Pour une fraction *périodique* SIMPLE, SANS *ou* AVEC PARTIE ENTIÈRE, telle, par exemple, que

$$0,abcd\,abcd\,abcd.., \quad \text{ou} \quad m,abcd\,abcd\,abcd\ldots,$$

on a, en appelant x la *fraction génératrice*,

$$\text{(A)} \qquad x=\frac{abcd}{9999}, \quad \text{ou} \quad x=\frac{mabcd-m}{9999},$$

expressions dont le dénominateur est composé d'*autant* de 9 qu'il y a de chiffres dans la *première période*;

2°. Pour une *fraction périodique* MIXTE, telle que

$$m,abc\,defgh\,defgh\,defgh\ldots$$

la *fraction génératrice* est

$$\text{(B)} \qquad x=\frac{mabc\,defgh-mabc}{99\,999\,000},$$

expression dont le dénominateur est composé d'*autant* de 9 qu'il y a de chiffres dans la première période, et d'*autant de zéros* qu'il y a de chiffres dans la *partie* DÉCIMALE NON PÉRIODIQUE.

350. Cette dernière formule donne lieu à une *remarque importante*, savoir :

Que *la fraction génératrice d'une fraction périodique* MIXTE, *étant supposée réduite à ses* MOINDRES TERMES, *doit avoir pour dénominateur un nombre contenant au moins l'un des deux facteurs premiers* 2 *et* 5, *à une puissance d'*UN DEGRÉ *marqué par le* NOMBRE *des chiffres décimaux qui précèdent la première période*.

En effet, pour que les facteurs 2 et 5, qui se trouvent dans le dénominateur de la valeur de x, à la *troisième* puissance, par exemple, comme dans la formule (B), pussent, après la réduction de la fraction génératrice *à ses moindres termes*, disparaître entièrement, ou seulement s'y trouver, *tous deux*, à une puissance *moindre* que la *troisième*, il faudrait que le numérateur de cette expression pût être terminé *au moins par un zéro*.

Or cela ne saurait arriver qu'autant que le *dernier* chiffre, c, *au moins*, de la partie *non périodique*, serait *le même* que le *dernier* chiffre, h, de la première période; mais il est évident qu'alors la première période commencerait *avant* le 4e chiffre *décimal*; ce qui serait contraire à la supposition.

Donc, etc.

351. Cela posé, établissons les deux propriétés qui permettent de reconnaître si la *fraction décimale périodique* équivalente à une *fraction ordinaire donnée* doit être SIMPLE OU MIXTE.

PREMIÈREMENT. *Toute fraction ordinaire dont le dénominateur ne renferme aucun des deux facteurs premiers* 2 *et* 5, *étant convertie en décimales, donne lieu à une fraction périodique* SIMPLE.

Il résulte, d'abord, de la propriété du n° **174** que cette fraction décimale est *périodique*.

Je dis maintenant qu'elle est *périodique* SIMPLE.

En effet, si elle était *périodique* MIXTE, le dénominateur de la *fraction génératrice réduite à ses moindres termes*, contiendrait nécessairement, d'après la *remarque* précédente, les deux facteurs 2 et 5, ou au moins l'un des deux ; et comme cette fraction devrait être *égale* à la proposée, il en résulterait que le dénominateur de celle-ci devrait (n° **120**) être un *multiple* du dénominateur de l'autre, et, par conséquent, contenir les facteurs 2 et 5, ou au moins l'un des deux ; ce qui serait contraire à l'énoncé de la proposition.

352. DEUXIÈMEMENT. *Toute fraction ordinaire* IRRÉDUCTIBLE *dont le dénominateur contient un des facteurs* 2 *et* 5, *ou tous les deux, combinés avec d'autres facteurs, donne lieu à une fraction décimale périodique* MIXTE; et *la première période est précédée d'*AUTANT *de chiffres décimaux qu'il y a d'unités dans le plus grand des deux exposants des facteurs* 2 *et* 5.

D'abord, la fraction, nécessairement *périodique* (n° **174**) ne peut pas être *simple*.

Car la valeur de la fraction génératrice serait alors exprimée par l'une des deux formules (A) du n° **349**,

$$x = \frac{abcd}{9999}, \quad \text{ou} \quad x = \frac{mabcd - m}{9999},$$

expressions dont le dénominateur ne renferme ni le facteur 2 ni le facteur 5, et qui ne peuvent en conséquence, après réduction à leurs moindres termes, être *égales*, c'est-à-dire (n° **121**) *identiques* avec la fraction *irréductible* proposée.

En second lieu, si n désigne le plus grand des exposants de 2 et de 5, que renferme le dénominateur de la proposée, la première période doit être précédée de n chiffres *décimaux*.

Car, si elle était précédée de m chiffres, m étant $\lessgtr n$, le dénominateur de la *fraction génératrice,* supposée réduite à *ses moindres termes*, contiendrait, d'après la remarque du n° **350**, *au moins* l'un des facteurs 2 et 5 à la $m^{\text{ième}}$ puissance, et, par conséquent, cette fraction ne saurait être *égale* ou (n° **121**) *identique* avec la *proposée* qui, par hypothèse, contient l'un de ces deux facteurs à la $n^{\text{ième}}$ puissance.

N. B. — L'énoncé de cette propriété suppose que la fraction *proposée* est IRRÉDUCTIBLE, ce qu'il est toujours permis d'admettre ; mais il est aisé de reconnaître que, si la fraction, sans être réduite à *ses moindres termes*, était telle, que les facteurs 2 et 5 ainsi que les autres facteurs qui composent le *dénominateur* n'entrassent pas *de la même manière* dans le numérateur, la propriété lui serait également applicable.

Applications.

333. Prenons pour applications des deux propriétés que nous venons d'établir, les fractions suivantes :

$$\frac{11}{13},\quad \frac{132}{37},\quad \frac{21}{143},\quad \frac{19}{52},\quad \frac{41291}{4625},\quad \frac{19}{640}.$$

Les *trois premières*, dont les dénominateurs ne renferment aucun des deux facteurs 2 et 5, donnent lieu aux fractions décimales *périodiques simples*.

$$0,846153\;846153\ldots,\quad 3,567\;567\ldots,\quad 0,146853\;146853\ldots.$$

Les *trois dernières*, ayant respectivement pour *dénominateurs*

$$13\times 2^2,\quad 37\times 5^3,\quad 13\times 2\times 5^2\ldots,$$

donnent lieu aux fractions décimales *périodiques mixtes*,

$$0,36\;538461\;538461\ldots,\quad 8,927\;783\;783\ldots,\quad 0,02\;923076\;923076\ldots,$$

dont la première période commence, pour chacune, après le nombre de chiffres décimaux indiqué par le plus haut exposant des facteurs 2 et 5.

§ IV. — MÉTHODES ABRÉGÉES POUR LA DIVISION ET L'EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE.

Méthode abrégée pour la division.

334. On peut, pour la *division*, comme pour la *multiplication* (voir les nos **197** et suivants), employer une *méthode abrégée* lorsque le dividende et le diviseur sont composés d'un grand nombre de chiffres.

Mais, comme cette méthode exige, pour être complétement exposée, des développements qui ne sauraient trouver place ici, nous nous bornerons à donner une idée de la manière d'opérer.

A cet effet, nous commencerons par remarquer que la recherche du quotient de la division de deux *fractions décimales* avec un degré d'approximation *déterminé*, peut toujours être ramenée à la recherche du quotient de la division de deux *nombres entiers*, à moins d'*une unité* près.

En effet, soit, par exemple, proposé d'évaluer à 0,001 près le quotient de la division de

1234,569 *par* 27,35894.

On doit d'abord, conformément à la règle du n° **169**, placer *deux* zéros à la droite du dividende, ce qui ramène l'opération à la division des deux nombres entiers,

123456900 et 2735894.

Puis, comme on veut obtenir le quotient avec trois décimales, on peut tout d'abord (n° **171**) placer *trois* nouveaux zéros à la droite du dividende, et effectuer la division, sauf à *séparer ensuite trois chiffres décimaux* vers la droite de la *partie entière* du quotient.

La question est ainsi ramenée à chercher le quotient de

123456900000 *divisé par* 2735894,

en ne tenant compte que de la *partie entière* de ce quotient.

Nous sommes donc conduit à exposer la règle à suivre pour la division *abrégée* de deux *nombres entiers*.

Nous verrons ensuite ce qu'il y a à faire pour opérer sur deux *nombres décimaux*.

355. Cette *règle*, *principalement fondée* sur ce que, d'après le *procédé ordinaire*, la détermination de chacun des chiffres du quotient ne dépend, le plus communément, que des *deux* ou *trois* premiers chiffres à gauche du dividende, et du *premier* ou des *deux premiers* chiffres à gauche du diviseur, peut s'énoncer ainsi :

Supprimez sur la droite du dividende AUTANT *de chiffres*, MOINS DEUX, *qu'il y en a dans le diviseur; faites ensuite la division de la partie à gauche, par le diviseur*, comme à l'ordinaire; s'il n'y a point de reste, *mettez à la suite du quotient* AUTANT *de zéros que vous avez supprimé de chiffres dans le diviseur;*

Mais s'il y a un reste, ainsi que cela arrive ordinairement, *divisez ce reste par le diviseur*, abstraction faite du *dernier* chiffre à droite de ce diviseur; *toutefois*, dans la multiplication du nouveau diviseur par le chiffre obtenu au quotient, *ayez soin d'ajouter la retenue que donne le produit du chiffre supprimé*, *par le chiffre du quotient* (*voir* ce qui a été fait au n° **198**, pour la multiplication abrégée);

Divisez, ensuite, le nouveau reste par le diviseur, abstraction faite des *deux derniers* chiffres à droite (en tenant compte de l'observation précédente, pour la multiplication du nouveau diviseur par le chiffre du quotient);

Continuez ces divisions successives, en supprimant, A CHAQUE DIVISION, *un chiffre sur la droite du diviseur*, et *arrêtez l'opération quand il ne reste plus au diviseur que les deux premiers chiffres à gauche.*

Afin de faire bien comprendre cette manière d'opérer, nous mettons en regard, dans l'exemple suivant, le *procédé ordinaire*, et la *méthode abrégée :*

Procédé ordinaire.

```
54034705678 9046 | 2786459
26170115         | 193918897
 10919846
  25604697
   5265668
   24792099
    25004270
     27125984
      20478536
        973323
```

Méthode abrégée.

```
5403470567 | 89046 | 2786459
26170115           | 1939 | 18897
 10919846
  25604697
    526566
    247920
     25004
      2713
       206
        12
```

L'opération à gauche étant faite d'après le procédé ordinaire, les explications suivantes ne concernent que la seconde opération.

Conformément à la règle qui vient d'être exposée, on sépare *cinq* chiffres sur la droite du dividende, puisqu'il y en a *sept* dans le diviseur ; et l'on divise la partie à gauche par le diviseur comme à l'ordinaire, ce qui donne pour les *quatre* premiers chiffres du quotient, 1939, et pour reste, 526566.

Cela fait, on *barre* le dernier chiffre 9 du diviseur, et l'on divise 526566 par 278645 ; le quotient est 1, par lequel on multiplie le diviseur en ajoutant 1 au chiffre des unités du produit, pour avoir égard au 9 *supprimé* dans le diviseur ; puis, on soustrait le produit du reste 526566, ce qui donne le nouveau reste 247920.

Barrant un second chiffre à la droite du diviseur, on divise 247920 par 27864, et l'on retranche du dividende le produit de 27864 par le quotient 8, augmenté des quatre unités de *retenue* que donnerait la multiplication par 8 du second chiffre *barré*, 5.

On arrive ainsi à un *troisième* reste, 25004, que l'on divise par 2786 (après avoir *barré* le troisième chiffre à droite, 4, du diviseur). Le nouveau quotient est encore 8 ; ce qui donne le *quatrième* reste 2713.

En continuant de la même manière, on obtient pour derniers quotients partiels 9 et 7.

Ce qui donne enfin 193918897 pour le quotient total ; et l'on voit que ce résultat est *le même* que celui qu'avait fourni le premier procédé.

356. Appliquons maintenant cette règle à deux *nombres décimaux* en reprenant l'exemple proposé au n° **354**, pour évaluer le quotient à 0,001 près :

Procédé ordinaire.		*Méthode abrégée.*		
12345690000	2735894	1234569	00000	2735894
14021140	45124	140212		45124
3416700		3418		
6808060		682		
13362720		135		
2419144		26		

Ayant d'abord ramené l'opération à celle de deux nombres *entiers*, on remarque que les *sept* chiffres du dividende, restant après la suppression d'*autant* de chiffres *moins deux* qu'il y en a dans le diviseur, ne contiennent pas le diviseur.

