34

~~38~~
~~39~~
50
57*
58, 5. 6
71*
78
116
125
128
135
144
203
204
212

München 1882

Lehrbuch

der

Mathematik

für

Gymnasien, Realschulen und andere höhere Lehranstalten.

Von

Dr. Johann Robert Boyman,

Professor am Königlichen Gymnasium zu Coblenz.

Zweiter Theil:

Ebene Trigonometrie und Geometrie des Raumes.

Vierte verbesserte Auflage.

Köln & Neuß,

Verlag der L. Schwann'schen Verlagshandlung.

1875.

Zweiter Theil.

Ebene Trigonometrie
und
Geometrie des Raumes.

Vorwort.

Der hier vorliegende zweite Theil des Lehrbuches der Geometrie für Gymnasien, Realschulen und andere höhere Lehranstalten, die ebene Trigonometrie und die Geometrie des Raumes enthaltend, ist nach denselben Grundsätzen bearbeitet, welche bei der Abfassung des ersten Theiles maßgebend waren. Hier, wie dort, war Hauptziel: Vollständigkeit bei strengem Maßhalten in Aufstellung von Formeln und Sätzen, Einfachheit und Klarheit der Beweise, sorgfältige Gruppirung und übersichtliche Anordnung des Lehrstoffes.

In der Trigonometrie wurde eine ausführliche Betrachtung der einzelnen Funktionen (Sinus, Cosinus, Tangente, Cotangente, Secante, Cosecante) für nothwendig erachtet: nur, wenn deren Bedeutung und Gang klar erkannt ist, kann der Sinn der spätern Formeln völlig verstanden werden. In dem Abschnitte über die Berechnung der Dreiecke ist jedem der verschiedenen Fälle ein vollständig ausgerechnetes Beispiel beigefügt, welches dem Schüler bei den anzustellenden vielfachen Uebungen in der logarithmisch-trigonometrischen Auflösung von Dreiecken als Schema dienen soll.

In der Stereometrie wurde der Betrachtung der regulären Körper noch der Nachweis angereiht, daß es für dieselben einen Punct gibt, welcher von den Seiten, so wie von den Ecken derselben gleich weit entfernt ist. Es ist damit eine reiche Quelle vielfacher und nützlicher Uebungen für den Schüler eröffnet.

Wie in dem ersten Theile, so wurde auch in dem vorliegenden zweiten Theile den einzelnen Abschnitten eine Reihe von stufenweise und systematisch geordneten Aufgaben beigegeben, an welchen der Schüler in freier Selbstthätigkeit und voller Selbstständigkeit seine Kraft versuchen soll. Deshalb sind, wie die Constructionsaufgaben, so auch die Berechnungs-aufgaben ohne Lösung hingestellt; doch habe ich es für fördernd gehalten, den letztern die Resultate hinzuzufügen. Zu weiteren Uebungen findet sich Material in den Aufgaben-Sammlungen von La-Fremoire, Wigand, Pollak, Gallenkamp, Wittiber, Dilling, Reidt u. A.

Vorwort zur vierten Auflage.

Die vierte Auflage der ebenen Trigonometrie und der Geometrie des Raumes, welche hier vorliegt, ist ein im Wesentlichen, namentlich nach Anordnung und Behandlung des Stoffes, unveränderter Abdruck der dritten Auflage. Doch hat dieselbe in mancher Hinsicht wiederum eine Verbesserung und Bereicherung erfahren. So sind in der Trigonometrie die Entwickelungen der Secante und der Cosecante gekürzt, dagegen sind neu aufgenommen beim schiefwinkligen Dreiecke der Projectionssatz, der Mollweide'sche Satz und der Dreiecks-kreis-Satz; ferner ist geändert in der Stereometrie die Inhaltsbestimmung des Obelisken und neu hinzu gekommen die Inhaltsbestimmung des Prismatoids. Die Aufgaben über Maxima und Minima der Oberflächen und der Volumina der Körper sind vermehrt, dagegen sind unverändert geblieben die Aufgaben über die geometrischen Oerter, die Aufgaben über Polarebene und Potenzebene in Bezug auf die Kugel, so wie der Anhang über die wichtigsten Sätze und Aufgaben über das sphärische Dreieck. Bezüglich der zum Verständniß der Aufgaben über das letztere nothwendigen Vorbegriffe aus der mathematischen Geographie sei verwiesen auf des Verfassers Grundlehren der mathematischen Geographie 2. Auflage, Köln und Neuß, L. Schwann'sche Verlagshandlung, 1874.

Coblenz, im Juni 1875.

Ebene Trigonometrie.

Vierte Lehrstufe.

Erster Abschnitt.

Die trigonometrischen Functionen.

§. 1.

Einleitung.

Erklärungen. Die Trigonometrie ist derjenige Theil der Mathematik, welcher aus irgend drei ein Dreieck bestimmenden Stücken die übrigen Stücke desselben durch Rechnung bestimmen lehrt.

Die Trigonometrie unterscheidet sich demnach wesentlich von der Planimetrie, da diese die Bestandtheile der Figuren nicht berechnet, sondern durch Zeichnung darstellt, und unter anderen auch die Aufgabe hat, aus drei gegebenen Bestimmungsstücken das Dreieck und somit die übrigen Stücke desselben durch Construction zu bestimmen.

Die Planimetrie construirt, die Trigonometrie berechnet. So wie aber die Planimetrie außer der Construction der Dreiecke auch die der Vielecke behandelt, so zieht auch die Trigonometrie die Berechnung der Vielecke durch Zerlegung derselben in Dreiecke in ihr Gebiet.

Wie wichtig übrigens die Trigonometrie sowohl für die Theorie als für die Praxis ist, wird man daraus erkennen, daß die höhere Mathematik überall und beständig sich derselben bedient, und daß die Rechnung viel genauere Resultate liefert, als jede noch so scharfe Construction.

§. 2.

Bestimmungsstücke des Dreiecks.

Erklärungen. Jedes Dreieck enthält sechs Stücke, nämlich drei Seiten und drei Winkel, von welchen irgend drei unabhängige Stücke bekanntlich allemal das Dreieck und somit die übrigen Stücke desselben bestimmen. Wie aber diese drei

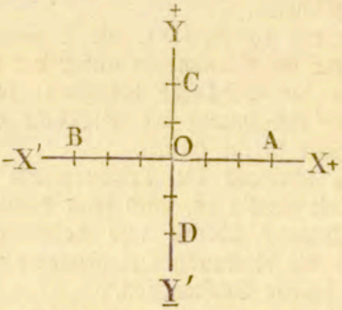
Stücke in der Planimetrie durch Verzeichnung gegeben sein müssen, damit es möglich sei, das Dreieck durch Construction darzustellen, so müssen dieselben in der Trigonometrie in Zahlen gegeben sein, um die übrigen Stücke durch Rechnung, also ebenfalls in Zahlen finden zu können, und zwar die Seiten nach einem bestimmten Längenmaße, z. B. nach Meter, Centimeter 2c., die Winkel nach Graden, Minuten, Sekunden 2c. Bei dieser Rechnung müssen nun Seiten und Winkel mit einander verknüpft werden. Seiten und Winkel sind aber an sich ungleichartige Größen, welche nicht unmittelbar mit einander verbunden und in Rechnung gebracht werden können. Deshalb hat man in der Trigonometrie zwischen den Seiten und den Winkeln dadurch eine Vermittelung geschaffen, daß man statt der Winkel gewisse gerade Linien oder vielmehr die Verhältnisse gewisser gerader Linien eingeführt hat, welche von den zugehörigen Winkeln abhängig und durch dieselben bestimmt sind. Durch Einführung dieser Linienverhältnisse statt der Winkel wird die Ungleichartigkeit, welche zwischen Seiten und Winkeln besteht, umgangen.

§. 3.

Gegensatz der Lage gerader Linien.

Erklärungen. Bei Aufstellung dieser Linienverhältnisse statt der Winkel wird man auf den Gegensatz der Lage geführt, welcher bei geraden Linien stattfindet.

Fig. 1.



Denkt man sich nämlich in einer Ebene zwei aufeinander senkrecht stehende gerade Linien, z. B. (Fig. 1.) die horizontale XX′ und die vertikale YY′, welche sich in O schneiden; so ist klar, daß alle geraden Linien, welche durch Bewegung des Punktes O rechtshin nach X auf OX entstehen oder entstanden gedacht werden, der Lage nach entgegengesetzt sind den Geraden, welche durch Bewegung des Punktes O linkshin nach X′

auf OX′ entstehen. — Ebenso ist klar, daß die geraden Linien, welche durch Bewegung des Punktes O aufwärts nach Y auf OY entstehen oder entstanden gedacht werden, der Lage nach entgegengesetzt sind den Geraden, welche durch Bewegung des Punktes O abwärts nach Y′ auf OY′ entstehen. Hieraus ist ersichtlich, daß die Abschnitte, welche von dem Punkte O aus auf den Geraden XX′ und YY′ abgetragen sind, nur dann vollständig bestimmt werden können, wenn außer ihrer Größe auch ihre Lage in Beziehung auf den Punkt O angegeben ist, und daß wegen des Gegensatzes derselben, wenn man die Abschnitte auf OX als positiv bezeichnet, die Abschnitte auf OX′ als negativ, und daß ebenso, wenn man die Abschnitte auf OY als positiv bezeichnet, die Abschnitte auf OY′ als negativ bezeichnet werden müssen.

Sind also z. B. auf XX′ von O aus zu beiden Seiten beliebig viele gleiche Theile von der Größe m abgetragen, so ist, wenn $OA = 3m$, nothwendig $OB = -3m$, und sind ebenso auf YY′ von O aus nach beiden Seiten beliebig viele gleiche Theile von der der Größe n abgetragen, so ist, wenn $OC = 2n$, nothwendig $OD = -2n$.

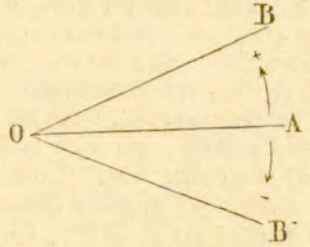
Allgemein wird jede zur Vertikalen senkrechte Gerade rechtshin von der Vertikalen als positiv, linkshin von der Vertikalen als negativ angenommen, und ebenso jede zur Horizontalen senkrechte Gerade aufwärts von der Horizontalen als positiv, abwärts von der Horizontalen als negativ angenommen.

§. 4.

Gegensatz der Lage bei Winkeln.

Erklärungen. Ein ähnlicher Gegensatz der Lage findet bei den Winkeln statt in Beziehung auf die Art und Weise, wie man sich dieselben entstanden denkt.

Fig. 2.



Ist nämlich (Fig. 2) der Schenkel eines Winkels aus seiner ursprünglichen Lage OA das eine Mal durch eine Drehung aufwärts in die Richtung OB, das andere Mal durch eine Drehung abwärts in die Richtung OB′ übergegangen, so sind offenbar die beiden entstandenen Winkel AOB und AOB′ in Beziehung auf ihre Entstehung und ebenso auf ihre Lage gegen die Gerade OA einander entgegengesetzt, und um diesen Gegensatz der Lage der beiden Winkel auszudrücken, muß man, wenn der eine Winkel AOB als positiv bezeichnet wird, den andern AOB′ als negativ bezeichnen. Beträgt also die absolute Größe jedes der beiden Winkel α Grad, so ist, wenn $\sphericalangle AOB = +\alpha^0$, nothwendig $\sphericalangle AOB' = -\alpha^0$ zu nehmen.

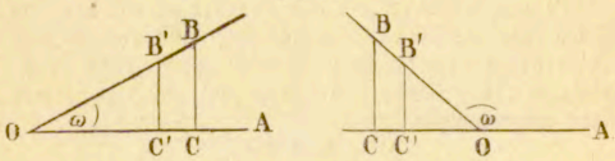
In der Praxis nennt man den Winkel, welcher in einer Vertikalebene über der Horizontallinie liegt, wie $\sphericalangle AOB$, Elevationswinkel, den Winkel aber, welcher in derselben unter der Horizontallinie liegt, wie $\sphericalangle AOB'$, Depressionswinkel.

§. 5.

Projectionen der geraden Linie.

Erklärungen. Sei nun (Fig. 3) $\sphericalangle AOB = \omega$ ein beliebiger Winkel, und werde auf dem einen Schenkel OB desselben ein beliebiger Punkt B angenommen und dadurch auf demselben der Abschnitt OB gebildet.

Fig. 3.



Fällt man alsdann von B auf die Richtung des andern Schenkels eine Senkrechte BC, so ist sowohl BC als auch der auf dem andern Schenkel gebildete Abschnitt OC eine Projection von OB, von welchen diejenige, welche dem Winkel ω gegenüberliegt (BC), die Gegenprojection, und die, welche dem Winkel ω anliegt (OC), die Nebenprojection der Geraden OB genannt werden soll. Nun ist aber einleuchtend, daß für denselben Winkel ω jedes der Verhältnisse, welche sich aus der Gegenprojection, der Nebenprojection und der projicirten Geraden bilden lassen, dasselbe bleibt, wo man auch den Punkt B auf dem Schenkel OB annehmen mag. Denn wegen Aehnlichkeit der entstehenden Dreiecke ist offenbar (Plan. §. 77 : 1 und 3)

$$\frac{BC}{OB} = \frac{B'C'}{OB'}, \quad \frac{OC}{OB} = \frac{OC'}{OB'}, \quad \frac{BC}{OC} = \frac{B'C'}{OC'}.$$

Einem bestimmten Winkel ω entspricht also ein ganz bestimmter Werth dieser Linienverhältnisse, und umgekehrt bei gehöriger Beachtung des Gegensatzes der Linien wird einem bestimmten Werthe dieser Verhältnisse im Allgemeinen auch ein ganz bestimmter Winkel entsprechen. Zwischen einem Winkel und jedem dieser Verhältnisse besteht demnach ein unverkennbarer Zusammenhang der Art, daß man statt des Winkels diese Linienverhältnisse, sowie auch ihre Umkehrungen in Betracht ziehen, und da dieselben abstracte Zahlen sind, unmittelbar mit Linien in Rechnung bringen kann. Wegen ihrer Abhängigkeit von dem Winkel aber hat man diese Linienverhältnisse und ihre Umkehrungen Winkelfunctionen, goniometrische Functionen, auch trigonometrische Functionen oder Kreisfunctionen genannt. Solcher Winkelfunctionen sind jetzt hauptsächlich sechs bei den Mathematikern in Gebrauch: der Sinus, der Cosinus, die Tangente, die Cotangente, die Secante, die Cosecante.

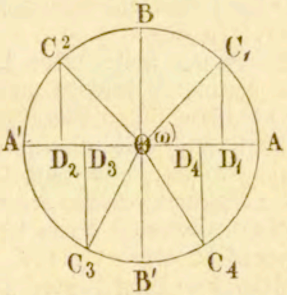
§. 6.

Der Sinus.

Erklärungen. Der Sinus eines Winkels ist das Verhältniß der Gegenprojection eines Schenkels zu diesem Schenkel selbst (Fig. 4):

$$\sin\omega = \frac{C_1 D_1}{O\,C_1}.$$

Fig. 4.



Nähere Betrachtung des Sinus. Man denke sich einen Winkel ω, von welchem der eine beliebig begrenzte Schenkel OA eine unveränderliche feste Lage hat, während der andere Schenkel OC, den man mit OA von gleicher Länge annimmt, um den Scheitelpunkt O in der Ebene sich so dreht, daß er einen Kreis beschreibt, welcher OA zum Radius hat. Denkt man sich diesen Kreis durch den Hauptdurchmesser AA′ und den auf diesem senkrechten Nebendurchmesser BB′ in vier gleiche Theile oder Quadranten getheilt, so stellen die Radien

OC_1, OC_2, OC_3, OC_4 verschiedene Lagen des beweglichen Schenkels in den vier Quadranten, sowie die von ihren Endpunkten auf den Durchmesser AA' (die Richtung des Schenkels OA) gefällten Senkrechten C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3, C_4D_4 die Gegenprojectionen dieses Schenkels dar. Verfolgt man den beweglichen Schenkel OC, wie er aus seiner ursprünglichen Lage OA, bei welcher $\sphericalangle \omega = 0$ ist, aufwärts sich dreht, um nach und nach den ganzen Kreis zu beschreiben, und mit ihm seine Gegenprojection (CD), so erkennt man Folgendes:

1. Ist $\sphericalangle \omega = 0$, so ist die Gegenprojection des beweglichen Schenkels offenbar gleich Null, da in diesem Falle C_1 mit A zusammenfällt. Wächst nun der Winkel über 0^0 hinaus in den ersten Quadranten hinein, so wachsen auch die Gegenprojectionen (C_1D_1) des beweglichen Schenkels, bis $\sphericalangle \omega = 90^0$ geworden, in welchem Falle die Gegenprojection mit diesem Schenkel oder dem Radius OB des Kreises zusammenfällt und demselben also gleich ist. Zugleich ist ersichtlich (§. 3), daß in diesem ersten Quadranten die Gegenprojectionen des beweglichen Schenkels positiv sind.

2. Wächst der Winkel über 90^0 hinaus in den zweiten Quadranten hinein, so nehmen die Gegenprojectionen (C_2D_2) des beweglichen Schenkels ab, bis $\sphericalangle \omega = 180^0$ geworden, in welchem Falle die Gegenprojection dieses Schenkels gleich Null ist, da alsdann C_2 mit A' zusammenfällt. Zugleich erhellt, daß auch im zweiten Quadranten die Gegenprojectionen des beweglichen Schenkels positiv sind.

3. Wächst der Winkel weiter über 180^0 hinaus in den dritten Quadranten hinein, so wachsen auch wieder die Gegenprojectionen (C_3D_3) des beweglichen Schenkels, bis $\sphericalangle \omega = 270^0$ geworden, in welchem Falle die Gegenprojection mit diesem Schenkel (OB') zusammenfällt, also demselben gleich ist. Aber der Lage nach sind die Gegenprojectionen des beweglichen Schenkels im dritten Quadranten offenbar denen im ersten und zweiten Quadranten entgegengesetzt, also negativ.

4. Wächst endlich der Winkel über 270^0 hinaus in den vierten Quadranten hinein, so nehmen die Gegenprojectionen (C_4D_4) des beweglichen Schenkels wieder ab, bis dieser Schenkel in seine ursprüngliche Lage zurückgekehrt und also $\sphericalangle \omega = 360^0$ ist. In diesem Falle ist die Gegenprojection des beweglichen Schenkels wieder gleich Null, indem alsdann C_4 mit A zusammenfällt. Der Lage nach aber sind die Gegenprojectionen des beweglichen Schenkels im vierten Quadranten ebenfalls negativ.

Da demnach der Zähler des Sinusverhältnisses, d. i. die Gegenprojection des beweglichen Schenkels des Winkels bald zu-, bald abnimmt und sein Vorzeichen wechselt, während der Nenner desselben constant, nämlich der bewegliche Schenkel selbst ist, und dieser stets positiv genommen wird, so werden die Veränderungen des Sinus sowohl nach dem absoluten Werthe als nach dem Vorzeichen von den Veränderungen der Gegenprojection des beweglichen Schenkels abhangen. Daher ergibt sich

1) in Bezug auf den absoluten Werth:

Der **Sinus** wächst im ersten Quadranten von 0 bis 1, nimmt im zweiten Quadranten ab von 1 bis 0, wächst im dritten Quadranten von 0 bis 1, und nimmt im vierten Quadranten ab von 1 bis 0;

2) in Bezug auf das Vorzeichen:

Der **Sinus** ist im ersten und zweiten Quadranten positiv, im dritten und vierten Quadranten negativ.

Setzt man den beweglichen Schenkel oder, was dasselbe ist, den Radius des Kreises gleich 1, so versinnlichen die Gegenprojectionen desselben $C_1 D_1$, $C_2 D_2$, $C_3 D_3$, $C_4 D_4$ für sich den Sinus des betreffenden Winkels.

Für die Grenzen ergeben sich die Werthe:

$$\begin{aligned} \sin 0^0 &= +0, \\ \sin 90^0 &= +1, \\ \sin 180^0 &= \pm 0, \\ \sin 270^0 &= -1, \\ \sin 360^0 &= -0. \end{aligned}$$

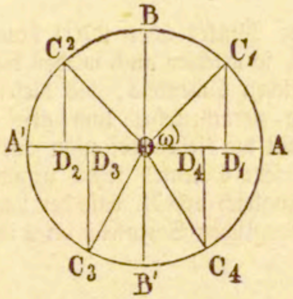
§. 7.

Der Cosinus.

Erklärung. Der Cosinus eines Winkels ist das Verhältniß der Nebenprojection eines Schenkels zu diesem Schenkel selbst (Fig. 5):

$$\cos \omega = \frac{O D_1}{O C_1}.$$

Fig. 5.



Nähere Betrachtung des Cosinus. Die Nebenprojectionen des beweglichen Schenkels eines Winkels ω bei einer vollen Umdrehung desselben sind ebenso veränderlich, wie die Gegenprojectionen desselben, und sind nach ihrer verschiedenen Lage in den vier Quadranten durch die Abschnitte OD_1, OD_2, OD_3, OD_4 dargestellt. Verfolgt man den beweglichen Schenkel OC, während er den ganzen Kreis durchläuft, von seiner ursprünglichen Lage OA an, und mit ihm seine Nebenprojection (OD), so wird man finden:

1. Ist $\sphericalangle \omega = 0$, so fällt die Nebenprojection des beweglichen Schenkels mit diesem Schenkel selbst in OA zusammen und ist also demselben gleich; auch ist dieselbe (§. 3) positiv. Wächst der Winkel über 0^0 hinaus in den ersten Quadranten hinein, so nehmen die Nebenprojectionen (OD_1) des beweglichen Schenkels ab, bis $\sphericalangle \omega = 90^0$ geworden, in welchem Falle die Nebenprojection dieses Schenkels offenbar gleich Null ist, da alsdann D_1 mit O zusammenfällt. Auch ist ersichtlich, daß im ersten Quadranten die Nebenprojectionen des beweglichen Schenkels positiv sind.

2. Wächst der Winkel über 90^0 hinaus in den zweiten Quadranten hinein, so wachsen auch die Nebenprojectionen (OD_2) des beweglichen Schenkels, bis $\sphericalangle \omega = 180^0$ geworden, in welchem Falle die Nebenprojection mit diesem Schenkel zusammenfällt, also demselben gleich ist. Der Lage nach sind aber die Nebenprojectionen des beweglichen Schenkels im zweiten Quadranten denen im ersten Quadranten entgegengesetzt, also negativ.

3. Wächst der Winkel weiter über 180^0 hinaus in den dritten Quadranten hinein, so nehmen die Nebenprojectionen (OD_3) des beweglichen Schenkels wieder ab, bis $\sphericalangle \omega = 270^0$ geworden, in welchem Falle die Nebenprojection dieses Schenkels wieder gleich Null wird, da alsdann D_3 mit O zusammenfällt. Auch ist einleuchtend, daß der Lage nach im dritten Quadranten die Nebenprojectionen des beweglichen Schenkels negativ sind.

4. Wächst der Winkel über 270^0 hinaus in den vierten Quadranten hinein, so wachsen auch wieder die Nebenprojectionen (OD_4) des beweglichen Schenkels, bis dieser Schenkel in seine ursprüngliche Lage zurückgekehrt und also $\sphericalangle \omega = 360^0$ ist. In diesem Falle fällt die Nebenprojection des beweglichen Schenkels wieder mit diesem Schenkel selbst zusammen und ist also demselben gleich. Zugleich erhellt, daß der Lage nach die Nebenprojectionen des beweglichen Schenkels im vierten Quadranten positiv sind.

Da hiernach der Zähler des Cosinusverhältnisses, d. i. die Nebenprojection des beweglichen Schenkels bald ab-, bald zunimmt und sein Vorzeichen wechselt, während der Nenner desselben constant, nämlich der bewegliche Schenkel selbst ist, und dieser stets positiv genommen wird, so werden die Veränderungen des Cosinus sowohl nach dem absoluten Werthe als nach dem Vorzeichen von den Veränderungen der Nebenprojection des beweglichen Schenkels abhangen. Daher ergibt sich

1) in Bezug auf den absoluten Werth:

Der **Cosinus** nimmt im ersten Quadranten ab von 1 bis 0, wächst im zweiten Quadranten von 0 bis 1, nimmt im dritten Quadranten ab von 1 bis 0, und wächst im vierten Quadranten von 0 bis 1;

2) in Bezug auf das Vorzeichen:

Der **Cosinus** ist im ersten und vierten Quadranten positiv, im zweiten und dritten Quadranten negativ.

Setzt man den beweglichen Schenkel oder den Radius des Kreises gleich 1, so versinnlichen die Nebenprojectionen desselben OD_1, OD_2, OD_3, OD_4 für sich den Cosinus des betreffenden Winkels.

Für die Grenzen ergeben sich die Werthe:

$$\begin{aligned} \cos 0^0 &= +1, \\ \cos 90^0 &= \pm 0, \\ \cos 180^0 &= -1, \\ \cos 270^0 &= \mp 0, \\ \cos 360^0 &= +1. \end{aligned}$$

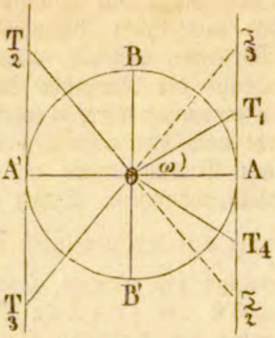
§. 8.

Die Tangente.

Erklärung. Die Tangente eines Winkels ist das Verhältniß der Gegenprojection eines Schenkels zur Nebenprojection desselben (Fig. 6):

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{AT_1}{OA}.$$

Fig. 6.



Nähere Betrachtung der Tangente. Die Veränderungen der Tangente eines Winkels ω, so wie den Grund ihrer Benennung, wird man am besten erkennen, wenn man in den Endpunkten des Hauptdurchmessers AA' des Kreises, welcher den festliegenden Schenkel OA zum Radius hat, die Tangenten T_1T_4 und T_2T_3 (welche wir als erste und zweite unterscheiden wollen) an denselben legt und den beweglichen Schenkel (OT_1) des Winkels bei seiner Umdrehung jedesmal so weit verlängert, bis er diese Tangenten trifft. Alsdann sind die Gegenprojectionen des beweglichen Schenkels, d. i. die durch denselben auf den Tangenten gebildeten Abschnitte (AT_1) allein veränderlich, während die Nebenprojection dieses Schenkels constant, nämlich dem Radius OA oder OA' des Kreises gleich sind. Nach ihrer verschiedenen Lage in den vier Quadranten sind die Gegenprojectionen des beweglichen Schenkels durch die auf den beiden Tangenten gebildeten Abschnitte AT_1, $A'T_2$, $A'T_3$, AT_4 dargestellt. Verfolgt man den beweglichen Schenkel OT des Winkels ω, während er den ganzen Kreis durchläuft, von seiner ursprünglichen Lage OA an, und mit ihm die durch ihn auf den Tangenten gebildeten Abschnitte, welche die Gegenprojectionen desselben darstellen, so erkennt man:

1. Ist $\sphericalangle\, \omega = 0$, so ist der auf der ersten Tangente gebildete Abschnitt gleich Null, da alsdann T_1 mit A zusammenfällt. Wächst der Winkel über 0^0 hinaus in den ersten Quadranten hinein, so wachsen auch die durch den beweglichen Schenkel auf dieser Tangente gebildeten Abschnitte (AT_1), bis $\sphericalangle\, \omega = 90^0$ geworden, in welchem Falle der Abschnitt unendlich groß (∞) wird, da die Tangente alsdann dem beweglichen Schenkel parallel, also von demselben, so weit man sie auch verlängern mag, nicht geschnitten wird. Zugleich ist ersichtlich, daß die durch den beweglichen Schenkel auf der ersten Tangente gebildeten Abschnitte, d. i. die Gegenprojectionen des beweglichen

Schenkels, so wie die Nebenprojectionen desselben im ersten Quadranten positiv sind.

2. Wächst der Winkel über 90° hinaus in den zweiten Quadranten hinein, so nehmen die durch den beweglichen Schenkel jetzt auf der zweiten Tangente gebildeten Abschnitte ($A'T_2$) ab, bis $\sphericalangle \omega = 180^0$ geworden, in welchem Falle der Abschnitt gleich Null ist, da alsdann T_2 mit A' zusammenfällt. Man pflegt aber das Tangentenverhältniß auch für diesen zweiten Quadranten auf die erste Tangente zurückzuführen, indem man den beweglichen Schenkel OT_2 über den Scheitelpunkt nach $O\mathfrak{T}_2$ verlängert. Offenbar nämlich kann man alsdann statt des Verhältnisses $A'T_2 : OA'$, in welchem der Lage nach $A'T_2$ positiv, aber OA' negativ ist, das Verhältniß $A\mathfrak{T}_2 : OA$ setzen, in welchem der Lage nach OA positiv, dagegen $A\mathfrak{T}_2$ negativ ist; und somit erhellt, daß auf die erste Tangente bezogen im zweiten Quadranten die Gegenprojectionen des beweglichen rückwärts verlängerten Schenkels negativ, die Nebenprojectionen desselben aber positiv sind.

3. Wächst der Winkel über 180° hinaus in den dritten Quadranten hinein, so wachsen auch wieder die durch den beweglichen Schenkel ebenfalls auf der zweiten Tangente gebildeten Abschnitte ($A'T_3$), bis $\sphericalangle \omega = 270^0$ geworden, in welchem Falle der Abschnitt unendlich groß (∞) wird, da die Tangente alsdann dem beweglichen Schenkel parallel, also von demselben, so weit man sie auch verlängern mag, nicht geschnitten wird. Aber auch für diesen dritten Quadranten pflegt man das Tangenten-Verhältniß auf die erste Tangente zurückzuführen, indem man den beweglichen Schenkel OT_3 über den Scheitelpunkt nach $O\mathfrak{T}_3$ verlängert. Statt des Verhältnisses $A'T_3 : OA'$ nämlich, in welchem sowohl OA' als $A'T_3$ negativ sind, kann man alsdann das Verhältniß $A\mathfrak{T}_3 : OA$ setzen, in welchem sowohl OA als $A\mathfrak{T}_3$ positiv sind; woraus erhellt, daß auf die erste Tangente bezogen im dritten Quadranten sowohl die Gegenprojectionen des beweglichen rückwärts verlängerten Schenkels als die Nebenprojectionen desselben positiv sind.

4. Wächst der Winkel über 270° hinaus in den vierten Quadranten hinein, so nehmen die durch den beweglichen Schenkel jetzt wieder auf der ersten Tangente gebildeten Abschnitte (AT_4) wieder ab, bis dieser Schenkel in seine ursprüngliche Lage zurückgekehrt und also $\sphericalangle \omega = 360^0$ ist. In diesem Falle ist der Abschnitt wieder gleich Null, da alsdann T_4 mit A zusammenfällt. Zugleich ist ersichtlich, daß der Lage nach im vierten Quadranten die Gegenprojectionen des beweglichen Schenkels negativ, die Nebenprojectionen desselben aber positiv sind.

Da demnach der Zähler des Tangentenverhältnisses, d. i. die auf die erste Tangente bezogene Gegenprojection des beweglichen theils rückwärts verlängerten Schenkels bald zu-, bald abnimmt und sein Vorzeichen wechselt, während der Nenner desselben, nämlich die Nebenprojection dieses Schenkels oder der Radius OA des Kreises constant und positiv ist, so werden die Veränderungen der Tangente sowohl nach dem absoluten Werthe als nach dem Vorzeichen von den Veränderungen der auf die erste Tangente bezogenen Gegenprojection des beweglichen Schenkels abhangen. Daher ergibt sich

1) in Bezug auf den absoluten Werth:

Die **Tangente** wächst im ersten Quadranten von 0 bis ∞, nimmt im zweiten Quadranten ab von ∞ bis 0, wächst im dritten Quadranten von 0 bis ∞, und nimmt im vierten Quadranten ab von ∞ bis 0;

2) in Bezug auf das Vorzeichen:

Die **Tangente** ist im ersten und dritten Quadranten positiv, im zweiten und vierten Quadranten negativ.

Setzt man die constante Nebenprojection des beweglichen Schenkels oder den Radius des Kreises gleich 1, so versinnlichen die durch den beweglichen Schenkel beziehungsweise dessen Rückwärtsverlängerung auf der ersten Tangente gebildeten Abschnitte AT_1, $A\mathfrak{T}_2$, AT_3, $A\mathfrak{T}_4$ die Tangente des betreffenden Winkels.

Für die Grenzen ergeben sich die Werthe:

$$\begin{aligned} \text{tang}\, 0^0 &= +0, \\ \text{tang}\, 90^0 &= \pm\infty, \\ \text{tang}\, 180^0 &= \mp 0, \\ \text{tang}\, 270^0 &= \pm\infty, \\ \text{tang}\, 360^0 &= -0. \end{aligned}$$

§. 9.

Die Cotangente.

Erklärung. Die Cotangente eines Winkels ist das Verhältniß der Nebenprojection eines Schenkels zur Gegenprojection desselben (Fig. 7):

$$\text{cotg}\, \omega = \frac{OG}{F_1 G}.$$

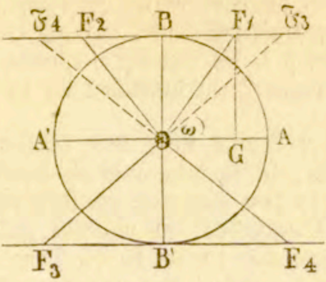


Fig. 7.

Nähere Betrachtung der Cotangente. Die Veränderungen der Cotangente eines Winkels ω so wie den Grund ihrer Benennung (Tangente des Complementwinkels) läßt sich am besten erkennen, wenn man in den Endpunkten des Nebendurchmessers BB' des Kreises, welcher den festen Schenkel OA zum Radius hat, die Tangenten F_1F_2 und F_3F_4 (welche als erste und zweite unterschieden werden) an denselben legt und den beweglichen Schenkel (OF_1) des Winkels jedesmal so weit verlängert, bis er diese Tangenten trifft; denn alsdann sind die Gegenprojectionen (F_1G) des beweglichen Schenkels constant, alle nämlich dem Radius OB oder OB' des Kreises gleich, während bloß die Nebenprojectionen (OG) dieses Schenkels veränderlich sind. Statt der Gegenprojection des beweglichen Schenkels kann man also den constanten Radius OB oder OB' des Kreises setzen, und da für jede Richtung des beweglichen Schenkels OF_1 offenbar $OG = BF_1$, so kann man statt der veränderlichen Nebenprojectionen (OG) die durch den beweglichen Schenkel auf den beiden Tangenten gebildeten Abschnitte setzen, welche nach ihrer verschiedenen Lage in den vier Quadranten durch BF_1, BF_2, $B'F_3$, $B'F_4$ dargestellt sind. Verfolgt man den beweglichen Schenkel OF des Winkels ω, während er den ganzen Kreis durchläuft, von seiner ursprünglichen Richtung OA an, und mit ihm die auf den Tangenten gebildeten Abschnitte, welche die Nebenprojectionen desselben darstellen, so wird man finden:

1. Ist $\sphericalangle \omega = 0$, so ist der auf der ersten Tangente gebildete Abschnitt unendlich groß (∞), da alsdann die Tangente dem beweglichen Schenkel parallel, also von demselben, so weit man sie auch verlängern mag, nicht geschnitten wird. Wächst der Winkel über 0^0 hinaus in den ersten Quadranten hinein, so nehmen die durch den beweglichen Schenkel auf der ersten Tangente gebildeten Abschnitte (BF_1) ab, bis $\sphericalangle \omega = 90^0$ geworden, in welchem Falle der Abschnitt gleich Null ist, da

alsdann F_1 mit B zusammenfällt. Zugleich ersieht man, daß die durch den beweglichen Schenkel auf der ersten Tangente gebildeten Abschnitte, d. i. die Nebenprojectionen dieses Schenkels, so wie die Gegenprojectionen desselben im ersten Quadranten positiv sind.

2. Wächst der Winkel über 90° hinaus in den zweiten Quadranten hinein, so wachsen auch die durch den beweglichen Schenkel auf der ersten Tangente gebildeten Abschnitte (BF_2), bis $\sphericalangle \omega = 180^0$ geworden, in welchem Falle der Abschnitt wieder unendlich groß (∞) wird, da die Tangente alsdann dem beweglichen Schenkel parallel, also von demselben, so weit man sie auch verlängern mag, nicht geschnitten wird. Auch ist einleuchtend, daß der Lage nach im zweiten Quadranten die Nebenprojectionen des beweglichen Schenkels negativ, die Gegenprojectionen desselben aber positiv sind.

3. Wächst der Winkel über 180° hinaus in den dritten Quadranten hinein, so nehmen die durch den beweglichen Schenkel jetzt auf der zweiten Tangente gebildeten Abschnitte ($B'F_3$) wieder ab, bis $\sphericalangle \omega = 270^0$ geworden, in welchem Falle der Abschnitt gleich Null ist, da nunmehr F_3 mit B' zusammenfällt. Man pflegt aber das Cotangentenverhältniß auch für diesen dritten Quadranten auf die erste Tangente zurückzuführen, indem man den beweglichen Schenkel OF_3 rückwärts nach $O\mathfrak{F}_3$ verlängert. Denn alsdann kann man statt des Verhältnisses $B'F_3 : OB'$, in welchem der Lage nach sowohl OB' als $B'F_3$ negativ ist, das Verhältniß $B\mathfrak{F}_3 : OB$ setzen, in welchem der Lage nach sowohl OB als $B\mathfrak{F}_3$ positiv ist; und somit ist ersichtlich, daß auf die erste Tangente bezogen im dritten Quadranten die Nebenprojectionen des beweglichen rückwärts verlängerten Schenkels, so wie die Gegenprojectionen desselben positiv sind.