Il faut alors *barrer*, TOUT D'ABORD, le dernier chiffre 4 du diviseur, et diviser 1234569 par 273589.

Puis, on continue l'opération en appliquant *la règle*. Étant ainsi parvenu au quotient 45124, on le ramène à sa valeur en séparant (n° **161**) trois chiffres *décimaux*, et l'on obtient ainsi

$$45,124,$$

pour le quotient *demandé* à moins de 0,001 près.

Nous n'insisterons pas davantage sur ce genre d'opération qu'il convient de n'employer qu'avec réserve (*).

Méthode abrégée pour l'extraction de la racine carrée.

357. Lorsqu'on a obtenu *plus de la moitié* des chiffres de la partie entière de la racine carrée d'un nombre, une simple *division* suffit pour donner les chiffres suivants.

Désignons, en effet, par N le nombre dont on demande la racine et supposons que la *partie entière* doive renfermer $(2n+1)$ chiffres.

Appelons a l'ensemble des $(n+1)$ premiers chiffres à gauche, considérés avec leur *valeur relative*, b le nombre qui *complète* la racine et dont la *partie entière* est exprimée par les n chiffres à droite ; on a l'égalité

$$N = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

(*) On peut, du reste, consulter, à ce sujet, un *opuscule* de M. GUY, ancien officier d'artillerie.

La question a été aussi particulièrement traitée dans le *Cours d'analyse* de FOURIER.

d'où, retranchant a^2 des deux membres, et divisant par $2a$,

$$\frac{N - a^2}{2a} = b + \frac{b^2}{2a}.$$

Cela posé, comme, par hypothèse, la *partie entière* de b ne renferme que n chiffres, on a nécessairement

$$b < 10^n \quad \text{et} \quad b^2 < 10^{2n}.$$

D'un autre côté, a étant considéré avec sa *valeur relative*, est exprimé par $(2n+1)$ chiffres dont les n derniers à droite sont des *zéros*, d'où il résulte

$$a, \quad \text{et } \textit{à fortiori}, \quad 2a > 10^{2n}.$$

Donc $\frac{b^2}{2a}$ est un nombre *plus petit* que 1, et, par suite, le quotient exprimé par $\frac{N - a^2}{2a}$ diffère de b d'une quantité *moindre que l'unité.*

D'où l'on déduit la RÈGLE SUIVANTE :

Après avoir obtenu PLUS DE LA MOITIÉ *des chiffres de la racine, divisez* LE RESTE $N - a^2$, *auquel vous êtes parvenu, par le double du nombre que forment ces chiffres déjà trouvés, pris* AVEC LEUR VALEUR RELATIVE.

La partie entière du quotient forme l'ensemble des chiffres de la racine qui restent à déterminer.

La racine étant ainsi trouvée *à moins d'une unité près*, on peut (nº **210**) reconnaître si elle exprime la *racine cherchée* EN MOINS OU EN PLUS, et obtenir l'approximation *à moins d'une* DEMI-UNITÉ *près.*

Soit, POUR EXEMPLE, $N = 4735678956$.

Les *trois premiers* chiffres trouvés par le procédé ordinaire sont

$$688;$$

le *reste,* $N - a^2$, a pour expression

$$2238956.$$

Divisant ce nombre par $2a$, ou 137600 (d'après le procédé particulier du nº **58**), on trouve pour la *partie entière du quotient,*

$$16.$$

Donc 68816 est la *racine demandée.*

Ce qu'on peut vérifier en formant le carré de 68816, qui retranché du nombre proposé donne pour reste 37100, nombre *moindre que* $2 \times 68816 + 1$ (nº **205**).

L'inspection de *ce reste* montre, d'ailleurs (nº **210**), que le nombre 68816 exprime la racine *par défaut* et à *moins d'une demi-unité près.*

N. B. — Le reste 37100 peut être obtenu plus promptement que par l'élévation au carré de 68816.

Il suffit évidemment, pour cela, de retrancher du *reste*, $N - a^2$ ou 2238956, la *somme* des deux parties restantes du plus grand carré contenu dans N, savoir : le *double produit* de 68800 par 16 et le *carré* de 16.

Nous allons avoir à faire usage de cette remarque.

358. Pour faire bien apprécier tout le parti qu'on peut tirer de *cette méthode*, supposons qu'on veuille évaluer la racine carrée de 4735678956 *en décimales*.

Il faut, à cet effet (n° **217**), écrire à la suite du reste 37100, DEUX FOIS AUTANT de *zéros* que l'on veut avoir de décimales, et continuer l'opération comme s'il s'agissait d'un nombre entier.

Or les *cinq* chiffres de la racine déjà trouvés donnent, par l'application de la *méthode abrégée*, le moyen d'en déterminer *quatre autres*, qui seront précisément les *quatre premiers* chiffres *décimaux*.

On est ainsi conduit à diviser le nombre 37100, suivi de *huit* zéros, par le *double* de 68816, ou 137632, suivi de *quatre* zéros, ou, ce qui revient au même, à diviser 37100, suivi *seulement* de *quatre* zéros, par 137632.

Effectuant cette *opération* par la *méthode abrégée* de la division (n° **355**), on trouve pour *quotient*

$$2695;$$

et l'on a ainsi

$$\sqrt{4735678956} = 68816,2695 \text{ à } 0,0001 \textit{ près.}$$

Afin de vérifier ce résultat sur lequel semblent peser deux causes d'erreur, savoir : 1° la fraction qu'on néglige en substituant à la *vraie valeur* de b la *partie entière* du quotient $\dfrac{N - a^2}{2a}$; 2° l'emploi de la *méthode abrégée de la division*, on peut, pour plus de simplicité, d'après le *N. B.* du numéro précédent, *former le double produit* de 688160000 par 2695 et le *carré* de 2695, puis *retrancher* la *somme* des deux nombres ainsi obtenus, du nombre 371000000000.

Ces calculs effectués donnent pour résultat

$$810336975,$$

nombre *plus petit* que le *double* de 688162695, mais *plus grand que* cette racine.

On est donc *certain* d'avoir la *racine demandée*.

Remarquons encore qu'une *nouvelle division* de 810336975 suivie de *huit* zéros, par 2 *fois* 688162695, suffirait pour donner *huit* chiffres *de plus* à la racine, c'est-à-dire, EN TOUT, *douze* chiffres décimaux d'*approximation*.

359. En appliquant *ce procédé* à la détermination des *seizes pre-*

mières décimales de $\sqrt{2}$, on trouverait

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356237309 50.$$

Pour parvenir à ce résultat, on commence par déterminer *trois* chiffres au moyen du procédé ordinaire, et l'on obtient ensuite, par *trois divisions successives*, les *quatorze* autres chiffres, y compris l'entier 1, en passant d'abord de trois à *cinq* chiffres, puis de cinq à *neuf* chiffres, et enfin de neuf à *dix-sept* chiffres.

Nota. — Il existe également pour l'*extraction de la racine cubique* une *méthode abrégée*, fondée sur la formule

$$N = (a+b)^3 = a^3 + 3a^2.b + 3a.b^2 + b^3;$$

mais elle est peu usitée.

§ V. — OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES APPROXIMATIFS.

On a vu qu'en effectuant les diverses opérations de l'Arithmétique sur des nombres *entiers* ou *fractionnaires exacts*, on peut toujours obtenir le résultat, soit *exactement*, soit avec tel *degré d'approximation* que l'on veut.

Mais, si l'on est conduit à appliquer ces mêmes opérations à des nombres qui ne sont que des résultats *approximatifs*, on conçoit que l'erreur résultant de la quantité négligée pour chaque nombre doit se reporter sur le *résultat final* en raison de la nature de l'opération.

Nous allons voir quelle est, dans ce cas, pour chaque espèce d'opération, l'approximation qu'on peut obtenir.

Addition et soustraction.

360. Sans entrer, pour ces deux opérations simples, dans la discussion des différents cas qui peuvent se présenter, nous nous bornerons à raisonner sur des exemples particuliers, afin de donner une idée de la manière dont on peut apprécier l'*erreur* qui doit affecter le *résultat*.

Supposons que l'on ait à ajouter ensemble 23 logarithmes ou *compléments* de logarithmes donnés par les Tables de CALLET (l'emploi des *compléments* se rapporte ici aux soustractions qui peuvent être à exécuter); en d'autres termes, que l'on ait à faire une addition de 25 nombres *approximatifs* dont le *dernier* chiffre peut être en erreur d'un *demi dix-millionième*.

En admettant, comme cas le plus défavorable, que toutes les erreurs soient dans *le même sens*, par *défaut* ou par *excès*, il est clair que la *limite de l'erreur totale* a pour expression AUTANT DE DEMI-UNITÉS de l'ordre du *dernier* chiffre, QU'IL Y A de nombres à ajouter, c'est-à-dire 25 *demi dix-millionièmes*, ou 0,00000125.

L'erreur peut donc, dans ce cas, affecter les *deux derniers* chiffres du *résultat* exprimé en *dix-millionièmes*.

Il suit de là que, dans la recherche du nombre correspondant à ce résultat, l'emploi de la proportion (n° **323**) serait sans objet; mais alors l'approximation serait évidemment moins grande que celle qu'on obtient en opérant sur *un* logarithme donné.

C'est pour corriger, autant que possible, cette *cause d'erreur* que, dans les applications logarithmiques, notamment celles qui se rapportent aux calculs d'*intérêt composé* ou d'*annuité*, on a recours à la partie des Tables de CALLET où les logarithmes sont donnés avec 18 ou 20 décimales.

361. APPLICATION. — On demande en INTÉRÊT COMPOSÉ *la valeur de* 15000 *francs au bout de* 30 *ans, à* $4\frac{1}{2}$ *p.* $\frac{0}{0}$ *par an.*

La formule du n° 356 donne

$$A = 15000\,(1,045)^{30};$$

d'où

$$\log. A = \log. 15000 + 30 \log. 1,045.$$

On a donc ici à multiplier un logarithme par 30, ou, en d'autres termes, à faire l'addition de 30 logarithmes *égaux*, et à ajouter au résultat le logarithme de 15000.

Pour être certain que l'*erreur* relative à ce calcul ne portera que sur le 7^e chiffre décimal, voici comment il convient d'opérer :

Prenant dans la *grande Table* le logarithme de 1,045 avec 10 chiffres décimaux, on trouve

$$\log. 1,045 = 0,0191162904$$

d'où

$$30 \log. 1,045 = 0,573488712$$

Ce résultat est exact jusqu'au 8^e chiffre décimal inclusivement.

Prenant dans la Table *ordinaire* le logarithme de 15, qui a 8 chiffres décimaux, on obtient également

$$\log. 15000 = 4,17609126$$

Somme. $4,749579972$

ou, négligeant les *deux* derniers chiffres et forçant le 7^e d'*une unité*, $4,7495800$

L'*erreur commise* est alors *moindre que* une demi-unité de l'ordre du 7^e chiffre décimal.

Le logarithme le *plus voisin* dans la Table est 5740

et correspond à 56179. Différence 60

$$\text{Différence tabulaire } 78; \quad \frac{60}{78} = 0,76;$$

donc

$$A = 56179^f\,76^c.$$

Multiplication.

362. Nous considérerons d'abord deux nombres *décimaux*, et nous verrons ensuite comment la théorie s'étend au cas de deux nombres *entiers* pris pour facteurs.

Appelons A et B les deux nombres donnés, et *supposons* que chacun d'eux soit *en erreur de moins d'une demi-unité* de l'ordre de son *dernier* chiffre décimal.

[Cette *supposition* pouvant toujours (n° 168) être faite, nous la conserverons invariablement pour tous les nombres sur lesquels nous nous proposerons d'opérer, dans tout le cours de cette théorie.]

Si l'on admet (ce qui est le cas le plus défavorable) que les deux *erreurs* soient dans le *même sens*, *en moins* par exemple, les deux facteurs *complets*, ou, pour mieux dire, les *limites* de ces facteurs pourront se représenter ainsi :

$$A + \frac{1}{2} \text{ unité de l'ordre du } \textit{dernier} \text{ chiffre de A};$$

$$B + \frac{1}{2} \text{ unité de l'ordre du } \textit{dernier} \text{ chiffre de B}.$$

Or le produit de ces deux expressions (*) se compose (n° 48) de *quatre* parties, savoir :

$$A \times B, \quad A \times \frac{1}{2}, \quad B \times \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{4},$$

les fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ étant ici des *fractions de l'unité d'un ordre décimal* déterminé par les ordres respectifs du *dernier* chiffre décimal des deux facteurs.