4. Wächst der Winkel über 270° hinaus in den vierten Quadranten hinein, so wachsen auch wieder die durch den beweglichen Schenkel ebenfalls auf der zweiten Tangente gebildeten Abschnitte ($B'F_4$), bis $\sphericalangle \omega = 360^0$ geworden, in welchem Falle der Abschnitt unendlich groß (∞) wird, da die Tangente alsdann dem beweglichen Schenkel parallel, also von demselben, so weit man sie auch verlängern mag, nicht geschnitten wird. Aber man pflegt auch für diesen vierten Quadranten das Cotangentenverhältniß auf die erste Tangente zurückzuführen, indem man den beweglichen Schenkel OF_4 rückwärts nach $O\mathfrak{F}_4$ verlängert. Alsdann kann man nämlich statt des Verhältnisses $B'F_4 : OB'$, in welchem der Lage nach $B'F_4$ positiv, OB' aber negativ ist, das Verhältniß $B\mathfrak{F}_4 : OB$ setzen, in welchem der

Lage nach $B\mathfrak{F}_4$ negativ, aber OB positiv ist. Hieraus erhellt, daß auf die erste Tangente bezogen im vierten Quadranten die Nebenprojectionen des beweglichen rückwärts verlängerten Schenkels negativ, die Gegenprojectionen desselben aber positiv sind.

Da hiernach der Zähler des Cotangentenverhältnisses, d. i. die auf die erste Tangente bezogene Nebenprojection des beweglichen theils rückwärts verlängerten Schenkels bald ab-, bald zunimmt und sein Vorzeichen wechselt, während der Nenner desselben, nämlich die Gegenprojection dieses Schenkels oder der Radius OB des Kreises constant und positiv ist, so werden die Veränderungen der Cotangente sowohl nach dem absoluten Werthe als nach dem Vorzeichen von den Veränderungen der auf die erste Tangente bezogenen Nebenprojection des beweglichen Schenkels abhangen. Daher ergibt sich

1) in Bezug auf den absoluten Werth:

Die **Cotangente** nimmt im ersten Quadranten ab von ∞ bis 0, wächst im zweiten Quadranten von 0 bis ∞, nimmt im dritten Quadranten ab von ∞ bis 0, und wächst im vierten Quadranten von 0 bis ∞;

2) in Bezug auf das Vorzeichen:

Die **Cotangente** ist im ersten und dritten Quadranten positiv, im zweiten und vierten Quadranten negativ.

Setzt man die constante Gegenprojection des beweglichen Schenkels oder den Radius des Kreises gleich 1, so versinnlichen die durch den beweglichen Schenkel, beziehlich dessen Rückwärtsverlängerung auf der ersten Tangente gebildeten Abschnitte BF_1, BF_2, $B\mathfrak{F}_3$, $B\mathfrak{F}_4$ die Cotangente des betreffenden Winkels.

Für die Grenzen ergeben sich die Werthe:

$$\begin{aligned}
\cot g\, 0^0 &= +\infty, \\
\cot g\, 90^0 &= \pm 0, \\
\cot g\, 180^0 &= \mp \infty, \\
\cot g\, 270^0 &= \pm 0, \\
\cot g\, 360^0 &= -\infty,
\end{aligned}$$

§. 10.

Die Secante.

Erklärung. Die Secante eines Winkels ist das Verhältniß eines Schenkels zur Nebenprojection desselben (Fig. 8):

$$\sec \omega = \frac{O\,T_1}{O\,A}.$$

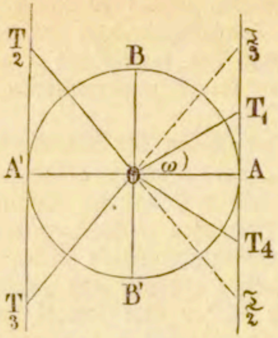


Fig. 8.

Nähere Betrachtung der Secante. Die Veränderungen der Secante eines Winkels ω so wie den Grund ihrer Benennung wird man am besten erkennen, wenn man sich wieder an den Kreis, welcher den festliegenden Schenkel O A zum Radius hat, in den Endpunkten des *Hauptdurchmessers* AA' die Tagenten $T_1 T_4$ und $T_2 T_3$ (erste und zweite) gelegt denkt und den beweglichen Schenkel des Winkels jedesmal so weit verlängert, bis er diese Tangenten trifft. Dabei werden die Abschnitte des Schenkels selbst immer als *positiv*, die seiner Rückwärtsverlängerung aber über den Scheitelpunkt hinaus, da diese mit jenen eine entgegengesetzte Lage haben, als *negativ* angenommen. Es sind nun bloß die Abschnitte ($O T_1$) des beweglichen Schenkels der Größe nach veränderlich, während die Nebenprojectionen dieses Schenkels constant, nämlich dem Radius O A oder O A' des Kreises gleich sind. Nach seiner verschiedenen Lage in den vier Quadranten ist der bewegliche Schenkel durch die Geraden $O T_1$, $O T_2$, $O T_3$, $O T_4$ dargestellt. Verfolgt man nun den beweglichen Schenkel O T des Winkels ω, während er den ganzen Kreis durchläuft, von seiner ursprünglichen Lage O A an, so wird sich durch ähnliche Betrachtungen und Schlüsse, wie sie bei der Tangente gemacht wurden, ergeben:

1) in Bezug auf den absoluten Werth:

Die **Secante** *wächst im ersten Quadranten von 1 bis ∞, nimmt im zweiten Quadranten ab von ∞ bis 1, wächst im dritten Quadranten von 1 bis ∞, und nimmt im vierten Quadranten ab von ∞ bis 1;*

2) in Bezug auf das Vorzeichen:

Die **Secante** *ist im ersten und vierten Quadranten positiv, im zweiten und dritten Quadranten negativ.*

Setzt man die constante Nebenprojection des beweglichen Schenkels, d. i. den Radius des Kreises gleich 1, so **versinnlichen** die durch die **erste** Tangente gebildeten Abschnitte des beweglichen Schenkels, beziehlich der Rückwärtsverlängerung desselben $O T_1$, $O T_2$, $O T_3$, $O T_4$ die Secante des betreffenden Winkels.

Für die Grenzen ergeben sich die Werthe:

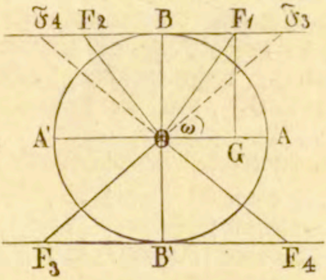
$$\begin{aligned}
\sec 0^0 &= +1, \\
\sec 90^0 &= \pm\infty, \\
\sec 180^0 &= \mp 1, \\
\sec 270^0 &= \pm\infty, \\
\sec 360^0 &= -1.
\end{aligned}$$

§. 11.

Die Cosecante.

Erklärung. Die **Cosecante** eines Winkels ist das Verhältniß eines Schenkels zur Gegenprojection desselben (Fig 9):

$$\operatorname{cosec} \omega = \frac{O F_1}{F_1 G}.$$

Fig. 9. 

Nähere Betrachtung der Cosecante. Die Veränderungen der Cosecante eines Winkels ω so wie den Grund ihrer Benennung (Secante des Complementwinkels) wird man am besten erkennen, wenn man an den Kreis, welcher den festliegenden Schenkel OA zum Radius hat, wieder in den Endpunkten des **Nebendurchmessers** BB' die Tangenten $F_1 F_2$ und $F_3 F_4$ (erste und zweite) legt und den beweglichen Schenkel des Winkels jedesmal so soweit verlängert, bis er diese Tangente trifft. Die Abschnitte des Schenkels selbst werden dabei immer als **positiv**, die seiner Rückwärtsverlängerung über den Scheitelpunkt hinaus, da diese mit jenen eine entgegengesetzte Lage haben, als **negativ** angenommen. Alsdann sind blos die Abschnitte (OF_1)

des beweglichen Schenkels der Größe nach veränderlich, während die Gegenprojectionen (F_1 G) dieses Schenkels constant, alle nämlich dem Radius OB oder OB′ des Kreises gleich sind. Nach seiner verschiedenen Lage in den vier Quadranten ist der bewegliche Schenkel durch die Geraden OF_1, OF_2, OF_3, OF_4 dargestellt. Verfolgt man nun den beweglichen Schenkel OF des Winkels ω, während er den ganzen Kreis durchläuft, von seiner ursprünglichen Lage OA an, so wird sich durch ähnliche Betrachtungen und Schlüsse, wie sie bei der Cotangente gemacht wurden, ergeben:

1) in Bezug auf den absoluten Werth:

Die **Cosecante** nimmt im ersten Quadranten ab von ∞ bis 1, wächst im zweiten Quadranten von 1 bis ∞, nimmt im dritten Quadranten ab von ∞ bis 1, und wächst im vierten Quadranten von 1 bis ∞;

2) in Bezug auf das Vorzeichen:

Die **Cosecante** ist im ersten und zweiten Quadranten positiv, im dritten und vierten Quadranten negativ.

Setzt man die constante Gegenprojection des beweglichen Schenkels, d. i. den Radius des Kreises gleich 1, so versinnlichen die durch die erste Tangente gebildeten Abschnitte des beweglichen Schenkels, beziehlich der Rückwärtsverlängerung desselben OF_1, OF_2, $O\mathfrak{F}_3$, $O\mathfrak{F}_4$ die Cosecante des betreffenden Winkels.

Für die Grenzen ergeben sich die Werthe:

$$\begin{aligned} \text{cosec}\, 0^0 &= +\infty, \\ \text{cosec}\, 90^0 &= +1, \\ \text{cosec}\, 180^0 &= \pm\infty, \\ \text{cosec}\, 270^0 &= -1, \\ \text{cosec}\, 360^0 &= -\infty. \end{aligned}$$

§. 12.

Bezeichnung der Winkel durch die trigonometrischen Functionen.

Die vorhergehenden §§. haben gelehrt, welche Werthe die verschiedenen trigonometrischen Functionen haben können. Dieselben sind alle zunächst abstracte Zahlen, sodann sind die Sinus und Cosinus, da ihre Werthe zwischen 0 und 1 enthalten sind, durch alle ächten Brüche, die Tangenten und Cotangenten, da ihre Werthe zwischen 0 und ∞ liegen, durch alle ganzen und gebrochenen Zahlen, die Secanten und

Cosecanten, da ihre Werthe zwischen 1 und ∞ liegen, durch alle ganzen und alle gemischten Zahlen darstellbar. In so fern sind also die Zahlen a und b, m und n, p und q näher charakterisirt, wenn man die Gleichungen hat:

$$\sin\omega = a, \qquad \cos\omega = b,$$
$$\mathrm{tang}\,\omega = m, \qquad \mathrm{cotg}\,\omega = n,$$
$$\sec\omega = p, \qquad \mathrm{cosec}\,\omega = q.$$

Sind aber dergestalt die trigonometrischen Functionen eines Winkels durch Zahlen gegeben, so läßt sich auch der Winkel selbst bestimmen. Die Größe eines Winkels kann nämlich, Statt nach Graden, Minuten rc., auch nach der in einem Kreise von Radius 1 ihm entsprechenden Bogenlänge gemessen werden. Wenn also unter der Annahme, daß der Winkel durch die ihm in einem Kreise von Radius 1 entsprechende Bogenlänge ausgedrückt ist, $\sin\omega = a$, so ist offenbar $\sphericalangle\,\omega$ der Bogen, dessen Sinus gleich a ist, was kurz durch $\sphericalangle\,\omega = \mathrm{arc}\,(\sin = a)$ oder $\sphericalangle\,\omega = \mathrm{arc}\,\sin a$ bezeichnet wird. Demnach erhellt, daß

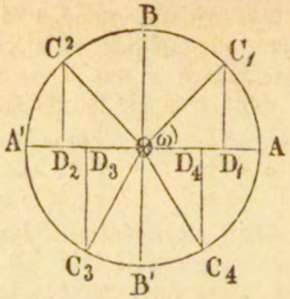
$$\sin\omega = a \text{ gibt } \sphericalangle\,\omega = \mathrm{arc}\,(\sin = a),$$
$$\cos\omega = b \quad \text{„} \quad \sphericalangle\,\omega = \mathrm{arc}\,(\cos = b),$$
$$\mathrm{tang}\,\omega = m \quad \text{„} \quad \sphericalangle\,\omega = \mathrm{arc}\,(\mathrm{tang} = m),$$
$$\mathrm{cotg}\,\omega = n \quad \text{„} \quad \sphericalangle\,\omega = \mathrm{arc}\,(\mathrm{cotg} = n),$$
$$\sec\omega = p \quad \text{„} \quad \sphericalangle\,\omega = \mathrm{arc}\,(\sec = p),$$
$$\mathrm{cosec}\,\omega = q \quad \text{„} \quad \sphericalangle\,\omega = \mathrm{arc}\,(\mathrm{cosec} = q).$$

Sind die trigonometrischen Functionen in bestimmten Zahlen gegeben, so erhält man den zugehörigen Winkel aus den sogenannten trigonometrischen Tafeln, in welchen zu jedem gegebenen Winkel die zugehörige trigonometrische Function, beziehlich ihr Logarithmus, so wie umgekehrt zu jeder direct oder durch ihren Logarithmus gegebenen trigonometrischen Function der zugehörige Winkel nach der in der Einleitung zu solchen Tafeln enthaltenen Anweisung zu finden ist.

§. 13.

Beziehungen zwischen je zwei trigonometrischen Functionen desselben Winkels.

Die Beziehungen, welche zwischen je zwei der trigonometrischen Functionen desselben Winkels Statt finden, sind (Fig. 10):

Fig. 10. 

1. **Die Summe der Quadrate des Sinus und des Cosinus eines Winkels ist immer gleich 1:**

$$\sin^2\omega + \cos^2\omega = 1.$$

In jeder Lage des beweglichen Schenkels und für jeden Quadranten ist nämlich nach dem Satze des Pythagoras

$$CD^2 + OD^2 = OC^2.$$

Dividirt man die einzelnen Glieder dieser Gleichung durch OC^2, so erhält man

$$\frac{CD^2}{OC^2} + \frac{OD^2}{OC^2} = 1,$$

oder auch, zugleich mit Hinzufügung der Vorzeichen,

$$\left(\frac{\pm CD}{OC}\right)^2 + \left(\frac{\pm OD}{OC}\right)^2 = 1.$$

Nun ist aber für die vier verschiedenen Quadranten $\frac{\pm CD}{OC} = \sin\omega$ und $\frac{\pm OD}{OC} = \cos\omega$, daher ist für einen beliebigen Winkel ω in jedem Quadranten:

$$\sin^2\omega + \cos^2\omega = 1.$$

Hieraus ergibt sich weiter

$$\sin\omega = \pm\sqrt{1 - \cos^2\omega} \text{ und } \cos\omega = \pm\sqrt{1 - \sin^2\omega}.$$

2. **Die Tangente eines Winkels ist gleich dem Sinus dividirt durch den Cosinus desselben:**

$$\text{tang}\,\omega = \frac{\sin\omega}{\cos\omega}.$$

Denn es ist $\text{tang}\,\omega = \frac{CD}{OD}$. Dividirt man Zähler und Nenner dieses Quotienten durch OC und fügt zur Andeutung der verschiedenen Quadranten die Vorzeichen hinzu, so erhält man für jeden Winkel ω in einem beliebigen Quadranten

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\pm CD}{\pm OD} = \frac{\frac{\pm CD}{OC}}{\frac{\pm OD}{OC}} = \frac{\sin\omega}{\cos\omega}.$$

3. Die Cotangente eines Winkels ist gleich dem Cosinus dividirt durch den Sinus desselben:

$$\operatorname{cotg}\omega = \frac{\cos\omega}{\sin\omega}.$$

Denn es ist $\operatorname{cotg}\omega = \frac{OD}{CD}\cdot$ Dividirt man wieder Zähler und Nenner des Quotienten durch OC und fügt die Vorzeichen hinzu, so erhält man für jeden Winkel ω in einem beliebigen Quadranten

$$\operatorname{cotg}\omega = \frac{\pm OD}{\pm CD} = \frac{\frac{\pm OD}{OC}}{\frac{\pm CD}{OC}} = \frac{\cos\omega}{\sin\omega}.$$

4. Das Product aus der Tangente und der Cotangente eines Winkels ist immer gleich 1:

$$\operatorname{tang}\omega \cdot \operatorname{cotg}\omega = 1.$$

Multiplicirt man nämlich (2) mit (3), so ergibt sich

$$\operatorname{tang}\omega \cdot \operatorname{cotg}\omega = 1,$$

woraus weiter gefunden wird

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{1}{\operatorname{cotg}\omega} \text{ und } \operatorname{cotg}\omega = \frac{1}{\operatorname{tang}\omega}.$$

5. Die Secante eines Winkels ist gleich dem reciproken Werthe seines Cosinus:

$$\sec\omega = \frac{1}{\cos\omega}.$$

Denn es ist $\sec\omega = \frac{OC}{OD}\cdot$ Dividirt man Zähler und Nenner dieses Quotienten durch OC und schreibt die Vorzeichen hinzu, so ist für jeden Winkel ω in einem beliebigen Quadranten

$$\sec\omega = \frac{OC}{\pm OD} = \frac{1}{\frac{\pm OD}{OC}} = \frac{1}{\cos\omega}.$$

6. Die Cosecante eines Winkels ist gleich dem reciproken Werthe seines Sinus:

$$\operatorname{cosec}\omega = \frac{1}{\sin\omega}.$$

Denn es ist $\operatorname{cosec}\omega = \frac{OC}{CD}$. Dividirt man Zähler und Nenner des Quotienten durch OC und setzt die Vorzeichen hinzu, so erhält man für jeden Winkel ω in einem beliebigen Quadranten

$$\operatorname{cosec}\omega = \frac{OC}{\pm CD} = \frac{1}{\frac{\pm CD}{OC}} = \frac{1}{\sin\omega}.$$

Mit Hülfe dieser 6 Gleichungen läßt sich eine jede trigonometrische Function durch jede der übrigen ausdrücken.

Beweise nun, daß

1) wenn $\sin\omega$ gegeben

$\sin\omega = \sin\omega$	$\cos\omega = \sqrt{1-\sin^2\omega}$	$\operatorname{tang}\omega = \frac{\sin\omega}{\sqrt{1-\sin^2\omega}}$
$\operatorname{cotg}\omega = \frac{\sqrt{1-\sin^2\omega}}{\sin\omega}$	$\sec\omega = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\omega}}$	$\operatorname{cosec}\omega = \frac{1}{\sin\omega}$

2) wenn $\cos\omega$ gegeben

$\sin\omega = \sqrt{1-\cos^2\omega}$	$\cos\omega = \cos\omega$	$\operatorname{tang}\omega = \frac{\sqrt{1-\cos^2\omega}}{\cos\omega}$
$\operatorname{cotg}\omega = \frac{\cos\omega}{\sqrt{1-\cos^2\omega}}$	$\sec\omega = \frac{1}{\cos\omega}$	$\operatorname{cosec}\omega = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\omega}}$

3) wenn $\operatorname{tang}\omega$ gegeben

$\sin\omega = \frac{\operatorname{tang}\omega}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\omega}}$	$\cos\omega = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\omega}}$	$\operatorname{tang}\omega = \operatorname{tang}\omega$
$\operatorname{cotg}\omega = \frac{1}{\operatorname{tang}\omega}$	$\sec\omega = \sqrt{1+\operatorname{tang}^2\omega}$	$\operatorname{cosec}\omega = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\omega}}{\operatorname{tang}\omega}$

4) wenn $\operatorname{cotg}\omega$ gegeben

$\sin\omega = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\omega}}$	$\cos\omega = \frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\omega}}$	$\operatorname{tang}\omega = \frac{1}{\operatorname{cotg}\omega}$
$\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{cotg}\omega$	$\sec\omega = \frac{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\omega}}{\operatorname{cotg}\omega}$	$\operatorname{cosec}\omega = \sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\omega}$

5) wenn $\sec\omega$ gegeben

$\sin\omega = \frac{\sqrt{\sec^2\omega - 1}}{\sec\omega}$	$\cos\omega = \frac{1}{\sec\omega}$	$\operatorname{tang}\omega = \sqrt{\sec^2\omega - 1}$
$\operatorname{cotg}\omega = \frac{1}{\sqrt{\sec^2\omega - 1}}$	$\sec\omega = \sec\omega$	$\operatorname{cosec}\omega = \frac{\sec\omega}{\sqrt{\sec^2\omega - 1}}$

6) wenn $\operatorname{cosec}\omega$ gegeben

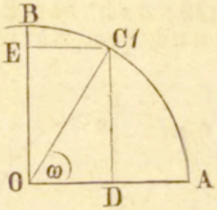
$\sin\omega = \frac{1}{\operatorname{cosec}\omega}$	$\cos\omega = \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\omega - 1}}{\operatorname{cosec}\omega}$	$\operatorname{tang}\omega = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\omega - 1}}$
$\operatorname{cotg}\omega = \sqrt{\operatorname{cosec}^2\omega - 1}$	$\sec\omega = \frac{\operatorname{cosec}\omega}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\omega - 1}}$	$\operatorname{cosec}\omega = \operatorname{cosec}\omega$

§. 14.

Beziehungen zwischen den trigonometrischen Functionen zweier Complementwinkel, zweier Winkel, welche sich zu 90° ergänzen.

Die trigonometrischen Functionen eines Winkels sind den entsprechenden Cofunctionen des Complementwinkels gleich.

Fig. 11.



Es seien nämlich (Fig. 11) $\sphericalangle AOC_1$ und $\sphericalangle BOC_1$ die beiden Complementwinkel, welche sich also zu einem Rechten ergänzen; alsdann ist, wenn $\sphericalangle AOC_1 = \omega$, offenbar $\sphericalangle BOC_1 = 90^0 - \omega$. Ist nun C_1D senkrecht auf OA und C_1E senkrecht auf OB, so hat man

1) $$\sin(90^0 - \omega) = \frac{C_1E}{OC_1} = \frac{OD}{OC_1} = \cos\omega,$$

2) $$\cos(90^0 - \omega) = \frac{OE}{OC_1} = \frac{C_1D}{OC_1} = \sin\omega,$$

3) $$\operatorname{tang}(90^0 - \omega) = \frac{\sin(90^0 - \omega)}{\cos(90^0 - \omega)} = \frac{\cos\omega}{\sin\omega} = \operatorname{cotg}\omega,$$

4) $$\operatorname{cotg}(90^0 - \omega) = \frac{\cos(90^0 - \omega)}{\sin(90^0 - \omega)} = \frac{\sin\omega}{\cos\omega} = \operatorname{tang}\omega,$$

5) $$\sec(90^0 - \omega) = \frac{1}{\cos(90^0 - \omega)} = \frac{1}{\sin\omega} = \operatorname{cosec}\omega,$$

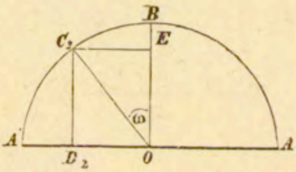
6) $$\operatorname{cosec}(90^0 - \omega) = \frac{1}{\sin(90^0 - \omega)} = \frac{1}{\cos\omega} = \sec\omega.$$

§. 15.

Beziehungen zwischen den trigonometrischen Functionen eines stumpfen Winkels und den Functionen seines Ueberschußwinkels über 90°.

Die trigonometrischen Functionen eines stumpfen Winkels sind alle den entsprechenden Cofunctionen seines Ueberschußwinkels über 90° dem absoluten Werthe nach, der Sinus und die Cosecante denselben auch dem Vorzeichen nach gleich.

Fig. 12.



Es sei nämlich (Fig. 12) $\sphericalangle A O C_2$ der stumpfe Winkel, also, indem $\sphericalangle B O C_2 = \omega$ gesetzt wird, $\sphericalangle A O C_2 = 90^0 + \omega$. Alsdann ist, wenn man $C_2 D_2$ senkrecht auf $A A'$ und $C_2 E$ senkrecht auf $O B$ fällt, offenbar:

1) $$\sin(90^0 + \omega) = \frac{C_2 D_2}{O C_2} = \frac{O E}{O C_2} = \cos\omega,$$

2) $$\cos(90^0 + \omega) = \frac{-O D_2}{O C_2} = \frac{-E C_2}{O C_2} = -\sin\omega,$$

3) $$\operatorname{tang}(90^0 + \omega) = \frac{\sin(90^0 + \omega)}{\cos(90^0 + \omega)} = \frac{\cos\omega}{-\sin\omega} = -\operatorname{cotg}\omega,$$

4) $$\operatorname{cotg}(90^0 + \omega) = \frac{\cos(90^0 + \omega)}{\sin(90^0 + \omega)} = \frac{-\sin\omega}{\cos\omega} = -\operatorname{tang}\omega,$$

5) $$\sec(90^0 + \omega) = \frac{1}{\cos(90^0 + \omega)} = \frac{1}{-\sin\omega} = -\operatorname{cosec}\omega,$$

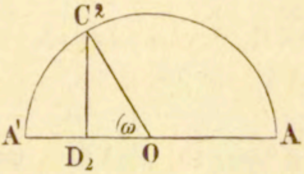
6) $$\operatorname{cosec}(90^0 + \omega) = \frac{1}{\sin(90^0 + \omega)} = \frac{1}{\cos\omega} = \sec\omega.$$

§. 16.

Beziehungen zwischen den trigonometrischen Functionen zweier Supplementwinkel, zweier Winkel, welche sich zu 180° ergänzen.

Die trigonometrischen Functionen eines Winkels sind alle den gleichnamigen Functionen des Supplementwinkels dem absoluten Werthe nach, der Sinus und die Cosecante denselben auch dem Vorzeichen nach gleich.

Fig. 13.



Denn es seien (Fig. 13) $\sphericalangle A\,O\,C_2$ und $\sphericalangle A'\,O\,C_2$ die beiden Supplementwinkel, welche sich also zu zwei Rechten ergänzen; alsdann ist, wenn $\sphericalangle A'\,O\,C_2 = \omega$, offenbar $\sphericalangle A\,O\,C_2 = 180^0 - \omega$. Fällt man nun $C_2\,D_2$ senkrecht auf $A\,A'$, so ist

1) $$\sin(180^0 - \omega) = \frac{C_2\,D_2}{O\,C_2} = \sin\omega,$$

2) $$\cos(180^0 - \omega) = \frac{-O\,D_2}{O\,C_2} = -\cos\omega,$$

3) $$\operatorname{tang}(180^0 - \omega) = \frac{\sin(180^0 - \omega)}{\cos(180^0 - \omega)} = \frac{\sin\omega}{-\cos\omega} = -\operatorname{tang}\omega,$$

4) $$\operatorname{cotg}(180^0 - \omega) = \frac{\cos(180^0 - \omega)}{\sin(180^0 - \omega)} = \frac{-\cos\omega}{\sin\omega} = -\operatorname{cotg}\omega,$$

5) $$\sec(180^0 - \omega) = \frac{1}{\cos(180^0 - \omega)} = \frac{1}{-\cos\omega} = -\sec\omega,$$

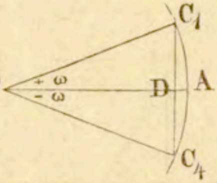
6) $$\operatorname{cosec}(180^0 - \omega) = \frac{1}{\sin(180^0 - \omega)} = \frac{1}{\sin\omega} = \operatorname{cosec}\omega.$$

§. 17

Beziehungen zwischen den trigonometrischen Functionen zweier dem absoluten Werthe nach gleichen, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzten Winkel.

Die trigonometrischen Functionen eines Winkels sind alle den gleichnamigen Functionen des absolut gleichen, aber entgegengesetzten Winkels dem absoluten Werthe nach, der Cosinus und die Secante denselben auch dem Vorzeichen nach gleich.

Fig. 14.



Seien nämlich (Fig. 15) $\sphericalangle A O C_1$ und $\sphericalangle A O C_4$ zwei Winkel, welche einander absolut gleich, aber entgegengesetzt sind, und sei $\sphericalangle A O C_1 = + \omega$, also $\sphericalangle A O C_4 = - \omega$, so ist, da $C_1 C_4$ senkrecht auf $O A$ steht:

1) $$\sin(-\omega) = \frac{C_4 D}{O C_4} = \frac{-C_1 D}{O C_1} = -\sin\omega,$$

2) $$\cos(-\omega) = \frac{O D}{O C_4} = \frac{O D}{O C_1} = \cos\omega,$$

3) $$\operatorname{tang}(-\omega) = \frac{\sin(-\omega)}{\cos(-\omega)} = \frac{-\sin\omega}{\cos\omega} = -\operatorname{tang}\omega,$$

4) $$\operatorname{cotg}(-\omega) = \frac{\cos(-\omega)}{\sin(-\omega)} = \frac{\cos\omega}{-\sin\omega} = -\operatorname{cotg}\omega,$$

5) $$\sec(-\omega) = \frac{1}{\cos(-\omega)} = \frac{1}{\cos\omega} = \sec\omega,$$

6) $$\operatorname{cosec}(-\omega) = \frac{1}{\sin(-\omega)} = \frac{1}{-\sin\omega} = -\operatorname{cosec}\omega.$$

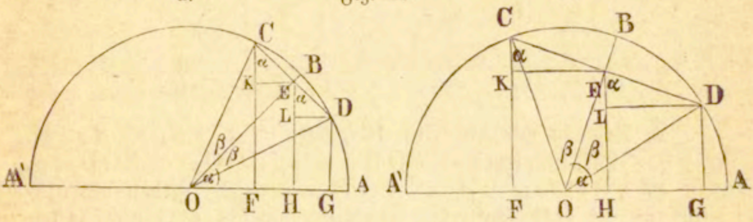
§. 18.

Beziehungen zwischen den trigonometrischen Functionen zweier beliebigen Winkel.

Bei der Aufsuchung des Zusammenhanges zwischen den trigonometrischen Functionen der Summe und der Differenz zweier

Winkel α und β und den Functionen dieser Winkel selbst berücksichtigen wir der Einfachheit wegen ausführlich nur die beiden Fälle, in welchen entweder beide Winkel spitz oder doch nur einer ein stumpfer ist.

a. Fig. 15. b.



1. Nehmen wir an (Fig. 15), daß $\sphericalangle \alpha < R$, $\sphericalangle \beta < R$, $\alpha + \beta \leqq R$, und setzen $\sphericalangle AOB = \alpha$, $\sphericalangle BOC = \sphericalangle BOD = \beta$, also $\sphericalangle AOC = \alpha + \beta$ und $\sphericalangle AOD = \alpha - \beta$. Ziehen wir alsdann die zu OB senkrechte Verbindungslinie CD und fällen auf AA' die Senkrechten CF, DG, EH und auf CF und EH die Senkrechten EK und DL, so ist $\sphericalangle DEL = \sphericalangle ECK = \sphericalangle AOB = \alpha$. Nun ergibt sich

$$\text{I.} \quad \sin(\alpha + \beta) = \frac{CF}{OC} = \frac{EH + CK}{OC}$$
$$= \frac{\sin\alpha \cdot OE + \cos\alpha \cdot CE}{OC}$$
$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

$$\text{II.} \quad \sin(\alpha - \beta) = \frac{DG}{OD} = \frac{EH - CK}{OC}$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

$$\text{III.} \quad \cos(\alpha + \beta) = \frac{\pm OF^{*)}}{OC} = \frac{OH - EK}{OC}$$
$$= \frac{\cos\alpha \cdot OE - \sin\alpha \cdot CE}{OC}$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

$$\text{IV.} \quad \cos(\alpha - \beta) = \frac{OG}{OD} = \frac{OH + EK}{OC}$$
$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

*) $+ OF$ (Fig. 15, a), $- OF$ (Fig. 15, b).

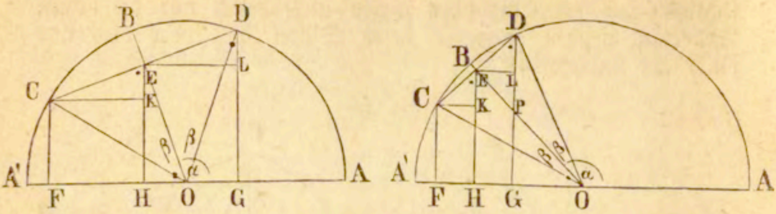


Fig. 16.

2. Nehmen wir an (Fig. 16), daß $\sphericalangle \alpha > R$, $\sphericalangle \beta < R$, $\alpha + \beta < 2R$, und setzen $\sphericalangle AOB = \alpha$, $\sphericalangle BOC = \sphericalangle BOD = \beta$, also $\sphericalangle AOC = \alpha + \beta$, $\sphericalangle AOD = \alpha - \beta$. Ziehen wir alsdann die zu OB senkrechte Verbindungslinie CD und fällen auf AA' die Senkrechten CF, EH, DG, ferner auf EH und DG die Senkrechten CK und EL, so ist $\sphericalangle CEK = \sphericalangle EDL = \sphericalangle A'OB = 180^0 - \alpha$. Nun ergibt sich

$$\text{I. } \sin(\alpha + \beta) = \frac{CF}{OC} = \frac{EH - EK}{OC}$$
$$= \frac{\sin(180^0 - \alpha) \cdot OE - \cos(180^0 - \alpha) \cdot CE}{OC}$$
$$= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta.$$

$$\text{II. } \sin(\alpha - \beta) = \frac{DG}{OD} = \frac{EH + EK}{OC}$$
$$= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta.$$

$$\text{III. } \cos(\alpha + \beta) = \frac{-OF}{OC} = \frac{-OH - CK}{OC}$$
$$= \frac{-\cos(180^0 - \alpha) \cdot OE - \sin(180^0 - \alpha) \cdot CE}{OC}$$
$$= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.$$

$$\text{IV. } \cos(\alpha - \beta) = \frac{\pm OG^{*)}}{OD} = \frac{-OH + CK}{OC}$$
$$= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta.$$

Ganz dieselben Ausdrücke ergeben sich, wenn von den beiden Winkeln α und β jeder ein stumpfer oder auch einer ein

*) $+OG$ (Fig. 16, a), $-OG$ (Fig. 16, b).

überstumpfer ist, wie sich auf dieselbe Weise leicht beweisen läßt. Daher ist denn in völliger Allgemeinheit für je zwei beliebige Winkel:

(1) $$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

(2) $$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

(3) $$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

(4) $$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Aus diesen Formeln lassen sich unzählig viele neue Formeln ableiten, und werden dieselben deshalb mit Recht die vier Fundamentalformeln der Trigonometrie genannt. Indeß sollen aus denselben im Folgenden nur die einfacheren Formeln, welche bei elementaren Untersuchungen am häufigsten zur Anwendung kommen, entwickelt werden.

Dividirt man zu dem Ende (1) durch (3), so wie (2) durch (4), so ergibt sich

$$\operatorname{tang}(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\operatorname{tang}(\alpha-\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta},$$

und wenn man auf der rechten Seite dieser Gleichungen Zähler und Nenner durch $\cos\alpha\cos\beta$ dividirt, so erhält man

(5) $$\operatorname{tang}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta}{1-\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta},$$

(6) $$\operatorname{tang}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tang}\alpha-\operatorname{tang}\beta}{1+\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}.$$

Ferner ergibt sich, wenn man (3) durch (1), und (4) durch (2) dividirt,

$$\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta},$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha-\beta)=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta},$$

und wenn man auf der rechten Seite dieser Gleichungen Zähler und Nenner durch $\sin\alpha\sin\beta$ dividirt, so erhält man

(7) $$\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta-1}{\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\alpha},$$

(8) $$\operatorname{cotg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta+1}{\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\alpha}.$$

§. 19.

Fernere Beziehungen zwischen den trigonometrischen Functionen zweier beliebigen Winkel.

Durch Addition und Subtraction der Fundamentalformeln (1) und (2) ergibt sich ferner

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta, \tag{9}$$

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta, \tag{10}$$

und durch Addition und Subtraction der Fundamentalformeln (3) und (4) ergibt sich

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta, \tag{11}$$

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta. \tag{12}$$

Setzt man in den vorstehenden vier Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= \mathrm{a}, \\ \alpha-\beta &= \mathrm{b}, \end{aligned}$$

demnach

$$\begin{aligned} \alpha &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{a}+\mathrm{b}), \\ \beta &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{a}-\mathrm{b}), \end{aligned}$$

so ergeben sich ferner die beachtenswerthen Formeln:

$$\sin \mathrm{a}+\sin \mathrm{b}=2\sin\tfrac{1}{2}(\mathrm{a}+\mathrm{b})\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{a}-\mathrm{b}), \tag{13}$$

$$\sin \mathrm{a}-\sin \mathrm{b}=2\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{a}+\mathrm{b})\sin\tfrac{1}{2}(\mathrm{a}-\mathrm{b}), \tag{14}$$

$$\cos \mathrm{a}+\cos \mathrm{b}=2\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{a}+\mathrm{b})\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{a}-\mathrm{b}), \tag{15}$$

$$\cos \mathrm{b}-\cos \mathrm{a}=2\sin\tfrac{1}{2}(\mathrm{a}+\mathrm{b})\sin\tfrac{1}{2}(\mathrm{a}-\mathrm{b}). \tag{16}$$

Diese vier Formeln dienen dazu um die Summe und die Differenz der Sinus oder Cosinus zweier Winkel in ein Product dieser Functionen zu verwandeln.