Donc, en négligeant la *petite fraction* $\frac{1}{4}$, on a pour la *limite de l'erreur totale :*

$\frac{1}{2}$A unités de l'ordre du *dernier* chiffre de A, *divisé par l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de décimales dans* B, PLUS $\frac{1}{2}$B unité de l'ordre du *dernier* chiffre de B, *divisé par l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de décimales dans* A.

(*) Nous supposons, pour plus de simplicité, que les erreurs soient dans le *même sens* et *par défaut*; mais le raisonnement serait absolument le même si ces erreurs étaient en *sens différents* et *par défaut* ou *par excès*; seulement, on aurait alors à appliquer la règle de formation du produit de deux quantités $(a \pm b)$ et $(c \pm d)$, les expressions *générales* des *limites* de A et de B étant, à proprement parler, $A \pm \frac{1}{2}$, et $B \pm \frac{1}{2}$.

PREMIER EXEMPLE. — Nombres donnés : 32,470463 et 8,70245.
Limite de l'erreur :

$$\frac{1}{2}\,32{,}470463 : 100000, \text{ ou } \frac{16235231}{1000000\ 00000}, \text{ ou } 0{,}00016235231$$

$$\textit{plus}\ \frac{1}{2}\,8{,}70245 : 1000000, \text{ ou } \frac{435122}{100000\ 000000}, \text{ ou } 0{,}00000435122$$

Total..... 0,00016670353

(La *petite fraction* négligée est $\frac{1}{4}$ de 0,00000000001.)

On voit que l'*erreur* peut se reporter jusqu'au *quatrième* chiffre décimal, et qu'ainsi l'on ne doit compter que sur les *trois premiers* chiffres décimaux.

D'où il suit qu'en appliquant à ces deux nombres la *méthode abrégée* (n° **197**), on devra se proposer de déterminer, à *un millième* près seulement, la valeur du produit, et l'on trouvera pour résultat

282,573 à 0,001 près.

DEUXIÈME EXEMPLE. — Nombres donnés : 0,0001083 et 0,05836.
Limite de l'erreur :

$$\frac{1}{2}\,0{,}0001083 : 100000, \text{ ou } \frac{541}{10000000\ 00000}, \text{ ou } 0{,}00000000541$$

plus

$$\frac{1}{2}\,0{,}05836 : 10000000, \text{ ou } \frac{2918}{10000000\ 00000}, \text{ ou } 0{,}00000002918$$

Total..... 0,00000003459

Le produit peut donc être calculé avec *huit* chiffres décimaux.

REMARQUE I. — Lorsque l'un des deux nombres donnés exprime une *valeur exacte*, la *limite* d'*erreur* se réduit à la *moitié du facteur exact, divisée par l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de décimales dans le facteur approximatif.*

Car alors la *limite du facteur exact*, A par exemple, est ce *facteur lui-même*, et, par suite, le *produit* ne se compose plus que de *deux* parties,

$$A \times B \quad \text{et} \quad A \times \frac{1}{2},$$

la fraction $\frac{1}{2}$ étant une fraction de l'ordre du *dernier* chiffre de B.

Soient les nombres donnés : 45,036 et 6,3048, dont le premier est supposé *exact*.

Limite de l'erreur :

$$\frac{1}{2}\cdot 45{,}036 : 10000 = \frac{22518}{10000000} = 0{,}0022518.$$

On ne devrait donc chercher la valeur du produit qu'à moins de *un centième près*.

REMARQUE II. — Si on a à multiplier un nombre *approximatif* par lui-même, la *limite de l'erreur* est évidemment, dans ce cas, le NOMBRE LUI-MÊME *divisé par l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres décimaux dans ce nombre*.

Donc, *le nombre des chiffres du produit sur lesquels* IL N'EST PAS PERMIS *de compter, est égal au nombre des chiffres du* NOMBRE DONNÉ.

Soit, pour exemple, le nombre 1,949036 (*voyez* le n° **191**).

Limite de l'erreur :

$$1,949036 : 1000000 = 0,000001949036.$$

On ne doit donc prendre que les *cinq* premiers chiffres *décimaux ;* et le nombre des chiffres sur lesquels *il n'est pas permis* de compter est *sept*.

363. Supposons maintenant qu'on ait à opérer sur deux nombres *entiers*, A et B, dont le *dernier* chiffre soit *en erreur* de moins d'une *demi-unité*.

Pour étendre à ces nombres la théorie que nous venons de développer, il suffit d'observer que le *dernier* chiffre de chaque nombre exprimant alors des *unités simples*, on doit substituer, dans les raisonnements, l'expression d'*unité simple* à celle d'*unité de l'ordre du dernier chiffre décimal*, et que, par suite, dans les quantités

$$A \times \frac{1}{2}, \quad B \times \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{4},$$

qui donnent l'expression de la *limite de l'erreur*, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ sont des fractions, non plus *de l'unité d'un certain ordre décimal*, mais bien de l'*unité simple*.

Pour les deux nombres 5783694 et 83758, la PARTIE de la *limite d'erreur* qu'il suffit de considérer, est

$$\frac{1}{2} \cdot 5783694 = 2891847;$$

en sorte que l'on ne pourrait pas compter sur les chiffres de l'ordre *inférieur* aux *dizaines de millions*.

La *méthode abrégée* (n° **199**) donnerait pour résultat 844431, à moins de *cinq millions* près *en excès*.

En général, la PARTIE PRINCIPALE de la *limite d'erreur* étant nécessairement donnée par le *plus grand* des deux facteurs proposés, le chiffre des *plus hautes* unités de ce facteur marque le *degré d'approximation* qu'on peut obtenir.

Division.

364. Il y a lieu de distinguer *trois* cas principaux :

Ou le dividende *seul* est *en erreur*,

Ou le diviseur *seul* est *fautif*,

Ou bien, les deux termes sont en *erreur*,

L'erreur étant, dans tous les cas, supposée de *moins d'une demi-unité* de l'ordre du *dernier* chiffre à droite du nombre *fautif*.

Pour cette opération, contrairement à ce qui a été fait pour la multiplication, nous considérerons en *premier lieu* des nombres *entiers*, et nous passerons ensuite facilement aux nombres *décimaux*.

365. Premier cas. — Le dividende *seul* est *approximatif*.

Désignons encore par A et B les deux nombres donnés.

Le quotient de la division de A par B sera évidemment en erreur de moins de $\frac{1}{2}$: B, soit par *excès*, soit par *défaut*.

Ainsi, la *limite de l'erreur* a pour expression *numérique*,

$$\frac{1}{2B},$$

fraction qui, *convertie en décimales*, fait connaître le degré d'exactitude sur lequel on peut compter dans la détermination du quotient $\frac{A}{B}$.

Soient, par exemple, les deux nombres 547 et 4839.

On a pour *limite de l'erreur*,

$$\frac{1}{9678};$$

cette fraction, convertie en décimales, donne évidemment 0,0001 . . . ; d'où il suit que le *quotient* de la division des deux nombres proposés ne peut être réputé *exact* qu'à *moins d'un millième près ;*

Ce qu'on peut vérifier ainsi, en supposant que l'*erreur* du *dernier* chiffre de 547 soit *par défaut* :

$$547 : 4839 = 0,11304\ldots,$$
$$547,5 : 4839 = 0,1131\ldots.,$$

résultats qui diffèrent de *moins d'un millième*, c'est-à-dire de moins de l'unité du *troisième* ordre décimal.

Soient encore les nombres 25649 et 6847.

La *limite de l'erreur* étant $\frac{1}{13694}$, ou 0,00007, . . . , on peut compter que le quotient est *exact* à moins de l'unité de l'ordre du *quatrième* chiffre décimal.

On a, en effet, l'erreur étant ici supposée *en excès :*

$$25649 : 6847 = 3,74602,$$
$$25648,5 : 6847 = 3,74594,$$

résultats qui diffèrent entre eux de 0,00008, c'est-à-dire de *moins de un dix-millième.*

Le *degré d'exactitude sur lequel on peut compter pour le quotient est donc, dans ce* PREMIER CAS, *marqué par le nombre des chiffres, moins un, du* DOUBLE *du diviseur.*

366. Considérons maintenant des *nombres décimaux.*

En premier lieu, si les deux nombres proposés ont *le même* nombre de chiffres décimaux, on supprime la virgule (n° **166**), et l'on est conduit, en raisonnant comme précédemment, à appliquer la *règle* qui vient d'être donnée.

Soient les deux nombres 4,8395 et 0,9763.

La suppression de la virgule ramenant leur division à celle de deux nombres *entiers*, 48395 et 9763, la *limite de l'erreur* est

$$\frac{1}{19526},$$

et, par suite, le quotient peut être évalué avec *quatre* décimales.

En second lieu, lorsque le nombre des chiffres décimaux est *différent* dans les deux termes, on prépare les nombres donnés de manière que le *dividende*, en devenant un nombre *entier*, conserve pour *dernier* chiffre, le chiffre *en erreur;* puis on applique la règle aux deux nombres ainsi préparés.

1°. Soient les nombres donnés : 43,5637 et 2,53.

Leur division se ramène à celle de 435637 *par* 25300.

Le *double* du *diviseur* étant 50600, nombre de *cinq* chiffres, on peut pousser l'opération jusqu'aux *dix-millièmes* inclusivement.

2°. Nombres *donnés :* 23,29 et 47,364.

Nombres *préparés :* 2329 et 4736,4.

Le *double* du *diviseur* est 9472,8, nombre dont la *partie entière* n'a que *quatre* chiffres; d'où il suit que le quotient ne peut être évalué qu'à *un millième* près.

3°. Nombres donnés : 37,5 et 0,2983.

Nombres préparés : 375 et 2,983.

Le *double* du *diviseur*, 5,966, n'a qu'*un seul* chiffre à sa *partie entière;* d'où il suit que le quotient ne saurait être évalué qu'*à moins d'une demi-unité près*, et qu'en conséquence on ne pourrait compter sur l'exactitude d'*aucun* chiffre décimal.

367. SECOND CAS. — Le diviseur *seul* est *approximatif.*

Appelons toujours A et B les deux nombres *entiers* donnés, puis désignons par *m* le nombre de chiffres dont se compose le nombre B, qui peut être *fautif* d'une demi-unité (en *plus* ou en *moins*), et par q le quotient de la division de A par B, qu'il s'agit de calculer avec un *nombre convenable* de chiffres décimaux.

On a évidemment

$$q \text{ ou } \frac{A}{B} < \frac{A}{B-\frac{1}{2}}, \quad \text{mais} > \frac{A}{B+\frac{1}{2}};$$

d'où, en appelant E l'*erreur commise*, lorsqu'on prend soit $\frac{A}{B+\frac{1}{2}}$, soit $\frac{A}{B-\frac{1}{2}}$, pour la valeur de q, on déduit

$$E < \frac{A}{B-\frac{1}{2}} - \frac{A}{B+\frac{1}{2}}, \quad \text{ou} \quad < \frac{A}{B^2-\frac{1}{4}}$$

(cette seconde expression étant le résultat des opérations *effectuées* sur la première).

Mais comme on a

$$\frac{A}{B^2-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{A}{B}}{B-\frac{1}{4B}} = \frac{q}{B-\frac{1}{4B}},$$

il est clair que l'*erreur* sera *moindre* que l'unité du *dernier* chiffre du quotient tant que l'on aura $q < B$.

Or, pour que cette condition soit remplie, il faut que q ou la *partie cherchée* du quotient renferme AU PLUS m chiffres (nombre des chiffres du diviseur), ou même seulement $(m-1)$ chiffres, si les m chiffres de ce quotient formaient un nombre *égal* ou *supérieur* au diviseur.

Il suit de là que, dans le SECOND CAS, *le degré d'exactitude sur lequel on peut compter pour le quotient est marqué par le nombre,* m, *des chiffres du diviseur*, ou *seulement*, *par* CE NOMBRE MOINS UN, *suivant que les* m *premiers chiffres du quotient forment un nombre inférieur* ou bien *égal ou supérieur au diviseur.*

PREMIER EXEMPLE. — Soit à diviser 547, *valeur exacte*, par 8769, nombre *approximatif*.

La division étant d'abord rendue possible par l'addition d'un nombre convenable de zéros à la droite du dividende, on reconnaît, à l'inspection des deux nombres, que le *premier* chiffre du quotient doit être *inférieur* au *premier* chiffre, 8, du diviseur, et que, par suite, les *quatre premiers* chiffres de ce quotient formeront eux-mêmes un nombre *plus petit* que le diviseur.

Il est donc permis de prendre pour le quotient *quatre* chiffres ; et comme, d'ailleurs, ce quotient ne peut avoir ni *unités simples*, ni *dixièmes*, il se trouvera *exact* jusqu'à la *cinquième* décimale inclusivement.

On obtient ainsi 0,06237 pour le quotient, à *moins de* 0,00001 *près*.