Durch Division der Gleichungen (13) und (14), so wie der Gleichungen (15) und (16) ergeben sich leicht noch die folgenden Formeln:

$$\frac{\sin \mathrm{a}+\sin \mathrm{b}}{\sin \mathrm{a}-\sin \mathrm{b}}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\mathrm{a}+\mathrm{b})}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\mathrm{a}-\mathrm{b})}, \tag{17}$$

$$\frac{\cos \mathrm{b}-\cos \mathrm{a}}{\cos \mathrm{a}+\cos \mathrm{b}}=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\mathrm{a}+\mathrm{b})\cdot\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\mathrm{a}-\mathrm{b}). \tag{18}$$

§. 20.

Beziehungen zwischen den trigonometrischen Functionen eines Winkels und den trigonometrischen Functionen des doppelten und halben Winkels.

Setzt man in den Fundamentalformeln (1) und (3) nunmehr $\beta = \alpha$, so erhält man:

(19) $$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

also auch $$\sin \alpha = 2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\alpha,$$

(20) $$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

also auch $$\cos \alpha = \cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha - \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Ebenso erhält man, indem man $\beta = \alpha$ setzt, aus den Formeln (5) und (7) die folgenden:

(21) $$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tang} \alpha}{1 - \operatorname{tang}^2 \alpha},$$

also auch $$\operatorname{tang} \alpha = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha}{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\alpha},$$

(22) $$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha},$$

also auch $$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2}\alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha}.$$

Mit Hülfe dieser vier Formeln kann man Sinus, Cosinus, Tangente und Cotangente des doppelten Winkels aus Sinus, Cosinus, Tangente und Cotangente des einfachen Winkels bestimmen.

Aus Gleichung (20) erhält man, je nachdem $1 - \sin^2 \alpha$ statt $\cos^2 \alpha$, oder $1 - \cos^2 \alpha$ statt $\sin^2 \alpha$ gesetzt wird,

(23) $$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha,$$

(24) $$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha,$$

oder, indem man $2\alpha = a$, also $\alpha = \frac{1}{2} a$ setzt,

(25) $$1 - \cos a = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a,$$

(26) $$1 + \cos a = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} a.$$

Die beiden Gleichungen geben ferner die Formeln:

(27) $$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}},$$

(28) $$\cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}},$$

aus welchem man durch Division noch die folgenden erhält:

$$(29) \qquad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} = \frac{1 - \cos a}{\sin \alpha},$$

$$(30) \qquad \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a}} = \frac{1 + \cos a}{\sin a}.$$

Mit Hülfe dieser vier Formeln lassen sich Sinus, Cosinus, Tangente und Cotangente des halben Winkels aus dem Cosinus des ganzen Winkels bestimmen.

§. 21.

Beziehungen zwischen den trigonometrischen Functionen der Winkel eines Dreiecks, überhaupt dreier Winkel, welche in Summe 180° betragen.

In jedem beliebigen Dreiecke ist

1) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \tfrac{1}{2} \alpha \cos \tfrac{1}{2} \beta \cos \tfrac{1}{2} \gamma.$

Denn es ist

$$\begin{aligned}
&\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \\
&= 2 \sin \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta) \qquad (\text{F. } 13) \\
&= 2 \sin \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) + 2 \sin \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \tfrac{1}{2} (\alpha + \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{F. } 19) \\
&= 2 \sin \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) [\cos \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) + \cos \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta)] \\
&= 2 \cos \tfrac{1}{2} \gamma [2 \cos \tfrac{1}{2} \alpha \cos \tfrac{1}{2} \beta] \qquad (\text{F. } 11) \\
&= 4 \cos \tfrac{1}{2} \alpha \cos \tfrac{1}{2} \beta \cos \tfrac{1}{2} \gamma.
\end{aligned}$$

2) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \tfrac{1}{2} \alpha \sin \tfrac{1}{2} \beta \sin \tfrac{1}{2} \gamma.$

Denn es ist

$$\begin{aligned}
&\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \\
&= 2 \cos \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta) \qquad (\text{F. } 15) \\
&= 2 \cos \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) + [1 - 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta)] (\text{F.} 26) \\
&= 1 + 2 \cos \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) [\cos \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) - \cos \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta)] \\
&= 1 + 2 \sin \tfrac{1}{2} \gamma [2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha \sin \tfrac{1}{2} \beta] \qquad (\text{F. } 12) \\
&= 1 + 4 \sin \tfrac{1}{2} \alpha \sin \tfrac{1}{2} \beta \sin \tfrac{1}{2} \gamma.
\end{aligned}$$

3) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

Denn es ist

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma =$$
$$= 2\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + 2\sin\gamma\cos\gamma \quad (\text{F. 13 u. 19})$$
$$= 2\sin\gamma\cos(\alpha - \beta) - 2\sin\gamma\cos(\alpha + \beta)$$
$$= 2\sin\gamma[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$
$$= 2\sin\gamma[2\sin\alpha\sin\beta] \quad (\text{F. } 12)$$
$$= 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

4) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -(1 + 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$.

Denn es ist

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma =$$
$$= 2\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \cos 2(\alpha + \beta) \quad (\text{F. } 15)$$
$$= 2\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + [2\cos^2(\alpha + \beta) - 1] \; (\text{F. } 24)$$
$$= -1 + 2\cos(\alpha + \beta)[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$
$$= -1 - 2\cos\gamma[2\cos\alpha\cos\beta] \quad (\text{F. } 11)$$
$$= -(1 + 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma).$$

5) $\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta + \operatorname{tang}\gamma = \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}\gamma$.

Denn da

$$\operatorname{tang}\gamma = -\operatorname{tang}(\alpha + \beta) = -\frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}, \quad (\text{F. } 5)$$

so ist $\operatorname{tang}\gamma - \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta\operatorname{tang}\gamma = -\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta$, mithin

$$\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta + \operatorname{tang}\gamma = \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta\operatorname{tang}\gamma.$$

6) $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha + \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta + \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma$.

Denn da

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\gamma = \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\beta) = \frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha + \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta - 1}, \quad (\text{F. } 7)$$

so ist $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma - \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha + \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta$, mithin

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha + \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\beta + \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\gamma = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha\operatorname{cotg}\beta\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\gamma.$$

§. 22.

Berechnung der trigonometrischen Functionen und Anfertigung der trigonometrischen Tafeln.

Die Einführung der trigonometrischen Functionen, welche bezweckt, die nach Graden, Minuten und Secunden gegebenen Winkel durch abstracte Zahlen zu ersetzen, ist für die Praxis nur dann von Nutzen, wenn mathematische Tafeln vorliegen, aus welchem man zu jedem gegebenen Winkel die zugehörigen trigonometrischen Functionen in Zahlen, und umgekehrt zu jeder in Zahlen gegebenen trigonometrischen Function den zugehörigen Winkel sogleich erhalten kann.

Gute Tafeln dieser Art haben die Einrichtung, daß man aus ihnen die Werthe der trigonometrischen Functionen oder vielmehr deren Logarithmen von allen Winkeln des ersten Quadranten in Intervallen von 10 Secunden unmittelbar, und von Secunde zu Secunde durch Hülfe beigefügter Differenztäfelchen leicht finden kann. Die wirkliche Berechnung der trigonometrischen Functionen wird sich aber auf die Winkel von 0^0 bis 45^0 beschränken, da nach §§. 14—16 die trigonometrischen Functionen der Winkel über 45^0 auf die der Winkel unter 45^0 zurückgeführt werden können. Auch erhellt, daß man blos die Sinus der Winkel zu berechnen haben wird, da nach §. 13 alle übrigen Functionen sich aus dem Sinus ableiten lassen. Da man ferner mit Hülfe der Fundamentalformel (1) §. 18 aus dem Sinus und Cosinus des einfachen Winkels den Sinus des doppelten, dreifachen, überhaupt jedes beliebig vielfachen Winkels finden kann, so ist ersichtlich, daß bei der Berechnung der trigonometrischen Functionen der Winkel in Intervallen von 10 Secunden endlich Alles auf die unmittelbare Berechnung von $\sin 10''$ ankommt. Diese Berechnung läßt sich aber auf folgende Weise ausführen.

Da, wie eine einfache geometrische Betrachtung ergibt, $\sin 45^0 = \cos 45^0$, und da die Summe aus dem Quadrate des Sinus und dem Quadrate des Cosinus eines Winkels immer gleich 1 ist, so ist auch

$$\sin^2 45^0 + \cos^2 45^0 = 2\sin^2 45^0 = 2\cos^2 45^0 = 1,$$

folglich

$$\cos 45^0 = \sin 45^0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

wonach man durch Ausziehung der Quadratwurzel aus 2 den Cosinus von 45^0 mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit finden kann. Durch successive Anwendung der Formel (28) §. 20 erhält man aber

$$\cos \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

$$\cos \tfrac{1}{4} \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{1}{2} \alpha}{2}},$$

$$\cos \tfrac{1}{8} \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{1}{4} \alpha}{2}},$$

. . . .

. . . .

$$\cos \frac{1}{2^n} \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{1}{2^{n-1}} \alpha}{2}},$$

$$\cos \frac{1}{2^{n+1}} \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{1}{2^n} \alpha}{2}},$$

wobei wir die Rechnung soweit durchgeführt annehmen, daß, wenn $\alpha = 45^0$ gesetzt wird, Winkel $\frac{1}{2^n} \alpha$ nächst größer als 10 Secunden und Winkel $\frac{1}{2^{n+1}} \alpha$ nächst kleiner als 10 Secunden ist. Für die Sinus der beiden Winkel, von welchen der eine nächst größer als 10 Secunden, und der andere nächst kleiner als 10 Secunden ist, wird sich dann nach Formel (27) §. 20 ergeben:

$$\sin \frac{1}{2^n} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{1}{2^{n-1}} \alpha}{2}},$$

$$\sin \frac{1}{2^{n+1}} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{1}{2^n} \alpha}{2}}.$$

Bei sehr kleinen Winkeln, wie den in Rede stehenden, kann man aber die zugehörigen Bogen ohne merklichen Fehler als gerade Linien annehmen, und alsdann bilden die Bogen und die Gegenprojectionen bei je zwei solchen Winkeln homologe Seiten zweier ähnlichen Dreiecke, wonach sodann erhellt, daß sich die Sinus sehr kleiner Winkel verhalten wie die Bogen oder die Winkel selbst. Daher ist denn

$$\sin 10'' : \sin \frac{1}{2^n} \alpha = 10'' : \frac{1}{2^n} \alpha,$$

$$\sin 10'' : \sin \frac{1}{2^{n+1}} \alpha = 10'' : \frac{1}{2^{n+1}} \alpha,$$

woraus für den Sinus des Winkels von 10 Secunden sich ergibt

$$1) \qquad \sin 10'' = \frac{2^n \cdot 10'' \sin \frac{1}{2^n} \alpha}{\alpha},$$

$$2) \qquad \sin 10'' = \frac{2^{n+1} \cdot 10'' \sin \frac{1}{2^{n+1}} \alpha}{\alpha}.$$

Jeder dieser beiden Ausdrücke, in welchen $\alpha = 45 \cdot 60 \cdot 60 = 162000$ Secunden zu nehmen ist, gibt einen Werth für $\sin 10''$, welche beide freilich nicht ganz genau sind. Diejenigen Decimalstellen aber, in welchen vom Anfange an beide Werthe übereinstimmen, werden den Werth von $\sin 10''$ noch vollkommen richtig darstellen.

Ist somit $\sin 10''$ gefunden, so berechnet sich nach der Tabelle §. 13 leicht $\cos 10''$, $\operatorname{tang} 10''$, $\operatorname{cotg} 10''$ ꝛc. — Unter Anwendung der Formel (19) §. 20 erhält man sodann $\sin 20'' = 2 \sin 10'' \cdot \cos 10''$, und hieraus wieder $\cos 20''$, $\operatorname{tang} 20''$, $\operatorname{cotg} 20''$ ꝛc. — Weiter wird sich dann unter Anwendung der Formel (1) §. 18 ergeben $\sin 30'' = \sin 20'' \cdot \cos 10'' + \cos 20'' \cdot \sin 10''$, woraus dann wieder $\cos 30''$, $\operatorname{tang} 30''$, $\operatorname{cotg} 30''$ sich berechnen lassen. — U. s. w.

Es sollte durch die vorstehende Entwicklung blos die Möglichkeit der Berechnung der trigonometrischen Functionen dargethan werden, nicht aber wird behauptet, daß dieselben auf die angegebene Weise wirklich berechnet werden. Zur wirklichen Berechnung bedient man sich vielmehr bequemerer und einfacherer Methoden, welche die höhere Analysis an die Hand gibt.

Die aufgestellten Tafeln enthalten, was zu bemerken ist, nicht einfach die trigonometrischen Functionen der Winkel, sondern vielmehr die Logarithmen derselben. Große Erleichterung beim Gebrauche durch die Zweckmäßigkeit ihrer Einrichtung gewähren die logarithmisch-trigonometrischen Tafeln von Vega, in ihrer neuesten Ausgabe von Bremiker, Leipzig 1875. Die Einleitung zu denselben gibt die ausführliche Anweisung zu ihrem Gebrauche, namentlich zur Lösung der beiden Hauptaufgaben: vermittelst der Tafeln

1) zu jedem gegebenen Winkel die zugehörige trigonometrische Function, beziehlich ihren Logarithmus zu finden,
2) zu jeder direct oder durch ihren Logarithmus gegebenen trigonometrischen Function den zugehörigen Winkel zu finden.

Anmerkung. Wie wir bei dem vorstehend angegebenen Verfahren zur Berechnung der trigonometrischen Functionen von dem Winkel von 45^0 ausgegangen sind, so hätte man auch von dem Winkel von 30^0 oder von dem Winkel von 18^0 ausgehen können. Denn unmittelbar ergeben sich die Sinus dieser drei Winkel als die Hälften der Sehnen oder Chorden, welche in einem Kreise vom Radius 1 den Centriwinkeln von 90^0, 60^0, 36^0 entsprechen. Da diese Sehnen nämlich auch als die Seiten eines dem Kreise einbeschriebenen regulären Vierecks, Sechsecks, Zehnecks angesehen werden können, so findet man leicht:

$$\sin 45^0 = \tfrac{1}{2} \operatorname{chord} 90^0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$
$$\sin 30^0 = \tfrac{1}{2} \operatorname{chord} 60^0 = \tfrac{1}{2},$$
$$\sin 18^0 = \tfrac{1}{2} \operatorname{chord} 36^0 = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1).$$

---

§. 23.

Uebungs-Aufgaben über die Beziehungen der trigonometrischen Functionen der einfachen, doppelten und halben Winkel.

1) Allgemeine Aufgaben.

1—14. Wie groß ist der Winkel, für welchen sich verhält

1. der Sinus zum Cosinus wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle\, \alpha = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}\right)$.

2. der Sinus zur Tangente wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle\, \alpha = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{(n+m)(n-m)}}{n}\right) = \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{m}{n}\right)$.

3. der Sinus zur Cotangente wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle\, \alpha = \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 4n^2}}{2n}\right)$.

4. der Sinus zur Secante wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle\, \alpha = \operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{n \pm \sqrt{n^2 - 4m^2}}{2n}}\right) = \tfrac{1}{2} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{2m}{n}\right)$.

5. der Sinus zur Cosecante wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle\, \alpha = \operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{m}{n}}\right)$.

6. der Cosinus zur Tangente wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle \alpha = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 4n^2}}{2n}\right)$.

7. der Cosinus zur Cotangente wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle \alpha = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{m}{n}\right)$.

8. der Cosinus zur Secante wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle \alpha = \operatorname{arc}\left(\cos = \sqrt{\frac{m}{n}}\right)$.

9. der Cosinus zur Cosecante wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle \alpha = \operatorname{arc}\left(\cos = \sqrt{\frac{n \pm \sqrt{n^2 - 4m^2}}{2n}}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{2m}{n}\right)$.

10. die Tangente zur Cotangente wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle \alpha = \operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{m}{m+n}}\right)$.

11. die Tangente zur Secante wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle \alpha = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{m}{n}\right)$.

12. die Tangente zur Cosecante wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle \alpha = \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 4n^2}}{2n}\right)$.

13. die Cotangente zur Secante wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle \alpha = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 4n^2}}{2n}\right)$.

14. die Cotangente zur Cosecante wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle \alpha = \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{m}{n}\right)$.

15—26. Wie groß ist der Winkel, für welchen sich verhält
15. der Sinus des einfachen Winkels zum Sinus des doppelten Winkels wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle \alpha = \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{n}{2m}\right)$.

16. der Sinus des einfachen Winkels zum Cosinus des doppelten Winkels wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle \alpha = \text{arc}\left(\sin = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 + 8m^2}}{4m}\right)$.

17. der Sinus des einfachen Winkels zur Tangente des doppelten Winkels wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle \alpha = \text{arc}\left(\cos = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 2n^2}}{2n}\right)$.

18. der Cosinus des einfachen Winkels zum Sinus des doppelten Winkels wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle \alpha = \text{arc}\left(\sin = \frac{n}{2m}\right)$.

19. der Cosinus des einfachen Winkels zum Cosinus des doppelten Winkels wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle \alpha = \text{arc}\left(\cos = \frac{n \pm \sqrt{n^2 + 8m^2}}{4m}\right)$.

20. der Cosinus des einfachen Winkels zur Tangente des doppelten Winkels wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle \alpha = \text{arc}\left(\sin = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 2n^2}}{2n}\right)$.

21. die Tangente des einfachen Winkels zum Sinus des doppelten Winkels wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle \alpha = \text{arc}\left(\cos = \sqrt{\frac{n}{2m}}\right)$.

22. die Tangente des einfachen Winkels zur Tangente des doppelten Winkels wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle \alpha = \text{arc}\left(\text{tang} = \sqrt{\frac{n - 2m}{n}}\right)$.

23. die Tangente des einfachen Winkels zur Cotangente des doppelten Winkels wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle \alpha = \text{arc}\left(\text{cotg} = \sqrt{\frac{m + 2n}{m}}\right)$.

24. die Cotangente des einfachen Winkels zum Sinus des doppelten Winkels wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle \alpha = \text{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{n}{2m}}\right)$.

25. die Cotangente des einfachen Winkels zur Tangente des doppelten Winkels wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle\, \alpha = \text{arc}\left(\text{tang} = \sqrt{\frac{n}{n + 2m}}\right).$

26. die Cotangente des einfachen Winkels zur Cotangente des doppelten Winkels wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle\, \alpha = \text{arc}\left(\text{cotg} = \sqrt{\frac{m}{m - 2n}}\right).$

27--36. Wie groß ist der Winkel, für welchen sich verhält

27. der Sinus des ganzen Winkels zum Sinus des halben Winkels wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle\, \alpha = \text{arc}\left(\cos = \frac{m^2 - 2n^2}{2n^2}\right).$

28. der Sinus des ganzen Winkels zum Cosinus des halben Winkels wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle\, \alpha = \text{arc}\left(\cos = \frac{2n^2 - m^2}{2n^2}\right).$

29. der Sinus des ganzen Winkels zur Tangente des halben Winkels wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle\, \alpha = \text{arc}\left(\cos = \frac{-n \pm m}{n}\right).$

30. der Sinus des ganzen Winkels zur Cotangente des halben Winkels wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle\, \alpha = \text{arc}\left(\cos = \frac{n \pm m}{n}\right).$

31. der Cosinus des ganzen Winkels zum Sinus des halben Winkels wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle\, \alpha = \text{arc}\left(\cos = \frac{-m^2 \pm \sqrt{m^4 + 8m^2n^2}}{4n^2}\right).$

32. der Cosinus des ganzen Winkels zum Cosinus des halben Winkels wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle\, \alpha = \text{arc}\left(\cos = \frac{m^2 \pm \sqrt{m^4 + 8m^2n^2}}{4n^2}\right).$

33. die Tangente des ganzen Winkels zur Tangente des halben Winkels wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle\, \alpha = \text{arc}\left(\cos = \frac{n}{m - n}\right).$

34. die Tangente des ganzen Winkels zur Cotangente des halben Winkels wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle \alpha = \text{arc}\left(\cos = \frac{n}{m+n}\right)$.

35. die Cotangente des ganzen Winkels zur Tangente des halben Winkels wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle \alpha = \text{arc}\left(\cos = \frac{m}{m+n}\right)$.

36. die Cotangente des ganzen Winkels zur Cotangente des halben Winkels wie m zu n?

Antw. $\sphericalangle \alpha = \text{arc}\left(\cos = \frac{m}{n-m}\right)$.

---

2. Berechnungs-Aufgaben.

37—54. Wie groß ist der spitze Winkel, von welchem

37. der Sinus gleich ist dem Zweifachen des Cosinus?
Antw. $63^0\,26'\,5'',81$.

38. der Sinus gleich ist dem dritten Theile der Tangente?
Antw. $70^0\,31'\,43'',61$.

39. der Sinus gleich ist dem Vierfachen der Cotangente?
Antw. $76^0\,20'\,43'',52$.

40. der Sinus gleich ist dem dritten Theile der Secante?
Antw. $20^0\,54'\,18'',56$ oder $69^0\,5'\,41'',44$.

41. der Sinus gleich ist dem dritten Theile der Cosecante?
Antw. $35^0\,15'\,51'',79$.

42. der Cosinus gleich ist dem Zweifachen der Tangente?
Antw. $24^0\,28'\,11'',27$.

43. der Cosinus gleich ist dem neunten Theile der Secante?
Antw. $70^0\,31'\,43'',62$.

44. die Tangente gleich ist dem Zweifachen der Cotangente?
Antw. $54^0\,44'\,8'',19$.

45. die Tangente gleich ist dem vierten Theile der Cosecante?
Antw. $28^0\,1'\,12'',63$.

46. die Cotangente gleich ist dem Fünffachen der Secante?
Antw. $11^0\,6'\,12'',68$.

47. der Sinus gleich ist dem halben Cosinus des doppelten Winkels?

Antw. $21^0 28' 14''$, 52.

48. der Cosinus gleich ist dem Zweifachen der Tangente des doppelten Winkels?

Antw. $12^0 59' 16''$, 35.

49. die Tangente gleich ist dem vierten Theile der Cotangente des doppelten Winkels?

Antw. $18^0 26' 5''$, 81.

50. die Cotangente gleich ist dem Dreifachen der Cotangente des doppelten Winkels?

Antw. 30^0.

51. der Sinus gleich ist dem vierten Theile des Cosinus des halben Winkels?

Antw. $14^0 21' 41''$, 44.

52. der Cosinus gleich ist dem halben Cosinus des halben Winkels?

Antw. $65^0 4' 6''$, 42.

53. die Tangente gleich ist dem dritten Theile der Cotangente des halben Winkels?

Antw. $41^0 24' 34''$, 62.

54. die Cotangente gleich ist dem vierten Theile der Cotangente des halben Winkels?

Antw. $70^0 31' 43''$, 62.

55—64. Wie groß ist der Winkel α, wenn

55. $\sin\alpha \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} - \cos\alpha$.

Antw. $\sin\alpha = 1$ oder $\frac{1}{2}$; $\sphericalangle\,\alpha = 90^0$ oder 30^0.

56. $\operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{tang} 2\alpha - \operatorname{tang}\alpha \cdot \operatorname{cotg} 2\alpha = 2$.

Antw. $\operatorname{tang}\alpha = \pm(1 \pm \sqrt{2})$; $\sphericalangle\,\alpha = 22^0 30'$, $67^0 30'$, $112^0 30'$, $157^0 30'$.

57. $\sin\frac{1}{2}\alpha + \cos\alpha = 1$.

Antw. $\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}$; $\sphericalangle\,\alpha = 60^0$.

58. $\cos\frac{1}{2}\alpha + \cos\alpha = 1$.

Antw. $\cos\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{4}(\sqrt{17} - 1)$; $\sphericalangle\,\alpha = 77^0 20' 12''$.

59. $\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha = 2$.

Antw. $\sin\alpha = 0$ oder $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\sphericalangle\, \alpha = 45^0$ oder 180^0.

60. $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \cos\alpha$.

Antw. $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ oder -1; $\sphericalangle\, \alpha = 60^0$ oder 180^0.

61. $6\sin^2\alpha + 8\cos^2\alpha = 7\sin 2\alpha$.

Antw $\operatorname{tang}\alpha = 1$ oder $1\frac{1}{3}$; $\alpha = 45^0$ oder $\alpha = 53^0\,7'\,48'',36$.

62. $6\sin^2\alpha + 28\cos^2\alpha = 13\sin 2\alpha$.

Antw. $\operatorname{tang}\alpha = 2$ oder $2\frac{1}{3}$; $\sphericalangle\, \alpha = 63^0 26' 5'',82$ od. $66^0 48' 5'',06$.

63. $\sin 2\alpha - \sin\alpha = \frac{2}{9}\operatorname{tang}\alpha$.

Antw. $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ od. $-\frac{1}{6}$; $\sphericalangle\, \alpha = 48^0 11' 22'',88$ od. $99^0 35' 38'',64$.

64. $2\sin\alpha + 9\cos\alpha = 6$.

Antw. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ od. $\frac{8}{17}$; $\sphericalangle\, \alpha = 36^0 52' 11'',65$ od. $61^0 55' 39'',04$.

65. $8\sin\alpha - \cos\alpha = 4$.

Antw. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ od. $-\frac{12}{13}$; $\sphericalangle\, \alpha = 36^0 52' 11'',65$ od. $157^0 22' 48'',41$.

66. $9\sin\alpha - 2\cos\alpha = 6$.

Antw. $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ od. $-\frac{15}{17}$; $\sphericalangle\, \alpha = 53^0 7' 48'',36$ od. $151^0 55' 39'',11$.

Zweiter Abschnitt.

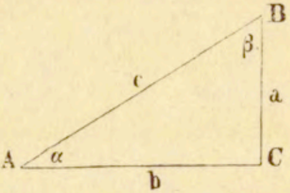
Anwendung der trigonometrischen Functionen zur Berechnung der Dreiecke.

§. 24.

Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks.

In dem rechtwinkligen Dreiecke ist der eine Winkel als rechter immer gegeben. Sind also außer diesem noch zwei unabhängige Stücke, nämlich entweder eine Seite und ein Winkel oder zwei Seiten gegeben, so lassen sich die übrigen Stücke des Dreiecks leicht bestimmen.

Fig. 17.



Bezeichnet man nämlich (Fig. 17) die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks A B C mit c, die beiden Katheten mit a und b und die diesen gegenüberliegenden Winkel entsprechend mit α und β, so gelten nach dem Begriffe der trigonometrischen Functionen und dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichungen:

1) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $\sin\beta = \frac{b}{c}$,

2) $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ „ $\cos\beta = \frac{a}{c}$,

3) $\operatorname{tang}\alpha = \frac{a}{b}$ „ $\operatorname{tang}\beta = \frac{b}{a}$,

4) $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$ „ $\operatorname{cotg}\beta = \frac{a}{b}$,

5) $\alpha + \beta = 90^0$ „ $a^2 + b^2 = c^2$,

durch deren Anwendung theils in der gegebenen, theils in umgeänderter Form alle Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck in Bezug auf Bestimmung der Seiten und Winkel sich lösen lassen. Dabei sind nun folgende fünf Fälle zu betrachten.

I. Es sei gegeben die Hypotenuse und ein spitzer Winkel: die übrigen Stücke des rechtwinkeligen Dreicks zu bestimmen.

Gegeben c, α; gesucht β, a, b.

Auflösung. Da die Summe der Winkel $\alpha + \beta = 90^0$, so ist offenbar der gesuchte spitze Winkel

1) $$\sphericalangle \beta = 90^0 - \alpha;$$

ferner ergibt sich aus den Gleichungen (1) und (2) für die beiden Katheten

2) $$a = c \sin \alpha,$$
3) $$b = c \cos \alpha.$$

Beispiel. Sei $c = 32^m, 45$, $\sphericalangle \alpha = 57^0 13' 7''$, alsdann ist

1) $\sphericalangle \beta = 90^0 - 57^0 13' 7'' = 32^0 46' 53''$.

2) $$\log a = \begin{cases} \log 32{,}45 & = 1{,}5112147 \\ + \log \sin 57^0 13' 7'' & = + 9{,}9246630 - 10 \\ & \overline{1{,}4358777} \end{cases}$$

$a = 27^m, 2821$.

3) $$\log b = \begin{cases} \log 32{,}45 & = 1{,}5112147 \\ + \log \cos 57^0 13' 7'' & = + 9{,}7335464 - 10 \\ & \overline{1{,}2447611} \end{cases}$$

$b = 17^m, 5696$.

II. Es sei gegeben eine Kathete und der anliegende spitze Winkel: die übrigen Stücke des rechtwinkligen Dreiecks zu bestimmen.

Gegeben a, β; gesucht α, b, c.

Auflösung. Es ergibt sich sofort für den gesuchten spitzen Winkel

1) $$\sphericalangle \alpha = 90^0 - \beta;$$

ferner ergibt sich aus den Gleichungen (2) und (3) für die andere Kathete und die Hypotenuse

2) $$b = a \operatorname{tang} \beta,$$

3) $$c = \frac{a}{\cos \beta}.$$

Beispiel. Sei $a = 20^m, 18$, $\sphericalangle \beta = 38° 36' 5''$, alsdann ist

1) $\sphericalangle \alpha = 90^0 - 38^0 36' 5'' = 51^0 23' 55''$.

2) $$\log b = \begin{cases} \log 20{,}18 & = 1{,}3049212 \\ + \log \operatorname{tang} 38^0 36' 5'' & = + 9{,}9021820 - 10 \\ & 1{,}2071032 \end{cases}$$

$b = 16^m, 1103$.

3) $$\log c = \begin{cases} \log 20{,}18 & = 1{,}3049212 \\ - \log \cos 38^0 36' 5'' & = - 9{,}8929320 + 10 \\ & 1{,}4119892 \end{cases}$$

$c = 25^m, 8219$.

III. Es sei gegeben eine Kathete und der gegenüberliegende spitze Winkel: die übrigen Stücke des rechtwinkligen Dreiecks zu bestimmen.

Gegeben a, α; gesucht β, b, c.

Auflösung. Es ergibt sich wieder für den gesuchten spitzen Winkel

1) $$\sphericalangle \beta = 90^0 - \alpha;$$

aus den Gleichungen (1) und (4) ergibt sich ferner für die andere Kathete und die Hypotenuse

2) $$b = a \operatorname{cotg} \alpha,$$

3) $$c = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Beispiel. Sei $a = 39^m, 77$, $\sphericalangle a = 51^0 55' 16''$, alsdann ist

1) $\sphericalangle \beta = 90^0 - 51^0 55' 16'' = 38^0 4' 44''$.

2) $$\log b = \begin{cases} \log 39{,}77 & = 1{,}5995556 \\ + \log \operatorname{cotg} 51^0 55' 16'' & = + 9{,}8940420 - 10 \\ & 1{,}4935976 \end{cases}$$

$b = 31^m, 16001$.

3) $$\log c = \begin{cases} \log 39{,}77 & = 1{,}5995556 \\ - \log \sin 51^0 55' 16'' & = - 9{,}8960643 + 10 \\ & 1{,}7034913 \end{cases}$$

$c = 50^m, 5232$.

IV. Es sei gegeben die Hypotenuse und eine Kathete: die übrigen Stücke des rechtwinkligen Dreiecks zu bestimmen.

Gegeben c, a; gesucht α, β, b.

Auflösung. Durch die Gleichungen (1) und (2) sind die beiden spitzen Winkel ohne Weiteres gegeben, nämlich

1) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, also $\sphericalangle\alpha = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{a}{c}\right)$,

2) $\cos\beta = \frac{a}{c}$, also $\sphericalangle\beta = \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{a}{c}\right)$;

ferner ergibt sich sofort aus Gleichung (5) für die andere Kathete

3) $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)}$.

Beispiel. Sei $c = 33^m,15$ und $a = 19^m,89$, alsdann ist

$$1)\quad \log\sin\alpha = \begin{cases} \log 19{,}89 = 1{,}2986348 \\ -\log 33{,}15 = -1{,}5204835 \end{cases}$$
$$\overline{9{,}7781513 - 10}$$

$\sphericalangle\alpha = 36^0\,52'\,11'',64$, folglich

$\sphericalangle\beta = 90^0 - \alpha = 53^0\,7'\,48'',36$; oder

$$2)\quad \log\cos\beta = \begin{cases} \log 19{,}89 = 1{,}2986348 \\ -\log 33{,}15 = -1{,}5204835 \end{cases}$$
$$\overline{9{,}7781513 - 10}$$

$\sphericalangle\beta = 53^0\,7'\,48'',36$.

$$3)\quad \log b = \tfrac{1}{2}\begin{cases} \log 53{,}04 = 1{,}7246035 \\ +\log 13{,}26 = +1{,}1225435 \end{cases}$$
$$\overline{2{,}8471470}$$

$\log b = 1{,}4235735$,

$b = 26^m,52$.

V. Es seien gegeben die beiden Katheten: die übrigen Stücke des rechtwinkligen Dreiecks zu bestimmen.

Gegeben a, b; gesucht α, β, c.

Auflösung. Durch die Gleichungen (3) und (4) ergibt sich ohne Weiteres für die beiden spitzen Winkel

1) $\operatorname{tang}\alpha = \frac{a}{b}$, also $\sphericalangle\alpha = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{a}{b}\right)$,

2) $\operatorname{cotg}\beta = \frac{a}{b}$, also $\sphericalangle\beta = \operatorname{arc}\left(\operatorname{cotg} = \frac{a}{b}\right)$;

aus der Gleichung (5) ferner ergibt sich zwar sofort die Hypotenuse, nämlich

$$c = \sqrt{a^2 + b^2};$$

da aber jetzt α und β bekannt sind, so berechnet sich aus Gleichung (1) zweckmäßiger

$$3) \qquad c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Beispiel. Sei $a = 28^m,73$ und $b = 19^m,89$, alsdann ist

$$1) \ \log \operatorname{tang} \alpha = \begin{cases} \log 28,73 = 1,4583356 \\ -\log 19,89 = -1,2986348 \end{cases}$$
$$0,1597008$$

$$\sphericalangle\, \alpha = 55^0\, 18'\, 17'', 44, \text{ folglich}$$
$$\sphericalangle\, \beta = 90^0 - \alpha = 34^0\, 41'\, 42'', 56; \text{ oder}$$

$$2) \ \log \operatorname{cotg} \beta = \begin{cases} \log 28,73 = 1,4583356 \\ -\log 19,89 = -1,2986348 \end{cases}$$
$$0,1597008$$

$$\sphericalangle\, \beta = 34^0\, 41'\, 42'', 55.$$

$$3) \ \log c = \begin{cases} \log 28,73 \qquad\qquad = 1,4583356 \\ -\log\sin 55^0 18' 17'',44 = -9,9149734 + 10 \end{cases}$$
$$1,5433622$$

$$c = 34^m, 9431.$$

---

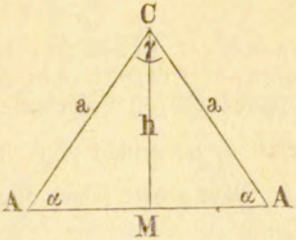
§. 25.

Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks und der regulären Vielecke.

Da durch die aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Grundlinie gefällte Senkrechte (die Höhe) sowohl der Winkel an der Spitze als die Grundlinie halbirt, und daher das gleichschenklige Dreieck in zwei congruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird, so liefern die in dem vorigen Paragraphen aufgestellten Formeln zugleich die Mittel zur Auflösung aller Aufgaben, welche beim gleichschenkligen Dreieck vorkommen können. Dieselben verwandeln sich nämlich dadurch in Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck, daß man die Hälfte des Winkels an der Spitze so wie die Hälfte der Grundlinie, wenn diese Stücke gegeben sind, in Rechnung bringt, und, wenn sie gesucht werden, die Hälften derselben berechnet. Alsdann ist durch Verdopplung der gefundenen Stücke auch der ganze Winkel an der Spitze so wie die ganze Grundlinie bestimmt.

Auf die Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks reducirt sich die Berechnung der **regulären Vielecke**, da jedes reguläre Vieleck durch sein Fundamental-Dreieck, welches ein gleichschenkliges ist, bestimmt wird.

Fig. 18.



Das gleichschenklige Dreieck sei A C A (Fig. 18); wir bezeichnen die Scheitelseite CA desselben mit a, die Grundlinie AA mit c, die diesen Stücken gegenüberliegenden Winkel entsprechend mit α und γ, und die Höhe mit h.

Es sind nun folgende fünf Fälle zu betrachten.

I. **Es sei gegeben die Scheitelseite und der Winkel an der Spitze: die übrigen Stücke des gleichschenkligen Dreiecks zu bestimmen.**

Gegeben a, γ; gesucht α, c, h.