Deuxième exemple.— Nombres donnés : 547 et 1548.

Le *premier* chiffre *significatif* du quotient évalué en décimales, étant nécessairement *plus grand* que le *premier* chiffre 1 du diviseur, on ne doit ici prendre que *trois* chiffres ; et comme ce *premier chiffre significatif* exprime des *dixièmes*, le résultat sera obtenu à 0,001 près.

368. Opérons maintenant sur des *nombres décimaux*.

Dividende : 23,479; *Diviseur :* 534,7896.

On ramène la division à celle des deux nombres

234790 et 5347896

(le chiffre *en erreur* du diviseur devant rester le *dernier* chiffre à droite).

Le *premier* chiffre *significatif* du quotient étant *plus petit* que le *premier* chiffre, 5, du diviseur, on peut prendre *autant* de chiffres qu'il y a de chiffres dans le diviseur, et, par conséquent, ce quotient, n'ayant, d'ailleurs, ni *unités simples* ni *dixièmes*, peut être évalué avec *huit* chiffres *décimaux*.

On obtient ainsi : 0,04390324 *à moins de* 0,00000001 *près;* résultat qu'on peut vérifier en prenant successivement pour diviseur, sans changer le dividende,

534,78955; 534,7896; 534,78965,

et appliquant la méthode abrégée de la division du n° **336**.

N. B. — Nous conseillons d'appliquer ce mode de *vérification* aux exemples précédemment traités.

369. Troisième cas. — Le dividende et le diviseur sont *tous deux approximatifs*.

Il est d'abord évident que, dans ce cas, *le nombre des chiffres du quotient sur lesquels il est permis de compter, ne saurait surpasser le* plus petit *des deux nombres* auxquels conduisent les règles établies pour les deux premiers cas. Reste à savoir si ce *plus petit* nombre exprime toujours le véritable nombre de chiffres qu'on peut prendre pour le quotient cherché.

Soient encore deux nombres *entiers* A, B, supposés *fautifs* dans leurs derniers chiffres à droite; et considérons les hypothèses les plus défavorables, celle d'un dividende A *fautif* par *excès* et d'un diseur B *fautif* par *défaut*, ou celle de A *fautif* par *défaut* et de B *fautif* par *excès*.

On peut affirmer que le quotient $\frac{A}{B}$ est compris entre les deux nombres

$$\frac{A-\frac{1}{2}}{B+\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{A+\frac{1}{2}}{B-\frac{1}{2}};$$

d'où il suit qu'en prenant l'une de ces expressions pour la valeur du quotient, on commet une *erreur moindre* que la *différence* qui existe entre elles.

Si l'on appelle D cette différence exprimée par

$$\frac{A+\frac{1}{2}}{B-\frac{1}{2}} - \frac{A-\frac{1}{2}}{B+\frac{1}{2}},$$

on trouve, en effectuant les calculs et réduisant,

$$D=\frac{A+B}{B^2-\frac{1}{4}},$$

ou divisant haut et bas par B,

$$D=\frac{A}{B}+1:B-\frac{1}{4B},$$

et, par suite,

$$D=\frac{A}{B}+1:B,$$

abstraction faite de la petite fraction $\frac{1}{4B}$.

C'est cette dernière expression de D qui doit servir à faire reconnaître si le *plus petit* des deux nombres fournis par les deux règles précédentes est bien le *véritable* nombre de chiffres dont il est permis de tenir compte au quotient.

Faisons quelques applications à des nombres *entiers*, puis à des nombres *décimaux*.

Premier exemple. — 67239 à diviser par 4657.

D'après la première règle, on pourrait prendre *trois* chiffres décimaux; mais la seconde n'en peut donner que *deux*; car la *partie entière* du quotient ayant *deux* chiffres, il n'en reste plus que *deux* à déterminer pour former les *quatre premiers* chiffres de ce quotient, qui est alors, abstraction faite de la virgule, *plus petit* que le diviseur.

On ne doit donc calculer ce quotient qu'avec *deux* chiffres décimaux *au plus*, et l'on obtient

$$14,43.$$

L'expression $\frac{A}{B} + 1 : B$ devient alors $15,43 : 4657$, ou $\frac{1543}{465700}$, fraction qui, convertie en décimales, donne, $0,003\ldots$

Donc $14,43$ exprime bien le quotient *à moins* de $0,01$ près.

Deuxième exemple. — $359,3749$ à diviser par $2,47936$.

Pour appliquer la première règle, il faut ramener (n° **366**) la division à celle des deux nombres 3593749 et $24793,6$; et cette règle donnerait *quatre* chiffres décimaux.

D'après la seconde, puisque le diviseur a *six* chiffres, et que la *partie entière* du quotient doit en avoir *trois*, il ne reste que *trois* décimales sur lesquelles on puisse compter.

On ne doit donc calculer le quotient qu'à $0,001$ près, et l'on trouve $143,736$.

Comme on a, alors, $\frac{A}{B} + 1 : B = \frac{144736}{247936000} = 0,0005,\ldots$, on peut compter sur les *trois* chiffres décimaux.

Troisième exemple. — Soit à diviser log. 15 par log. 7.

On a, d'après les Tables,

$$\log. 15 = 1,17609126, \quad \text{et} \quad \log. 7 = 0,84509804;$$

d'où

$$\frac{\log. 15}{\log. 7} = \frac{117609126}{84509804}.$$

La première règle donnerait *huit* chiffres décimaux sur lesquels on pourrait compter ; mais la seconde n'en donnerait que *sept*, puisque le quotient doit avoir *un* chiffre à sa *partie entière*.

On ne doit donc calculer ce quotient qu'avec *sept* décimales *au plus* ; et l'on a pour résultat $1,3916625$.

D'ailleurs, $\frac{A}{B} + 1 : B = \frac{23916625}{845098040000000} = 0,00000002\ldots$; ainsi l'on peut compter sur les *sept* premiers chiffres décimaux.

Quatrième exemple. — Soit à déterminer x dans l'égalité

$$3^x = 1968 \quad (\textit{voir} \text{ le n° } \mathbf{341}).$$

On a d'abord

$$x \times \log. 3 = \log. 1968;$$

d'où

$$x = \frac{\log. 1968}{\log. 3} = \frac{3,2940251}{0,47712125}.$$

Pour appliquer la première règle, il faut mettre l'expression de x

sous la forme

$$x = \frac{32940251}{4771212,5};$$

ce qui donne *six* chiffres décimaux à obtenir au quotient.

Mais la seconde règle n'en peut donner que *cinq;* car le premier chiffre du quotient est 6, qui, d'ailleurs, forme la *partie entière*.

Ainsi ce quotient ne doit être calculé qu'avec *cinq* décimales au plus.

On trouve pour résultat, 6,90395.

Par suite, $\frac{A}{B} + 1 : B = \frac{790395}{47712125 0000} = 0,000001 \ldots$; donc on peut prendre les *cinq* premiers chiffres décimaux.

La troisième règle est, comme on le voit., la base de la résolution des équations *exponentielles* par approximation.

N. B. — On a pu remarquer que, dans les différents exemples qui viennent d'être traités, c'est la *seconde* règle qui détermine le *véritable* nombre de chiffres qu'on doit prendre au quotient.

On conçoit, en effet, que l'*erreur* qui porte sur le diviseur, doit avoir une plus grande influence sur le résultat de la division que celle qui affecte le dividende.

Extraction de la RACINE CARRÉE.

370. Il nous reste encore, pour compléter la théorie des nombres *approximatifs*, à traiter de l'extraction de la racine carrée de ces sortes de nombres.

Mais, auparavant, il est nécessaire d'établir sur la *multiplication de deux nombres* un nouveau principe qui consiste en ce que :

Le produit de deux facteurs entiers contient autant de chiffres, ou *autant de chiffres moins* UN, selon les cas, *qu'il y en a dans les deux facteurs;* en sorte que si m et n expriment les nombres respectifs des chiffres de deux facteurs A, B, le nombre des chiffres de leur produit P est toujours égal à

$$m + n, \quad \text{ou} \quad m + n - 1.$$

En effet, le produit P pouvant être considéré comme le dividende, A et P comme le diviseur et le quotient d'une division *exacte*, il arrive de deux chose l'une :

Ou les m premiers chiffres à gauche de P forment un nombre *égal* ou *supérieur* à A,

Ou bien ils forment un nombre inférieur à A.

Dans ce DERNIER cas, puisqu'il faudrait (n° 36), pour former le *premier dividende partiel*, prendre les $(m+1)$ *premiers* chiffres à gauche du dividende, ce qui donnerait le *premier* chiffre du quotient, et que chacun des $(n-1)$ autres chiffres de ce quotient est successivement donné par chacun des chiffres du dividende, placés à la droite du premier dividende partiel, il s'ensuit nécessairement que le *nombre total* des chiffres du dividende, ou de P, est exprimé par

$$m+1+n-1, \quad \text{ou} \quad m+n.$$

Dans le PREMIER cas, les m *premiers* chiffres à gauche du dividende suffisant pour former le premier dividende partiel, le *nombre* total des chiffres du dividende, ou de P, est

$$m+n-1; \qquad\qquad c.\ q.\ f.\ d.$$

Lorsque A et B contiennent *le même* nombre de chiffres, n, l'expression du *nombre total* des chiffres de P est $2n$ ou $2n-1$.

N. B. — Comme, dans une multiplication à effectuer, on ne peut savoir d'avance quels seront les *premiers chiffres à gauche* du produit, on ne saurait, non plus, dire d'avance si le *nombre total* des chiffres de ce produit sera $(m+n)$ ou $(m+n-1)$. Dans la division, au contraire, le dividende-produit étant donné, le *nombre* des chiffres du *quotient* peut être déterminé *à priori*, ainsi que nous l'avons établi au n° **37**.

371. Ce principe posé, cherchons l'*approximation* qu'on peut obtenir en appliquant aux nombres *approximatifs* le procédé de l'extraction de la *racine carrée*.

Considérons d'abord un nombre *entier* quelconque A, dont le *dernier* chiffre à droite soit en erreur de *moins* d'*une demi-unité*, et concevons que sa racine ait été développée en un nombre *indéfini* de chiffres décimaux.

Appelons n le *nombre* CHERCHÉ *des chiffres* de cette racine sur lesquels on peut compter, et p le *nombre total* des chiffres du CARRÉ, employés à la détermination de ces n chiffres, dont le *dernier* est supposé en erreur de *moins d'une demi-unité*.

Il peut se présenter *deux* cas : ou le nombre des chiffres de A est *impair*, ou il est *pair*.

PREMIER CAS. — Comme il résulte de la nature même du procédé de l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier (n° **207**), que les premiers chiffres à gauche de la racine forment, dans ce cas, un nombre *moindre* que les n premiers chiffres à gauche du carré, on a nécessairement (n° **370**)

$$p=n+n-1$$

ou bien, en désignant par p' le nombre des chiffres de A, donnés *à priori*, et par p'' le nombre des *zéros* écrits à la droite de A pour la détermination des n premiers chiffres de la racine,

$$p'+p''=n+n-1.$$

Observons maintenant qu'en multipliant par lui-même le nombre formé par les n chiffres *pris pour la racine*, on obtient un produit qui renferme n chiffres sur lesquels *il n'est pas permis* de compter (n° **362**, 2e rem.).

D'un autre côté, le *nombre* des chiffres *fautifs* de ce même produit est exprimé par $p'' + 1$, puisque le dernier chiffre de A est, par hypothèse, en *erreur*, et que, par suite, les p'' zéros écrits à la droite de A sont également *fautifs*.

Ainsi l'on a $$n = p'' + 1;$$

et l'égalité précédente devient

$$p' + p'' = p''' + 1 + n - 1; \quad \text{d'où} \quad n = p'.$$

SECOND CAS. — Comme les n premiers chiffres à gauche, de la racine, forment, alors, un nombre *plus grand* que les n premiers chiffres à gauche, du carré, on a entre p et n la relation

$$p = n + n,$$

ou, remplaçant p par $p' + p''$, et remarquant que n et $p'' + 1$ sont, comme dans le premier cas, deux expressions *équivalentes* du nombre des chiffres *fautifs* du *carré* du nombre formé par les n chiffres *pris pour la racine*, on obtient l'égalité

$$p' + p'' = p'' + 1 + n; \quad \text{d'où} \quad n = p' - 1.$$

Donc, le *nombre des chiffres sur lesquels on peut compter*, dans le développement de la racine carrée du nombre entier A en *décimales, est égal au nombre des chiffres de* A, ou *à ce nombre moins* UN, suivant que A renferme un nombre IMPAIR, ou un nombre PAIR de chiffres.