Auflösung. Aus dem rechtwinkligen $\triangle$CMA ergibt sich für den gesuchten Winkel an der Grundlinie

1) $$\sphericalangle \alpha = 90^0 - \tfrac{1}{2}\gamma;$$

ferner ergibt sich $\frac{1}{2}\,c = a \sin \frac{1}{2}\gamma$, und daher erhält man für die Grundlinie

2) $$c = 2\,a \sin \tfrac{1}{2}\gamma;$$

endlich ergibt sich für die Höhe

3) $$h = a \cos \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Beispiel. Sei $a = 13^m, 36$, und $\sphericalangle \gamma = 32^0\,50'\,47''$, alsdann ist

1) $$\sphericalangle \alpha = 90^0 - \tfrac{1}{2}\gamma = 73^0\,34'\,36'',5;$$

2) $$\log c = \begin{cases} \log 26{,}72 & = 1{,}4268365 \\ +\log \sin 16^0 25' 23'',5 & = +9{,}4513716-10 \end{cases}$$
$$\overline{0{,}8782081}$$

$$c = 7^m, 55454;$$

$$3)\ \log h = \begin{cases} \quad \log 13{,}36 & = \quad 1{,}1258065 \\ + \log \cos 16^0 25' 23'',5 & = + 9{,}9819090 - 10 \\ \hline & \quad\ 1{,}1077155 \end{cases}$$

$$h = 12^m,8149.$$

II. Es sei gegeben die Scheitelseite und der Winkel an der Grundlinie: die übrigen Stücke des gleichschenkligen Dreiecks zu bestimmen.

Gegeben a, α; gesucht γ, c, h.

Auflösung. Man erhält sofort für den Winkel an der Spitze

$$1) \qquad \sphericalangle \gamma = 180^0 - 2\alpha;$$

ferner, in dem rechtwinkligen $\triangle CMA$ ist $\frac{1}{2}c = a \cos \alpha$, folglich ergibt sich für die Grundlinie

$$2) \qquad c = 2a \cos \alpha;$$

für die Höhe erhält man

$$3) \qquad h = a \sin \alpha.$$

Beispiel. Sei $a = 21^m,69$ und $\sphericalangle \alpha = 60^0 8' 14''$, alsdann ist

$$1)\ \sphericalangle \gamma = 180^0 - 2\alpha = 59^0 43' 32'';$$

$$2)\ \log c = \begin{cases} \quad \log 43{,}38 & = \quad 1{,}6372895 \\ + \log \cos 60^0 8' 14'' & = + 9{,}6971635 - 10 \\ \hline & \quad\ 1{,}3344530 \end{cases}$$

$$c = 21^m,5999;$$

$$3)\ \log h = \begin{cases} \quad \log 21{,}69 & = \quad 1{,}3362596 \\ + \log \sin 60^0 8' 14'' & = + 9{,}9381295 - 10 \\ \hline & \quad\ 1{,}2743891 \end{cases}$$

$$h = 18^m,81001.$$

III. Es sei gegeben die Grundlinie und der Winkel an der Spitze: die übrigen Stücke des gleichschenkligen Dreiecks zu bestimmen.

Gegeben c, γ; gesucht α, a, h.

Auflösung. Aus dem rechtwinkligen $\triangle CMA$ erhält man für den Winkel an der Grundlinie

$$1) \qquad \sphericalangle \alpha = 90^0 - \tfrac{1}{2}\gamma;$$

ferner ist $\frac{1}{2}c = a \sin \frac{1}{2}\gamma$, woraus sich für die Scheitelseite ergibt

2) $$a = \frac{\frac{1}{2}c}{\sin \frac{1}{2}\gamma};$$

endlich ist auch $\frac{1}{2}c = h \operatorname{tang} \frac{1}{2}\gamma$, und hieraus erhält man für die Höhe

3) $$h = \frac{\frac{1}{2}c}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma}.$$

Beispiel. Sei $c = 13^m,75$ und $\sphericalangle \gamma = 64^0 28' 12''$, alsdann ist

1) $\sphericalangle \alpha = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma = 57^0 45' 54''$;

2) $$\log a = \begin{cases} \log 6{,}875 & = \quad 0{,}8372727 \\ -\log \sin 32^0\, 14'\, 6'' & = -9{,}7270473 + 10 \end{cases}$$
$$\overline{\quad 1{,}1102254}$$

$a = 12^m,8892$.

3) $$\log h = \begin{cases} \log 6{,}875 & = \quad 0{,}8372727 \\ -\log \operatorname{tang} 32^0 14' 6'' & = -9{,}7997450 + 10 \end{cases}$$
$$\overline{\quad 1{,}0375277}$$

$h = 10^m,9025$.

IV. Es sei gegeben die Grundlinie und der Winkel an der Grundlinie: die übrigen Stücke des gleichschenkligen Dreiecks zu bestimmen.

Gegeben c, α; gesucht γ, a, h.

Auflösung. Wie vorhin, erhält man für den Winkel an der Spitze

1) $$\sphericalangle \gamma = 180^0 - 2\alpha;$$

in dem rechtwinkligen $\triangle CMA$ ist ferner $\frac{1}{2}c = a \cos \alpha$, woraus sich für die Scheitelseite ergibt

2) $$a = \frac{\frac{1}{2}c}{\cos \alpha};$$

für die Höhe endlich erhält man

3) $$h = \tfrac{1}{2}c \operatorname{tang} \alpha.$$

Beispiel. Sei $c = 34^m,78$ und $\sphericalangle \alpha = 65^0\, 17'\, 9''$, alsdann ist

1) $\sphericalangle \gamma = 180^0 - 2\alpha = 49^0 25' 42''$;

2) $$\log a = \begin{cases} \log 17{,}39 & = \quad 1{,}2402996 \\ -\log \cos 65^0\, 17'\, 9'' & = -9{,}6212715 + 10 \end{cases}$$
$$\overline{\quad 1{,}6190281}$$

$a = 41^m,5937$.

$$3)\ \log h = \begin{cases} \log 17{,}39 & = 1{,}2402996 \\ + \log\operatorname{tang} 65^0 17' 9'' & = + 0{,}3370078 \end{cases}$$
$$\qquad 1{,}5773074$$

$$h = 37^m, 7839.$$

V. Sei gegeben die Scheitelseite und die Grundlinie: die übrigen Stücke des gleichschenkeligen Dreiecks zu bestimmen.

Gegeben a, c; gesucht α, γ, h.

Auflösung. In dem rechtwinkligen $\triangle CMA$ ist $\frac{1}{2}c = a\cos\alpha$; daraus ergibt sich für den Winkel an der Grundlinie

$$1)\qquad \cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}c}{a},\ \text{also}\ \sphericalangle\alpha = \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{c}{2a}\right);$$

ferner ist $\frac{1}{2}c = a\sin\frac{1}{2}\gamma$, daher erhält man für den Winkel an der Spitze

$$2)\qquad \sin\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\frac{1}{2}c}{a},\ \text{also}\ \sphericalangle\gamma = 2\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{c}{2a}\right);$$

für die Höhe endlich erhält man

$$3)\qquad h = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{2}\right)\left(a - \frac{c}{2}\right)}.$$

Beispiel. Sei $a = 43^m, 87$, $c = 35^m, 67$, alsdann ist

$$1)\ \log\cos\alpha = \begin{cases} \log 17{,}835 & = 1{,}2512731 \\ -\log 43{,}87 & = -1{,}6421676 \end{cases}$$
$$\qquad 9{,}6091055 - 10$$

$$\sphericalangle\alpha = 66^0 0' 43'', 93,\ \text{folglich}$$
$$\sphericalangle\gamma = 180^0 - 2\alpha = 47^0 58' 32'', 1;\ \text{oder}$$

$$2)\ \log\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \begin{cases} \log 17{,}835 & = 1{,}2512731 \\ -\log 43{,}87 & = -1{,}6421676 \end{cases}$$
$$\qquad 9{,}6091055 - 10$$

$$\sphericalangle\gamma = 47^0 58' 32'', 1;$$

$$3)\ \log h = \tfrac{1}{2}\begin{cases} \log 61{,}705 & = 1{,}7903204 \\ +\log 26{,}035 & = +1{,}4155576 \end{cases}$$
$$\qquad 3{,}2058780$$

$$\log h = 1{,}6029390,$$
$$h = 40^m, 081.$$

---

§. 26.

Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks.

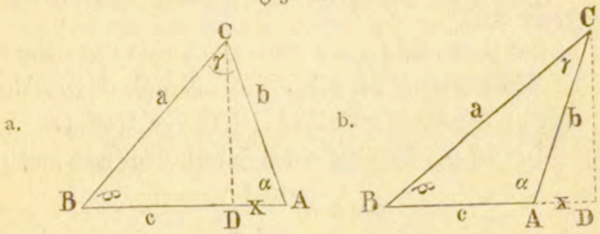
Wie das gleichschenklige Dreieck, so läßt sich auch das schiefwinklige Dreieck durch eine aus einer Ecke auf die gegenüberliegende Seite gefällte Senkrechte in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen. Doch ist die Berechnung desselben nicht so einfach, wie die des gleichschenkligen Dreiecks; vielmehr erfordert dieselbe weitere Hülfsmittel, in deren Besitz man sich daher vorab zu setzen haben wird. Diese sind zunächst folgende

Lehrsätze über das schiefwinklige Dreieck.

1. Der Sinussatz: In jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel (Fig. 19).

$$\frac{\triangle ABC}{a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.}$$

Fig. 19.



Beweis. Man fälle eine beliebige Höhe, CD; alsdann ist CD sowohl $= a \sin\beta$ als auch $= b \sin\alpha$, folglich $a \sin\beta = b \sin\alpha$. Hieraus ergibt sich die Proportion

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta;$$

ebenso ergibt sich

$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma;$$

$$c : a = \sin\gamma : \sin\alpha.$$

Diese drei Proportionen sind vereint in den folgenden Formen:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Anmerkung. Der Sinussatz wird angewandt, wenn von einem Dreiecke gegeben sind:

1) eine Seite und zwei Winkel,
2) zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel.

2. Der Cosinussatz: In jedem Dreiecke ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten vermindert um das doppelte Product aus diesen Seiten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossen Winkels (Fig. 19).

$$\frac{\triangle ABC}{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.}$$

Beweis. Man fälle die Höhe CD, alsdann ist (Plan. §. 64:2 und 3)

$$a^2 = b^2 + c^2 \mp 2cx,$$

in welchem Ausdruck das obere (—) oder das untere (+) Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Seite a einem spitzen oder einem stumpfen Winkel gegenübersteht. Nun ist aber (Fig. a) $x = b\cos\alpha$ und (Fig. b) $x = b\cos CAD = -b\cos\alpha$. Durch Einsetzung dieser Werthe in obige Gleichung ergibt sich für beide Fälle

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Zusatz 1. Eine weitere Entwicklung dieser Formel gibt ferner noch,

da $\sin^2\frac{1}{2}\alpha + \cos^2\frac{1}{2}\alpha = 1$ und $\cos\alpha = \cos^2\frac{1}{2}\alpha - \sin^2\frac{1}{2}\alpha$ ist,

$a^2 = (b^2+c^2)(\sin^2\frac{1}{2}\alpha + \cos^2\frac{1}{2}\alpha) - 2bc(\cos^2\frac{1}{2}\alpha - \sin^2\frac{1}{2}\alpha)$,

oder $\quad a^2 = (b+c)^2\sin^2\frac{1}{2}\alpha + (b-c)^2\cos^2\frac{1}{2}\alpha.$

Zusatz 2. Aus der ersten Formel folgt noch unmittelbar

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Anmerkung. Der Cosinussatz wird angewandt, wenn von einem Dreiecke gegeben sind:

1) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel,
2) die drei Seiten.

3. Der Tangentensatz: In jedem Dreiecke verhält sich die Summe zweier Seiten zur Differenz derselben Seiten, wie die Tangente der halben Summe der gegenüberliegenden Winkel zur Tangente der halben Differenz dieser Winkel (Fig. 19).

$$\frac{\triangle ABC}{(a+b):(a-b) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha+\beta):\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha-\beta).}$$

Beweis. Nach dem Sinussatze hat man die Proportion

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta.$$

Aus dieser ergibt sich durch einfache Umformung (Planim. §. 75:7, Zus.)

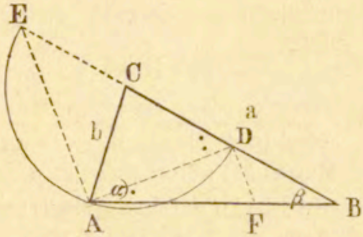
$$(a+b):(a-b) = (\sin\alpha + \sin\beta):(\sin\alpha - \sin\beta).$$

Da aber $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$ (§. 19:17), so ist

$$(a + b):(a - b) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta):\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

* Auch durch Construction läßt sich die Richtigkeit des Tangentensatzes nachweisen.

Fig. 20.



Denn beschreibt man im $\triangle ABC$ (Fig. 20) um die den beiden Seiten a und b gemeinschaftliche Ecke C mit der kleineren Seite b einen Halbkreis DAE, so ist

$$BE = a + b \text{ und } BD = a - b;$$

ferner ist, wenn man A mit E und D verbindet und $DF \ddagger AE$ zieht,

$$\sphericalangle EDA = \tfrac{1}{2}\sphericalangle ECA = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta),$$
$$\sphericalangle DAF = \sphericalangle EDA - \beta = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

Nun ist aber, da $\sphericalangle EAD = \sphericalangle ADF = R$, offenbar

$$BE:BD = \frac{EA}{AD}:\frac{DF}{AD} = \operatorname{tang} EDA : \operatorname{tang} DAF, \text{ d. i.}$$

$$(a + b):(a - b) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta):\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

Anmerkung. Der Tangentensatz wird statt des Cosinussatzes angewandt, wenn von einem Dreiecke gegeben sind: zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel.

Außer den drei vorstehenden Sätzen sind noch folgende Sätze auch praktisch von allgemeinem Interesse.

4. Der Projectionssatz: In jedem Dreiecke ist eine Seite gleich der Summe der Producte aus je einer anliegenden Seite und dem Cosinus des zugleich dieser anliegenden Winkels (Fig. 19).

$$\frac{\triangle ABC}{c = a\cos\beta + b\cos\alpha.}$$

Beweis. Man fälle die Höhe CD; alsdann ist offenbar $BD = a\cos\beta$, $AD = \pm b\cos\alpha$, das Zeichen (+) oder (—)

genommen, je nachdem $\sphericalangle \alpha <$ oder $> R$; folglich ist

$$BD \pm AD = a\cos\beta + b\cos\alpha,$$
$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha.$$

5. Der Mollweide'sche Satz: In jedem Dreiecke verhält sich die Summe (die Differenz) zweier Seiten zur dritten Seite, wie der Cosinus (der Sinus) der halben Differenz der gegenüberliegenden Winkel zum Cosinus (zum Sinus) der halben Summe dieser Winkel.

$$\triangle ABC$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}, \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}.$$

Beweis. Aus L. (1) $a:b = \sin\alpha:\sin\beta$ folgt (Pl. §. 75:7)

$$(a \pm b):b = (\sin\alpha \pm \sin\beta):\sin\beta.$$

Hieraus nun mit $b:c = \sin\beta:\sin\gamma$ ergibt sich aber (§. 19:13 u. 14, §. 20:19)

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma},$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma},$$

oder, da $\sin\frac{1}{2}\gamma = \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und $\cos\frac{1}{2}\gamma = \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ [§. 14], auch

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}, \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}.$$

6. Der Dreieckskreis-Satz. In jedem Dreiecke ist der Radius des umbeschriebenen Kreises gleich dem halben Quotient aus einer Seite und dem Sinus des gegenüberliegenden Winkels, und der Radius des einbeschriebenen Kreises gleich dem Producte aus dem um eine Seite verminderten halben Umfange und der Tangente des halben dieser Seite gegenüberliegenden Winkels (Fig. 21 u. 22).

$$\triangle ABC, \quad a+b+c = 2s$$

$$r = \frac{1}{2}\frac{a}{\sin\alpha}, \quad \varrho = (s-a)\tan\frac{1}{2}\alpha.$$

Fig. 21.

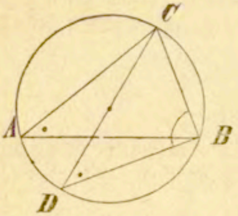
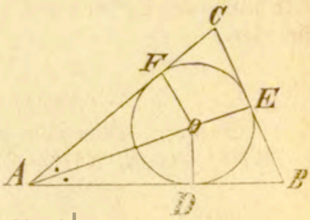


Fig. 22.



Beweis. 1. Man ziehe (Fig. 21) aus einer beliebigen Ecke einen Durchmesser, etwa $CD = 2r$, und verbinde B mit D, so ist $\sphericalangle CBD = R$ und $\sphericalangle CDB = \alpha$, und daher ist CB oder $a = 2r \sin CDB = 2r \sin\alpha$; mithin

$$r = \tfrac{1}{2}\frac{a}{\sin\alpha};\ \text{ebenso}\ r = \tfrac{1}{2}\frac{b}{\sin\beta},\ \text{sowie}\ r = \tfrac{1}{2}\frac{c}{\sin\gamma},$$

woraus auch $2r = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ sich ergibt.

2. Man ziehe (Fig. 22) einen Berührungsradius, etwa $OD = \varrho$ und die Gerade OA, welche bekanntlich den Winkel α halbirt, so ist OD oder $\varrho = AD \tang \frac{1}{2}\alpha$; da aber $AD + BC = s$, folglich $AD = s - a$, so folgt

$$\varrho = (s - a)\tang\tfrac{1}{2}\alpha,\quad \text{ebenso}\quad \varrho = (s - b)\tang\tfrac{1}{2}\beta,$$
$$\varrho = (s - c)\tang\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Mit Hülfe dieser Lehrsätze lassen sich nun aus drei unabhängigen Stücken des Dreiecks die übrigen Stücke berechnen. Dabei sind folgende fünf Fälle zu betrachten.

I. Es sei gegeben eine Seite und die beiden anliegenden Winkel: die übrigen Stücke des Dreiecks zu bestimmen.

Gegeben c, α, β; gesucht γ, a, b.

Auflösung. Ohne Weiteres ergibt sich für den dritten Winkel

$$1)\qquad \sphericalangle\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta).$$

Da ferner nach dem Sinussatze $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$, und nach dem Vorstehenden $\sphericalangle\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$, also $\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$, so ergibt sich für die Seite a sofort

$$2)\qquad a = \frac{c\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)},$$

und für die Seite b ergibt sich auf ähnliche Weise

$$3)\qquad b = \frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Beispiel. Sei $c = 27^m{,}98$, $\sphericalangle\alpha = 36^0\,15'\,23''$, $\sphericalangle\beta = 89^0\,25'\,22''$, alsdann ist $\alpha + \beta = 125^0\,40'\,45''$, folglich

$$1)\qquad \sphericalangle\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 54^0\,19'\,15'';$$

$$2)\ \log a = \begin{cases} \log 27{,}98 & = \quad 1{,}4468477 \\ + \log\sin 36^0 15' 23'' & = + 9{,}7718810 - 10 \\ & \quad 11{,}2187287 - 10 \\ - \log\sin 125^0 40' 45'' & = - 9{,}9097141 + 10 \\ & \quad 1{,}3090146 \end{cases}$$

$a = 20^m, 3711;$

$$3)\ \log b = \begin{cases} \log 27{,}98 & = \quad 1{,}4468477 \\ + \log\sin 89^0 25' 22'' & = + 9{,}9999779 - 10 \\ & \quad 11{,}4468256 - 10 \\ - \log\sin 125^0 40' 45'' & = - 9{,}9097141 + 10 \\ & \quad 1{,}5371115 \end{cases}$$

$b = 34^m, 4438.$

II. Es sei gegeben eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel: die übrigen Stücke des Dreiecks zu bestimmen.

Gegeben c, α, γ; gesucht β, a, b.

Auflösung. Es ergibt sich ohne Weiteres für den dritten Winkel

1) $$\sphericalangle \beta = 180^0 - (\alpha + \gamma);$$

ferner ist nach dem Sinussatze $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$, woraus sich für die Seite a ergibt

2) $$a = \frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma},$$

und mit Hülfe desselben Satzes, da zugleich $\sin\beta = \sin(\alpha + \gamma)$, erhält man für die dritte Seite

3) $$b = \frac{c \sin(\alpha + \gamma)}{\sin\gamma}.$$

Beispiel. Sei $c = 25^m, 89$, $\sphericalangle \alpha = 38^0 29' 9''$, $\sphericalangle \gamma = 55^0 18' 12''$, aldann ist $\alpha + \gamma = 93^0 47' 21''$, folglich

1) $$\sphericalangle \beta = 180^0 - (\alpha + \gamma) = 86^0 12' 39'';$$

$$2)\ \log a = \begin{cases} \log 25{,}89 & = \quad 1{,}4131321 \\ + \log\sin 38^0 29' 9'' & = + 9{,}7940145 - 10 \\ & \quad 11{,}2071466 - 10 \\ - \log\sin 55^0 18' 12'' & = - 9{,}9149654 + 10 \\ & \quad 1{,}2921812 \end{cases}$$

$a = 19^m, 5966;$

$$3)\ \log b = \begin{cases} \log 25{,}89 & = \quad 1{,}4131321 \\ + \log\sin 93^0 47' 21'' & = + 9{,}9990496 - 10 \\ & \quad\ \overline{11{,}4121817 - 10} \\ - \log\sin 55^0 18' 12'' & = - 9{,}9149654 + 10 \end{cases}$$

$$\overline{1{,}4972163}$$

$$b = 31^m, 4207.$$

III. Es seien gegeben zwei Seiten und der von denselben eingeschlossene Winkel: die übrigen Stücke des Dreiecks zu bestimmen.

Gegeben b, c, α; gesucht β, γ, a.

Auflösung. Zur Bestimmung der Winkel β und γ beachte man, daß zunächst

$$\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) = 90^0 - \tfrac{1}{2}\alpha;$$

da ferner nach dem Tangentensatze die Proportion besteht

$$(b + c):(b - c) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) : \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma),$$

und daher

$$1) \qquad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{b - c}{b + c}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma),$$

so ist zugleich $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ leicht zu berechnen. Aus der halben Summe und der halben Differenz der Winkel β und γ findet man aber alsdann sehr einfach durch Addition und Subtraktion die Winkel β und γ selbst.

Da jetzt β bekannt ist, und nach dem Sinussatze die Proportion $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ besteht, so ergibt sich für die gesuchte Seite

$$2) \qquad a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

* Um aber die Seite a auch unmittelbar zu bestimmen, setzen wir nach dem erweiterten Cosinussatze

$$a^2 = (b + c)^2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha + (b - c)^2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha,$$

folglich nach Ausziehung der Quadratwurzel, welche hier nur positiv genommen werden kann,

$$a = \sqrt{(b + c)^2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha + (b - c)^2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha}.$$

Dieser Ausdruck ist aber für logarithmische Berechnung wenig geeignet und bedarf derselbe deshalb einer Umformung. Man gebe demselben zu dem Ende die folgende Form

$$a = (b + c) \sin \tfrac{1}{2} \alpha \sqrt{1 + \frac{(b - c)^2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha}{(b + c)^2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha}}.$$

Setzt man nun unter Einführung eines Hülfswinkels φ

$$3) \qquad \operatorname{tang} \varphi = \frac{(b - c) \cos \frac{1}{2} \alpha}{(b + c) \sin \frac{1}{2} \alpha},$$

was immer gestattet ist, da die trigonometrische Tangente jeden Werth haben kann, so erhält man

$$a = (b + c) \sin \tfrac{1}{2} \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \varphi},$$

und demnach ergibt sich endlich in einer zur logarithmischen Berechnung sehr bequemen Form für die gesuchte Seite

$$4) \qquad a = \frac{(b + c) \sin \frac{1}{2} \alpha}{\cos \varphi}.$$

Beispiel. Sei $b = 39^m{,}14$, $c = 22^m{,}33$, $\sphericalangle \alpha = 99^0 37' 25''$, alsdann ist $(b + c) = 61^m,\ 47$, $(b - c) = 16^m,\ 81$, $\frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 90^0 - \frac{1}{2}\alpha = 40^0 11' 17'',\ 50$, folglich

$$1) \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \left\{ \begin{array}{lcr} \log 16{,}81 & = & 1{,}2255677 \\ + \log \operatorname{tang} 40^0 11' 17'',5 & = & + 9{,}9267088 - 10 \\ \hline & & 11{,}1522765 - 10 \\ - \log 61{,}47 & = & - 1{,}7886632 \\ \hline & & 9{,}3636133 - 10 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{2}(\beta - \gamma) & = 13^0\ 0' 25'',95 \\ \frac{1}{2}(\beta + \gamma) & = 40^0 11' 17'',50 \\ \hline \sphericalangle \beta & = 53^0 11' 43'',45, \\ \sphericalangle \gamma & = 27^0 10' 51'',55; \end{array}$$

$$2) \log a = \left\{ \begin{array}{lcr} \log 39{,}14 & = & 1{,}5926208 \\ + \log \sin 99^0 37' 25'' & = & + 9{,}9938448 - 10 \\ \hline & & 11{,}5864656 - 10 \\ - \log \sin 53^0 11' 43'',45 & = & - 9{,}9034608 + 10 \\ \hline & & 1{,}6830048 \end{array} \right.$$

$a = 48^m,\ 1953.$

* Durch unmittelbare Berechnung der Seite a unter Einführung des Hülfswinkels φ hat man dagegen

$$3)\ \log\operatorname{tang}\varphi = \left\{\begin{array}{lcr} \log 16{,}81 & = & 1{,}2255677 \\ +\log\operatorname{cotg} 49^0 48' 42'',5 & = & +\,9{,}9267088-10 \\ \hline & & 11{,}1522765-10 \\ -\log 61{,}47 & = & -\,1{,}7886632 \\ \hline & & 9{,}3636133-10 \end{array}\right.$$

$\sphericalangle\, \varphi = 13^0\, 0'\, 25'', 94.$

Daher

$$4)\ \log a = \left\{\begin{array}{lcr} \log 61{,}74 & = & 1{,}7886632 \\ +\sin 49^0\, 48'\, 42'', 5 & = & +\,9{,}8830530-10 \\ \hline & & 1{,}6717162 \\ -\log\cos\varphi & = & -\,9{,}9887113+10 \\ \hline & & 1{,}6830049 \end{array}\right.$$

$a = 48^m, 1953.$

IV. Es seien gegeben zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel: die übrigen Stücke des Dreiecks zu bestimmen.

Gegeben b, c, β; gesucht a, α, γ.

Auflösung. Nach dem Sinussatze ist $b : c = \sin\beta : \sin\gamma$, und aus dieser Proportion erhält man sofort für den einen gesuchten Winkel

$$1)\ \sin\gamma = \frac{c\sin\beta}{b},\ \text{also}\ \sphericalangle\,\gamma = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{c\sin\beta}{b}\right).$$

Dieser Ausdruck für den Winkel γ ist aber im Allgemeinen zweideutig, weil, wie zu jedem gegebenen Sinus, so auch zu $\sin\gamma$ sowohl ein spitzer Winkel γ als ein stumpfer Winkel $180^0 - \gamma$ gehört. Diese Zweideutigkeit findet jedoch nicht Statt, wenn $b > c$; denn da in jedem Dreiecke der kleineren Seite immer der kleinere Winkel gegenüberliegt, der kleinere Winkel aber kein stumpfer sein kann, so ist in diesem Falle der Winkel γ immer spitz und hat also nur einen Werth. Ist dagegen $b < c$, so liegt der Winkel γ einer größern Seite im Dreiecke gegenüber und kann als solcher sowohl spitz als stumpf sein. In diesem Falle also erhält man für den Winkel γ zwei Werthe.

Da jetzt die beiden Winkel β und γ bekannt sind, so ergibt sich auch der dritte Winkel α, und zwar für $b > c$ einwerthig, für $b < c$ zweiwerthig, aus der Gleichung

2) $$\sphericalangle \alpha = 180^0 - (\beta + \gamma);$$

und da nun hiernach $\sin\alpha = \sin(\beta + \gamma)$, so erhält man aus der Proportion $a : b = \sin(\beta + \gamma) : \sin\beta$ für die gesuchte dritte Seite

3) $$a = \frac{b \sin(\beta + \gamma)}{\sin\beta},$$

welcher Ausdruck wegen des in demselben vorkommenden Winkels γ für $b > c$ nur einen Werth, für $b < c$ aber zwei Werthe gibt.

* Wollte man aber die dritte Seite unmittelbar bestimmen, so hätte man nach dem Cosinussatz zu setzen

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c \cos\beta,$$

oder

$$a^2 - 2\,a\,c\cos\beta = b^2 - c^2.$$

Löſ't man diese Gleichung nach a auf und beachtet in jedem besondern Falle bei der Wahl des Vorzeichens der Wurzel, daß a nicht negativ werden darf, so ergibt sich, freilich in einer zur logarithmischen Berechnung wenig geeigneten Form, für die dritte Seite

$$a = c\cos\beta \pm \sqrt{b^2 - c^2 + c^2\cos^2\beta},$$

oder

4) $$a = c\cos\beta \pm \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2\beta}.$$

Beispiel 1. Sei $b = 82^m,12$, ferner $c = 68^m,51$, $\sphericalangle \beta = 83^0 15' 8''$, alsdann ist

1) $$\log\sin\gamma = \left\{\begin{array}{lrr} \log 68{,}51 & = & 1{,}8357540 \\ +\log\sin 83^0 15' 8'' & = & +9{,}9969812-10 \\ \hline & & 11{,}8327352-10 \\ -\log 82{,}12 & = & -1{,}9144489 \\ \hline & & 9{,}9182863-10 \end{array}\right.$$

$$\sphericalangle \gamma = 55^0 56' 37'',48 \text{ (weil } c < b);$$

2) $$\beta + \gamma = 139^0 11' 45'', 48,$$

$$\sphericalangle \alpha = 40^0 48' 14'' 52;$$

3) $$\log a = \left\{\begin{array}{lrr} \log 82{,}12 & = & 1{,}9144489 \\ +\log\sin 139^0 11' 45'',48 & = & +9{,}8152282-10 \\ \hline & & 11{,}7296771-10 \\ -\log\sin 83^0 15' 8'' & = & -9{,}9969812+10 \\ \hline & & 1{,}7326959 \end{array}\right.$$

$$a = 54^m, 0375.$$

Beispiel 2. Sei $b = 27^m, 115$, $c = 36^m, 21$ und $\beta = 36^0\,24'\,13''$, alsdann ist

$$1)\ \log\sin\gamma = \left\{\begin{array}{lll} \log 36{,}21 & = & 1{,}5588285 \\ +\log\sin 36^0 24' 13'' & = & +\,9{,}7733985-10 \\ \hline & & 11{,}3322270-10 \\ -\log 27{,}115 & = & -\,1{,}4332096 \\ \hline & & 9{,}8990174-10 \end{array}\right.$$

$\sphericalangle\,\gamma = 52^0 25' 22'',34$ oder $127^0 34' 37'',66$ (weil $c > b$)

2) $\beta + \gamma = 88^0 49' 35'',34$ oder $163^0 58' 50'',66$,

$\sphericalangle\,\alpha = 91^0 10' 24'',66$ oder $16^0 1' 9'',34$;

$$3)\ \log a = \left\{\begin{array}{lll} \log 27{,}115 & = & 1{,}4332096 \\ +\log\sin 88^0 49' 35'',34 & = & +\,9{,}9999089-10 \\ [+\log\sin 163^0 58' 50'',66 & = & +\,9{,}4408469-10] \\ \hline & = & 11{,}4331185-10 \\ & & [10{,}8740565-10] \\ -\log\sin 36^0 24' 13'' & = & -9{,}7733985+10 \\ \hline & = & 1{,}6597200 \\ & & [1{,}1006580] \end{array}\right.$$

$a = 45^m, 6793$ oder $12^m, 6083$.

V. Es seien gegeben die drei Seiten: die übrigen Stücke des Dreiecks zu bestimmen.

Gegeben a, b, c; gesucht α, β, γ.

Auflösung. Nach dem Cosinussatze ist bekanntlich (§. 26 : 2)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma,$$

und aus diesen Gleichungen erhält man für die drei Winkel des Dreiecks

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c},$$
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c},$$
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a\,b}.$$

Diese Ausdrücke sind aber zur logarithmischen Berechnung wenig bequem. Zu geeigneteren Ausdrücken gelangt man durch Einführung des halben Winkels mit Hülfe der Formel (§. 20:27)

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}},$$

durch welche der Winkel $\frac{1}{2}\alpha$ als spitzer unzweideutig bestimmt wird. Setzt man in diese den oben erhaltenen Werth von $\cos\alpha$ ein und bringt den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen unter gleiche Benennung, so erhält man

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc}},$$

oder

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}},$$

und durch Verwandlung der Quadratdifferenz in ein Product

1) $$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}},$$ ebenso

2) $$\sin \tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(a+b-c)(-a+b+c)}{4ac}},$$

3) $$\sin \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(a-b+c)(-a+b+c)}{4ab}},$$

in welchen Ausdrücken das Vorzeichen der Wurzel positiv ist, da die halben Winkel des Dreiecks spitz und die Sinus der spitzen Winkel immer nur positiv sind.

Durch Anwendung der Formel

$$\cos \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

erhält man auf ähnliche Weise die folgenden Ausdrücke, welche zur logarithmischen Berechnung der Winkel des Dreiecks ebenfalls geeignet sind,

4) $$\cos \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{4bc}},$$

5) $$\cos \tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a-b+c)}{4ac}},$$

6) $$\cos \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4ab}},$$

in welchen Ausdrücken das Vorzeichen der Wurzel ebenfalls nur positiv sein kann, da auch die Cosinus der spitzen Winkel immer nur positiv sind.

Aus den vorhergehenden Formeln für $\sin \frac{1}{2}\alpha$ und $\cos \frac{1}{2}\alpha$ ꝛc. erhält man durch Division noch die folgenden zur logarithmischen Berechnung der Dreieckswinkel nicht minder geeigneten Ausdrücke, in welchen das Vorzeichen der Wurzel ebenfalls positiv ist,

$$7)\qquad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b+c)(-a+b+c)}},$$

$$8)\qquad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(a+b-c)(-a+b+c)}{(a+b+c)(a-b+c)}},$$

$$9)\qquad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(a-b+c)(-a+b+c)}{(a+b+c)(a+b-c)}}.$$

Beispiel. Sei $a = 33^m,87$, $b = 23^m,65$, $c = 21^m,37$, alsdann ist, um die Berechnung nur nach den ersten Formeln auszuführen, $a+b-c = 36^m,15$, $a-b+c = 31^m,59$, $-a+b+c = 11^m,15$, folglich

$$1)\ \log\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{lrr} \log 36,15 = & 1,5581083 & \\ +\log 31,59 = & +1,4995496 & \\ \hline & & +3,0576579 \\ -\log 4 = & -0,6020600 & \\ -\log 23,65 = & -1,3738311 & \\ -\log 21,37 = & -1,3298045 & \\ \hline & & -3,3056956 \end{array}\right.$$

$$= 19,7519623 - 20$$

$$\begin{aligned} \log\sin\tfrac{1}{2}\alpha &= 9,87598115 - 10, \\ \sphericalangle\, \tfrac{1}{2}\alpha &= 48^0 43' 41'',97, \\ \sphericalangle\, \alpha &= 97^0 27' 23'',94, \end{aligned}$$

$$2)\ \log\sin\tfrac{1}{2}\beta = \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{lrr} \log 36,15 = & 1,5581083 & \\ +\log 11,15 = & +1,0472749 & \\ \hline & & +2,6053832 \\ -\log 4 = & -0,6020600 & \\ -\log 33,87 = & -1,5298152 & \\ -\log 21,37 = & -1,3298045 & \\ \hline & & -3,4616797 \end{array}\right.$$

$$= 19,1437035 - 20$$

$$\begin{aligned} \log\sin\tfrac{1}{2}\beta &= 9,57185175 - 10, \\ \sphericalangle\, \tfrac{1}{2}\beta &= 21^0 54' 30'',001, \\ \sphericalangle\, \beta &= 43^0 49' 0'',002, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3)\ \alpha + \beta &= 141^0 16' 23'',942, \\ \sphericalangle\, \gamma &= 38^0 43' 36'',058. \end{aligned}$$

---

§. 27.

Berechnung des Flächeninhalts der Dreiecke.

Die Berechnung des Flächeninhalts der Dreiecke umfaßt je nach den gegebenen Stücken, unter welchen immer wenigstens eine Seite sich befinden muß, ebenfalls fünf verschiedene Fälle.

I. Es seien gegeben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel: den Flächeninhalt des Dreiecks zu bestimmen.

Gegeben b, c, α; gesucht $\triangle$.

Auflösung. Nach den Lehren der Planimetrie (§. 83 : 1, Zus. 2) ist der Inhalt eines Dreiecks gleich dem halben Producte aus seiner Grundlinie und Höhe, also ist

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\, c\, h.$$

Nun ist aber die Höhe $h = b \sin \alpha$, und setzt man diesen Werth für h in die vorstehende Gleichung ein, so erhält man

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\, b\, c \sin \alpha,$$

d. h. der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Producte aus zwei Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.