N. B. — Cette règle ne souffre aucune modification tant que le nombre des chiffres de A est *impair*.

Mais si ce nombre est *pair*, on démontre que, dans certains cas déterminés, on peut compter sur un nombre de chiffres égal au *nombre même* des chiffres de A, c'est-à-dire *plus grand d'une unité* que le nombre donné par la règle.

Nous nous bornons à *mentionner* ce fait, dont la démonstration exige des transformations *algébriques* assez compliquées, et qui n'a, d'ailleurs, pas d'importance pour l'objet que nous nous proposons ici.

372. PREMIER EXEMPLE. — *Soit à extraire la racine carrée* du nombre *approximatif* 57806.

Ce nombre ayant *cinq* chiffres, sa racine peut être calculée avec *cinq* chiffres; et comme la *partie entière* doit en avoir *trois*, il s'ensuit que cette racine peut être obtenue à 0,01 *près seulement*.

On obtient ainsi

$$\sqrt{57806} = 240,428 = 240,43.$$

Deuxième exemple. — *Extraire la racine carrée de* 73854926.

La racine peut, d'après la règle, être calculée avec *sept* chiffres ; et comme la *partie entière* en doit avoir *quatre*, on doit compter sur les *trois* premières décimales.

On a donc

$$\sqrt{73854926} = 8593,889.$$

Opérons maintenant sur des fractions décimales.

Troisième exemple — *Calculer* $\sqrt{8,256479}$.

En faisant abstraction de la virgule, on a le nombre 8256479 dont la racine peut être, d'après la règle, calculée avec *sept* chiffres ; et puisque la *partie entière* de cette racine ne doit en avoir qu'*un seul*, il s'ensuit que la racine peut être évaluée avec *six* décimales.

On trouve ainsi

$$\sqrt{8,256479} = 2,873409.$$

Quatrième exemple.— *Calculer* $\sqrt{473,56296}$.

Pour effectuer l'opération, on commence par rendre le nombre des chiffres décimaux *pair* (n° **218**) en plaçant un 0 à la droite du nombre proposé, et l'on supprime la virgule.

Mais comme le nombre proposé a *huit* chiffres, la racine doit, d'après la règle, avoir *sept* chiffres sur lesquels il est permis de compter.

D'ailleurs, la *partie entière* en a *deux ;* donc cette racine peut être obtenue avec *cinq* décimales, ou à 0,00001 près.

On trouve ainsi

$$\sqrt{473,59296} = 21,76150.$$

373. *Remarque.* — Il résulte évidemment de la règle du n° **371**, et des deux derniers exemples qui viennent d'être traités, que, *toutes les fois que le nombre proposé est* PLUS GRAND *que l'unité, on peut prendre pour la racine,* AU MOINS *autant de décimales qu'il y en a dans ce nombre.*

Mais, *quand le nombre proposé est* PLUS PETIT *que l'unité, ou qu'il a* 0 *pour* PARTIE ENTIÈRE, *le nombre des décimales de la racine, sur lesquelles il est permis de compter,* PEUT *être* MOINDRE QUE *celui des décimales du nombre donné.*

Exemples.— 1°.— Soit à calculer $\sqrt{0,238946}$.

On peut, d'après la règle, compter sur *cinq* chiffres pour la racine ; et, comme la partie entière doit être 0, le nombre des *décimales* sur lesquelles il est permis de compter est également de *cinq*, c'est-à-dire *une* de moins que n'en renferme le nombre proposé.

2°. — Soit à *extraire la racine carrée* de 0,00291.

Ce nombre ne devant donner à sa racine que *trois* chiffres sur lesquels on puisse compter, savoir : 53,9, comme il faut diviser le résultat par 1000, cette racine est

$$0,0539,$$

et renferme *une* décimale *de moins* que le nombre donné.

ÉVALUATION APPROXIMATIVE DES RADICAUX CARRÉS QUI SE RECOUVRENT.

374. C'est surtout pour ces sortes d'expressions que la règle du n° **371**, ainsi que la première partie de la remarque précédente, trouve une application vraiment *utile*.

Premier exemple. — On demande d'évaluer

$$\sqrt[4]{659}, \quad \text{ou (n° 241)} \quad \sqrt{\sqrt{659}},$$

avec *trois* décimales au résultat.

On devrait, conformément à la règle du n° **217**, placer à la droite du nombre donné, soit immédiatement, soit au fur et à mesure, *douze* zéros, afin d'obtenir d'abord *six* chiffres décimaux pour la *première* racine carrée, puis *trois* pour la *seconde*.

Mais on va voir que cela est inutile.

En effet, si l'on extrait la racine carrée de 659 à moins de $\frac{1}{2}\,0,001$ près (n° **216**), on obtient

$$25,671, \text{ à } \frac{1}{2}\,0,001 \text{ près, } \textit{en plus}.$$

Appliquant à ce dernier nombre la règle du n° **371**, ainsi que la remarque du n° **373**, on a pour la *deuxième* racine,

$$5,066.$$

Cette dernière valeur est exacte *à moins* de 0,001 près, ainsi qu'on peut s'en assurer en formant la quatrième puissance de 5,066. On reconnaîtrait que ce résultat est en erreur par *défaut;* car on trouverait

$$(5,066)^4 = 658,659\ldots.$$

Second exemple. — Evaluer $\sqrt{13+\sqrt{5}}$ à 0,0001 près.

On a d'abord

$$\sqrt{5} = 2,2361 \text{ à } \frac{1}{2}\,0,0001 \text{ près, en } \textit{plus}.$$

Ajoutant 13 à ce résultat, ce qui donne 15,2361, dont la racine peut (n° **373**) être calculée avec *quatre* chiffres décimaux, on obtient

$$\sqrt{13+\sqrt{5}} = \sqrt{15,2361} = 3,9034.$$

Ce résultat est *exact* à moins de 0,0001 près; mais on ne peut savoir si l'erreur est en *plus* ou en *moins* qu'en *formant* le carré de 3,9034; le résultat de la *première* racine ayant été d'abord *vérifié*.

Comme $(3,9034)^2 = 15,2365,\ldots$, on doit conclure que 3,9034 est le résultat par *excès*.

375. La règle du n° **371** supposant que la *première* racine carrée a été obtenue *à moins* d'*une demi-unité* d'un certain ordre décimal, et ne donnant pour la *seconde* racine à extraire, qu'une *approximation à moins d'une unité* du même ordre, on conçoit que le procédé à suivre lorsqu'on a *trois* radicaux $\sqrt{\sqrt{\sqrt{}}}$ qui se recouvrent, doit subir quelques *modifications*, autrement on n'obtiendrait pas le *degré d'approximation* qu'on veut avoir.

Pour nous faire mieux comprendre, prenons, *pour exemple*, $\sqrt[8]{23}$ ou $\sqrt{\sqrt{\sqrt{23}}}$, dont on demande la valeur *à* 0,0001 *près*.

Si l'on voulait appliquer le procédé général du n° **217**, il faudrait *faire suivre* le nombre 23 de *trente-deux* zéros, puis extraire, à la manière ordinaire, *trois* racines carrées successives.

Mais la règle du n° **371** conduit *au même* résultat bien plus promptement de la manière suivante :

Cherchons d'abord la *racine carrée* de 23, non avec *quatre*, mais avec *cinq* chiffres décimaux.

Il vient

$$\sqrt{23} = 4,79583, \text{ à moins de } \frac{1}{2}\, 0,00001 \text{ près};$$

d'où l'on déduit ensuite

$$\sqrt{4,79583} = 2,18993 \text{ à } 0,00001 \text{ près},$$

et, par suite,

$$\sqrt{4,79583} = 2,1899 \text{ à } \frac{1}{2}\, 0,00001 \text{ près};$$

après quoi l'on obtient

$$\sqrt{2,1899} = 1,4798 \text{ à } 0,0001 \text{ près (n° 371)}.$$

On trouve, en effet, au moyen des logarithmes,

$$\log \sqrt[8]{23} = \frac{1}{8} \log 23 = 0,1702159 = \log 1,4798.$$

Toute la *modification* consiste à *prendre* la première racine avec *un chiffre de plus* qu'on n'en demande au résultat *final*.

Si l'on avait à calculer *quatre* radicaux se recouvrant, il faudrait d'abord calculer la *première* racine carrée avec *deux* chiffres décimaux de plus qu'on ne veut en avoir au résultat.

Et ainsi de suite.

Prenons pour *dernier exemple* l'expression

$$\sqrt{29+\sqrt{15-\sqrt{7}}},$$

dont il s'agit de trouver la valeur *à* 0,001 *près*.

On a d'abord

$$\sqrt{7}=2,6458 \text{ à } \frac{1}{2}\, 0,0001 \text{ près en } plus;$$

d'où

$$15-\sqrt{7}=15-2,6458=12,3542 \text{ à } \frac{1}{2}\, 0,0001 \text{ près en } moins,$$

et

$$\sqrt{12,3542}=3,5147=3,515 \text{ à } \frac{1}{2}\, 0,001 \text{ près en } plus,$$

$$29+\sqrt{15-\sqrt{7}}=32,515 \text{ à } \frac{1}{2}\, 0,001 \text{ près en } plus.$$

Donc enfin

$$\sqrt{29+\sqrt{15-\sqrt{7}}}=5,702 \text{ à } 0,001 \text{ près.}$$

N. B. — C'est sur un pareil procédé que se trouve fondée la détermination du *rapport de la circonférence au diamètre*, lorsqu'on emploie la *méthode des isopérimètres*.

NOTES.

NOTE I.

DES DIFFÉRENTS SYSTÈMES DE NUMÉRATION.

Definitions et principe de numération.

1. On a vu comment, avec *dix* caractères ou *chiffres*, on parvient à représenter tous les nombres, en partant de ce PRINCIPE DE CONVENTION, que tout chiffre placé à la gauche d'un autre exprime des unités *dix* fois *plus grandes* que celles de cet autre chiffre.

Il est facile de reconnaître que, dans tout système *analogue* de numération où l'on fait usage de caractères placés les uns à la gauche des autres et recevant ainsi une *valeur relative* de convention, on peut, avec *plus* ou *moins* de dix caractères, dont le ZÉRO fait partie, représenter également tous les nombres.

On appelle BASE d'un système de numération le *nombre* des caractères employés; et le système reçoit la dénomination de

binaire, *ternaire*, *quaternaire*, *quinaire*,...,

suivant que les chiffres employés sont au nombre de

deux, *trois*, *quatre*, *cinq*,....

Ces chiffres sont respectivement :

1 et 0, 1, 2 et 0, 1, 2, 3 et 0, 1, 2, 3, 4 et 0,...,

c'est-à-dire ceux du système *décimal* depuis 0 jusqu'au chiffre qui précède immédiatement LA BASE, tant que CETTE BASE est *inférieure* à DIX.

Mais si la BASE est *supérieure* à DIX et qu'elle soit DOUZE, par exemple (auquel cas le système est appelé *duodécimal*), il faut avoir recours à *deux* signes supplémentaires pour exprimer

dix et *onze*,

et l'on peut, pour cela, faire usage des lettres grecques

α et β.

Moyen d'écrire tous les nombres dans un système quelconque.

2. Voyons maintenant comment *on peut exprimer tous les nombres*

entiers possibles dans le système *septenaire*, par exemple, avec les *sept* chiffres

1, 2, 3, 4, 5, 6, 0.

Remarquons d'abord que, dans ce système, le PRINCIPE DE CONVENTION consiste en ce que *tout chiffre placé à la gauche d'un autre exprime des unités* SEPT *fois plus grandes que celle de cet autre chiffre.*

Cela posé, les *six premiers nombres*, représentés par les *six* chiffres *significatifs* du système, forment ce qu'on appelle les unités du *premier ordre.*

En ajoutant 1 au nombre 6, on obtient *sept*, ou l'unité du *second ordre*, qui s'écrit

10,

en vertu du *principe de convention.*

Si l'on remplace dans 10 le chiffre 0 successivement par les *six* chiffres *significatifs*, on a

11, 12, 13, 14, 15, 16,

qui représentent les nombres

huit, *neuf*, *dix*, *onze*, *douze*, *treize.*

L'addition d'une nouvelle *unité* au nombre de 16 donne une *seconde* unité du *second ordre* qu'on réunit à la *première* exprimée par 10, et l'on arrive ainsi à

20,

pour représenter le nombre QUATORZE (ou 2 fois *sept*).

En continuant de la même manière, on parvient à la suite

21, 22,..., 26, 30,..., 36, 40,..., 50,...,

pour exprimer les nombres

quinze, *seize*,..., *vingt*, *vingt-un*,..., *vingt-sept*, *vingt-huit*,..., *trente-cinq*,....