Beispiel. Sei $b = 7^m,318$, $c = 5^m,134$ und $\alpha = 95^0 18' 13''$, alsdann ist

$$\log \triangle = \left\{\begin{array}{lcr} \log 7{,}318 & = & 0{,}8643924 \\ + \log 5{,}134 & = & +\ 0{,}7104559 \\ + \log \sin 95^0\, 18'\, 13'' & = & +\ 9{,}9981367-10 \\ \hline & & 11{,}5729850-10 \\ - \log 2 & = & -\ 0{,}3010300 \\ \hline & & 1{,}2719550 \end{array}\right.$$

$$\triangle = 18^{Qm},7048836.$$

II. Es sei gegeben eine Seite und die beiden anliegenden Winkel: den Flächeninhalt des Dreiecks zu bestimmen.

Gegeben c, α, β; gesucht $\triangle$.

Auflösung. Nach der vorhergehenden Aufgabe ist gefunden

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\, b\, c \sin \alpha.$$

Da aber nach dem Sinussatze $b : c = \sin\beta : \sin\gamma$ oder $b : c = \sin\beta : \sin(\alpha + \beta)$, so ist

$$b = \frac{c \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Setzt man diesen Werth für b in die erstere Gleichung ein, so ergibt sich

$$\triangle = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin(\alpha + \beta)},$$

d. h. *der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem Producte aus dem Quadrate einer Seite und den Sinus der beiden anliegenden Winkel, dividirt durch den doppelten Sinus der Summe dieser Winkel.*

Beispiel. Sei $c = 6^m,34$, $\alpha = 43^0 4' 7''$, $\beta = 65^0 9' 5''$, alsdann ist $\alpha + \beta = 108^0 13' 12''$, folglich

$$\log\triangle = \begin{cases} 2 \log 6{,}34 & = 1{,}6041786 \\ + \log\sin 43^0 4' 7'' & = + 9{,}8343403 - 10 \\ + \log\sin 65^0 9' 5'' & = + 9{,}9578090 - 10 \\ & \qquad\qquad + 21{,}3963279 - 20 \\ - \log 2 & = - 0{,}3010300 \\ - \log\sin 108^0 13' 12'' & = - 9{,}9776609 + 10 \\ & \qquad\qquad - 10{,}2786909 + 10 \\ & \qquad\qquad = 1{,}1176370 \end{cases}$$

$$\triangle = 13^{Qm},111036.$$

III. *Es sei gegeben eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel: den Flächeninhalt des Dreiecks zu bestimmen.*

Gegeben c, α, γ; gesucht $\triangle$.

Auflösung. Nach der vorhergehenden Aufgabe ist

$$\triangle = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}.$$

Da aber $\sin\beta = \sin(\alpha + \gamma)$ und $\sin(\alpha + \beta) = \sin\gamma$, so erhält man

$$\triangle = \frac{c^2 \sin\alpha \sin(\alpha + \gamma)}{2 \sin\gamma},$$

d. h. der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem Producte aus dem Quadrate einer Seite, dem Sinus eines anliegenden Winkels und dem Sinus der Summe dieses anliegenden und des gegenüberliegenden Winkels, dividirt durch den doppelten Sinus des gegenüberliegenden Winkels.

Beispiel. Sei $c = 6^m,57$, $\alpha = 49^0 15' 6''$, $\gamma = 37^0 14' 19''$, alsdann ist $\alpha + \gamma = 86^0 29' 25''$, folglich

$$\log\triangle = \begin{cases} 2\log 6{,}57 & = 1{,}6351308 \\ +\log\sin 49^0 15' 6'' & = +9{,}8794308-10 \\ +\log\sin 86^0 29' 25'' & = \underline{+9{,}9991846-10} \\ & \qquad\qquad +21{,}5137462-20 \\ -\log 2 & = -0{,}3010300 \\ -\log\sin 37^0 14' 19'' & = \underline{-9{,}7818528+10} \\ & \qquad\qquad \underline{-10{,}0828828+10} \\ & \qquad\qquad =1{,}4308634 \end{cases}$$

$$\triangle = 26^{Qm},968913.$$

IV. Es seien gegeben zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel: den Flächeninhalt des Dreiecks zu bestimmen.

Gegeben b, c, β; gesucht $\triangle$.

Auflösung. Am einfachsten wird der Flächeninhalt des Dreiecks erhalten, wenn man nach dem Sinussatze zunächst den Winkel γ, und aus γ und β den Winkel α bestimmt, worauf sich alsdann leicht der Flächeninhalt des Dreiecks nach Nr. I berechnet.

Denn da bekanntlich $b : c = \sin\beta : \sin\gamma$, so erhält man

$$\sin\gamma = \frac{c\sin\beta}{b}, \text{ also } \sphericalangle\,\gamma = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{c\sin\beta}{b}\right).$$

Da nun $\sphericalangle\,\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$, also $\sin\alpha = \sin(\beta+\gamma)$, so ergibt sich nach Nr. I für den Inhalt des Dreiecks

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\, b\, c \sin(\beta + \gamma).$$

Es ist hier der Inhalt des Dreiecks mit Hülfe des Winkels γ gefunden, welcher selbst durch seinen Sinus bestimmt ist. Dieser ist aber im Allgemeinen zweideutig und gibt sowohl einen spitzen Winkel γ, als einen stumpfen

Winkel $180^0 - \gamma$. Ist jedoch $b > c$, so kann Winkel γ nur spitz sein, da derselbe alsdann einer kleineren Seite im Dreiecke gegenüberliegt und als solcher nothwendig spitz ist; dann gibt der gefundene Ausdruck für den Inhalt des Dreiecks nur einen Werth. Ist dagegen $b < c$, so liegt der Winkel γ einer größeren Seite im Dreiecke gegenüber und kann als solcher sowohl spitz als stumpf sein. In diesem Falle gibt der Ausdruck für den Inhalt des Dreiecks zwei Werthe.

* Will man aber den Flächeninhalt des Dreiecks unmittelbar bestimmen, so setze man ebenfalls nach Nr. I.

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\, a\, c \sin \beta.$$

Nun ist ferner $b^2 = a^2 + c^2 - 2\, a\, c \cos \beta$, woraus weiter folgt

$$a = c \cos \beta \pm \sqrt{b^2 - c^2 + c^2 \cos^2 \beta},$$

oder

$$a = c \cos \beta \pm \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 \beta}.$$

Setzt man diesen Werth für a in die erste Gleichung ein, so erhält man unter Berücksichtigung bei der Wahl des Wurzelvorzeichens in jedem besondern Falle, daß der Werth von $\triangle$ nicht negativ werden darf, den folgenden freilich für die logarithmische Berechnung nicht sehr geeigneten Ausdruck

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\, c \sin \beta \left(c \cos \beta \pm \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 \beta}\right).$$

Beispiel. 1. Sei $b = 7^m,832$, $c = 5^m,793$ und $\beta = 79^0 17' 26''$, alsdann ist

$$\log \sin \gamma = \left\{\begin{array}{ll} \log 5{,}793 & = 0{,}7629035 \\ + \log \sin 79^0 17' 26'' & = + 9{,}9923689 - 10 \\ \hline & 10{,}7552724 - 10 \\ - \log 7{,}832 & = - 0{,}8938727 \\ \hline & 9{,}8613997 - 10 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} \sphericalangle\, \gamma = 46^0 37' \\ \sphericalangle\, \beta = 79^0 17' 26'' \\ \hline \beta + \gamma = 125^0 54' 26''. \end{array}$$

$$\log\triangle = \left\{\begin{array}{lrl} \log 7{,}832 & = & 0{,}8938727 \\ +\log 5{,}793 & = & +\,0{,}7629035 \\ +\log\sin 125^0 54' 26'' & = & +\,9{,}9084677-10 \\ \hline & & 1{,}5652439 \\ -\log 2 & = & -\,0{,}3010300 \\ \hline & & 1{,}2642139 \end{array}\right.$$

$$\triangle = 18^{Qm},\ 374432.$$

Beispiel 2. Sei $b = 4^m,257$, $c = 8^m,577$, und $\beta = 18^0 51' 22''$, alsdann ist

$$\log\sin\gamma = \left\{\begin{array}{lrl} \log 8{,}577 & = & 0{,}9333354 \\ +\log\sin 18^0 51' 22'' & = & +\,9{,}5094614-10 \\ \hline & & 10{,}4427968-10 \\ -\log 4{,}257 & = & -\,0{,}6291037 \\ \hline & & 9{,}8136931-10 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{llll} \sphericalangle\gamma = 40^0 37' 47'',02 & \text{oder} & \sphericalangle\gamma = 139^0 22' 12'',98 \\ \sphericalangle\beta = 18^0 51' 22'' & \text{„} & \sphericalangle\beta = 18^0 51' 22'' \\ \hline \beta+\gamma = 59^0 29' 9'',02 & \text{oder} & \beta+\gamma = 158^0 13' 34'',98. \end{array}$$

$$\log\triangle = \left\{\begin{array}{lrl} \log 4{,}257 & = & 0{,}6291037 \\ +\log 8{,}577 & = & +\,0{,}9333354 \\ +\log\sin 59^0 29' 9'',02 & = & +\,9{,}9352572-10 \\ [+\log\sin 158^0 13' 34'',98 & = & +\,9{,}5693040-10 \\ \hline & & 11{,}4976963-10 \\ & & [11{,}1317431-10] \\ -\log 2 & = & -\,0{,}3010300 \\ \hline & & 1{,}1966663 \\ & & [0{,}8307131] \end{array}\right.$$

$$\triangle = 15^{Qm},\ 727739 \text{ und } \triangle = 6^{Qm},\ 7719406.$$

V. **Es seien die drei Seiten gegeben: den Flächeninhalt des Dreiecks zu bestimmen.**

Gegeben a, b, c; gesucht $\triangle$.

Auflösung. Nach Aufgabe Nr. I ist wiederum

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\, b\, c \sin\alpha.$$

Da nun aber bekanntlich $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}$, so ist

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}$$

$$= \sqrt{\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2\,b\,c+b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}\right)\left(\frac{2\,b\,c-b^2-c^2+a^2}{2\,b\,c}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{[(b+c)^2-a^2]\,[a^2-(b-c)^2]}{4\,b^2\,c^2}}$$

$$= \frac{1}{2\,b\,c}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)},$$

oder, indem man die halbe Summe der drei Seiten in Rechnung bringt und demgemäß $a+b+c=2s$, $a+b-c=2(s-c)$, $a-b+c=2(s-b)$, $-a+b+c=2(s-a)$ setzt:

$$\sin\alpha = \frac{2}{b\,c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Setzt man diesen Werth für $\sin\alpha$ in die obige Gleichung ein, so ergibt sich für den Inhalt des Dreiecks

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Beispiel. Sei $a = 6^m,535$, $b = 4^m,297$, und $c = 5^m,923$, alsdann ist $s = 8^m,3775$, $s-a = 1^m,8425$, $s-b = 4^m,0805$, $s-c = 2^m,4545$, folglich

$$\log\triangle = \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{rl} & \log 8{,}3775 = 0{,}9231144 \\ + & \log 1{,}8425 = 0{,}2654075 \\ + & \log 4{,}0805 = 0{,}6107134 \\ + & \log 2{,}4545 = 0{,}3899630 \\ \hline & 2{,}1891983 \end{array}\right.$$

$$\log\triangle = 1{,}09459915$$

$$\triangle = 12^{Qm},433664.$$

In der folgenden Tafel nun seien, wenn drei unabhängige Stücke als gegeben angenommen werden, die übrigen Stücke zu berechnen:

Tafel zur Berechnung.

. Rechtwinklige Dreiecke.

Nr.	a	b	c	α	β	J
1	11	60	61	10°23′20″	79°36′40″	330
2	119	120	169	44°45′37″	45°14′23″	7140
3	133	156	205	40°26′59″	49°33′ 1″	10374
4	105	208	233	26°47′ 6″	63°12′54″	10920
5	120	209	241	29°51′46″	60° 8′14″	12540
6	160	231	281	34°42′29″	55°17′31″	18480

b. Gleichschenklige Dreiecke.

Nr.	a = b	c	h	α	γ	J
1	85	72	77	64°56′32″,6	50° 6′54″,8	2772
2	149	102	140	69°59′ 2″,5	40° 1′55″,0	7140
3	229	120	221	74°48′38″,6	30°22′42″,8	13260
4	265	192	247	68°45′38″,5	42°28′43″,0	23712
5	425	174	416	78°11′15″,8	23°37′28″,4	36192
6	485	186	476	78°56′41″,7	22° 6′36″,6	44268

c. Reguläre Vielecke.

Nr.	n	r	ϱ	ω	s	J
1	11	10	9,5949	32°43′38″,2	5,6346	297,352
2	12	10	9,6592	30°	5,1764	300
3	13	10	9,7094	27°41′32″,3	4,7863	302,064
4	14	10	9,7493	25°42′51″,4	4,4504	303,718
5	15	10	9,7815	24°	4,1583	305,052
6	16	10	9,8078	22°30′	3,9018	306,146

d. Schiefwinklige Dreiecke.

Nr.	a	b	c	α	β	γ	J
1	390	373	227	72° 1′42″,8	65°28′13″,6	42°30′ 3″,6	49140
2	471	428	257	82°50′50″,4	64°22′24″,9	32°46′44″,7	54570
3	509	480	221	84°32′50″,5	69°50′38″,8	25°36′30″,7	52800
4	776	773	197	83°33′34″,9	81°49′43″,6	14°36′41″,5	75660
5	888	442	298	70°42′30″,0	69°59′ 2″,5	39°18′27″,5	62160
6	900	890	170	87°55′ 0″,3	81°12′ 9″,3	10°52′50″,4	75600

§. 28.

Uebungs-Aufgaben über die Bestimmung der Bestandtheile und des Flächeninhalts der Figuren.

1) Allgemeine Aufgaben.

a) Das rechtwinklige Dreieck.

67. Wie groß sind die Hypotenuse c und die beiden Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn die Summe der Katheten gleich s und der eine spitze Winkel gleich α ist?

Antw. $c = \frac{s}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{s\sqrt{2}}{2\cos(\alpha - 45^0)}$, 2c.

68. Wie groß sind die Hypotenuse c und die beiden Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn die Differenz der Katheten gleich d und der eine spitze Winkel gleich α ist?

Antw. $c = \frac{d}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{s\sqrt{2}}{2\sin(\alpha - 45^0)}$, 2c.

69. Wie groß sind die beiden spitzen Winkel α und β eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn die beiden durch die Höhe gebildeten Abschnitte der Hypotenuse gleich p und q sind?

Antw. $\alpha = \text{arc}\left(\text{cotg} = \sqrt{\frac{p}{q}}\right)$, $\beta = \text{arc}\left(\text{tang} = \sqrt{\frac{p}{q}}\right)$.

70. Wie groß sind die beiden Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn der Radius des einbeschriebenen Kreises gleich ϱ und der eine spitze Winkel gleich β ist?

Antw. $a = \frac{\varrho \sin(45^0 + \frac{1}{2}\beta) \cdot \sqrt{2}}{\sin\frac{1}{2}\beta}$, $b = \frac{\varrho \cos\frac{1}{2}\beta \cdot \sqrt{2}}{\sin(45^0 - \frac{1}{2}\beta)}$.

b) Das gleichschenklige Dreieck.

71. Wie groß sind die Winkel α und γ eines gleichschenkeligen Dreiecks, wenn sich die Basis zur Scheitelseite wie m:n verhält?

Antw. $\sphericalangle\alpha = \text{arc}\left(\cos = \frac{m}{2n}\right)$, $\sphericalangle\gamma = 2\,\text{arc}\left(\sin = \frac{m}{2n}\right)$.

72. Wie groß sind die Winkel α und γ eines gleichschenkeligen Dreiecks, wenn sich die Höhe zur Basis wie m:n verhält?

Antw. $\sphericalangle\alpha = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{2m}{n}\right)$, $\sphericalangle\gamma = 2\,\text{arc}\left(\text{cotg} = \frac{2m}{n}\right)$.

73. Wie groß sind die Winkel α und γ eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn die Höhen zur Basis und einer Scheitelseite bezüglich gleich h_c und h_a sind?

Antw. $\sphericalangle \alpha = \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{h_a}{2\,h_c}\right)$, $\sphericalangle \gamma = 2 \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{h_a}{2\,h_c}\right)$.

74. Wie groß sind die Seiten a und c eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn der Winkel an der Spitze gleich γ und die Höhe zu einer Scheitelseite gleich h_a ist?

Antw. $a = \frac{h_a}{\sin\gamma}$, $c = \frac{h_a}{\cos\frac{1}{2}\gamma}$.

c. Das reguläre Vieleck.

75. Wie groß ist die Seite a eines regulären Vielecks von n Seiten, wenn der Flächeninhalt des regulären Vielecks gleich f ist?

Antw. $a = 2\sqrt{\frac{1}{n} f \cdot \operatorname{tang}\frac{180^0}{n}}$.

76. Wie groß ist der Radius r des um ein reguläres Vieleck von n Seiten beschriebenen Kreises, wenn der Flächeninhalt des Vielecks gleich f ist?

Antw. $r = \sqrt{\frac{2f}{n \sin\frac{360^0}{n}}}$.

77. Wie groß ist der Radius r des um ein reguläres Vieleck von n Seiten beschriebenen Kreises, wenn die Seite des Vielecks gleich a ist?

Antw. $r = \frac{a}{2 \sin\frac{180^0}{n}}$.

78. Wie groß ist der Radius r des um ein reguläres Vieleck von n Seiten beschriebenen Kreises, wenn der Radius des einbeschriebenen Kreises gleich ϱ ist?

Antw. $r = \frac{\varrho}{\cos\frac{180^0}{n}}$.

79. Wie groß ist der Radius ϱ des in ein reguläres Vieleck von n Seiten beschriebenen Kreises, wenn die Seite des Vielecks gleich a ist?

Antw. $\varrho = \frac{1}{2} a \operatorname{cotg} \frac{180^0}{n}$.

80. Wie groß ist der Radius ϱ des in ein reguläres Vieleck von n Seiten beschriebenen Kreises, wenn der Radius des umschriebenen Kreises gleich r ist?

Antw. $\varrho = r \cos \frac{180^0}{n}$.

81. Wie groß ist der Radius ϱ des in ein reguläres Vieleck von n Seiten beschriebenen Kreises, wenn der Flächeninhalt des Vielecks gleich f ist?

Antw. $\varrho = \sqrt{\frac{1}{n} f \cdot \operatorname{cotg} \frac{180^0}{n}}$.

82. Wie groß ist der Umfang u eines regulären Vielecks von n Seiten, wenn der Radius des umschriebenen Kreises gleich r ist?

Antw. $u = 2 n r \sin \frac{180^0}{n}$.

83. Wie groß ist der Umfang u eines regulären Vielecks von n Seiten, wenn der Radius des einbeschriebenen Kreises gleich ϱ ist?

Antw. $u = 2 n \varrho \operatorname{tang} \frac{180^0}{n}$.

84. Wie groß ist der Flächeninhalt f eines regulären Vielecks von n Seiten, wenn die Seite desselben gleich a ist?

Antw. $f = \frac{1}{4} n a^2 \operatorname{cotg} \frac{180^0}{n}$.

85. Wie groß ist der Flächeninhalt f eines regulären Vielecks von n Seiten, wenn der Radius des umbeschriebenen Kreises gleich r ist?

Antw. $f = \frac{1}{2} n r^2 \sin \frac{360^0}{n}$.

86. Wie groß ist der Flächeninhalt f eines regulären Vielecks von n Seiten, wenn der Radius des einbeschriebenen Kreises gleich ϱ ist?

Antw. $f = n \varrho^2 \operatorname{tang} \frac{180^0}{n}$.

d. Das schiefwinklige Dreieck.

87. Wie groß sind die drei Seiten a, b, c eines Dreiecks, wenn die Summe zweier Seiten (a + b) gleich s und die Winkel gleich α, β, γ sind?

Antw. $c = \frac{s \sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$, $a = \frac{s \sin \alpha}{2 \cos \frac{1}{2}\gamma \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$, 2c.

88. Wie groß sind die drei Seiten a, b, c eines Dreiecks, wenn die Differenz zweier Seiten (a — b) gleich d und die Winkel gleich α, β, γ sind?

Antw. $c = \frac{d \cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$, $a = \frac{d \sin \alpha}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$, 2c.

89. Wie groß sind die drei Seiten a, b, c eines Dreiecks, wenn die Verbindungslinien der drei Ecken mit demjenigen Punkte, an welchem diese drei Verbindungslinien gleiche Winkel bilden, gleich m_1, m_2, m_3 sind?

Antw. $a = \sqrt{m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3}$, $b = \sqrt{m_1^2 + m_3^2 + m_1 m_3}$,

$$c = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2}.$$

90. Wie groß sind die drei Winkel α, β, γ eines Dreiecks, wenn die von den Winkelspitzen gefällten Höhen entsprechend gleich h_1, h_2, h_3 sind?

Antw. $\cos \alpha = \frac{h_1^2 h_2^2 + h_1^2 h_3^2 - h_2^2 h_3^2}{2 h_1^2 h_2 h_3}$, 2c.

91. Wie groß ist der Radius r des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises, wenn eine Seite gleich c und die dieser anliegenden Winkel gleich α und β sind?

Antw. $r = \frac{c}{2 \sin (\alpha + \beta)}$.

92. Wie groß ist der Radius ϱ des einem Dreieck einbeschriebenen Kreises, wenn eine Seite gleich c und die dieser anliegenden Winkel gleich α und β sind?

Antw. $\varrho = \frac{c \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$.

93. Wie groß ist der Radius r des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises, wenn die Seiten desselben gleich a, b, c sind?

Antw. $r = \frac{a b c}{4 \sqrt{s (s - a)(s - b)(s - c)}}$, $[2 s = a + b + c]$.

94. Wie groß ist der Radius ϱ des einem Dreieck einbeschriebenen Kreises, wenn die Seiten desselben gleich a, b, c sind?

Antw. $\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)s-c)}{s}}$, $[2s = a + b + c]$.

95. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Dreiecks, wenn die drei Winkel gleich α, β, γ und die Höhe aus dem Winkelpunkte γ gleich h_1 ist?

Antw. $\triangle = \frac{h_1{}^2 \sin\gamma}{2 \sin\alpha \sin\beta}$.

96. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Dreiecks, wenn die drei Winkel gleich α, β, γ und der Radius des umbeschriebenen Kreises gleich r ist?

Antw. $\triangle = \frac{1}{2} r^2 (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$
$= 2 r^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$.

97. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Dreiecks, wenn die drei Winkel gleich α, β, γ und der Radius des einbeschriebenen Kreises gleich ϱ ist?

Antw. $\triangle = \varrho^2 (\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha + \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\beta + \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma)$
$= \varrho^2 \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha \cdot \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\beta \cdot \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma$.

98. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Dreiecks, wenn die drei Winkel gleich α, β, γ und die Summe seiner Seiten gleich s ist?

Antw. $\triangle = \frac{s^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2}$
$= \frac{1}{4} s^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2}\beta \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2}\gamma$.

99. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Dreiecks, wenn eine Seite gleich c, der gegenüberliegende Winkel gleich γ und die zugehörige Mitteltransversale gleich m ist?

Antw. $\triangle = \frac{1}{8}(4m^2 - c^2) \operatorname{tang}\gamma$.

100. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Dreiecks, wenn die Verbindungslinien der drei Ecken mit demjenigen Punkte, an welchem diese drei Verbindungslinien gleiche Winkel bilden, gleich m_1, m_2, m_3 sind?

Antw. $\triangle = \frac{1}{4}(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)\sqrt{3}$.

e. Das Viereck.

101. Wie groß ist der Flächeninhalt eines beliebigen Vierecks, wenn die beiden Diagonalen gleich d_1 und d_2 und der von denselben eingeschlossene Winkel gleich α ist?

Antw. $F = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$.

102. Wie groß ist der Flächeninhalt eines beliebigen Vierecks, wenn die Winkel desselben gleich α, β, γ, δ und zwei gegenüberliegende Seiten gleich a und c sind?

Antw. $F = \dfrac{a^2 \sin\alpha \sin\beta - c^2 \sin\gamma \sin\delta}{2 \sin(\alpha + \beta)}$

103. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Paralleltrapezes, wenn die beiden Parallelseiten gleich p und q und die an der ersteren anliegenden Winkel gleich α und β sind?

Antw. $F = \dfrac{(p+q)(p-q) \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}$.

104. Wie groß ist die Entfernung eines Punktes P von drei gegebenen Punkten A, B, C, wenn die von demselben nach den drei Punkten gezogenen geraden Linien Winkel einschließen, welche gleich α und β sind? (Pothenot'sche Aufgabe.)

Auflösung. Da die gegenseitige Lage der drei Punkte A, B, C gegeben ist, so ist auch in dem Viereck PACB offenbar $AC = a$, $BC = b$, $\sphericalangle ACB = \gamma$, so wie $\sphericalangle APC = \alpha$ und $\sphericalangle BPC = \beta$ bekannt. Unbekannt ist $\sphericalangle PAC = x$, $\sphericalangle PBC = y$, und zu bestimmen sind die Strecken PA, PC, PB. Diese aber lassen sich sofort leicht bestimmen, wenn die Winkel x und y bekannt sind. Die Winkel x und y sind daher zunächst zu suchen. Nun aber ist unmittelbar

1) $x + y = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma)$ bekannt.

Bezeichnet man PC mit d, so ist ferner in $\triangle ACP$ und $\triangle BCP$ nach dem Sinussatze

$$a : d = \sin\alpha : \sin x,$$
$$d : b = \sin y : \sin\beta,$$

folglich ist auch $a : b = \sin\alpha \sin y : \sin\beta \sin x$, und daher

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta}.$$

Setzt man nun unter Einführung eines Hülfswinkels φ

2) $$\operatorname{tang}\varphi = \frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta},$$

so erhält man

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\sin(90^0 - \varphi)},$$

woraus sich ergibt (Planimetrie §. 75:7, Zus.)

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\sin\varphi - \sin(90^0 - \varphi)}{\sin\varphi + \sin(90^0 - \varphi)},$$

demnach auch (§. 19, Formel 17)

$$\frac{\tang \frac{1}{2}(x-y)}{\tang \frac{1}{2}(x+y)} = \frac{\tang(\varphi - 45^0)}{\tang 45^0},$$

und hieraus folgt, da $\tang 45^0 = 1$ ist,

$$\tang \tfrac{1}{2}(x-y) = \tang \tfrac{1}{2}(x+y) \tang(\varphi - 45^0).$$

Durch diese Gleichung, in welcher $(x+y)$ und $(\varphi - 45^0)$ bekannt, ist nun auch

3) $x - y$ bekannt,

und aus (1) und (3) ergibt sich jetzt sofort der Werth von x und von y. Da aber in $\triangle PCA$ so wie in $\triangle PCB$ alsdann eine Seite und zwei Winkel bekannt sind, so lassen sich nunmehr die Entfernungen des Punktes P von den gegebenen Punkten A, B, C, nämlich PA, PB, PC leicht finden.

f. Kreisstücke.

105. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreisringes, wenn die dem Centriwinkel ω entsprechende Sehne in dem größeren Kreise gleich a, in dem kleineren Kreise gleich b ist?

Antw. $F = \dfrac{(a+b)(a-b)\pi}{4 \sin^2 \frac{1}{2}\omega}$.

106. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Ringausschnittes, wenn die dem zugehörigen Centriwinkel ω entsprechende Sehne in dem größeren Kreise gleich a, in dem kleineren Kreise gleich b ist?

Antw. $F = \dfrac{(a+b)(a-b)\pi\omega}{360 \cdot 4 \sin^2 \frac{1}{2}\omega}$.

107. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreisabschnittes, wenn die dem zugehörigen Centriwinkel ω entsprechende Sehne gleich a ist?

Antw. $F = \frac{1}{4} a^2 \left(\dfrac{\pi\omega}{360 \sin^2 \frac{1}{2}\omega} - \cotg \tfrac{1}{2}\omega \right)$.

108. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreisabschnittes, wenn der Radius des Kreises gleich r und der zugehörige Centriwinkel gleich ω ist?

Antw. $F = \frac{1}{2} r^2 \left(\dfrac{\pi\omega}{180} - \sin\omega \right)$.

---

2. Berechnungs-Aufgaben.

a. Das rechtwinkelige Dreieck.

109. Wie groß ist die Höhe eines runden Thurmes von 8 Meter Dicke, wenn die Spitze desselben am Anfange der bis zum Fuße des Thurmes führenden Horizontallinie von 29 Meter Länge unter dem Elevationswinkel von 62°25′43″ erscheint?

Antw. 63,200014 Meter.

110. Von den Zinnen eines 20 Meter hohen Thurmes, dessen Fuß das Meer bespült, erblickt man ein Schiff unter dem Depressionswinkel von 17′11″,3; wie weit ist das Schiff entfernt?

Antw. 4000 Meter.

111. Wie hoch steht ein Steigvogel, welcher unter dem Erhebungswinkel von 31°51′19″ gesehen wird, wenn die ihn haltende Schnur 132 Meter lang ist und man wegen der Krümmung derselben $\frac{1}{11}$ der Länge abrechnet?

Antw. 63,333 Meter.

112. Die Höhe des Brockens beträgt 1098 Meter oder 0,14797 geogr. Meilen; wie viel Meilen weit nur kann man von dem Gipfel desselben wegen der Krümmung der Erde sehen, wenn der Halbmesser derselben zu 859,5 geogr. Meilen (die geogr. Meile zu 7420 Meter) angenommen wird?

Antw. 15,9494 Meilen.

113. Der Pik de Teyde auf Teneriffa hat eine Höhe von 3578 Meter oder 0,4822 geogr. Meilen; wie viel Grade eines größten Kreises der Erde kann man von der Spitze desselben überblicken?

Antw. 1°55′10″.

114. Wie hoch ist der Stand der Sonne, wenn ein 20 Meter hoher Gegenstand in der Horizontalebene einen Schatten von 60 Meter Länge wirft?

Antw. 18°26′5″,81.

115. Wie lang ist der Schatten der 18,83 Meter hohen Brunnenpyramide auf dem Clemensplatze zu Coblenz am 21. Juni (21. Dezember) Mittags 12 Uhr, wenn die geographische Breite von Coblenz zu 50°21′12″ und die Schiefe der Ekliptik zu 23°27′54″ angenommen wird?

Antw. 9,548184 Meter (64,890776 Meter).

116. Die Kunststraße über den Bernina in der Schweiz hat eine Steigung von 8 Procent (d. h. die Straße steigt auf je 100 Meter Länge um 8 Meter), wie groß ist die Neigung derselben gegen die Horizontalebene?

Antw. 4°35′19″.

117. Die Springfield-Stockbridge-Eisenbahn in Amerika hat eine Steigung von 66 Millimeter auf den laufenden Meter, wie groß ist die Neigung derselben gegen die Horizontalebene?

Antw. 3°47′3″,38.

118. Die südliche Staats-Eisenbahn in Oesterreich hat bei ihrem Uebergang über die Norischen Alpen auf dem Sömmering eine Steigung von 40 Millimeter auf den laufenden Meter, wie groß ist die Neigung derselben gegen die Horizontalebene?

Antw. 2°17′32″,79.

119. Die Rigi-Bahn in der Schweiz hat an verschiedenen Stellen eine Steigung von 6, von 8, von 25 Procent. Wie groß ist bei dieser bis jetzt größten Steigung von 25 Procent die Neigung derselben gegen die Horizontalebene?

Antw. 14°28′39″.

120. Die geographische Breite von Coblenz beträgt 50°21′12″, wie groß ist der Radius des durch Coblenz gehenden Parallelkreises, den Halbmesser der Erde zu 859,5 Meilen angenommen?

Antw. 548,405 Meilen.

121. Unter welchem Breitengrade ist der Radius des Parallelkreises dem dritten Theile des Erdhalbmessers gleich?

Antw. Unter 70°31′43″,60.

122. Unter welchem Breitengrade ist der Umfang des Prarallelkreises dem dritten Theile des Aequators gleich?

Antw. Unter 60°

123. Wie groß ist die Entfernung der Sonne von der Erde, wenn ihre Horizontalparallaxe (der Winkel, unter welchem von ihrem Mittelpunkt aus gesehen der Halbmesser der Erde erscheinen würde) nach den neuesten Bestimmungen zu 8″,88 und der Erdhalbmesser zu 859,5 geogr. Meilen angenommen wird?

Antw. 19978682 geogr. Meilen.

124. Der scheinbare Durchmesser der Sonne von der Erde aus gesehen beträgt 32′2″; wie groß ist der wahre Durchmesser derselben, wenn ihre Entfernung gleich 19978682 geogr. Meilen?

Antw. 186163,06 geogr. Meilen.

125. Wie groß ist die Entfernung des Mondes von der Erde, wenn seine Horizontalparallaxe 57′1″ beträgt und der Erdhalbmesser zu 859,5 geogr. Meilen angenommen wird?

Antw. 51824,83 geogr. Meilen.

126. Der scheinbare Durchmesser des Mondes von der Erde aus gesehen beträgt 31′6″; wie groß ist der wahre Durchmesser desselben, wenn seine Entfernung gleich 51824,83 geogr. Meilen?

Antw. 468,838 geogr. Meilen.

127. Auf einem Berge wurde die Depression des Meereshorizontes zu $1^0 14'$ beobachtet; wie hoch ist der Berg, der Erdhalbmesser zu 859,5 geogr. Meilen à 7420 Meter angenommen?

Antw. 1477,8126 Meter.

128. Auf dem Pichinga, in der Nähe von Quito, in einer Höhe von 4550,86 Meter oder 0,6133 geogr. Meilen beobachtete man die Depression des Meereshorizontes zu $2^0 9' 50''$; wie groß ist hiernach der Radius der Erde?

Antw. 859,448 geogr. Meilen.

129. Der Chimborasso hat eine Höhe von 6529 Meter oder 0,88 geogr. Meilen. In welcher Entfernung von seinem Fuße verschwindet der Gipfel des Berges am fernen Horizont dem Seefahrer?

Antw. Bei 38,875 geogr. Meilen.

130. Welche Höhe hat der Pik von Teneriffa, wenn sein Gipfel dem Seefahrer in einer Entfernung von 28,7916 geogr. Meilen von seinem Fuße am fernen Horizont auftaucht?

Antw. 0,4822 geogr. Meilen oder 3578 Meter.

131. Wie weit kann ein Mensch, von 1,5 Meter Höhe bis zum Auge, auf der Erde in einer Horizontalebene sehen?

Antw. 4374,06 Meter.

132. Wie weit kann man von einem 5 Meter hohen Standpunkte auf der Erde in einer Horizontalebene sehen? Wie weit von einem 10 Meter hohen Standpunkte?

Antw. 7985,92 Meter; 11293,80 Meter.

b. Das gleichschenkelige Dreieck.

133. Wie groß sind die Winkel α und γ eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn der Umfang desselben 918,927 Meter, die Höhe zur Basis gleich 66,5399 Meter?

Antw. $\sphericalangle \alpha = 16^0 28' 50''$, $\sphericalangle \gamma = 147^0 2' 20''$.

134. Wie groß sind die Winkel α und γ eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn eine Scheitelseite gleich 11,4 Meter und der Radius des umbeschriebenen Kreises 6,44 Meter?

Antw. $\sphericalangle \alpha = 62^0 15' 46'',8$, $\sphericalangle \gamma = 55^0 28' 26'',4$.

135. Wie groß ist der Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn der Umfang desselben gleich 421,134 Meter und der Winkel an der Grundlinie gleich $55^0 14' 20''$ ist?

Antw. $\triangle = 8423,946$ □ Meter.

136. Wie groß ist der Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn der Winkel an der Grundlinie gleich $10^0 36' 4''$ und der Radius des umbeschriebenen Kreises gleich 59,59 Meter ist?

Antw. $\triangle = 86,93$ □ Meter.

137. Unter welchem Sehwinkel würde uns der Mond erscheinen, wenn er von uns die Entfernung der Sonne von 19978682 geogr. Meilen hätte?

Antw. Unter $4'',9406$.

138. Welche Entfernung müßte der Mond, dessen Durchmesser 468,838 geogr. Meilen beträgt, von der Erde haben, damit er nur mehr eine scheinbare Größe von $2''$ hätte?

Antw. 48352389 geogr. Meilen.

139. Alexander von Humboldt beobachtete auf dem Chimborazzo hoch in den Lüften einen Condor, bei welchem die Spannung der ausgebreiteten Flügel fast nie unter 3,6 Meter beträgt, unter einem Sehwinkel von 2 Minuten. Wie hoch war dieser Raubvogel über dem Beobachter?

Antw. 6187,94 Meter.

140. Welches ist der scheinbare Durchmesser der Erde, dieselbe von der Sonne aus gesehen?

Antw. $17'',76$.

141. Welches ist der scheinbare Durchmesser der Erde, dieselbe von dem Monde aus gesehen?

Antw. $1^0 54' 2''$.

142. In welcher Entfernung scheinen die Schienen einer in gerader Linie hinlaufenden Eisenbahn bei einer Spurweite von 1,436 Meter einem zwischen den Schienen stehenden Beobachter zusammenzulaufen, wenn die Grenze des Sehwinkels zu $40''$ angenommen wird?

Antw. 7404,905 Meter oder ungefähr 1 Meile.

143. In welcher Entfernung verschwindet ein Luftballon dem Auge, wenn sein Durchmesser 30 Meter beträgt und die Grenze des Sehwinkels zu 2 Minuten angenommen wird?

Antw. 51566,21 Meter.