Mais, sans aller plus loin, nous pouvons facilement démontrer qu'un nombre entier quelconque étant supposé écrit en chiffres, le nombre immédiatement *supérieur d'une* unité peut être également écrit à l'aide des *sept* chiffres du système.

En effet, quel que soit ce nombre *déjà écrit*, si l'on *ajoute* UN à son *dernier* chiffre à *droite*, il se présente deux cas :

Ou ce *dernier* chiffre est *inférieur* à 6, et alors on le remplace par le chiffre qui vient *immédiatement après*, dans le système, sans toucher aux autres chiffres à gauche;

Ou bien, ce *dernier* chiffre est 6, et, en l'augmentant *d'une unité*, on obtient *sept* ou une unité du *second ordre*, qu'on doit reporter sur le chiffre qui est *à sa gauche*, en remplaçant le chiffre 6 lui-même par un o.

Mais ce *chiffre à gauche* pouvant être lui-même *inférieur* ou *égal* à 6, on est conduit, par un raisonnement semblable, à le remplacer, soit par le chiffre supérieur *d'une unité*, soit par un o, et, dans ce second cas, à reporter une unité du *troisième ordre* sur le *second chiffre à gauche*.

On raisonnerait et l'on opérerait de même sur ce *second chiffre à gauche*, puis sur le *troisième*, et ainsi de suite.

Donc, etc.

Comme, d'ailleurs, des raisonnements tout à fait analogues s'appliqueraient à tout autre système, on en conclut que *tout nombre entier peut être écrit dans un système quelconque avec les caractères en nombre* LIMITÉ *qui le composent.*

Expressions des unités de différents ordres et formule générale pour représenter un nombre quelconque.

3. Le principe de CONVENTION consistant en ce que, dans tout système dont la BASE (ou le *nombre* des chiffres employés) est b, chaque chiffre placé à la *gauche* d'un autre exprime des unités b fois plus *grandes* que celles de cet autre chiffre, conduit aux deux propositions suivantes :

PREMIÈREMENT, *les unités de différents ordres* à partir du *premier*, ou, en d'autres termes, l'*unité* simple et toutes les puissances de la base sont exprimées, dans tous les systèmes, par

$$1, \quad 10, \quad 100, \quad 1000, \quad 10000, \quad 100000, \ldots.$$

SECONDEMENT, si l'on désigne respectivement par

$$a', \quad a'', \quad a''', \quad a^{\text{IV}}, \quad a^{\text{V}}, \ldots,$$

les nombres d'*unités* du

$$1^{\text{er}}, \quad 2^{\text{e}}, \quad 3^{\text{e}}, \quad 4^{\text{e}}, \ldots, \text{ ordre},$$

que doit contenir un nombre quelconque N dans un système dont la base est b (laquelle est nécessairement *plus grande* que a', a'', a''', a^{IV}, $a^{\text{V}}, \ldots$), on a, pour représenter en *chiffres* le nombre N, la formule

$$(\text{A}) \qquad N = a' + a''.b + a'''.b^2 + a^{\text{IV}}.b^3 + \ldots.$$

Car le chiffre a'', par exemple, qui, dans le nombre écrit

$$(\ldots a^{\text{IV}}\, a'''\, a''\, a'),$$

est placé à la *gauche* de a', exprime, d'après le principe de convention, des unités b fois plus *grandes* que celles du chiffre a'.

De même, le chiffre a''' écrit à la *gauche* des deux autres, a'', a', exprime des unités b fois plus *grandes* que celles du chiffre a'', par suite, des unités $b \times b$ ou b^2 fois plus *grandes* que celles du chiffre a'; et ainsi de suite.

Écrire, dans un système donné, un nombre énoncé en langage ordinaire ou écrit dans un autre système, et, INVERSEMENT, *énoncer en langage ordinaire un nombre écrit en chiffres dans un système quelconque.*

4. L'accord qui existe entre la nomenclature *actuelle* des nombres et la manière de les représenter dans le système *décimal*, permet de les écrire facilement et, pour ainsi dire, sous la dictée, en langage ordinaire, comme aussi de résoudre la question *inverse* consistant à énoncer en langage ordinaire un nombre écrit en chiffres.

Il en serait de même pour tout système de numération qui aurait été précédé d'une *nomenclature spéciale* et appropriée à ce système.

Mais si l'on proposait, par exemple, d'écrire dans le système *septenaire* le nombre

TROIS CENT SOIXANTE-DIX-NEUF,

rapporté au système *décimal*, il serait difficile de reconnaître *à priori* quels sont les chiffres propres à exprimer successivement les unités du 1er, 2e, 3e,... ordre *septenaire* que ce nombre renferme.

On est ainsi conduit à résoudre la question suivante :

Un nombre étant énoncé en langage ordinaire, ou *écrit en chiffres dans le système décimal*, *traduire ce même nombre dans le système de b chiffres.*

La formule (A) du n° 3 fournit un moyen simple de résoudre cette question, c'est-à-dire de déterminer successivement les chiffres $a', a'', a''', \ldots$

En effet, elle peut être ainsi transformée :

$$N = a' + b\,(a'' + a'''.b + a^{\text{IV}}.b^2 + a.b^3 + \ldots),$$

ou bien

$$N = a' + b.N' \;(N' \text{ représentant } a'' + a'''.b + \ldots);$$

ce qui prouve que N est égal au *produit* de la multiplication d'un nombre N′ par b, *augmenté* d'un nombre $a' < b$.

Donc, déjà, a' est le *reste* de la division de N par b, *base* du second système.

Pareillement, la nouvelle formule

$$N = a'' + a'''.b + a^{\text{IV}}.b^2 + a^{\text{V}}.b^3 + \ldots$$

peut être mise sous la forme

$$N' = a'' + b.N'' \ldots (N'' \text{ représentant } a''' + a^{\text{IV}}.b + \ldots),$$

d'où l'on voit, à cause de $a'' < b$, que a'' est le *reste* de la division N′ par b; et ainsi de suite.

De là, cette RÈGLE GÉNÉRALE :

Pour obtenir les chiffres du 1^er^, 2^e^, 3^e^, . . . ordre du nombre N dans le système dont la base est b,

Divisez N par la base b (ces deux nombres étant supposés d'abord écrits dans le système *décimal*) ; vous obtenez ainsi un quotient N′, et *un reste* qui exprime le *nombre* d'unités du 1^er^ *ordre ;*

Divisez ensuite le quotient obtenu, N′, par b ; ce qui donne un second quotient N″, et *un reste* qui exprime le *nombre* d'unités du 2^e^ *ordre ;*

Divisez le second quotient N″ par b; vous obtenez un troisième quotient N‴, et *un reste* qui exprime les unités du 3^e^ ordre;

Continuez cette série d'opérations jusqu'à ce que vous soyez arrivé à un quotient MOINDRE QUE b ; ce *dernier quotient* exprime le *nombre* d'unités de l'*ordre le plus élevé*, et le *reste* correspondant est le chiffre des unités de l'*ordre immédiatement inférieur* à celui-ci ;

Enfin, *écrivez* les différents *restes* les uns à la gauche des autres, à partir du *premier* obtenu, et à la gauche du *dernier reste* ainsi écrit, le *dernier quotient* obtenu.

Reprenons maintenant le nombre

Trois cent soixante-dix-neuf, ou plutôt 379, écrit dans le système *décimal :*

Le 7^e^ de 379 est 54, et il reste 1;
Le 7^e^ de 54 est 7, et il reste 5;
Le 7^e^ de 7 est 1, et il reste 0.

Nous trouvons ainsi :

1051

pour ce nombre écrit dans le système *septenaire*.

Soit encore le nombre

2374

a écrire dans le système *quinaire :*

Le 5^e^ de 2374 est 474, reste 4;
Le 5^e^ de 474 est 94, reste 4;
Le 5^e^ de 94 est 18, reste 4;
Le 5^e^ de 18 est 3, reste 3.

Donc le nombre cherché est

33444.

Prenons, pour dernier exemple, le nombre

17549

à écrire dans le système *duodécimal* dont les chiffres sont exprimés par 0, 1, 2, 3, . . . , 9, α, β :

Le 12^e^ de 17549 est 1462, reste 5;
Le 12^e^ de 1462 est 121, reste α ou *dix;*
Le 12^e^ de 121 est 10, reste 1.

On a donc, pour le nombre cherché,

$$\alpha 1 \alpha 5.$$

5. On peut vérifier facilement ces résultats en résolvant la question *inverse* qui a pour objet :

Un nombre étant écrit dans le système dont la base est b, *le traduire dans le système décimal.*

La solution de cette question est *explicitement* fournie par la formule (A) du n° 3.

Multipliez les chiffres a', a'', a''', . . ., supposés traduits dans le système *décimal*, respectivement *par les puissances* 1 (ou b^0); b^1, b^2, b^3, b^4, . . . de la base b, également traduite dans le système *décimal*, puis *faites la somme* de tous ces produits ;

Vous obtenez ainsi le nombre *cherché*.

On a donc, pour le *premier* exemple :

$$1051 = 1 + 5 \times 7 + 0 \times 7^2 + 1 \times 7^3 = 1 + 35 + 0 + 343 = 379;$$

pour le *second*,

$$\begin{aligned} 33444 &= 4 + 4 \times 5 + 4 \times 25 + 3 \times 125 + 3 \times 625 \\ &= 4 + 20 + 100 + 375 + 1875 = 2374; \end{aligned}$$

et, pour le *troisième*,

$$\begin{aligned} \alpha 1 \alpha 5 &= 5 + 10 \times 12 + 1 \times 144 + 10 \times 1728 \\ &= 5 + 120 + 144 + 17280 = 17549. \end{aligned}$$

6. Enfin, on peut se proposer cette question générale :

Un nombre quelconque étant écrit dans le système dont la base est b, *le traduire dans le système dont la base est* c.

Le moyen le plus simple de résoudre cette question, consiste à *passer d'abord* du système b au système *décimal;* puis à *traduire le nombre ainsi obtenu* dans le système c.

Exemple. — Soit le nombre $2\beta 07\alpha$ écrit dans le système *duodécimal*, à traduire dans le système *quaternaire*.

On a d'abord (n° 5, Note)

$$\begin{aligned} 2\beta 07\alpha &= 10 + 7 \times 12 + 0 \times 144 + 11 \times 1728 + 2 \times 20736 \\ &= 10 + 84 + 0 + 19008 + 41472 = 60574. \end{aligned}$$

Pour passer de ce nombre au système *quaternaire*, on dit :

Le *quart* de 60574 est 15143, reste 2;
Le *quart* de 15143 est 3785, reste 3;
Le *quart* de 3785 est 946, reste 1;
Le *quart* de 946 est 236, reste 2;
Le *quart* de 236 est 59, reste 0;
Le *quart* de 59 est 14, reste 3;
Le *quart* de 14 est 3, reste 2.

Ainsi, le nombre demandé est

32302132,

résultat qu'on peut vérifier par la question *inverse*, c'est-à-dire en remontant du système *quaternaire* au système *duodécimal*.

N. B. — On pourrait résoudre *directement* la question précédente, en *opérant*, pour exécuter la transformation exigée, dans le système *duodécimal*.

La difficulté de cette manière de procéder provient du peu de concordance entre la numération *écrite* du système *duodécimal*, et la numération *parlée*, généralement reçue.

7. REMARQUE GÉNÉRALE. — Les propriétés des nombres sont, pour la plupart, indépendantes du système de numération, et celles qui semblent appartenir au système *décimal* en particulier, ont généralement leurs analogues dans les autres systèmes.

Nous allons indiquer quelques applications de cette observation.

Nombres jouissant de propriétés analogues à celles des nombres 9 *et* 11.

8. Dans un système quelconque dont la base est b, les nombres correspondant aux nombres 9 et 11 dans le système *décimal*, étant $b-1$ et $b+1$, on démontre

1°. Que, *lorsque la somme des chiffres d'un nombre quelconque, considérés avec leur valeur absolue, est divisible par* $b-1$, *ce nombre est lui-même divisible par* $b-1$;

2°. *Qu'un nombre quelconque est divisible par* $b+1$ *lorsque la* DIFFÉRENCE *entre la somme des chiffres de rang* IMPAIR *à partir de la droite et la somme des chiffres de rang* PAIR *est* 0 *ou un multiple de* $b+1$.

3°. Et que *le reste de la division d'un nombre par chacun des deux nombres particuliers* $b-1$ *et* $b+1$, *s'obtient*, POUR LE PREMIER, *à l'aide de la somme des chiffres pris avec leur valeur absolue, et*, POUR LE SECOND, *au moyen de la différence entre les deux sommes des chiffres de rang impair et des chiffres de rang pair*.

Nous nous bornons à *énoncer* ces propriétés, dont nous proposons la démonstration pour *exercice*, en faisant observer qu'elle se déduit aisément de la proposition établie au n° 3 de la Note, savoir : que, quel que soit le système de numération, *toutes les puissances* de la base peuvent être exprimées par la suite des nombres écrits dans ce système :

$$10, \quad 10^2, \quad 10^3, \quad 10^4, \quad 10^5, \ldots$$

L'ALGÈBRE fournit encore un autre moyen de démonstration fondé sur ce double principe :

1°. Que $b^m - 1$ est toujours divisible par $b - 1$, et divisible par $b + 1$, lorsque m est *pair* ;

2°. Que $b^m + 1$ est divisible par $b + 1$ lorsque m est *impair*.

Des fractions analogues aux fractions décimales.

9. Les fractions jouissant, dans un système quelconque de numération, de propriétés analogues à celles qui proviennent de la conversion des *fractions ordinaires* en fractions *décimales*, sont celles dont le dénominateur est égal à *une puissance* de la BASE du système.

Il résulte, en effet, de l'expression (n° 3, Note) des diverses puissances de la base d'un système quelconque, que, pour convertir une fraction ordinaire appartenant à ce système, en subdivisions de b en b fois plus petites que l'unité, il faut, conformément à la règle du n° 136, *multiplier le numérateur par b ou* 10 (c'est-à-dire *écrire un zéro à sa droite*), *et diviser le produit par le dénominateur*, ce qui donnerait au quotient des unités b fois plus petites que l'unité principale et un *reste ; écrire*, de même, *à la droite de ce reste un zéro et diviser le résultat par le dénominateur*, ce qui donnerait au quotient des unités b fois plus petites que les précédentes, ou b^2 fois plus petites que l'unité principale ; et ainsi de suite.

Ce principe posé, on en déduit, par des raisonnements absolument semblables à ceux qui ont servi pour établir les propriétés des *fractions décimales* provenant *des fractions ordinaires*, que *les fractions ordinaires, dans un système dont la base est b, étant converties en subdivisions de b en b fois plus petites que l'unité, donnent naissance à des fractions d'un nombre* LIMITÉ *ou* ILLIMITÉ *de chiffres*, PÉRIODIQUES SIMPLES OU MIXTES, et que *la composition du dénominateur de la fraction ordinaire, par rapport aux* FACTEURS QUI ENTRENT DANS LA BASE b, *suffit pour* CARACTÉRISER *ces diverses sortes de fractions.*

Nous proposons encore, pour exercice, de rechercher les énoncé et les démonstrations de ces propriétés.

NOTE II.

PROCÉDÉ PARTICULIER POUR CALCULER c DANS LA FORMULE $c=\sqrt{a^2+b^2}$, SANS EXTRACTION DE RACINE CARRÉE ; EN D'AUTRES TERMES, POUR CALCULER L'HYPOTÉNUSE D'UN TRIANGLE RECTANGLE, CONNAISSANT LES VALEURS NUMÉRIQUES DES DEUX CÔTÉS DE L'ANGLE DROIT.

1. Nous commencerons par développer ce procédé (*) sur des exemples particuliers ; après quoi, nous ferons voir quelles sont les considérations sur lesquelles il peut être fondé.

(Dans tous les exemples que nous allons traiter, nous ne formerons que *le carré* du *plus petit* nombre ; puis, nous effectuerons la *division* de ce carré par le *double* du *plus grand* nombre.)

PREMIER EXEMPLE.

Calculer l'expression $c=\sqrt{(47)^2+(249)^2}$.

$$\begin{array}{r} 47 \\ \underline{47} \\ 329 \\ \underline{188} \\ 2209 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2209 & 498 \\ \hline 201 & 4 \end{array}$$

$249+4$ est la *racine demandée*.
et 201 est le *reste* de l'opération.

Explication. — Après avoir obtenu le quotient 4 de la division de 2209, *carré* de 47, par 498 *double* de 249, on *multiplie* le diviseur 498 par 4, en *ayant soin d'ajouter au produit* le *carré* de 4, puis on soustrait le résultat du dividende.

On trouve ainsi pour *reste* 201.

La *partie entière de la racine demandée* est alors *le plus grand* nombre 249, *augmenté* du quotient 4, ou 253 ;

Et 201 est le *reste* de l'opération effectuée au moyen du procédé ordinaire de l'extraction de la racine carrée.

DEUXIÈME EXEMPLE.

$$c=\sqrt{(539)^2+(6847)^2}.$$

$$\begin{array}{r} 539 \\ \underline{539} \\ 4851 \\ 1617 \\ \underline{2695} \\ 290521 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 290521 & 13694 \\ \hline 16241 & 2 \\ \hline 2506 & 13734 \\ & \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6847 \\ 20 \\ 1 \\ \hline 6868 \end{array} \textit{racine demandée.}$$

Reste de l'extraction de la racine carrée, 2506.

(*) Ce procédé nous a été communiqué par le jeune calculateur GRANDEMANGE dont nous avons déjà parlé dans le cours du huitième chapitre (VOIR la note du

Explication. — Dans cet exemple, il y a *deux* divisions partielles à effectuer. Le premier quotient, 2, exprime des *dizaines*, que l'on place sous le chiffre des *dizaines* du diviseur : puis on effectue la multiplication de ce diviseur par 2, en ayant soin d'*ajouter* le *carré* de 2 au produit des *dizaines* par 2, en même temps que la *retenue* du produit précédent (laquelle est ici 0) ; et l'on soustrait ensuite le résultat du premier dividende partiel.

On obtient ainsi, pour second dividende partiel, 16241.

Quant au diviseur correspondant, ce n'est plus 13694 qu'il faut prendre, mais ce diviseur *augmenté* du *double* des 2 dizaines du quotient, ce qui donne 13734, par lequel on divise 16241.

Le nouveau quotient est 1, que l'on place au rang des *unités simples* sous le nouveau diviseur. Multipliant 13734 par 1 et *ajoutant* le carré de 1 au produit, on soustrait 13735 de 16241, et l'on a pour reste 2506.

On obtient ainsi 2506 pour le *reste* de l'extraction de la racine.

Quant à cette racine, elle est égale au *plus grand* nombre 6847 augmenté de 20 + 1, c'est-à-dire à 6868.

N. B. — On l'obtiendrait encore en *ajoutant* au dernier diviseur 12734, le double du dernier quotient 1, ce qui donnerait 13736, et prenant la *moitié* de ce dernier nombre.

TROISIÈME EXEMPLE.

$$c=\sqrt{(529)^2+(947)^2}.$$

529	279841	1894	
529	8044	1	947
4761	16721	2094	100
1058	1594	3	30
2645		2154	7
279841		7	1084 *racine cherchée.*

Reste de la racine à extraire, 1594.

Ici, l'on a *trois* opérations partielles à exécuter, mais en suivant toujours la marche indiquée dans les exemples précédents. Le tableau ci-dessus l'explique d'ailleurs suffisamment.

2. *Démonstration.* — Faute de raisonnements purement *arithmétiques*, on peut s'appuyer, pour la justification de ce procédé, sur la formule algébrique qui donne l'expression du *carré de la somme* de plusieurs nombres.

---

n° 347). Mais la difficulté qu'il éprouve à exprimer ses idées dans le langage ordinaire de la science, ne nous a pas permis de découvrir les considérations qui ont pu l'y conduire.

Soient $m, n, p, \ldots$ ces différents nombres, on a

$$(m+n+p+q+\ldots)^2 = m^2+n^2+p^2+q^2+\ldots$$
$$+2(mn+mp+mq+\ldots+np+\ldots);$$

c'est-à-dire que LE CARRÉ DE LA SOMME *de plusieurs nombres est égal à* LA SOMME DES CARRÉS *de ces nombres,* plus *le double de* LA SOMME DE TOUS LES PRODUITS *de ces mêmes nombres multipliés deux à deux.*

Cela posé, reprenons l'expression

$$c = \sqrt{a^2+b^2},$$

dans laquelle nous supposerons, pour fixer les idées, que l'on ait $b > a$.

Si l'on désigne par y la quantité qu'il faut ajouter à b pour obtenir la *partie entière* c' de la racine cherchée, et par r le *reste* de l'opération, on aura

$$c' = b+y, \quad c^2 = (b+y)^2 + r.$$

On a d'ailleurs

$$c^2 = a^2 + b^2;$$

donc, en égalant ces deux valeurs de c^2, on trouve

$$(b+y)^2+r, \quad \text{ou} \quad b^2+2by+y^2+r = a^2+b^2;$$

d'où, simplifiant et renversant l'ordre des deux membres,

(1) $$a^2 = 2by + y^2 + r.$$

Or, cette dernière égalité pouvant être mise sous la forme

$$\frac{a^2}{2b} = y + \frac{y^2}{2b} + \frac{r}{b},$$

nous amène déjà, pour obtenir y, à diviser a^2 par $2b$, ou le *carré* du plus petit nombre a par le *double* du plus grand b.

Mais il résulte aussi de l'égalité (1), qui revient à

(2) $$a^2 - (2by + y^2) = r,$$

que le quotient y que l'on aura obtenu, en divisant a^2 par $2b$, ne sera *convenablement* déterminé qu'autant que l'on aura pu *soustraire* de a^2 la *somme* que formerait le produit du diviseur $2b$ par ce quotient, et le carré de ce même quotient; auquel cas, le reste de cette soustraction sera précisément le *reste* r provenant de l'application du procédé ordinaire de l'extraction de la racine carrée, et la *partie entière* de cette racine, c', aura pour valeur $b+y$.

Pour arriver à cette détermination de la vraie valeur de y, il est nécessaire de distinguer *plusieurs* cas, suivant que y doit avoir *un, deux, trois, quatre, ...,* chiffres.

Examinons ces cas successivement.

Premier cas. — y *n'ayant qu'*un seul *chiffre*.

Le premier exemple du numéro précédent rentre dans ce cas ; et l'on a vu que le quotient 4 fourni par la division de 2209 par 498, était tel, qu'on a pu soustraire du dividende, non-seulement le produit du diviseur par 4, mais encore *le carré* de 4.

N. B. — Il arrive souvent que, dans ce premier cas lui-même, on est obligé de diminuer d'*une* ou de *plusieurs* unités le quotient obtenu d'abord.

Soit, pour exemple, à calculer $c=\sqrt{(37)^2+(73)^2}$.

$$37\times 37=1369 \qquad \begin{array}{r|l} 1369 & 146 \\ \hline \textit{reste}\quad 147 & \quad 8 \end{array} \quad 73+8=81 \textit{ racine demandée.}$$

En divisant 1369 par 146, on trouve d'abord 9 pour quotient; mais si, au produit de 146 par 9, ou 1314, on ajoute 81, *carré* de 9, on a 1395, nombre *plus grand* que le dividende; ainsi, il faut essayer 8.

Or, le produit de 146 par 8, augmenté de 64, *carré* de 8, donne un nombre qui *peut être soustrait* de 1369.

Donc le chiffre 8 doit être pris pour la valeur de y, et l'on a $73+8$, ou 81, pour la racine, et 147 pour le *reste* qu'on aurait obtenu en effectuant l'extraction de la racine carrée.

Cette remarque doit s'appliquer aux cas qu'il nous reste à examiner.

Deuxième cas. — y *étant exprimé par* deux *chiffres*, posons $y=y'+y''$, y' étant le chiffre des *dizaines*, considéré avec sa valeur relative, et y'' le chiffre des *unités simples*.

La formule (1) devient

$$a^2=2b(y'+y'')=(y'+y'')^2+r,$$

ou bien

$$a^2=2by'+y'^2+(2b+2y')y''+y''^2+r.$$

D'où l'on voit déjà que, pour obtenir les *dizaines* y' de la valeur de y, il faut, en prenant la *partie* de a^2 qui exprime l'*ensemble* des *dizaines*, et *divisant* cette partie par $2b$, choisir le quotient, *le plus grand possible*, qui soit *tel*, en même temps, qu'on puisse *retrancher* du premier dividende partiel, le produit de $2b$ par le quotient, *plus le carré* de ce même quotient.

Cette soustraction faite, si l'on appelle a'^2 le reste suivi des *unités simples* de a^2, l'égalité ci-dessus se réduit à

$$a'^2=(2b+2y')y''+y''^2+r;$$

et cette nouvelle expression démontre que, pour obtenir le chiffre y'' des *unités simples* de y, il faut, après avoir pris pour diviseur, non plus $2b$, mais $2b$ *augmenté* du *double* $2y'$ des *dizaines* déjà trouvées, *diviser* a'^2 par $2b+2y'$, en choisissant le quotient, le *plus grand possible* et *tel*, en même temps, qu'on puisse retrancher de a'^2 le produit du nouveau diviseur par le quotient, *plus le carré* de ce même quotient.