144. In welcher Entfernung verschwindet Nadar's Riesen-Luftballon, welcher einen Durchmesser von 32 Meter hat, dem Auge, die Grenze des Sehwinkels zu 1 Minute angenommen?

Antw. 110007,9 Meter.

c. Das reguläre Vieleck.

145. Wie groß ist die Seite eines regulären Sechszehnecks, wenn der Radius des einbeschriebenen Kreises 4 Meter beträgt?

Antw. 1,59129 Meter.

146. Wie groß ist der Umfang eines regulären Vierzehnecks, wenn der Radius des einbeschriebenen Kreises 5 Meter beträgt?

Antw. 31,95407 Meter.

147. Wie groß ist der Umfang des in einen Kreis einbeschriebenen regulären Fünfecks, wenn der Umfang des einbeschriebenen regulären Sechsecks 7 Meter beträgt?

Antw. 6,85749 Meter.

148. Wie groß ist die Seite des in einen Kreis einbeschriebenen regulären Dreiecks, wenn die Seite des einbeschriebenen regulären Achtecks 9 Meter beträgt?

Antw. 20,3673 Meter.

149. Wie groß ist die Seite des in einen Kreis einbeschriebenen regulären Achtecks, wenn die Seite des einbeschriebenen regulären Zweiunddreißigecks 3 Meter beträgt?

Antw. 11,7127 Meter.

150. Wie groß ist der Umfang des in einen Kreis einbeschriebenen regulären Fünfundzwanzigecks, wenn die Seite des einbeschriebenen regulären Dreiecks 5 Meter beträgt?

Antw. 18,0903 Meter.

151. Wie groß ist der Flächeninhalt eines regulären Siebenecks, wenn die Seite desselben 2,5 Meter beträgt?

Antw. 22,712 □ Meter.

152. Wie groß ist der Flächeninhalt eines regulären Elfecks, wenn der Umfang desselben 110 Meter beträgt?

Antw. 936,564 □ Meter.

153. Wie groß ist der Flächeninhalt eines regulären Dreizehnecks, wenn der Radius des umbeschriebenen Kreises 3 Meter beträgt?

Antw. 27,1863 □ Meter.

154. Wie groß ist der Flächeninhalt eines regulären Siebenzehnecks, wenn der Radius des einbeschriebenen Kreises 3,5 Meter beträgt?

Antw. 38,92862 □ Meter.

d. Das schiefwinklige Dreieck.

155. Zwei Eisenbahnzüge gehen von derselben Station auf zwei unter einem Winkel $\gamma = 60^0 17' 30''$ divergirenden Eisenbahnen zu gleicher Zeit ab, bezüglich mit einer Geschwindigkeit von $c = 5$ und $c_1 = 5{,}5$ Meilen in der Stunde. Wie groß ist die gegenseitige Entfernung AB derselben nach $m = 20$ Minuten?

Antw. $AB = \frac{m}{60}\sqrt{c^2 + c_1{}^2 - 2cc_1 \cos\gamma} = 1{,}7636$ Meilen.

156. Wie hoch ist ein Thurm AB, wenn die Spitze desselben in den beiden Endpunkten einer nach demselben hin gerichteten horizontalen Standlinie $CD = 97$ Meter unter den Elevationswinkeln $\gamma = 31^0 50' 7''$ und $\delta = 53^0 12' 15''$ erscheint?

Antw. $AB = \frac{CD \cdot \sin\gamma \sin\delta}{\sin(\delta - \gamma)} = 112{,}4458$ Meter.

157. Wie hoch steht ein Luftballon, wenn derselbe von zwei Beobachtern, welche auf derselben Seite mit ihm in derselben Vertikalebene sich befinden, gleichzeitig unter den Elevationswinkeln $\gamma = 35^0 17' 30''$ und $\delta = 64^0 9' 25''$ gesehen wird und die beiden Beobachter eine gegenseitige Entfernung von $CD = 2900$ Meter haben?

Antw. $h = \frac{CD \cdot \sin\gamma \sin\delta}{\sin(\delta - \gamma)} = 3123{,}5187$ Meter.

158. Wie hoch ist ein jenseits eines Flusses auf einer Anhöhe stehender Obelisk AB, wenn diesseits in der Richtung nach dem Obelisk eine horizontale Standlinie $CD = 75$ Meter angenommen wird, und in dem entfernteren Endpunkte der Standlinie der Elevationswinkel der Spitze zu $\gamma = 33^0 45' 17''$, in dem näheren Endpunkte der Elevationswinkel der Spitze und des Fußes zu $\delta = 51^0 14' 6''$ und $\varphi = 40^0 18' 7''$ bestimmt worden ist?

Antw. $AB = \frac{CD \cdot \sin(\delta - \varphi) \sin\gamma}{\sin(\delta - \gamma) \cos\varphi} = 34{,}5019$ Meter

159. In einer Entfernung von $BD = 25$ Meter von einem in einer Horizontalebene stehenden Thurme AB hat man den Elevationswinkel δ seiner Spitze doppelt so groß gefunden, als den Elevationswinkel γ derselben in einer Entfernung von $BC = 75$ Meter von seinem Fuße. Wie hoch ist der Thurm?

Antw. $AB = 25\sqrt{3} = 43{,}3012$ Meter.

160. Von einem Luftballon aus in einer Höhe von $h = 1000$ Meter über einer horizontalen Ebene beobachtet man zwei in dieser Ebene hinter einander liegende feindliche Schanzen A und B unter den Depressionswinkeln $\alpha = 64^0 7' 50''$ und $\beta = 35^0 15' 20''$. Wie groß ist die gegenseitige Entfernung beider Schanzen?

Antw. $AB = \dfrac{h \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha \sin\beta} = 929{,}76$ Meter.

161. Wie hoch ist der Thurm AB eines Schlosses in einem See, wenn in den beiden Endpunkten C und D einer am Ufer abgestreckten Standlinie $CD = 250$ Meter die Visirlinien nach der Spitze des Thurmes mit der Standlinie die Winkel $\gamma = 24^0 50' 20''$ und $\delta = 105^0 40' 30''$ bilden und in D der Elevationswinkel der Spitze $\varphi = 25^0 30' 10''$ beträgt?

Antw. $AB = \dfrac{CD \cdot \sin\gamma \sin\varphi}{\sin(\gamma + \delta)} = 59{,}4747$ Meter.

162. Wie hoch ist ein Thurm AB jenseits eines Flusses, wenn in den beiden Endpunkten einer längs dem diesseitigen Ufer angenommenen horizontalen Standlinie $CD = 337{,}5$ Meter die Visirlinien nach dem in derselben Horizontalebene befindlichen Fuße des Thurmes mit der Standlinie die Horizontalwinkel $\gamma = 42^0 7' 13''$ und $\delta = 39^0 26' 5''$ bilden, und die Spitze desselben an dem erstern Endpunkte der Standlinie unter dem Elevationswinkel $\varphi = 18^0 47' 16''$ erscheint?

Antw. $AB = \dfrac{CD \cdot \sin\delta \operatorname{tang}\varphi}{\sin(\gamma + \delta)} = 73{,}72915$ Meter.

163. Wie hoch schwebt eine Wolke über der Erde, wenn auf einem Berge in der Höhe $h = 85$ Meter der Elevationswinkel derselben zu $\varepsilon = 56^0 10'$ beobachtet und zugleich ihr Spiegelbild in einem See unter dem Depressionswinkel $\alpha = 58^0 20'$ gesehen wird.

Antw. $H = \dfrac{h \cdot \sin(\alpha + \varepsilon)}{\sin(\alpha - \varepsilon)} = 2045{,}859$ Meter.

164. Der von Dupuy de Lôme construirte lenkbare Luftballon hat mit der Gondel eine vertikale Ausdehnung von $a = 42{,}12$ Meter. Der Sehwinkel des schwebenden Ballons mit der Gondel wurde zu $\alpha = 30'$ und der Elevationswinkel der Gondel zu $\beta = 48^0 20'$ geschätzt. Wie hoch befand sich die Gondel über der Erde?

Antw. $H = \dfrac{a \cdot \cos(\alpha + \beta) \sin\beta}{\sin\alpha} = 2373{,}4147$ Meter.

165. Eine von dem Fußpunkte eines Thurmes A B aus abgesteckte Strecke beträgt m = 33 Meter, und die Verlängerung dieser Strecke um ebenfalls m = 33 Meter erscheint von der Spitze des Thurmes unter dem Winkel $\alpha = 14^0 20' 10''$. Wie hoch ist der Thurm?

Antw. $H = \frac{1}{2} m (\operatorname{cotg} \alpha \pm \sqrt{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 8}) = 109{,}174329$ Meter oder 19,949754 Meter.

166. In einiger Entfernung von einem in einer horizontalen Ebene stehenden Thurme A B hat man auf einer geraden Standlinie zwei gleiche Strecken C D und D E, jede von 83,5 Meter, abgemessen und in C, D, E bezüglich die Elevationswinkel der Thurmspitze $\gamma = 36^0 50' 20''$, $\delta = 21^0 24' 40''$ und $\varepsilon = 14^0 17' 30''$ gefunden. Wie hoch ist der Thurm?

Antw. $AB = \dfrac{CD}{\sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{cotg}^2 \gamma - \operatorname{cotg}^2 \delta + \frac{1}{2} \operatorname{cotg}^2 \varepsilon}} = 57{,}7292$ Meter.

167. Wie hoch ist ein auf einer Anhöhe stehender Thurm A B, wenn auf dem Abhange derselben eine nach dem Fußpunkte B des Thurmes gerichtete Standlinie C D = 66,3875 Meter angenommen wird, und an ihrem untern Endpunkte C der Elevationswinkel der Spitze $\gamma = 37^0 48' 30''$, der Neigungswinkel der Standlinie gegen den Horizont $x = 19^0 39' 30''$, und an ihrem oberen Endpunkte D der Elevationswinkel der Spitze $\delta = 50^0 10' 20''$ beträgt?

Antw. $AB = \dfrac{CD \cdot \sin(\gamma - x) \sin(\delta - x)}{\sin(\delta - \gamma) \cos x} = 52{,}0743$ Meter.

168. Zwei in einer Horizontalebene liegende Orte A und B erscheinen von der Spitze eines Berges von h = 1000 Meter Höhe unter den Depressionswinkeln $\alpha = 11^0 15' 10''$ und $\beta = 6^0 7' 20''$, während die Horizontalprojectionen der Visirlinien nach beiden Orten einen Winkel $\gamma = 49^0 34' 50''$ bilden. Wie groß ist die gegenseitige Entfernung beider Orte?

Antw. $AB = h \sqrt{\operatorname{cotg}^2 \alpha + \operatorname{cotg}^2 \beta - 2 \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \cos \gamma}$
$= 7170{,}522$ Meter.

169. Wie groß ist die gegenseitige Entfernung zweier in einer Horizontalebene liegenden Orte A und B, wenn dieselben von der Spitze eines Berges von h = 900 Meter Höhe unter den Depressionswinkeln $\alpha = 10^0 15' 6''$ und $\beta = 7^0 6' 18''$ erscheinen, während die Visirlinien nach beiden Orten einen Winkel $\gamma = 49^0 56' 7''$ bilden?

Antw. $AB = \dfrac{h \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma}}{\sin \alpha \sin \beta}$
$= 5581{,}24$ Meter.

170. Wie groß ist die gegenseitige Entfernung zweier in einer Horizontalebene befindlichen Thürme A und B, wenn in derselben Ebene eine horizontale Standlinie $CD = 3720$ Meter angenommen wird, und die Visirlinien nach den Fußpunkten der beiden Thürme mit der Standlinie in dem einen Endpunkte derselben die Horizontalwinkel $\alpha = 82^0 40' 7''$ und $\beta = 36^0 22' 13''$, in dem anderen Endpunkte mit derselben die Horizontalwinkel $\beta' = 70^0 54' 23''$ und $\alpha' = 22^0 14' 19''$ bilden?

Antw. Setzt man $\alpha + \alpha' = \varphi, \beta + \beta' = \varphi', \alpha - \beta = \psi$, so ist

$$AB = \frac{CD\sqrt{\sin^2\alpha' \sin^2\varphi' + \sin^2\beta' \sin^2\varphi - 2\sin\alpha' \sin\beta' \sin\varphi \sin\varphi' \cos\psi}}{\sin\varphi \sin\varphi'}$$

$= 2874,757$ Meter.

171. Ueber die Spitze eines Thurmes, dessen Höhe $h = 55$ Meter, fallen die oberen Randstrahlen der Sonne, deren scheinbarer Durchmesser $\delta = 32' 2''$, gegen die Horizontalebene und bilden mit derselben einen Winkel $\alpha = 30^0 40'$. Wie lang ist der Halbschatten AB des Thurmes?

Antw. $AB = \dfrac{h \sin\delta}{\sin(\alpha - \delta) \sin\alpha} = 2,00156$ Meter.

172. Der Pik von Teneriffa hat eine Höhe von $h = 3578$ Meter oder 0,4822 geogr. Meilen; wie hoch müßte auf der nahen Afrikanischen Küste in einer Entfernung von $m = 60$ Meilen, also von $\varphi = 4^0$, ein Berg AH sein, von dessen Gipfel man die Spitze des Pik erblicken würde, den Erdhalbmesser $r = 859,5$ geogr. Meilen (zu 7420 Meter) angenommen?

Antw. $AH = \dfrac{2r\sin^2\frac{1}{2}(\varphi - \alpha)}{\cos(\varphi - \alpha)}$ für $\cos\alpha = \dfrac{r}{r+h}$.

$= 4208,58$ Meter.

Geometrie des Raumes.

Fünfte Lehrstufe.

Erster Abschnitt.

Von den geraden Linien und Ebenen im Raume und von der körperlichen Ecke.

I. Die geraden Linien und Ebenen im Raume.

§. 1.

Bestimmung der Lage einer Ebene im Raume.

Erklärungen. Durch einen Punkt im Raume lassen sich unzählig viele Ebenen legen; durch zwei Punkte im Raume lassen sich ebenfalls unzählig viele Ebenen legen; aber durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte im Raume läßt sich immer nur eine Ebene legen: Durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte im Raume ist also die Lage einer Ebene vollständig bestimmt.

Durch eine gerade Linie im Raume lassen sich unzählig viele Ebenen legen; aber durch eine gerade Linie und einen Punkt außerhalb derselben läßt sich immer nur eine Ebene legen: Durch eine gerade Linie und einen Punkt außerhalb derselben ist also ebenfalls die Lage einer Ebene vollständig bestimmt.

Durch zwei sich schneidende gerade Linien, ebenso durch zwei parallele gerade Linien im Raume läßt sich immer eine, aber auch nur eine Ebene legen: Durch zwei sich schneidende gerade Linien, so wie durch zwei parallele gerade Linien ist daher ebenfalls die Lage einer Ebene vollständig bestimmt.

Durch zwei gerade Linien im Raume dagegen, welche weder parallel sind, noch unbegrenzt verlängert sich schneiden, läßt sich keine gemeinschaftliche Ebene legen. Solche gerade Linien im Raume, welche weder parallel sind noch sich schneiden, werden windschief genannt; auch sagt man von ihnen, sie kreuzen sich.

§. 2.

Lage einer Geraden in Bezug auf eine Ebene.

Erklärungen. Eine gerade Linie hat mit einer Ebene entweder zwei Punkte, oder einen Punkt, oder gar keinen Punkt gemeinsam. Eine gerade Linie, welche zwei Punkte mit einer Ebene gemeinsam hat, liegt ganz in der Ebene; eine gerade Linie, welche nur einen Punkt mit einer Ebene gemeinsam hat, schneidet die Ebene; eine gerade Linie, welche, so weit man sie auch verlängern mag, keinen Punkt mit der Ebene gemeinsam hat, dieselbe also nicht schneidet, ist der Ebene parallel.

Eine gerade Linie, welche eine Ebene schneidet, steht auf allen Geraden der Ebene, welche durch den Treffpunkt gehen, entweder senkrecht oder nicht. Im erstern Falle sagt man, die gerade Linie steht auf der Ebene senkrecht (Fig. 1), im letztern Falle, sie sei gegen die Ebene geneigt (Fig. 2).

Fig. 1.

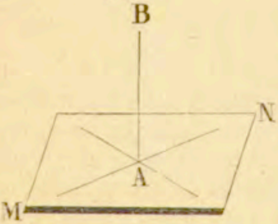
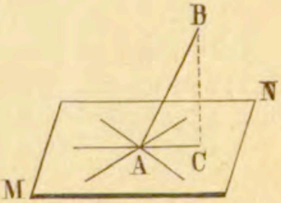


Fig 2.



Denkt man sich von irgend einem Punkte einer geneigten Geraden AB eine Senkrechte auf die Ebene gefällt und den Fußpunkt dieser Senkrechten mit dem Punkte, in welchem die geneigte Linie die Ebene trifft, verbunden, so heißt diese Verbindungslinie die Projection der geneigten Geraden auf die Ebene, und der Winkel, welchen die geneigte Gerade mit ihrer Projection bildet, ihr Neigungswinkel. So ist AC die Projection der Geraden AB auf die Ebene MN und $\sphericalangle$BAC der Neigungswinkel der Geraden AB zur Ebene MN.

§. 3.

Lage einer Ebene in Bezug auf eine Ebene.

Erklärungen. Zwei Ebenen haben entweder zwei gerade Linien oder nur eine gerade Linie oder endlich gar nichts mit einander gemeinsam. Zwei Ebenen, welche mit einander zwei gerade Linien gemeinsam haben, fallen in eine einzige zusammen; zwei Ebenen, welche eine gerade Linie gemeinsam haben, schneiden sich in dieser geraden Linie; zwei Ebenen, welche, so weit man sie auch verlängern mag, auch keinen Punkt gemeinsam haben, sich also nicht schneiden, sind einander parallel.

Eine Ebene, welche eine andere schneidet, hat entweder die Lage, daß die in irgend einem Punkte der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie in der einen Ebene errichtete Senkrechte auf allen Geraden, die durch ihren Fußpunkt in der anderen Ebene gelegt sind, senkrecht steht, — oder nicht.

Fig. 3.

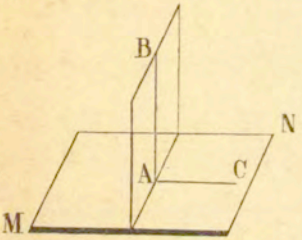
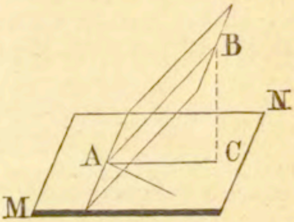


Fig. 4.



Im erstern Falle sagt man, die beiden Ebenen stehen auf einander senkrecht (Fig. 3), im zweiten, sie seien gegen einander geneigt (Fig. 4), und der Winkel, den die in einem Punkte der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie in der einen Ebene errichtete Senkrechte mit ihrer Projection in der andern Ebene bildet, $\sphericalangle BAC$, heißt alsdann der Neigungswinkel der beiden Ebenen.

Die verschiedene Lage der geraden Linien und der Ebenen, sowohl unter sich als gegen einander, behandeln die Lehrsätze der nachfolgenden Paragraphen.

§. 4.

Lehrsätze über die parallele Lage gerader Linien im Raume.

1. Sind zwei gerade Linien einer dritten im Raume parallel, so sind sie unter einander parallel (Fig. 5).

$$\frac{AB \ddagger EF,\quad CD \ddagger EF,}{AB \ddagger CD.}$$

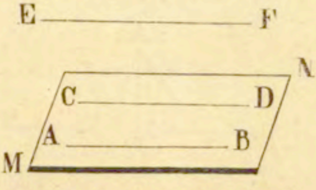


Fig. 5.

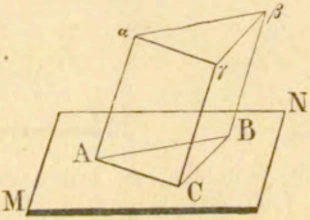
Beweis. Da die gerade Linie AB mit EF parallel ist, so hat sie mit EF gleiche Richtung, und da die gerade

Linie CD ebenfalls mit EF parallel ist, so hat auch diese mit EF gleiche Richtung; folglich haben AB und CD beide mit EF und daher auch mit einander gleiche Richtung, und sind demnach einander parallel.

2. Sind die Schenkel zweier Winkel im Raume paarweise parallel und nach derselben Seite gerichtet, so sind die beiden Winkel einander gleich (Fig. 6).

$$\frac{AB \ddagger \alpha\beta,\ AC \ddagger \alpha\gamma,}{\sphericalangle BAC = \sphericalangle \beta\alpha\gamma.}$$

Fig. 6.



Beweis. Man mache die Schenkel der beiden Winkel paarweise gleich, also $AB = \alpha\beta$ und $AC = \alpha\gamma$, ziehe $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, ferner BC und $\beta\gamma$; alsdann ist sowohl $AB\alpha\beta$ als $AC\alpha\gamma$ ein Parallelogramm, folglich $B\beta =$ und $\ddagger (A\alpha) =$ und $\ddagger C\gamma$. Nun ist auch $BC\beta\gamma$ ein Parallelogramm und daher $BC = \beta\gamma$. Da demnach jetzt $\triangle ABC \cong \triangle \alpha\beta\gamma$, so ist $\sphericalangle BAC = \sphericalangle \beta\alpha\gamma$.

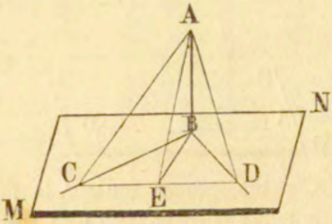
§. 5.

Lehrsätze über die senkrechte Lage gerader Linien gegen eine Ebene.

1. Eine gerade Linie steht senkrecht auf einer Ebene, wenn sie auf zwei durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Geraden senkrecht steht (Fig. 7).

$$\frac{AB \perp BC,\ AB \perp BD,}{AB \perp MN.}$$

Fig. 7



Beweis. Man ziehe durch den Fußpunkt von AB in der Ebene MN beliebig die gerade Linie BE und lege durch einen beliebigen Punkt E der Geraden BE zwischen BC und BD eine Gerade CD so, daß $CE = ED$, und verbinde A mit C, E, D; alsdann ist (Planim. §. 64:4)

$$AC^2 + AD^2 = 2AE^2 + \tfrac{1}{2}CD^2,$$
$$BC^2 + BD^2 = 2BE^2 + \tfrac{1}{2}CD^2,$$
$$\overline{}$$
$$(AC^2 - BC^2) + (AD^2 - BD^2) = 2AE^2 - 2BE^2,$$
$$2AB^2 = 2(AE^2 - BE^2),$$
$$AB^2 = AE^2 - BE^2,$$
$$\overline{}$$
$$AB \perp BE.$$

Da demnach die gerade Linie AB auf jeder beliebigen durch ihren Fußpunkt gezogenen Geraden in der Ebene senkrecht steht, so steht sie auf der Ebene selbst senkrecht.

Zusatz. Von einem Punkte außerhalb einer Ebene läßt sich nur eine Senkrechte auf dieselbe fällen; auch läßt sich in einem Punkte einer Ebene nur eine Senkrechte auf dieselbe errichten.

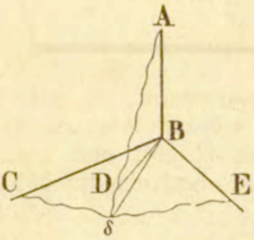
Die Senkrechte ist die kürzeste Linie, welche sich von einem Punkte außerhalb einer Ebene nach derselben ziehen läßt, und bestimmt demnach die Entfernung oder den Abstand des Punktes von der Ebene.

2. Wenn auf einer geraden Linie in einem Punkte derselben drei Geraden senkrecht stehen, so liegen diese drei Geraden in einer Ebene (Fig. 8).

Auf AB stehen BC, BD, BE senkrecht,

Die Geraden BC, BD, BE liegen in einer Ebene.

Fig. 8.

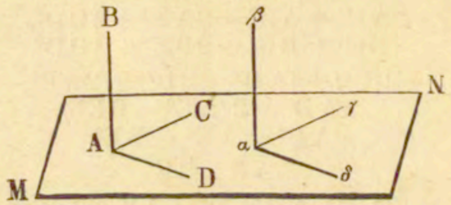


Beweis. Man denke sich durch BC und BE eine Ebene CBE gelegt. Läge nun BD nicht in dieser Ebene, so müßte eine durch ABD gelegte Ebene die Ebene CBE etwa in Bδ schneiden, und es müßte AB zugleich auf Bδ (L. 1) und BD (Voraussf.) senkrecht stehen, was unmöglich ist.

3. Wenn von zwei parallelen Geraden die eine auf einer Ebene senkrecht steht, so steht auch die andere senkrecht auf der Ebene (Fig. 9).

$$\frac{AB \ddagger \alpha\beta,\ AB \perp MN,}{\alpha\beta \perp MN.}$$

Fig. 9.

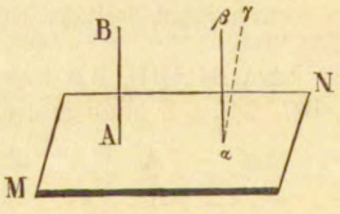


Beweis. Man ziehe in der Ebene MN von den Fußpunkten der Geraden AB und $\alpha\beta$ aus $AC \ddagger \alpha\gamma$ und $AD \ddagger \alpha\delta$; alsdann ist (§. 4:2) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle \beta\alpha\gamma$ und $\sphericalangle BAD = \sphericalangle \beta\alpha\delta$. Da aber in Folge der Voraussetzung $\sphericalangle BAC = R$ und $\sphericalangle BAD = R$, so ist auch $\sphericalangle \beta\alpha\gamma = R$ und $\sphericalangle \beta\alpha\delta = R$, mithin (L. 1) $\alpha\beta \perp MN$.

4. Zwei gerade Linien, welche beide auf derselben Ebene senkrecht stehen, sind einander parallel (Fig. 10).

$$\frac{AB \perp MN,\ \alpha\beta \perp MN,}{AB \ddagger \alpha\beta.}$$

Fig. 10.



Beweis. Angenommen, es wäre nicht $\alpha\beta$, sondern etwa $\alpha\gamma \ddagger AB$, alsdann wäre (L. 3) $\alpha\gamma \perp MN$. Nach der Voraussetzung ist aber auch $\alpha\beta \perp MN$, also wären zugleich $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ senkrecht auf MN, was (L. 1, Zus.) unmöglich ist.

§. 6.

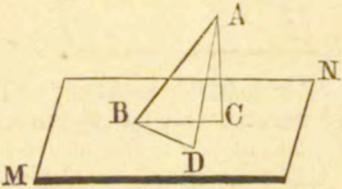
Lehrsätze über die geneigte Lage gerader Linien gegen eine Ebene.

1. Steht eine gerade Linie gegen eine Ebene geneigt, so ist unter allen Winkeln, welche sie mit den Geraden der Ebene bildet,

der von der geraden Linie selbst und ihrer Projection gebildete Winkel, d. i. ihr Neigungswinkel, der kleinste (Fig. 11).

$$\frac{AB \text{ gegen } MN \text{ geneigt, } AC \text{ senkrecht auf } MN,}{\sphericalangle ABC < \sphericalangle ABD.}$$

Fig. 11.

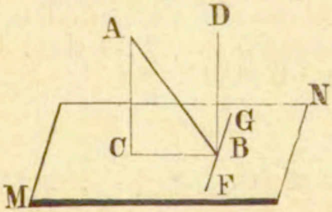


Beweis. Man mache die durch B in der Ebene MN beliebig gezogene Gerade $BD = BC$ und verbinde A mit D. Da nun $AC < AD$ (§. 5:1, Zus.), so ist auch (Planim. §. 36:2) $\sphericalangle ABC < \sphericalangle ABD$.

2. Steht eine gegen eine Ebene geneigte gerade Linie senkrecht auf einer Geraden in der Ebene, so steht auch ihre Projection auf dieser Geraden senkrecht (Fig. 12).

$$\frac{AB \text{ geneigt gegen } MN, \text{ aber senkrecht auf } FG, \ AC \perp MN,}{BC \perp FG.}$$

Fig. 12.



Beweis. Man denke sich im Punkte B auf MN die Senkrechte BD errichtet, so liegt (§. 5:4) BD mit AC, also auch mit BA und BC in derselben Ebene ACBD. Da nun FG senkrecht steht auf BD und BA, so steht auch $FG \perp BC$ (§. 5:1), also auch umgekehrt $BC \perp FG$.

Zusatz. Steht die Projection einer zur Ebene geneigten geraden Linie senkrecht auf einer Geraden in der Ebene, so steht auch die gerade Linie auf dieser Geraden senkrecht.

§. 7.

Lehrsätze über die parallele Lage gerader Linien gegen eine Ebene.

1. Eine gerade Linie im Raume, welche einer Geraden in der Ebene parallel ist, ist der Ebene selbst parallel (Fig. 13).

$$\frac{AB \parallel CD,}{AB \parallel MN.}$$

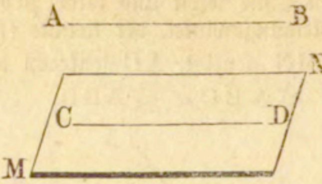


Fig. 13.

Beweis. Da nach Voraussetzung $AB \parallel CD$ ist, so wird AB der Geraden CD nie begegnen, so weit man beide auch verlängern mag, also auch die Ebene MN in der Geraden CD nicht schneiden; ebenso wenig aber in einer anderen zu CD parallelen oder gar nicht parallelen Geraden. Folglich ist $AB \parallel MN$.

2. Eine gerade Linie, welche mit einer Ebene parallel ist, ist mit jeder in dieser Ebene befindlichen Geraden parallel, welche mit ihr in einer Ebene liegt (Fig. 13).

$$\frac{AB \parallel MN,\ AB \text{ und } CD \text{ in einer Ebene,}}{AB \parallel CD.}$$

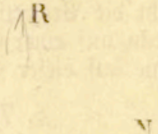
Beweis. Da nach Voraussetzung $AB \parallel MN$, so kann AB die Ebene, also auch die Gerade CD nicht schneiden; da aber überdies AB mit CD in einer Ebene liegt, so ist nothwendig $AB \parallel CD$.

§. 8.

rsätze über die senkrechte Lage der Ebenen gegen einander.

teht eine gerade Linie senkrecht auf einer Ebene, so ch die Gerade gelegte Ebene auf der Ebene senk-

$$\frac{\perp MN,\ PR \text{ durch } AB,}{PR \perp MN.}$$



Beweis. Da AB in Folge der Voraussetzung auf PQ und zugleich auf allen Geraden, welche durch ihren Fußpunkt B in der Ebene MN gezogen werden, senkrecht steht, so steht (§. 3) auch die Ebene PR auf der Ebene MN senkrecht.

2. Steht eine Ebene senkrecht auf einer andern, so steht auch jede in der ersteren auf die gemeinschaftliche Durchschnittslinie errichtete Senkrechte auf der zweiten Ebene senkrecht (Fig 14).

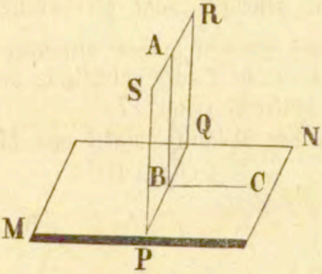
$$\frac{PR \perp MN,\ AB \text{ in } PR,\ AB \perp PQ,}{AB \perp MN.}$$

Beweis. Da nach Voraussetzung die Ebene PR auf der Ebene MN und die in der Ebene PR befindliche Gerade AB auf PQ senkrecht steht, so steht AB auf allen Geraden, die durch ihren Fußpunkt B in der Ebene MN gezogen werden, senkrecht (§. 3), folglich steht AB auf der Ebene MN selbst senkrecht.

3. Steht eine Ebene senkrecht auf einer andern, und man errichtet in der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie auf die zweite Ebene eine Senkrechte, so fällt diese in die erstere Ebene (Fig. 15).

$$\frac{PR \perp MN,\ BA \perp MN,}{BA \text{ fällt in } PR.}$$

Fig. 15.



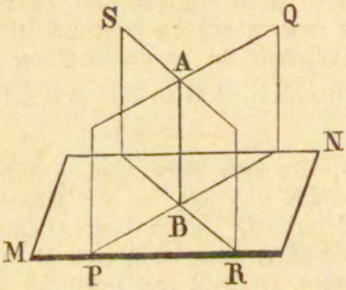
Beweis. Fiele die Gerade BA, welche auf der Ebene MN senkrecht steht, nicht in die Ebene PR, so denke man sich auf die Durchschnittslinie PQ im Punkte B in der Ebene PR eine Senkrechte errichtet; da diese (L. 2) auf der Ebene MN ebenfalls senkrecht stände, so hätte man in einem Punkte zwei Geraden senkrecht auf einer Ebene, was (§. 5 : 1, Zus.) unmöglich ist.

Zusatz. Durch eine gerade Linie in einer Ebene läßt sich zu dieser Ebene nur eine Ebene senkrecht legen.

4. Wenn zwei Ebenen auf einer dritten senkrecht stehen, so steht auch ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie auf der dritten Ebene senkrecht (Fig. 16).

$$\frac{PQ \perp MN,\ RS \perp MN,}{AB \perp MN.}$$

Fig. 16.



Beweis. Denkt man sich in dem Durchschnittspunkte B auf die Ebene MN eine Senkrechte errichtet, so fällt diese (L. 3) in die beiden Ebenen PQ und RS, da beide auf MN senkrecht stehen, folglich in ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie BA.

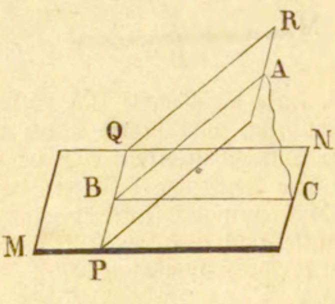
§. 9.

Lehrsätze über die geneigte Lage der Ebenen gegen einander.

1. Wenn zwei Ebenen gegen einander geneigt sind, so steht ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie auf der Ebene ihres Neigungswinkels senkrecht (Fig. 17).

$$\frac{\sphericalangle ABC \text{ sei der Neigungswinkel von } MN \text{ und } PR,}{PQ \perp ABC}$$

Fig. 17.



Beweis. Da nach Voraussetzung AB auf der Durchschnittslinie PQ senkrecht steht und BC die Projection von

AB ist, so steht (§. 6 : 2) auch BC senkrecht auf PQ; folglich steht PQ zugleich auf BA und BC, d. i. auf der Ebene des Winkels ABC senkrecht.

2. Wenn zwei Ebenen gegen einander geneigt sind, so stehen beide auf der Ebene ihres Neigungswinkels senkrecht (Fig. 17).

$$\frac{\sphericalangle ABC \text{ Neigungswinkel der Ebenen } MN \text{ und } PR,}{MN \perp ABC \text{ und } PR \perp ABC.}$$

Beweis. Da nach dem vorigen Satze die Durchschnittslinie PQ auf der Ebene des Winkels ABC senkrecht steht, so steht auch (§. 8 : 1) sowohl die Ebene MN als die Ebene PR auf der Ebene des Winkels ABC senkrecht.

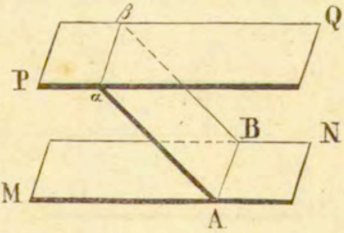
§. 10.

Lehrsätze über die parallele Lage der Ebenen gegen einander.

1. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind ihre Durchschnittslinien einander parallel (Fig. 18).

$$\frac{MN \ddagger PQ,}{AB \ddagger \alpha\beta.}$$

Fig. 18.

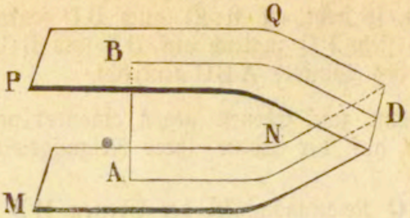


Beweis. Die beiden Durchschnittslinien AB und $\alpha\beta$ liegen offenbar in derselben Ebene $AB\alpha\beta$; da sie aber auch in den parallelen Ebenen MN und PQ liegen, so können sie sich gegenseitig nicht schneiden und sind somit einander parallel.

2. Steht auf zwei Ebenen eine gerade Linie senkrecht, so sind die beiden Ebenen einander parallel (Fig. 19).

$$\frac{AB \perp MN,\ AB \perp PQ,}{MN \ddagger PQ.}$$

Fig. 19.

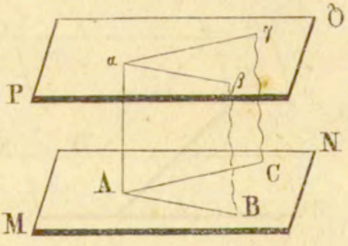


Beweis. Wären die beiden Ebenen MN und PQ einander nicht parallel, so müßten sie hinreichend verlängert sich schneiden. Durch Verbindung eines Punktes D in ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie mit den Fußpunkten A und B der Senkrechten entstände dann aber ein Dreieck ABD, in welchem bei A und B rechte Winkel wären, — was unmöglich ist.

3. Steht auf der einen von zwei parallelen Ebenen eine gerade Linie senkrecht, so steht sie auch auf der andern senkrecht (Fig. 20).

$$\frac{MN \ddagger PQ,\ A\alpha \perp MN,}{A\alpha \perp PQ.}$$

Fig. 20.