Cette nouvelle soustraction faite, le reste r, auquel on parvient, n'est autre chose que celui qu'on obtiendrait en effectuant *directement l'extraction de la racine carrée*. Quant à celle-ci, elle est égale à $b+y'+y''$, y' étant pris avec sa *valeur relative*.

TROISIÈME CAS. — *y étant exprimé par trois chiffres*. Soit posé $y=y'+y''+y'''$; y', y'' exprimant les chiffres des *centaines* et des *dizaines*, considérés avec leur *valeur relative*, y''' le chiffre des *unités simples*.

L'égalité (1) devient alors

$$a^2=2b(y'+y''+y''')+(y'+y''+y''')^2+r;$$

expression qui peut se changer en celle-ci :

$$a^2=2by'+y'^2+(2b+2y')y''+y''^2=(2b+2y'+2y'')y'''+y'''^2+r.$$

Or, l'inspection attentive de cette dernière égalité prouve : 1°. Que, pour obtenir les *centaines* y' de y, il faut *diviser* l'ensemble des *centaines* de a^2 par $2b$, en prenant un quotient *le plus grand possible*, et *tel* toutefois qu'on puisse *retrancher* de l'ensemble des *centaines* de a^2 le produit du diviseur par le quotient, *plus le carré* de ce quotient;

2°. Que, pour obtenir les *dizaines* y'', il faut former un *nouveau* diviseur, $2b+2y'$, composé du premier augmenté du *double* du quotient déjà trouvé, puis *diviser* l'ensemble des *dizaines* du reste a'^2 de la première soustraction, en prenant un quotient *le plus grand possible*, et *tel* toutefois encore qu'on puisse *retrancher* de l'ensemble des *dizaines* de a'^2 le produit du nouveau diviseur par le second quotient, *plus le carré* de ce même quotient;

3°. Que, pour obtenir le chiffre y''' des *unités simples*, il faut former un troisième diviseur, $2b+2y'+2y''$, composé du précédent *augmenté* du *double* du second quotient, puis opérer sur le reste de la seconde soustraction, et sur le troisième diviseur d'une manière analogue.

On conçoit que ces raisonnements peuvent s'étendre facilement au cas où y serait composé de *quatre*, *cinq*, . . ., chiffres.

Ainsi le procédé se trouve complétement démontré.

Voici le tableau des calculs pour le cas où y doit avoir *quatre* chiffres.

QUATRIÈME EXEMPLE.

$$c = \sqrt{(23759)^2 + (24196)^2}.$$

23759	564490081	48392	24196
23759	479620	9	9000
213831	99768	66392	700
118795	319661	7	10
166313	48397	67792	4
71277		1	33910 *rac. cherchée.*
47518		67812	
564490081		4	
		67820	
	la moitié...	33910 *racine cherchée.*	

Dans cet exemple, quoique les *cinq* premiers chiffres à gauche du dividende forment un nombre plus grand que le diviseur, et que, par suite, il semble devoir renfermer des *dizaines de mille,* il est facile de reconnaître qu'on ne pourrait retrancher de 56449 le produit de 48392 par 1, *plus le carré* de 1 *dizaine de mille.*

Ainsi, le premier quotient ne peut exprimer que des *unités de mille ;* ce premier quotient est 9.

L'ensemble des opérations à exécuter n'offre d'ailleurs aucune difficulté d'après le procédé exposé précédemment.

Le *reste* obtenu 48397 est celui que donnerait l'extraction de la racine carrée.

Quant à cette racine, elle se forme, comme on l'a vu, du plus grand nombre 24196, augmenté de 9000, *plus* 700, *plus* 10, *plus* 4.

Mais il y a un moyen plus expéditif d'y parvenir : il consiste à *ajouter au dernier diviseur* 67812 le *double* du dernier quotient 4, ce qui donne 67820, et à prendre la *moitié* de ce nombre.

On trouve ainsi 33910, comme par le premier moyen.

Cela s'explique suffisamment par la manière même dont les différents diviseurs ont été formés.

Cas particulier.

CINQUIÈME EXEMPLE.

$$c = \sqrt{(1803)^2 + (2009)^2}.$$

1803	32508.09	4018	2009
1803	4800 0	6	6000
5409	22 89	5218	90
14424		9	0
1803		3098	2699 *rac. cherchée.*
3250809		0	
		5398	
	la moitié..	2699 *racine cherchée.*	

Les deux premières opérations partielles s'exécutent comme à l'ordinaire. Mais, parvenu au reste 228, on abaisse à côté le chiffre suivant, 9, du dividende, ce qui donne 2289, qu'il faut ensuite *diviser* par le second diviseur 5218 *augmenté* du *double* de 9, ou par 5398. Et comme le nouveau dividende est *plus petit* que le nouveau diviseur, il s'ensuit que le dernier quotient est 0 ; donc la *moitié* de 5398, ou 2699, est la *racine cherchée*, et 2289 est le *reste* de l'extraction de la racine.

Cette observation est susceptible de s'appliquer, dans d'autres cas particuliers, aux différents quotients que fournit le procédé : ce sont les cas où quelques-uns des chiffres de la racine sont des *zéros*.

SIXIÈME EXEMPLE.

$$c=\sqrt{(261)^2+(348)^2}.$$

261	68121	696	
261	6041	8	348
261	000	856	80
1566		7	7
522		870	435 *racine exacte.*
68121	*la moitié.....*	435	

Ici la racine est exacte et égale à 435.

SEPTIÈME EXEMPLE.

$$c=\sqrt{(11)^2+(61)^2}\ldots\; a^2<2b.$$

121	122	*racine*, et 121 *reste*.
	0	
	61	

HUITIÈME EXEMPLE.

$$c=\sqrt{(25)^2+(319)^2}\ldots\; a^2<2b.$$

625	638	
	0	
	319	*racine*, et 625 *reste*.

3. Remarque I. — C'est pour plus de simplicité que l'on prend ordinairement pour *dividende* le *carré* du *plus petit* nombre ; mais rien n'empêcherait de prendre le *carré* du plus grand : seulement, on aurait plus d'opérations à exécuter ; c'est-à-dire que, dans ce cas, r serait composé généralement d'un plus grand nombre de chiffres.

Ainsi, soit, POUR EXEMPLE, à calculer,

$$c=\sqrt{(279)^2+(4997)^2}.$$

Voici le tableau des deux opérations mises en regard, les *carrés* des deux nombres étant d'abord formés :

77841	9994	24970009	558	
7834	7	67380	4	279
	10008	25740	8558	4000
la moitié...	5004	57849	7	700
racine cherchée		5834	9958	20
			2	5
			9998	5004 *rac. cherch.*
			5	
			10008	
		la moitié....	5004	

Si l'on prend pour dividende le *carré du plus petit nombre*, on n'a qu'une seule opération à exécuter; tandis qu'il en faut effectuer *quatre*, lorsqu'on prend le *carré du plus grand*.

Et ce qu'il y a de particulier dans cet exemple, c'est que le *premier* quotient obtenu exprime des *unités d'un ordre supérieur* aux plus *hautes unités* du premier diviseur. Du reste, les opérations s'exécutent de la même manière.

4. REMARQUE II. — En s'appuyant sur la précédente remarque, et réfléchissant sur les égalités qui ont servi de base à la démonstration que nous avons donnée du procédé, on peut juger qu'il suffit que l'un des deux nombres soumis au radical, $\sqrt{}$, soit *un carré*.

Il faut alors prendre pour *dividende* le nombre qui n'est pas un carré, et pour diviseur le double du nombre qui devrait être élevé au carré.

EXEMPLE.

$$c=\sqrt{11997+(829)^2}.$$

	11997	1658
reste	342	7
		1672
la moitié...		836 *racine carrée.*

Il n'y a, comme on le voit, *ni carré* à former, *ni racine carrée* à extraire, et *une seule opération* suffit pour conduire au résultat.

5. Cette remarque est surtout utile, en Algèbre, lorsque l'on a à

résoudre une équation du second degré dont le terme tout connu, transposé dans le second membre, est positif.

PREMIER EXEMPLE.

$$23x^2 - 539x = 47.$$

On a, d'après la formule connue,

$$x = \frac{539 \pm \sqrt{(539)^2 + 47.4.23}}{46},$$

ou, effectuant seulement le calcul $47 \times 4 \times 23$,

$$x = \frac{539 \pm \sqrt{(539)^2 + 4324}}{46},$$

$$\begin{array}{r|r} 4324 & 1078 \\ \hline 1081 & 3 \\ & \overline{1084} \end{array}$$

la moitié... 552 *racine carrée.*

Donc

$$x' = \frac{539 + 542}{46} = \frac{1081}{46} = 23\,\frac{1}{2},$$

$$x'' = \frac{539 - 542}{46} = -\frac{3}{46}.$$

DEUXIÈME EXEMPLE.

$$460\,x^2 - 5197\,x = 3876.$$

$$x = \frac{5197 \pm \sqrt{(5197)^2 + 3876.4.460}}{920}.$$

$$\begin{array}{r} 3876 \\ 1840 \\ \hline 155040 \\ 31008 \\ 3876 \\ \hline 7131840 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 71318.40 & 1039 \\ \hline 5354\;4 & 6 \\ \hline 700\;80 & 11594 \\ \hline 000\;00 & 4 \\ & \overline{11674} \\ & 6 \\ & \overline{11686} \end{array}$$

moitié.... 5843 *racine exacte.*

$$x = \frac{5197 \pm 5843}{920} = \frac{11040}{920} = 12 \textit{ racine positive.}$$

6. REMARQUE III. — Le procédé peut s'étendre aux expressions

$$\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}, \quad \sqrt{m^2 + n^2 + p^2 + q^2 \ldots};$$

mais alors on est obligé de former *à priori* les carrés de *deux*, de *trois*,... des nombres m, n, p,...; à moins que l'*un deux*, m^2 par exemple, ne soit un nombre donné, *carré* ou *non carré parfait;* auquel cas, la formation d'*un seul carré* pour la première expression, de *deux* carrés pour la seconde, etc., suffit pour qu'on puisse appliquer le procédé.

7. Remarque IV. — On pourrait enfin, à la rigueur, substituer, dans tous les cas possibles, ce même procédé au procédé général de la racine carrée. C'est ce que nous allons faire voir sur deux exemples.

Soit d'abord à *extraire la racine carrée du nombre* 700569.

Concevons que l'on ait formé les deux puissances de *degré pair* du nombre 2, par exemple, qui comprennent le nombre proposé.

Il est facile de reconnaître que ces puissances sont 2^{18} et 2^{20}. En effet, 2^9 ou 512 multiplié par lui-même, donne 262144; et $2^2.262144$ donnerait 1048576.

Cela posé, prenons la différence entre	700569
et	262144
on trouve	438425

Donc le nombre proposé revient à

$$438425 + (512)^2,$$

et rien n'empêche d'appliquer le procédé à cette expression.

Afin de mieux faire ressortir la différence qui existe entre les deux procédés, nous allons les mettre en regard l'un de l'autre.

Procédé ordinaire.

70055.9	837
605	16.3
1166.9	166.7
0000	

Nouveau procédé.

4384.25	1024
412 2	3
83 45	1624
000	2
	1664
	5
	1674
la moitié....	837

TROISIÈME EXEMPLE.

Extraire la racine carrée du nombre 78496732.

Pour obtenir sur-le-champ un carré qui soit en rapport avec le nombre donné, on forme le *carré* de 2500; et retranchant

de	78496732
ce carré qui est 6250000	6250000
	72246732

Ce qui donne $78496732 = 72246732 + (2500)^2$.

Procédé ordinaire.		*Nouveau procédé.*	
78.49.67.32	88 5	72246732	5000
14 4.9	16.8	72467	6
1 0 56 7	176.5	105673	17000
1 74 23.2	1770.0	174232	3
14 85 1		14851	17600
			5
			17700
			9
			17718
		la moitié...	8859

Ces deux exemples suffisent pour faire reconnaître que l'ensemble des opérations exigées par les deux procédés est à l'avantage du procédé ordinaire; et nous n'avons indiqué l'emploi de l'autre procédé, dans l'extraction d'une racine carrée, en général, que pour en faire ressortir la fécondité.

Mais il n'est réellement préférable que pour le calcul des expressions telles que

$$\sqrt{m^2 + n^2}, \quad \sqrt{m^2 + n^2 + p^2},$$

parce qu'on se dispense d'effectuer toutes les élévations au carré des nombres m, n, p, etc.

Souvent même, ainsi que nous l'avons vu aux n^{os} 4 et 5, on n'a aucun *carré* à former préalablement.

FIN.

Bourdon

Arithmétique