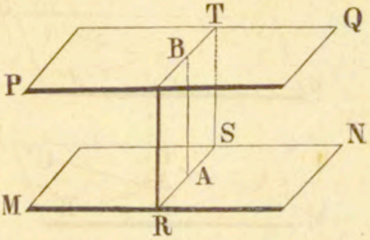
Beweis. Man lege durch die gerade Linie $A\alpha$ zwei beliebige Ebenen, welche die Ebene MN in AB und AC, die Ebene PQ in $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ schneiden; alsdann ist (L. 1) $AB \ddagger \alpha\beta$ und $AC \ddagger \alpha\gamma$. Da aber die Gerade $A\alpha$ in Folge der Voraussetzung senkrecht auf AB und AC steht, so steht sie demnach auch senkrecht auf $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$, und mithin (§. 5 : 1) auf der Ebene PQ selbst senkrecht.

Zusatz. Durch einen Punkt außerhalb einer Ebene läßt sich mit derselben nur eine Ebene parallel legen.

4. Steht auf der einen von zwei parallelen Ebenen eine dritte Ebene senkrecht, so steht sie auch auf der andern Ebene senkrecht (Fig. 21).

$$\frac{MN \ddagger PQ,\ RT \perp MN,}{RT \perp PQ.}$$

Fig. 21.

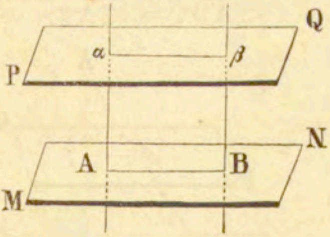


Beweis. Man denke sich in einem Punkte der Durchschnittslinie RS auf dieselbe in der Ebene RT eine Senkrechte AB errichtet, so steht diese (§. 8:2) senkrecht auf der Ebene MN, also (L. 3) auch senkrecht auf der Ebene PQ; folglich (§. 8:1) steht auch die Ebene RT, in welcher AB liegt, auf der Ebene PQ senkrecht.

5. Werden zwei parallele Ebenen von parallelen geraden Linien durchschnitten, so sind die Abschnitte der geraden Linien einander gleich (Fig. 22).

$$\frac{MN \ddagger PQ,\ A\alpha \ddagger B\beta,}{A\alpha = B\beta.}$$

Fig. 22.



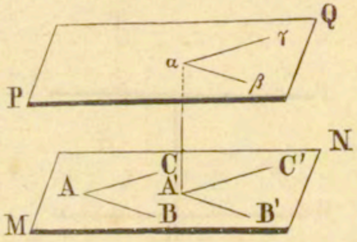
Beweis. Man lege durch die beiden parallelen Geraden $A\alpha$ und $B\beta$ eine Ebene, welche die beiden parallelen Ebenen in AB und $\alpha\beta$ durchschneidet, alsdann ist (L. 1) $AB \ddagger \alpha\beta$; da aber auch $A\alpha \ddagger B\beta$, so ist $AB\alpha\beta$ ein Parallelogramm, folglich $A\alpha = B\beta$.

Zusatz. Parallele Ebenen sind überall gegenseitig gleich weit von einander entfernt.

6. Zwei Ebenen sind einander parallel, wenn die Schenkel zweier in denselben liegenden Winkel paarweise parallel sind (Fig. 23).

$$\frac{AB \ddagger \alpha\beta,\ AC \ddagger \alpha\gamma,}{MN \ddagger PQ.}$$

Fig. 23.

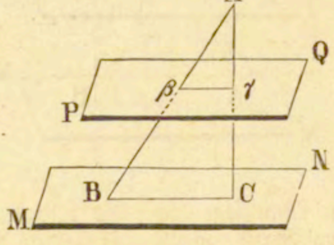


Beweis. Man fälle von dem Scheitel des Winkels $\beta\alpha\gamma$ die Senkrechte $\alpha A'$ auf die Ebene MN. Zieht man nun $A'B' \ddagger AB$ und $A'C' \ddagger AC$, so ist auch $A'B' \ddagger \alpha\beta$ und $A'C' \ddagger \alpha\gamma$. Da aber $\sphericalangle \alpha A'B' = R$ und $\sphericalangle \alpha A'C' = R$, so ist auch $\sphericalangle A'\alpha\beta = R$ und $\sphericalangle A'\alpha\gamma = R$. Daher stehen beide Ebenen auf $A'\alpha$ senkrecht und sind demnach (L. 2) einander parallel.

7. Werden zwei parallele Ebenen von einer geraden Linie durchschnitten, so ist dieselbe gegen beide Ebenen gleich geneigt (Fig. 24).

$$\frac{MN \ddagger PQ,}{\sphericalangle ABC = \sphericalangle A\beta\gamma.}$$

Fig. 24.



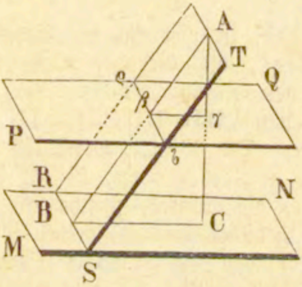
Beweis. Man denke sich von irgend einem Punkte der schneidenden geraden Linie AB die Senkrechte AC auf die Ebene MN gefällt, welche zugleich auf der Ebene PQ senkrecht steht. Verbindet man nun die Fußpunkte C und γ mit B und β, so sind BC und $\beta\gamma$ die Projectionen von

AB und Aβ, also $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle A\beta\gamma$ die Neigungswinkel der Geraden AB gegen beide Ebenen. Da aber (L. 1) $BC \nparallel \beta\gamma$, so ist $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A\beta\gamma$.

8. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene durchschnitten, so ist dieselbe gegen beide Ebenen gleich geneigt (Fig. 25).

$$\frac{MN \nparallel PQ,}{\sphericalangle ABC = \sphericalangle A\beta\gamma.}$$

Fig. 25.



Beweis. Da die beiden Ebenen MN und PQ nach der Voraussetzung parallel sind, so sind auch die Durchschnittslinien RS und $\varrho\sigma$ einander parallel, und die in der Ebene RT auf RS gefällte Senkrechte AB steht daher auch senkrecht auf $\varrho\sigma$. Fällt man nun auf die Ebene MN die Senkrechte AC, welche zugleich auf der Ebene PQ senkrecht steht, und verbindet die Fußpunkte C und γ mit B und β, so sind BC und $\beta\gamma$ die Projectionen von AB und Aβ, und mithin $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle A\beta\gamma$ die Neigungswinkel der Ebene. Da aber (L. 1) $BC \nparallel \beta\gamma$, so ist $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A\beta\gamma$.

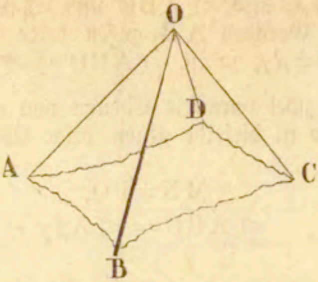
II. Die körperliche Ecke.

§. 11

Begriff der körperlichen Ecke.

Erklärungen. Wenn drei oder mehrere Ebenen in einem Punkte zusammentreffen, so wird der von diesen Ebenen eingeschlossene, auf der einen Seite unbegränzte Raum ein **körperlicher Winkel** oder eine **körperliche Ecke** genannt. Eine solche Ecke ist OABCD (Fig. 26).

Fig. 26.



Der Punkt O, in welchem die Ebenen zusammentreffen, heißt der Scheitel, die Geraden OA, OB, OC, OD, in welchen die Ebenen zusammenstoßen, die Kanten, und die begrenzenden Ebenen AOB, BOC, COD, DOA die Seitenflächen der Ecke. Die Winkel, welche in den Ebenen liegend von den Kanten gebildet werden, heißen die Kantenwinkel oder die Seiten, die Winkel, welche an den Kanten liegend von den Ebenen gebildet werden, heißen die Flächenwinkel oder die Winkel der Ecke. Es sei bemerkt, daß wir im Folgenden die Flächenwinkel, so wie die Kantenwinkel immer als concav annehmen.

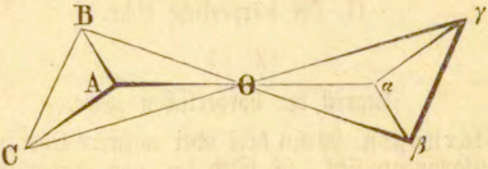
§. 12.

Die Polarecke.

Erklärungen. Jede körperliche Ecke hat ebensowiele Seitenflächen als Kanten. Nach der Anzahl der Seitenflächen unterscheidet man dreiseitige, vierseitige u. s. w., und vielseitige Ecken. Sind alle Kantenwinkel so wie alle Flächenwinkel bezüglich einander gleich, so heißt die Ecke regulär.

Durch Verlängerung der Kanten und entsprechende Erweiterung der Seitenflächen einer Ecke über den Scheitel hinaus erhält man eine neue Ecke, welche dieselben Flächen- und Kantenwinkel, wie die ursprüngliche Ecke, aber in entgegengesetzter Folge enthält, z. B. (Fig. 27) OABC und $O\alpha\beta\gamma$.

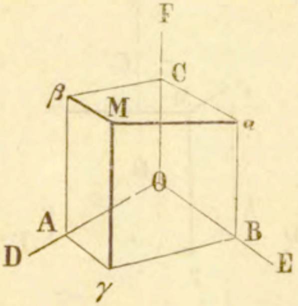
Fig. 27.



Zwei Ecken, so wie jede zwei Raumgebilde überhaupt, welche dieselben Bestandtheile, aber in entgegengesetzter Folge haben, werden symmetrisch genannt.

Denkt man sich (Fig. 28) von einem beliebigen Punkte M innerhalb einer Ecke auf die Seitenflächen derselben die Senkrechten $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$ gefällt und durch je zwei benachbarte Ebenen gelegt, welche die Kanten der ursprünglichen Ecke in den Punkten A, B, C schneiden, so entsteht eine neue Ecke, welche die Supplementarecke oder die Polarecke der ursprünglichen genannt wird. So ist $M\alpha\beta\gamma$ eine Polarecke zu der Ecke OABC.

Fig. 28.



§. 13.

Lehrsätze über die körperliche Ecke.

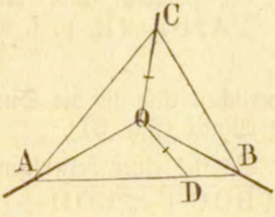
1. In jeder dreiseitigen körperlichen Ecke ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte (Fig. 29).

$\sphericalangle AOC$ und $\sphericalangle COB$ seien einzeln kleiner als $\sphericalangle AOB$,

---

$$\sphericalangle AOC + \sphericalangle COB > \sphericalangle AOB.$$

Fig. 29.



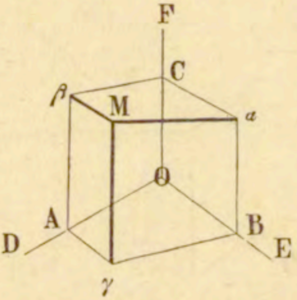
Beweis. Man ziehe in der größern Seite AOB die Gerade OD so, daß $\sphericalangle AOD = \sphericalangle AOC$, mache $OD = OC$ und lege durch die Endpunkte D und C eine die Kanten der Ecke in A, B, C schneidende Ebene ABC. Alsdann ist $\triangle AOD \cong \triangle AOC$, folglich $AD = AC$. Da im $\triangle ACB$ aber $AC + CB > AB$, so ist $CB > DB$, und daher in den beiden Dreiecken $\triangle COB$ und $\triangle DOB$ (Plan. §. 36:2) $\sphericalangle COB > \sphericalangle DOB$. Durch Addition ergibt sich folglich $\sphericalangle AOC + \sphericalangle COB > \sphericalangle AOB$.

2. In jeder körperlichen Ecke sind die Kanten- und Flächenwinkel bezüglich die Supplemente der Flächen- und Kantenwinkel der Polarecke (Fig. 30).

$$M\alpha\beta\gamma \text{ Polarecke zu } OABC,$$

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle A\gamma B = 2R,\ \sphericalangle BOC + \sphericalangle B\alpha C = 2R,\ \sphericalangle AOC + A\beta C = 2R,$$
$$\sphericalangle \beta A\gamma + \sphericalangle \beta M\gamma = 2R,\ \sphericalangle \gamma B\alpha + \sphericalangle \gamma M\alpha = 2R,\ \sphericalangle \alpha C\beta + \alpha M\beta = 2R.$$

Fig. 30.



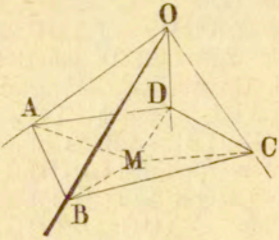
Beweis. Da $M\beta$ und $M\gamma$ auf den Seitenebenen DOF und DOE senkrecht stehen, so steht auch die durch $M\beta$ uud $M\gamma$ gelegte Ebene $M\beta A\gamma$ auf diesen Ebenen senkrecht, folglich auch umgekehrt DOF und DOE und somit (§. 8:4) OA senkrecht auf $M\beta A\gamma$. Ebenso steht OB senkrecht auf $M\alpha B\gamma$ und OC senkrecht auf $M\alpha C\beta$. Daher sind $\sphericalangle \beta A\gamma$, $\sphericalangle \gamma B\alpha$, $\sphericalangle \alpha C\beta$ die Flächenwinkel der gegebenen Ecke, so wie $\sphericalangle A\gamma B$, $\sphericalangle B\alpha C$, $\sphericalangle A\beta C$ die Flächenwinkel der Polarecke sind. Nun ist aber offenbar $\sphericalangle AOB + \sphericalangle A\gamma B = 2R$, u. s. w.

3. In jeder körperlichen Ecke ist die Summe aller Seiten kleiner als vier rechte Winkel (Fig. 31).

Sei O der Scheitel einer beliebigen Ecke,

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \cdots < 4R.$$

Fig. 31.



Beweis. Schneidet man die n-seitige Ecke O durch eine Ebene, so ist die Durchschnittsfigur ABCD·· ein Vieleck von n Seiten. Verbindet man nun in diesem Vieleck einen inneren Punkt M mit allen Ecken und bezeichnet die Summe der Polygonwinkel dieses Vielecks mit $S(\varphi)$, die Summe der Winkel um M mit $S(\mu)$, die Summe aller Seiten der Ecke O mit $S(\omega)$, die Summe aller Winkel an den Kanten AB, BC, CD, ꝛc. in den n Seitendreiecken mit $S(\beta)$, so ist, weil $n \cdot 2R$ gleich,

1) $$S(\omega) + S(\beta) = S(\varphi) + S(\mu),$$

2) $$S(\beta) > S(\varphi), \qquad \text{(L. 1)}$$

folglich, indem man (2) von (1) abzieht,

3) $$S(\omega) < S(\mu),$$

oder $$S(\omega) < 4R,$$ d. i.

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \cdots < 4R.$$

4. In jeder körperlichen Ecke von n Seiten ist die Summe aller Flächenwinkel größer als $n \cdot 2R - 4R$, und kleiner als $n \cdot 2R$.

$F_1, F_2, F_3, \cdots$ seien die Flächenwinkel der Ecke OABCD···

$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots < n \cdot 2R$ und $> n \cdot 2R - 4R$.

Beweis. Man denke sich zu der gegebenen Ecke die Polarecke construirt. Bezeichnet man nun die Flächenwinkel der gegebenen Ecke mit $F_1, F_2, F_3, \cdots$ und die Kantenwinkel der Polarecke mit $K_1, K_2, K_3, \cdots$, so ist in Folge von Lehrsatz 2:

$$(F_1 + F_2 + F_3 + \cdots) + (K_1 + K_2 + K_3 + \cdots) = n \cdot 2R.$$

Hieraus folgt aber unmittelbar:

1) $$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots < n \cdot 2R.$$

Ferner folgt

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots = n \cdot 2R - (K_1 + K_2 + K_3 + \cdots),$$

woraus, da (L. 3) $K_1 + K_2 + K_3 + \cdots < 4R$, sich ergibt

2) $$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots > n \cdot 2R - 4R.$$

§. 14.

Uebungs-Aufgaben über die Lage gerader Linien und Ebenen so wie über die körperliche Ecke.

1. Gerade Linien und Ebenen.

a. Geometrische Oerter.

Jede gerade oder krumme Linie oder Ebene oder Fläche, deren Punkte oder bezüglich deren Geraden alle im Raume denselben bestimmten Bedingungen genügen, wird **geometrischer Ort** genannt.

Der g. O. des Punktes,

1. welcher von zwei festliegenden Punkten P und P′ gleiche Entfernungen hat, ist eine Ebene.

2. welcher von zwei festliegenden parallelen Ebenen E und E′ gleiche Entfernungen hat, ist eine Ebene.

3. welcher von zwei festliegenden sich schneidenden Ebenen E und E′ gleiche Entfernungen hat, besteht aus zwei Ebenen.

4. welcher von einer festliegenden Ebene E eine gegebene Entfernung p hat, besteht aus zwei Ebenen.

5. welcher in einer festliegenden Ebene E liegend von einem festliegenden Punkt P außerhalb derselben eine gegebene Entfernung p hat, ist ein Kreis.

6. welcher von zwei festliegenden Punkten P und P′ gegebene Entfernungen p und q hat, ist ein Kreis.

7. welcher von drei festliegenden Punkten P, P′, P″ gleiche Entfernungen hat, ist eine Gerade.

8. welcher von drei festliegenden Ebenen E, E′, E″ gleiche Entfernungen hat, besteht aus vier Geraden.

b. Constructionen von geraden Linien und Ebenen.

1. Durch einen außerhalb einer festliegenden Ebene gegebenen Punkt mit einer in der Ebene festliegenden Geraden eine Parallele zu ziehen.

2. Durch einen **in** einer festliegenden Geraden gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche auf der Geraden senkrecht steht.

3. Durch einen **außerhalb** einer festliegenden Geraden gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche auf der Geraden senkrecht steht.

4. In einem **in** einer festliegenden Ebene gegebenen Punkte eine Senkrechte auf dieselbe zu errichten.

5. Von einem **außerhalb** einer festliegenden Ebene gegebenen Punkte eine Senkrechte auf dieselbe zu fällen.

6. Durch eine **in** einer festliegenden Ebene gegebene Gerade eine Ebene senkrecht zu dieser Ebene zu legen.

7. Durch eine außerhalb einer festliegenden Ebene gegebene Gerade eine Ebene senkrecht zu der erstern zu legen.

8. Durch einen in einer festliegenden Ebene gegebenen Punkt eine dieselbe schneidende Gerade zu ziehen, welche gegen die Ebene unter einem gegebenen Winkel α geneigt ist.

9. Durch eine in einer festliegenden Ebene gegebene Gerade eine dieselbe schneidende Ebene zu legen, welche gegen die erstere unter einem gegebenen Winkel α geneigt ist.

10. In einer festliegenden Ebene mit einer in derselben gegebenen Geraden eine Parallele zu ziehen, welche von einem außerhalb der Ebene gegebenen Punkt die Entfernung p hat.

11. In einer festliegenden Ebene eine Gerade zu ziehen, welche von zwei außerhalb der Ebene gegebenen Punkten bezüglich die Entfernungen p und q hat.

12. Durch eine festliegende, eine gegebene Ebene schneidende Gerade eine Ebene zu legen, welche gegen die erstere unter einem gegebenen Winkel α geneigt ist.

13. Durch einen außerhalb einer festliegenden Ebene gegebenen Punkt zu derselben eine parallele Ebene zu legen.

14. Von einem außerhalb einer festliegenden Ebene gegebenen Punkte nach derselben eine Gerade zu ziehen, welche gegen dieselbe unter einem gegebenen Winkel α geneigt und einer zweiten festliegenden Ebene parallel ist.

15. Von einem in einer festliegenden Geraden gegebenen Punkte nach einer festliegenden Ebene eine Gerade von gegebener Länge m zu ziehen, welche mit der ersteren Geraden den gegebenen Winkel α bildet.

16. Durch einen festliegenden Punkt eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebenen Ebenen parallel ist.

17. Durch einen festliegenden Punkt eine Ebene zu legen, welche auf einer gegebenen Ebene senkrecht steht und mit einer gegebenen Geraden parallel ist.

18. Durch einen festliegenden Punkt eine Ebene zu legen, welche zwei gegebenen windschiefen Geraden parallel ist.

19. Durch einen festliegenden Punkt eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebene windschiefe Geraden schneidet.

20. Durch zwei festliegende windschiefe Geraden und zwar durch einen in der einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche einer gegebenen Ebene parallel ist.

21. Durch zwei festliegende windschiefe Geraden zwei einander parallele Ebenen zu legen.

22. Durch zwei festliegende windschiefe Geraden eine Gerade zu ziehen, welche auf beiden senkrecht steht.

23—24. Durch zwei festliegende windschiefe Geraden eine Gerade zu ziehen, welche mit beiden

23. den gleichen gegebenen Winkel α bildet.

24. bezüglich die gegebenen Winkel α und β bildet.

25—26. Zwischen zwei festliegende windschiefe Geraden eine Gerade von gegebener Länge m zu ziehen, welche mit der einen von beiden

25. einen rechten Winkel bildet.

26. einen gegebenen Winkel α bildet.

27—28. Durch einen festliegenden Punkt eine Ebene zu legen, welche

27. zwei festliegende windschiefe Geraden unter dem gleichen gegebenen Winkel α schneidet.

28. drei festliegende windschiefe Geraden unter gleichen Winkeln schneidet.

2. Die körperliche Ecke.

29—30. Eine dreiseitige körperliche Ecke durch eine Ebene so zu schneiden, daß der Schnitt durch eine in einer Seitenfläche gegebene Gerade gehe und ein rechtwinkliges Dreieck bilde, von welchem die gegebene Gerade

29. eine Kathete sei. 30. die Hypotenuse sei.

31—32. Eine dreiseitige körperliche Ecke durch eine Ebene so zu schneiden, daß der Schnitt durch eine in einer Seitenfläche gegebene Gerade gehe und ein gleichschenkliges Dreieck bilde, von welchem die gegebene Gerade

31. eine Scheitelseite sei. 32. die Grundlinie sei.

33—36. Eine vierseitige körperliche Ecke durch eine Ebene so zu schneiden, daß der Schnitt ein Parallelogramm ist und daß

33. eine Seite gleich a. 34. eine Diagonale gleich e.

35. eine Höhe gleich h. 36. der Abstand vom Scheitel gleich p.

37—42. Eine vierseitige körperliche Ecke durch eine Ebene so zu schneiden, daß der Schnitt ein Trapez ist und daß

37. die parallelen Seiten bezüglich gleich a und c.

38. eine parallele und eine nicht parallele Seite bezüglich gleich a und b.

39. eine parallele Seite und die Höhe bezüglich gleich a und h.

40. eine parallele Seite und eine Diagonale bezüglich gleich a und e.

41. eine parallele Seite und der Abstand vom Scheitel bezüglich gleich a und p.

42. die Höhe und der Abstand vom Scheitel bezüglich gleich h und p.

Zweiter Abschnitt.

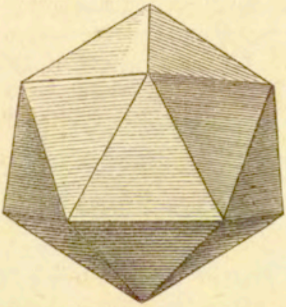
Die ebenflächigen Körper oder Polyeder.

§. 15.

Begriff des Polyeders.

Erklärungen. Ein nach allen Seiten von ebenen Flächen begrenzter Körper wird ebenflächiger Körper oder Polyeder genannt (Fig. 32).

Fig. 32.



Die das Polyeder einschließenden ebenen Begränzungsflächen heißen die Seitenflächen (einfach Seiten oder Flächen), die Geraden, in welchen zwei Seitenflächen zusammenstoßen, die Kanten, die Punkte, in welchen die Kanten zusammentreffen, die Ecken des Polyeders, die von den Seitenflächen gebildeten Winkel Flächenwinkel, die von den Kanten gebildeten Winkel Kantenwinkel; ferner nennt man die Summe der Begränzungsflächen die Oberfläche und den von der Oberfläche umschlossenen körperlichen Raum den Inhalt oder das Volumen des Polyeders.

Man kann die Polyeder in zwei Klassen eintheilen, in Polyeder mit nur ausspringenden Ecken und Polyeder mit zum Theil einspringenden Ecken. Je nachdem nämlich die Flächenwinkel, unter welchen die Begränzungsflächen zu einer Kante zusammenstoßen, nach innen kleiner als 2 R, oder zum Theil größer als 2 R sind, sind die Ecken des Polyeders alle ausspringend oder zum Theil einspringend. Die Polyeder mit lauter ausspringenden Ecken werden Euler'sche Polyeder genannt, und sind im Folgenden, wo von Polyeder die Rede ist, immer nur Euler'sche Polyeder verstanden.

Polyeder sind congruent, also auch an Inhalt gleich, wenn sie bezüglich von congruenten Seitenflächen in gleicher Anzahl, Neigung, Ordnung und Folge eingeschlossen sind. In diesem Falle lassen sich nämlich die Polyeder zur Deckung bringen und werden dieselben also genau denselben Raum einnehmen.

Ein Polyeder, an welchem bezüglich alle Kanten, alle Kantenwinkel, alle Flächenwinkel einander gleich sind, wird ein reguläres Polyeder genannt. In einem solchen sind demnach alle Begränzungsflächen so wie alle Körperecken regulär und bezüglich congruent. Die geraden Linien, welche die gegenüberstehenden Ecken oder die Mittelpunkte der gegenüberstehenden Seitenflächen eines regulären Polyeders mit einander verbinden, heißen die Axen des Polyeders.

Im Folgenden sollen zunächst die beiden Arten von Polyedern, welche sich als besondere Formen geltend machen, das Prisma und die Pyramide, sodann die Euler'schen Polyeder im Allgemeinen und die regulären Polyeder insbesondere betrachtet werden.

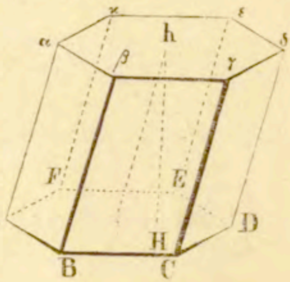
I. Das Prisma.

§. 16.

Begriff des Prismas.

Erklärungen. Denkt man sich zwei festliegende congruente Vielecke ABCDE... und $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$... im Raume einander so parallel, daß die entsprechenden Seiten derselben ebenfalls parallel sind, und denkt sich ferner eine durch zwei entsprechende Ecken beider Vielecke gelegte Gerade längs den Umfängen derselben sich so bewegen, daß sie stets sich selbst parallel bleibt, so entsteht eine prismatische Fläche und, von dieser und den Ebenen der beiden Vielecke begrenzt, ein ebenflächiger Körper, welcher Prisma genannt wird (Fig. 33).

Fig. 33.



Ein Prisma ist also ein ebenflächiger Körper, welcher von zwei congruenten und parallelen Vielecken als Gegenflächen (Grundfläche und Gegenfläche), und von so vielen Parallelogrammen, als die Grundfläche Seiten hat, als Seitenflächen eingeschlossen ist. Die Geraden, in welchen die Seitenflächen zusammentreffen, heißen Seitenkanten, die Geraden, in welchen die Seitenflächen mit der Grundfläche und der Gegenfläche zusammentreffen, werden Grundkanten und Gegenkanten genannt. Eine durch zwei gegenüberliegende Kanten gelegte, das Prisma durchschneidende Ebene wird Diagonalebene genannt. Der senkrechte Abstand der Grundfläche und der Gegenfläche von einander heißt die Höhe des Prismas (H h). Ein Prisma, dessen Seitenkanten senkrecht zur Grundfläche stehen, wird ein senkrechtes oder gerades, jedes andere ein schiefes genannt.

Nach der Anzahl der Grundkanten theilt man die Prismen in dreiseitige, vierseitige u. s. w, überhaupt vielseitige. Ist die Grundfläche und demnach auch die Gegenfläche eine reguläre Figur, so nennt man die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Gegenflächen die Axe des Prismas. Ein Prisma mit regulären Gegenflächen, dessen Axe senkrecht steht auf der Grundfläche, wird ein reguläres genannt. Ein vierseitiges Prisma, dessen Grundfläche ein Parallelogramm ist, heißt Parallelepipedon. Ein gerades Parallelepipedon, dessen Grundfläche ein Rechteck ist, heißt ein rechtwinkliges, und ein rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Begränzungsflächen sämmtlich Quadrate sind, wird Hexaeder (Würfel oder Kubus) genannt.

Schneidet man ein Prisma durch eine gegen die Grundfläche geneigte Ebene, so heißt der zwischen der Grundfläche und der Schnittfläche enthaltene Theil desselben ein abgeschrägtes Prisma.

§. 17.

Lehrsätze über die Gleichheit der Parallelepipeda und Prismen.

1. Zwei Parallelepipeda über derselben Grundfläche, deren Gegenflächen zwischen denselben Parallelen liegen, sind an Inhalt gleich (Fig. 34).

$$\frac{\alpha\beta' \mp \delta\gamma'}{\text{Pllp. } AB\delta\gamma = \text{Pllp. } AB\delta'\gamma'.}$$

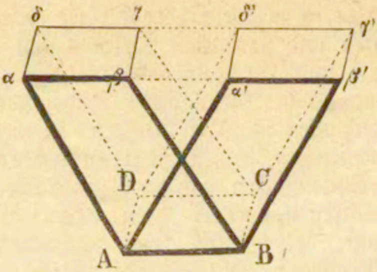


Fig. 34.

Beweis. Betrachtet man die beiden dreiseitigen Prismen $A\alpha\alpha' D\delta\delta'$ und $B\beta\beta' C\gamma\gamma'$, so sieht man, daß dieselben an Inhalt gleich sind (§. 15), da sie paarweise von congruenten Begränzungsflächen in gleicher Anzahl, Neigung, Ordnung und Folge eingeschlossen sind. Zieht man daher von dem ganzen Körper $ABCD\alpha\beta'\gamma'\delta$ abwechselnd diese beiden Prismen ab, so bleibt offenbar

$$\text{Pllp. } AB\delta\gamma = \text{Pllp. } AB\delta'\gamma'.$$

2. Zwei Parallelepipeda über derselben Grundfläche, deren Gegenflächen in derselben Ebene liegen, sind an Inhalt gleich (Fig. 35).

$$\frac{\alpha\gamma' \ddagger AC,}{\text{Pllp. } AB\delta\gamma = \text{Pllp. } AB\delta'\gamma'.}$$

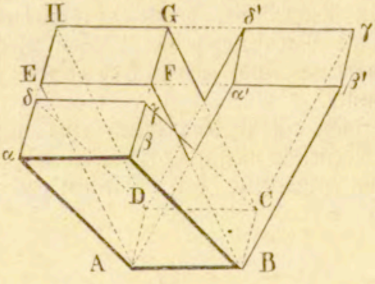


Fig. 35.

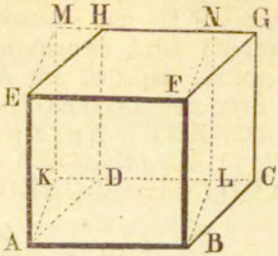
Beweis. Man denke sich das Hülfsparallelepipedon $ABCDEFGH$, dessen Gegenfläche mit der Gegenfläche je eines der gegebenen Parallelepipeda zwischen denselben parallelen Geraden liegt; alsdann ist (L. 1) sowohl Pllp. $AB\delta\gamma = ABCDEFGH$ als auch Pllp. $AB\delta'\gamma' = ABCDEFGH$, folglich

$$\text{Pllp. } AB\delta\gamma = \text{Pllp. } AB\delta'\gamma'.$$

Zusatz. Parallelepipeda über derselben Grundfläche und von gleicher Höhe sind an Inhalt gleich.

3. Jedes Parallelepipedon läßt sich in ein rechtwinkliges von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe verwandeln (Fig. 36).

Fig. 36.

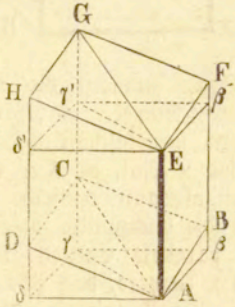


Beweis. Das gegebene schiefwinklige Parallelepipedon läßt sich zunächst dadurch, daß man durch die Grundkanten zur Grundfläche senkrechte Ebenen legt und die Gegenfläche erweitert, in ein senkrechtes ABHG verwandeln, dessen Seitenkanten AE, BF, CG, DH nämlich auf der Grundfläche senkrecht stehen; und dieses wird dadurch, daß man durch die Kanten AE und BF zur Seitenfläche ABEF senkrechte Ebenen legt und die betreffenden Begränzungsflächen erweitert, in das rechtwinklige Parallelepipedon ABMN verwandelt.

4. Jedes Parallelepipedon wird durch eine Diagonalebene in zwei dreiseitige Prismen von gleichem Inhalt getheilt (Fig. 37).

$$\frac{\text{AEGC Diagonalebene des Pllp. ADFG,}}{\text{ACDEGH} = \text{ACBEGF.}}$$

Fig. 37.



Beweis. Man lege, wenn das Parallelepipedon nicht schon ein senkrechtes ist, durch die Ecken A und E zur Kante AE zwei senkrechte Ebenen, welche durch Erweiterung der Seitenflächen des gegebenen Parallelepipedons das senkrechte Parallelepipedon $A\beta\gamma\delta E\beta'\gamma'\delta'$ bilden. Nun ist aber nach dem Princip der Deckung (§. 15) einerseits $DC\gamma\delta A = HG\gamma'\delta'E$ und andererseits $BC\gamma\beta A = FG\gamma'\beta'E$, woraus durch abwechselnde Abziehung dieser gleichen Körperräume bezüglich von $A\gamma\delta EGH$ und von $A\gamma\beta EGF$ einerseits $ACDEGH = A\gamma\delta E\gamma'\delta'$ und andererseits $ACBEGF = A\gamma\beta E\gamma'\beta'$ sich ergibt. Da nun ferner (§. 15) $A\gamma\delta E\gamma'\delta' = A\gamma\beta E\gamma'\beta'$, so ist auch

$$ACDEGH = ACBEGF.$$

§. 18.

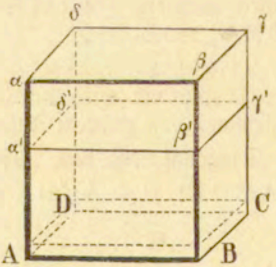
Lehrsätze über Verhältniß und Inhalt der Parallelepipeda und Prismen.

1. Die Inhalte zweier rechtwinkligen Parallelepipeda über derselben Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen (Fig. 38).

Die rechtw. Parallelepipeda $AB\delta\gamma$ u. $AB\delta'\gamma'$ haben dieselbe Grundfl.,

$$AB\delta\gamma : AB\delta'\gamma' = A\alpha : A\alpha'.$$

Fig. 38.



Beweis. Seien zunächst die Höhen $A\alpha$ und $A\alpha'$ der beiden Parallelepipeda commensurabel, und sei demnach m deren gemeinschaftliches Maß, welches ohne Rest in $A\alpha$ etwa x Mal, in $A\alpha'$ etwa y Mal enthalten sei. Trägt man alsdann dasselbe auf $A\alpha$ und $A\alpha'$ ab und legt durch die Endpunkte desselben mit der Grundfläche ABCD parallele Ebenen, so wird offenbar das Pllp. $AB\delta\gamma$ in x kleinere, das Pllp. $AB\delta'\gamma'$ in y kleinere unter sich gleiche Parallelepipeda getheilt. Ein solches heiße p. Alsdann ist

Pllp. $AB\delta\gamma = xp$ und Pllp. $AB\delta'\gamma' = yp$,

ferner $A\alpha = xm$ und $A\alpha' = ym$, mithin $AB\delta\gamma : AB\delta'\gamma' = xp : yp = x : y,$

$A\alpha : A\alpha' = xm : ym = x : y,$

folglich $AB\delta\gamma : AB\delta'\gamma' = A\alpha : A\alpha'.$

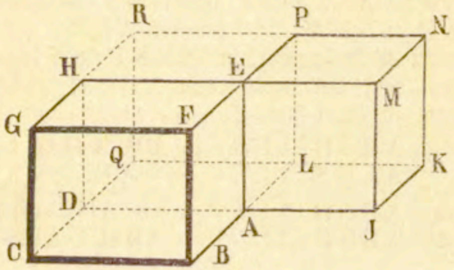
Anmerkung. Für den Fall, daß die Höhen $A\alpha$ und $A\alpha'$ incommensurabel sind, besteht der Satz ebenfalls. — Beweis wie Planimetrie §. 82:1, Anmerkung.

2. Die Inhalte zweier rechtwinkligen Parallelepipeda von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen (Fig. 39).

Die rechtw. Parallelepipeda ABGH und ALMN haben gleiche Höhe,

ABGH : ALMN = ABCD : AJKL.

Fig. 39.



Beweis. Man denke sich die beiden Parallelepipeda mit einer Seitenkante AE rechtwinklig an einander gelegt, so daß also zwei Paar Seitenflächen in eine Ebene fallen. Erweitert man nun einzelne Begränzungsflächen, so entsteht das Hülfsparallelepipedon ALHR. Alsdann ist in Bezug auf ADHE und ALPE als Grundflächen (L. 1)

ABGH : ALHR = AB : AL,

ALHR : ALMN = AD : AJ,

ABGH : ALMN = AB · AD : AL · AJ = ABCD : AJKL.

3. Die Inhalte zweier rechtwinkligen Parallelepipeda verhalten sich wie die Producte aus den drei sie bestimmenden Kanten oder wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen*) (Fig. 40).

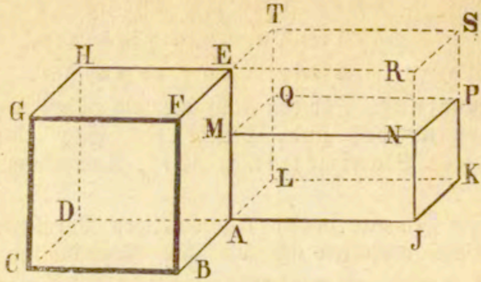
Die Parallelepipeda ABGH und ALNP seien rechtwinklig,

ABGH : ALNP = AB · AD · AE : AJ · AL · AM.

---

*) Wie in der Planimetrie unter dem Producte von Linien das Product ihrer Maßzahlen verstanden wird, so ist auch in der Stereometrie unter dem Producte von Linien und Flächen das Product aus den Maßzahlen dieser Größen zu verstehen.

Fig. 40.



Beweis. Man denke sich die beiden Parallelepipeda rechtwinklig an einander gelegt und das Parallelepipedon ALNP zu dem Parallelepipedon ALRS ergänzt, welches mit dem Parallelepidedon ALNP dieselbe Grundfläche und mit dem Parallelepipedon ABGH gleiche Höhe hat. Alsdann ist (L. 1 und 2)

$$ABGH : ALRS = AB \cdot AD : AJ \cdot AL,$$
$$ALRS : ALNP = \quad AE \quad : \quad AM,$$

folglich $ABGH : ALNP = AB \cdot AD \cdot AE : AJ \cdot AL \cdot AM.$
oder auch $ABGH : ALNP = ABCD \cdot AE : AJKL \cdot AM.$

4. Rechtwinklige Parallelepipeda von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind an Inhalt gleich (Fig. 40).

$$ABCD = AJKL,\ BF = JR,$$
$$ABGH = ALRS.$$

Beweis. Da die Inhalte rechtwinkliger Parallelepipeda sich verhalten wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen (L. 3), so ist

$$ABGH : ALRS = ABCD \cdot BF : AJKL \cdot JR.$$

Weil aber in Folge der Voraussetzung die Glieder des zweiten Verhältnisses einander gleich sind, so sind auch die des ersten einander gleich, folglich ist

$$ABGH = ALRS.$$

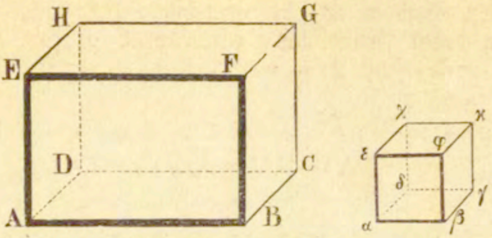
Zusatz. Beliebige Parallelepipeda von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind an Inhalt gleich (§. 17 : 3 und L. 4).

5. Der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedons ist gleich dem Producte aus den drei dasselbe bestimmenden Kanten oder dem Producte aus seiner Grundfläche und Höhe (Fig. 41).

Das Parallelepipedon ABGH sei rechtwinklig,

$$ABGH = AB \cdot AD \cdot AE.$$

Fig. 41.



Beweis. Man nehme den Würfel $\alpha\beta\varkappa\chi$ als Einheit des Körpermaßes, also die Kanten desselben als Einheit des Längenmaßes an, so ist $\alpha\beta\varkappa\chi = 1$ und $\alpha\beta \cdot \alpha\delta \cdot \alpha\varepsilon = 1$. Nun aber ist (L. 3)

$$\mathrm{ABGH} : \alpha\beta\varkappa\chi = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AD} \cdot \mathrm{AE} : \alpha\beta \cdot \alpha\delta \cdot \alpha\varepsilon.$$

Da aber in dieser Proportion die nachfolgenden Glieder einander gleich sind, so sind es auch die vorangehenden, folglich ist

$$\mathrm{ABGH} = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AD} \cdot \mathrm{AE} = \mathrm{ABCD} \cdot \mathrm{AE}.$$

Zusatz 1. Der Inhalt eines jeden Parallelepipedons ist gleich dem Producte aus seiner Grundfläche und Höhe (§. 17 : 3 und L. 5).

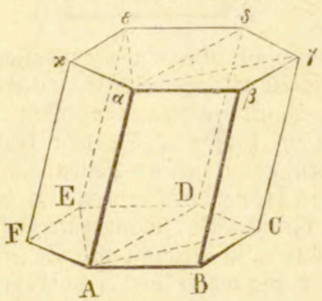
Zusatz 2. Der Inhalt eines dreiseitigen Prismas ist gleich dem Producte aus seiner Grundfläche und Höhe (§. 17 : 4 und L. 5).

6. Der Inhalt eines beliebigen Prismas ist gleich dem Producte aus seiner Grundfläche und Höhe (Fig. 42).

Sei G die Grundfläche und H die Höhe des Prismas,

$$\mathrm{ABCDE}\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = \mathrm{G} \cdot \mathrm{H}.$$

Fig. 42.



Beweis. Man denke sich das Prisma durch Diagonalebenen, welche alle durch dieselbe Seitenkante $\mathrm{A}\alpha$ gehen, in dreiseitige Prismen p_1, p_2, $p_3 \cdots$ zerlegt. Diese haben offenbar alle die gemeinschaftliche Höhe H. Seien nun deren Grundflächen entsprechend g_1, g_2, $g_3 \cdots$, so ist (L. 5, Zus. 2) $p_1 = g_1 \cdot H$, $p_2 = g_2 \cdot H$, $p_3 = g_3 \cdot H$, u. s. w., also

$$p_1 + p_2 + p_3 \cdots = (g_1 + g_2 + g_3 + \cdots) \cdot H; \text{ d. i.}$$
$$ABCDE\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = G \cdot H.$$

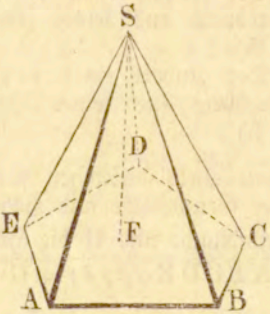
II. Die Pyramide.

§. 19.

Begriff der Pyramide.

Erklärungen. Denkt man sich ein festliegendes Vieleck ABCDE und außerhalb seiner Ebene im Raume einen festen Punkt S, denkt sich ferner eine gerade Linie längs dem Umfange des Vielecks sich so bewegen, daß sie beständig durch den festen Punkt geht, so entsteht eine pyramidale Fläche und, von dieser und der Ebene des Vielecks begrenzt, ein ebenflächiger Körper, welcher Pyramide genannt wird.

Fig. 43.



Eine Pyramide ist also ein ebenflächiger Körper, welcher von einem beliebigen Vielecke als Grundfläche und von so vielen in einem Punkt zusammenstoßenden Dreiecken, als die Grundfläche Seiten hat, als Seitenflächen eingeschlossen wird. Die Geraden, in welchen die Seitenflächen zusammentreffen, werden Seitenkanten, die Geraden, in welchen die Seitenflächen mit der Grundfläche zusammentreffen, Grundkanten genannt. Der Punkt, in welchem alle Seitenflächen zusammenstoßen, heißt die Spitze oder der Scheitel, und der senkrechte Abstand desselben von der Grundfläche die Höhe der Pyramide. Der durch die Mitte der Höhe mit der Grundfläche parallel gelegte Schnitt wird der mittlere Schnitt oder der Mittelschnitt genannt. Nach der Anzahl der Grundkanten theilt man die Pyramiden in dreiseitige, vierseitige u. s. w., überhaupt vielseitige. Ist die Grundfläche eine reguläre Figur, so wird die Verbindungslinie der Spitze mit dem Mittelpunkte der Grundfläche die Axe der Pyramide genannt. Eine Pyramide mit regulärer Grundfläche, deren Axe mit der Höhe zusammenfällt, also zur Grundfläche senkrecht steht, heißt eine reguläre; eine Pyramide mit centrischer Grundfläche, deren Höhe den Mittelpunkt der Grundfläche trifft, heißt eine senkrechte oder gerade, jede andere wird eine schiefe genannt.

Wird eine Pyramide durch eine Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten, so heißt der zwischen der Grundfläche und dem parallelen Schnitte als der Gegenfläche enthaltene Theil derselben eine abgekürzte oder abgestumpfte Pyramide oder ein Pyramidenstumpf. Dabei ist (§. 20, L. 1) die Grundfläche der Gegenfläche ähnlich.

Eine abgestumpfte Pyramide ist also ein ebenflächiger Körper, welcher begrenzt wird von zwei parallelen ähnlichen Vielecken und von so viel Trapezen als Seitenflächen, als jedes der Vielecke Seiten hat, und dessen Seitenkanten verlängert in einem Punkte zusammentreffen.

* Die abgestumpfte Pyramide ist eine besondere Form des Obelisken, und dieser wieder eine besondere Form des Prismatoids.

Ein Obelisk ist ein ebenflächiger Körper, welcher begrenzt wird von zwei parallelen gleichvielseitigen und unter sich parallelseitigen Vielecken als Grundfläche und Gegenfläche, und von so viel Trapezen als Seitenflächen, als jedes der Vielecke Seiten hat.

Ein Prismatoid ist ein ebenflächiger Körper, welcher von zwei parallelen, im Uebrigen nach Anzahl und Richtung der Seiten von einander unabhängigen Vielecken als Grundfläche und Gegenfläche, und im Allgemeinen von Dreiecken, deren Grundlinien und Spitzen die Seiten und Ecken der beiden Gegenflächen sind, als Seitenflächen begrenzt wird.

Auch beim Pyramidenstumpf, beim Obelisk und beim Prismatoid unterscheidet man, wie beim Prisma, Grundkanten, Gegenkanten, Seitenkanten, und ebenso heißt auch bei diesen Polyedern der senkrechte Abstand der beiden Gegenflächen von einander die Höhe und der durch die Mitte der Höhe mit der Grundfläche parallel gelegte Schnitt der Mittelschnitt.

Anmerkung. Aus den gegebenen Erklärungen erhellt: Ein Prismatoid ist — ein Obelisk, wenn seine beiden Gegenflächen, ohne ähnlich zu sein, gleiche Seitenanzahl und entsprechend parallele Seiten haben, da alsdann auch alle Seitenflächen Trapeze sind;

Ein Obelisk ist — ein Pyramidenstumpf, wenn seine beiden Gegenflächen ähnliche Vielecke sind, da alsdann (Plan. §. 77:4) alle Seitenkanten verlängert in einem Punkte, der Spitze einer Pyramide, zusammentreffen.

Ein dreiseitiger Obelisk ist — immer auch ein dreiseitiger Pyramidenstumpf, da (Plan. §. 78:1) seine beiden Gegenflächen immer ähnliche Dreiecke sind.

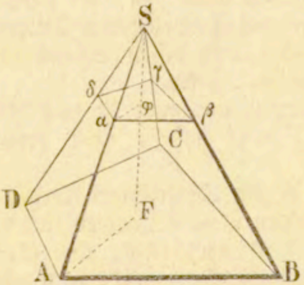
§. 20.

Lehrsätze über die Pyramide.

1. In jeder Pyramide ist eine der Grundfläche parallele Schnittfläche der Grundfläche ähnlich (Fig. 44).

$$\frac{\alpha\beta\gamma\delta \ddagger ABCD,}{\alpha\beta\gamma\delta \sim ABCD.}$$

Fig 44.



Beweis. Da in Folge der Voraussetzung (§. 10:1) $\alpha\beta \ddagger AB$, $\beta\gamma \ddagger BC$ u. s. w., so ist offenbar

$$SA : S\alpha = SB : S\beta = SC : S\gamma = SD : S\delta;$$

folglich ist nach der allgemeinen Aehnlichkeits-Erklärung (Planim. §. 76), welche auch für Gebilde im Raume gilt,

$$\alpha\beta\gamma\delta \sim ABCD.$$

2. In jeder Pyramide verhalten sich die Grundfläche und eine der Grundfläche parallele Schnittfläche wie die Quadrate ihrer senkrechten Abstände von der Spitze (Fig. 44).

$$\frac{\text{Seien } G \text{ und } g \text{ die Grundfläche und die ihr parallele Schnittfläche, ferner } H \text{ und } h \text{ ihre senkrechten Abstände von der Spitze,}}{G : g = H^2 : h^2.}$$

Beweis. Man denke sich durch H, nämlich SF, und eine Seitenkante SA eine Ebene gelegt, welche die Grundfläche und die ihr parallele Schnittfläche in AF und $\alpha\varphi$

schneidet. Da nun (L. 1) $G \sim g$, nämlich $ABCD \sim \alpha\beta\gamma\delta$,

so ist $$G : g = AB^2 : \alpha\beta^2,$$

aber $$AB^2 : \alpha\beta^2 = SA^2 : S\alpha^2 = H^2 : h^2,$$

folglich $$G : g = H^2 : h^2.$$

Zusatz 1. Für den Mittelschnitt m ist $G : m = H^2 : \frac{1}{4} H^2$, daher $$G = 4m.$$

Zusatz 2. Werden zwei Pyramiden von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen in gleichen Abständen von der Spitze durch Ebenen parallel den Grundflächen geschnitten, so sind die Schnittflächen einander gleich.

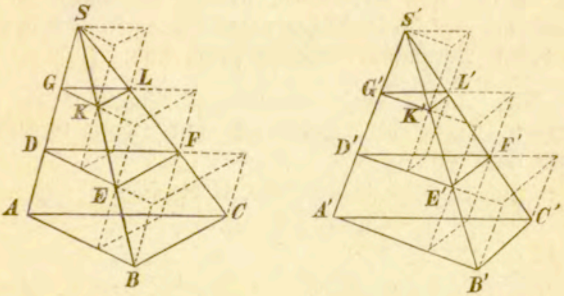
Denn aus $G : g = H^2 : h^2$ und $G : g' = H^2 : h^2$ folgt $g = g'$.

3. Dreiseitige Pyramiden von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind an Inhalt gleich (Fig. 45).

Die Pyramiden ABCS u. A'B'C'S' haben gleiche Grundfl. u. Höhen,

Pyr. ABCS = Pyr. A'B'C'S'.

Fig. 45.



Beweis. Man theile die gleichen Höhen beider Pyramiden in n gleiche Theile und lege durch jeden Theilpunkt zu den Grundflächen parallele Schnittflächen, so sind je zwei sich in beiden Pyramiden entsprechende Parallelschnitte einander gleich (L. 2, Zus. 2). Construirt man nun über den Grundflächen, so wie über und unter den Parallelschnitten Prismen, deren eine Seitenkante in eine Pyramidenkante AS und A'S' fällt und deren Höhe dem Abstande je zweier Parallelschnitte gleich ist, so erhält man in jeder der beiden Pyramiden n äußere Prismen und (n—1) innere Prismen, von welchen sowohl in beiden Pyramiden je zwei äußere Prismen über den gleichen Grund- und Schnittflächen (ABCD=A'B'C'D', DEFG=D'E'F'G', rc.), als auch in jeder Pyramide ein äußeres und ein inneres

Prisma über und unter derselben Schnittfläche ($DEFG = DEFA$, $D'E'F'G' = D'E'F'A'$, ꝛc.) einander gleich sind. Daraus ergibt sich, daß die Unterschiede zwischen der Summe der äußeren Prismen und der Summe der inneren Prismen in beiden Pyramiden gleich sind, da nämlich in jeder Pyramide dieser Unterschied gleich ist dem äußeren Prisma über der Grundfläche. Dieses Prisma wird aber bei fortgesetzter Vergrößerung von n verschwindend klein, und daher wird auch in jeder Pyramide der Unterschied zwischen den beiden Prismensummen und um so mehr der Unterschied zwischen einer dieser Prismensummen und der Pyramide selbst verschwindend klein. Da aber in beiden Pyramiden zwei sich entsprechende Prismensummen einander gleich sind und der Unterschied zwischen diesen Prismensummen und den Pyramiden verschwindend wird, so sind die Pyramiden selbst gleich.

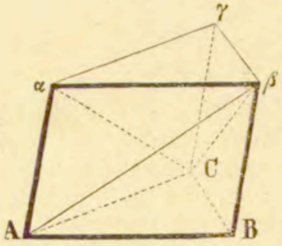
Anmerkung. Nach Cavalleri's Grundsatz sind die beiden Pyramiden schon deshalb an Inhalt gleich, weil (L. 2, Zus. 2) alle in gleichen Abständen von der Spitze mit den Grundflächen parallel gelegten Schnittflächen in beiden Pyramiden bezüglich gleich sind.

4. Der Inhalt einer dreiseitigen Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Productes aus ihrer Grundfläche und Höhe (Fig. 46).

Sei P der Inhalt, G die Grundfläche, H die Höhe der Pyramide,

$$P = \frac{1}{3} G \cdot H.$$

Fig. 46.



Beweis. Sei $ABC\beta$ die dreiseitige Pyramide, so ziehe man durch zwei Ecken der Grundfläche Geraden parallel und gleich der gegenüberliegenden Kante, etwa $A\alpha$ und $C\gamma \mathrel{\#}$ und $= B\beta$, so wie die Geraden $\beta\alpha$ und $\beta\gamma$, und denke sich durch je zwei dieser Geraden Ebenen gelegt. Alsdann entsteht das dreiseitige Prisma $ABC\alpha\beta\gamma$, welches mit der gegebenen Pyramide $ABC\beta$ dieselbe Grundfläche ABC

und dieselbe Höhe hat und aus dieser dreiseitigen Pyramide $ABC\beta$ und der vierseitigen Pyramide $AC\gamma\alpha\beta$ besteht. Letztere theile man mittels einer durch die Diagonale $C\alpha$ ihrer Grundfläche und dieselbe Ecke β gelegten Ebene in die beiden dreiseitigen Pyramiden $AC\alpha\beta$ und $C\alpha\gamma\beta$. Alsdann ist (L. 3) Pyr. $ABC\beta =$ Pyr. $\alpha\beta\gamma C$, da sie gleiche Grundflächen ABC und $\alpha\beta\gamma$ so wie gleiche Höhen haben, und Pyr. $\alpha\beta\gamma C = (C\alpha\gamma\beta) =$ Pyr. $AC\alpha\beta$, da auch diese gleiche Grundflächen $C\alpha\gamma$ und $AC\alpha$ so wie gleiche Höhe haben. Folglich sind die drei Pyramiden $ABC\beta$, $\alpha\beta\gamma C$, $AC\alpha\beta$ unter einander an Inhalt gleich, und daher ist jede gleich dem dritten Theile des Prismas $ABC\alpha\beta\gamma$, mithin (§. 18:5, Zus. 2) Pyr. $ABC\beta$ oder

$$P = \tfrac{1}{3} G \cdot H.$$

Zusatz 1. Der Inhalt einer jeden Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Productes aus ihrer Grundfläche und Höhe.

Zusatz 2. Die Inhalte zweier Pyramiden verhalten sich wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen.

$$P : p = G \cdot H : g \cdot h.$$

Zusatz 3. Die Inhalte zweier Pyramiden von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen, und die Inhalte zweier Pyramiden von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen.

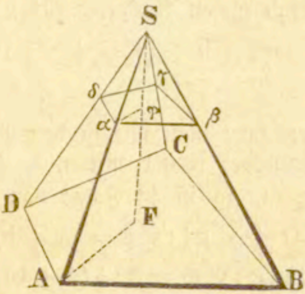
$$(\text{cond.}\ H = h) \cdot\cdot P : p = G : g; \quad P : p = H : h \cdot\cdot (\text{cond} \cdot G = g).$$

5. Eine Pyramide und die von derselben der Grundfläche parallel abgeschnittene kleinere Pyramide verhalten sich wie die Kuben ihrer Höhen oder wie die Kuben zweier entsprechenden Kanten (Fig. 47).

Seien P und p die beiden Pyramiden, H und h ihre Höhen, ferner K und k zwei entsprechende Kanten derselben,

$$P : p = H^3 : h^3 = K^3 : k^3.$$

Fig. 47.



Beweis. Bezeichnet man die Grundflächen der beiden Pyramiden mit G und g, und nimmt ein paar Scheitelkanten SA und $S\alpha$ als entsprechende Kanten, so hat man zunächst die Proportion (L. 4, Zus. 2)

$$P : p = G\,H : g\,h.$$

Dividirt man nun durch $\frac{G}{H^2} = \frac{g}{h^2}$ (L. 2) die beiden letzten Glieder, so erhält man

$$P : p = H^3 : h^3,$$

demnach auch $$P : p = K^3 : k^3.$$

6. Der Inhalt einer abgestumpften Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Productes aus ihrer Höhe und der Summe aus den beiden parallelen Gegenflächen und deren geometrischem Mittel (Fig. 47).

T Inhalt, G und g Gegenflächen, h Höhe der Pyramide,

$$T = \tfrac{1}{3}(G + \sqrt{G\,g} + g)\,h.$$

Beweis. Man denke sich die abgestumpfte Pyramide $ABCD\alpha\beta\gamma\delta$ zu der vollständigen Pyramide ABCDS ergänzt und setze die Höhe der Ergänzungspyramide $S\varphi = x$, also die Höhe der vollständigen Pyramide $SF = h + x$. Alsdann ist der Inhalt der abgestumpften Pyramide

$$T = \tfrac{1}{3}G(h + x) - \tfrac{1}{3}g\,x = \tfrac{1}{3}[G\,h + (G - g)\,x].$$

Nun verhält sich aber (L. 2)

$$G : g = (h + x)^2 : x^2,$$

somit $$\sqrt{G} : \sqrt{g} = (h + x) : x,$$

mithin $$(\sqrt{G} - \sqrt{g}) : \sqrt{g} = h : x,$$

daher ist $$x = \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} = \frac{(\sqrt{G} + \sqrt{g})\,h\sqrt{g}}{G - g}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck für x, so ergibt sich

$$T = \tfrac{1}{3}[G\,h + (\sqrt{G} + \sqrt{g})\sqrt{g} \cdot h],$$

d. i. $$T = \tfrac{1}{3}(G + \sqrt{G\,g} + g)\,h.$$

Zusatz. Bezeichnet man mit m den Mittelschnitt der abgestumpften Pyramide, ferner mit a, b, $\frac{1}{2}(a + b)$ homologe Seiten von G, g, m, so ist in Folge von $\sqrt{G} : \sqrt{g} = a : b$

auch $$(\sqrt{G} + \sqrt{g}) : \sqrt{g} = (a + b) : b,$$

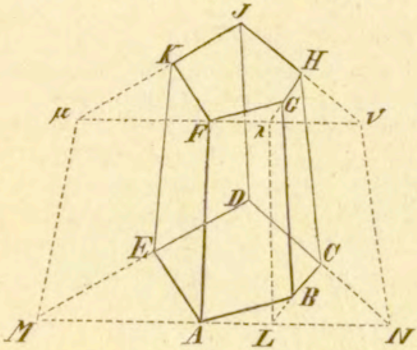
dazu $$\sqrt{g} : \sqrt{m} = b : \tfrac{1}{2}(a + b),$$

folglich $$\sqrt{G} + \sqrt{g} = 2\sqrt{m},$$
daher $$G + 2\sqrt{Gg} + g = 4m,$$
mithin $$\sqrt{Gg} = 2m - \tfrac{1}{2}(G + g).$$
Substituirt man diesen Werth in die obige Formel, so ergibt sich auch für den Inhalt der abgestumpften Pyramide
$$T = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}(G + g) + 2m\right)h.$$

7. Der Inhalt eines Obelisken ist gleich der Summe der Inhalte dreier Pyramiden, welche die Höhe des Obelisken zur Höhe haben und als Grundflächen bezüglich die halbe Grundfläche, die halbe Gegenfläche und den doppelten Mittelschnitt des Obelisken (Fig. 48).

T Inhalt, G und g Gegenflächen, m Mittelschnitt, h Höhe,
$$T = \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}G + \tfrac{1}{2}g + 2m)h.$$

Fig. 48.



Beweis. Der dreiseitige Obelisk, als identisch mit dem dreiseitigen Pyramidenstumpf, hat offenbar den bezeichneten Inhalt (L. 6, Zus.)
$$T = \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}G + \tfrac{1}{2}g + 2m)h.$$
Jeder mehrseitige Obelisk ABCDEFGHJK erweitert sich aber, indem man durch eine Seitenkante, etwa durch AF, eine den Obelisk nicht schneidende und einer Grundkante nicht parallele Ebene legt und alle gegenüberliegende Seitenflächen, so wie beide Gegenflächen bis zu dieser Ebene erweitert, selbst wieder zu einem dreiseitigen Obelisk DMNJ$\mu\nu$, welcher aus dem gegebenen mehrseitigen Obelisk und aus mehreren diesem anliegenden dreiseitigen Obelisken von gleicher Höhe besteht. Sind nun T, G, g, m, h Inhalt, Grundfläche, Gegenfläche, Mittelschnitt, Höhe des gegebenen mehrseitigen Obelisken, T_1, G_1, g_1, m_1, h, so wie

T_2, G_2, g_2, m_2, h, 2c. bezüglich die gleichnamigen Stücke der diesem anliegenden dreiseitigen Obelisken, so ist der Inhalt des ganzen dreiseitigen Obelisken, so wie der Inhalt aller anliegenden dreiseitigen Obelisken nach oben stehender Formel bezüglich

$$T+T_1+T_2+\cdots=\tfrac{1}{3}\Big(\tfrac{1}{2}(G+G_1+G_2+\cdots)+\tfrac{1}{2}(g+g_1+g_2+\cdots)+2(m+m_1+m_2+\cdots)$$

$$T_1+T_2+\cdots=\tfrac{1}{3}\Big(\tfrac{1}{2}(G_1+G_2+\cdots)+\tfrac{1}{2}(g_1+g_2+\cdots)+2(m_1+m_2+\cdots)\Big)h.$$

Zieht man nun von der erstern Gleichung die zweite ab, so erhält man für den Inhalt des mehrseitigen Obelisken den oben angegebenen Ausdruck

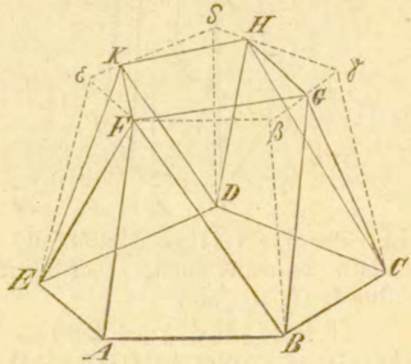
$$T=\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}G+\tfrac{1}{2}g+2m)h.$$

8. Der Inhalt eines Prismatoids ist gleich der Summe der Inhalte dreier Pyramiden, welche die Höhe des Prismatoids zur Höhe haben und zu Grundflächen bezüglich die halbe Grundfläche, die halbe Gegenfläche und den doppelten Mittelschnitt des Prismatoids (Fig. 49).

T Inhalt, G und g Gegenflächen, m Mittelschnitt, h Höhe,

$$T=\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}G+\tfrac{1}{2}g+2m)h.$$

Fig. 49.



Beweis. Man denke sich alle die Seitenflächen des Prismatoids ABCDEFGHK, deren Grundlinien die Grundkanten sind, so wie die Gegenfläche erweitert bis zu ihrem Durchschnitt, so erweitert sich das Prismatoid selbst zu einem Obelisk ABCDEF$\beta\gamma\delta\varepsilon$, welcher besteht aus dem gegebenen Prismatoid und mehreren diesem anliegenden dreiseitigen Pyramiden von gleicher Höhe, deren Grundflächen Theile der Gegenfläche des entstandenen Obelisken sind. Sind nun T, G, g, m, h Inhalt, Grundfläche, Gegenfläche, Mittelschnitt, Höhe des Prismatoids,

T_1, g_1, m_1, h, sowie T_2, g_2, m_2, h, ꝛc. bezüglich Inhalt, Grundfläche, Mittelschnitt, Höhe der entstandenen dreiseitigen Pyramiden, so ist der Inhalt des Obelisken und der Inhalt aller dieser Pyramiden (L. 7 und L. 4) bezüglich

$$T+T_1+T_2+\cdots=\tfrac{1}{3}\Big(\tfrac{1}{2}G+\tfrac{1}{2}(g+g_1+g_2+\cdots)+2(m+m_1+m_2+\cdots)\Big)h,$$

$$T_1+T_2+\cdots=\tfrac{1}{3}(g_1+g_2+\cdots)h.$$

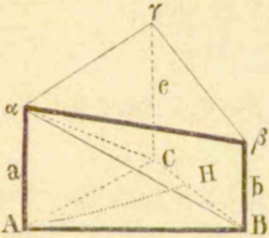
Zieht man nun von der erstern Gleichung die zweite ab, so ergibt sich, da zufolge (L. 2, Zus. 1) $2m_1=\frac{1}{2}g_1$, $2m_2=\frac{1}{2}g_2$, ꝛc., für den Inhalt des Prismatoids

$$T=\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}G+\tfrac{1}{2}g+2m)h.$$

9. Der Inhalt eines geraden dreiseitigen abgeschrägten Prismas ist gleich dem dritten Theile des Productes aus der Grundfläche und der Summe der drei Seitenkanten (Fig. 50).

T Inhalt, g Grundfläche und a, b, c Seitenkanten,

$$T=\tfrac{1}{3}g\cdot(a+b+c).$$

Fig. 50.


Beweis. Man lege durch eine Grundkante BC und die gegenüberliegende Ecke α der Gegenfläche die Ebene $BC\alpha$, so wird das Prisma offenbar in die gerade dreiseitige Pyramide $ABC\alpha$ und die vierseitige Pyramide $BC\beta\gamma\alpha$ zerlegt. Diese letztere hat zur Grundfläche das Paralleltrapez $BC\beta\gamma$, dessen Höhe BC ist. Fällt man in der Grundfläche des Prismas die Höhe AH auf BC, so ist offenbar AH zugleich die Höhe der vierseitigen Pyramide. Bezüglich des Inhalts ist daher

1) $$ABC\alpha=\tfrac{1}{3}\cdot ga,$$

2) $$BC\beta\gamma\alpha=\tfrac{1}{3}BC\beta\gamma\cdot AH,$$

oder, da $$BCB\gamma=\tfrac{1}{2}(b+c)\cdot BC,$$ (Pl. §. 83:2)

$$BC\beta\gamma\alpha=\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}BC\cdot AH(b+c),$$

oder, da $$\tfrac{1}{2}BC\cdot AH=g,$$

3) $$BC\beta\gamma\alpha=\tfrac{1}{3}g\cdot(b+c).$$

Durch Addition von 1) und 3) ergibt sich aber sofort

$$T=\tfrac{1}{3}g\cdot(a+b+c).$$

10. Der Inhalt eines geraden abgeschrägten Prismas mit regulärer Grundfläche von gerader Seitenanzahl ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und seiner Axe.

T Inhalt, F Grundfläche, A Axe, n Seitenanzahl,

$$T = F \cdot A.$$

Beweis. Denkt man sich durch je zwei gegenüberstehende Seitenkanten Ebenen gelegt, welche sich offenbar alle in der Axe durchschneiden, so erhält man n gerade dreiseitige abgeschrägte Prismen, welche alle die gleiche Grundfläche g und die Axe als gemeinschaftliche Seitenkante haben. Da überdies von je zwei gegenüberstehenden Seitenkanten die Axe A das arithmetische Mittel, die Summe je zweier solchen Kanten also 2A ist, so ergibt sich

$$T = \tfrac{1}{3} g \cdot (n \cdot A + n \cdot 2A) = n g \cdot A, \text{ d. i.}$$

$$T = F \cdot A.$$

III. Die Euler'schen Polyeder.

§. 21.

Benennung der Euler'schen Polyeder.

Erklärungen. Jedes Polyeder, welches nicht schon eine besondere Benennung hat, wird nach der Anzahl seiner Begrenzungsflächen benannt. Nach deren Anzahl also werden dieselben als vierflächige, fünfflächige u. s. w. unterschieden. Ein Polyeder mit weniger als vier Begrenzungsflächen kann es nicht geben, da jede körperliche Ecke wenigstens drei Seitenflächen erfordert und diese erst durch eine Ebene geschnitten werden müssen, um aus der Ecke einen nach allen Seiten begrenzten Raum zu erhalten.

Die Begrenzungsflächen werden auch Seitenflächen oder kurzweg die Seiten oder Flächen des Polyeders genannt.

Die Oberfläche eines Polyeders läßt sich leicht durch Summirung seiner einzelnen Begrenzungsflächen finden, und da sich jedes Polyeder in eine der Anzahl seiner Begrenzungsflächen entsprechende Anzahl Pyramiden zerlegt denken läßt, deren gemeinschaftliche Spitze in einem Punkte innerhalb des Polyeders sich befindet, so ist man auch im Stande, wenn die Höhe jeder dieser Pyramiden bekannt ist, den körperlichen Inhalt eines jeden Polyeders zu bestimmen.

§. 22.

Lehrsätze über die allgemeinen Eigenschaften der Euler'schen Polyeder.

1. Bei jedem ebenflächigen Polyeder ist die Anzahl der Ecken und Flächen um 2 größer als die Anzahl der Kanten (Euler 1740).

E, F, K bezeichnen die Anzahl der Ecken, Seitenflächen und Kanten

$$E + F = K + 2.$$

Beweis. Bei dem einfachsten Körper, der dreiseitigen Pyramide, welcher 4 Ecken, 4 Flächen, 6 Kanten hat, ist offenbar $E + F = K + 2$. Denkt man sich aber bei einem beliebigen Polyeder allgemein eine n-seitige Ecke durch eine schneidende Ebene, dieselbe mag entweder durch die n Kanten der Ecke oder durch $(n-1)$ Kanten der Ecke und eine benachbarte Ecke gehen, hinweggenommen, so erhält man in dem einen Falle, da statt der 1 hinweggenommenen Ecke n neue Ecken auftreten, $(n-1)$ Ecken mehr, überdies 1 Fläche mehr und n Kanten mehr; in dem anderen Falle, da nunmehr statt der 1 hinweggenommenen Ecke $(n-1)$ neue Ecken auftreten, $(n-2)$ Ecken mehr, außerdem 1 Fläche mehr und $(n-1)$ Kanten mehr; also hat man in jedem Falle immer eine gleiche Zunahme an Ecken und Flächen einerseits, wie an Kanten andererseits. Daher ist allgemein

$$E + F = K + 2.$$

2. Bei jedem ebenflächigen Polyeder ist die Anzahl der Kantenwinkel doppelt so groß, als die Anzahl der Kanten.

W und K bezeichnen die Anzahl der Kantenwinkel und der Kanten,

$$W = 2K.$$

Beweis. Jede Seitenfläche des Polyeders hat offenbar so viele Winkel, als sich Kanten an derselben befinden. Da aber je zwei Seitenflächen zu einer Kante zusammenstoßen, so ist in der That die Anzahl der Kantenwinkel doppelt so groß, wie die Anzahl der Kanten, also

$$W = 2K.$$

§. 23.

Lehrsätze über die regulären Polyeder.

1. Der regulären Polyeder gibt es fünf, von welchen drei das gleichseitige Dreieck, eines das Quadrat, und eines das reguläre Fünfeck zu Seitenflächen haben.

Beweis. Wird als Begrenzungsfläche genommen

1) das gleichseitige Dreieck, so sind drei verschiedene Körper möglich, indem sowohl drei, als vier, als fünf gleichseitige Dreiecke sich und zwar zu einer drei-, vier- und fünfseitigen Ecke vereinigen lassen (§. 13:3), da $3 \cdot \frac{2}{3}$ R, $4 \cdot \frac{2}{3}$ R, $5 \cdot \frac{2}{3}$ R kleiner als 4 R; während dagegen schon aus sechs gleichseitigen Dreiecken, da $6 \cdot \frac{2}{3} R = 4 R$, eine Ecke zu bilden unmöglich ist;

2) das Quadrat, so ist nur ein Körper möglich, indem drei Quadrate sich und zwar zu einer dreiseitigen Ecke zusammensetzen lassen (§. 13:3), da $3 \cdot R < 4 R$; während dagegen schon aus vier Quadraten, da $4 \cdot R = 4 R$, eine Ecke zu bilden unmöglich ist;

3) das reguläre Fünfeck, so ist ebenfalls nur ein Körper möglich, indem drei reguläre Fünfecke sich und zwar zu einer dreiseitigen Ecke vereinigen lassen (§. 13:3), da $3 \cdot \frac{6}{5} R < 4 R$, während dagegen schon aus vier regulären Fünfecken, da $4 \cdot \frac{6}{5} R > 4 R$, eine Ecke zu bilden unmöglich ist.

Da endlich schon drei reguläre Sechsecke, weil $3 \cdot \frac{4}{3} R = 4 R$, zu einer Ecke sich nicht zusammensetzen lassen, so gibt es im Ganzen nur die **fünf** bezeichneten regulären Polyeder.

2. Die regulären Polyeder haben entweder vier oder sechs oder acht oder zwölf oder zwanzig Seitenflächen, und heißen demnach **Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder.**

Beweis.

a. Bei dem regulären Polyeder, dessen Ecken durch drei reguläre Dreiecke gebildet werden, ist offenbar $W = 3 E$ und $W = 3 F$, auch ist $W = 2 K$ (§. 22:2); also ist $3 E = 3 F$ und $2 K = 3 F$. Aus der Gleichung (§. 22:1)

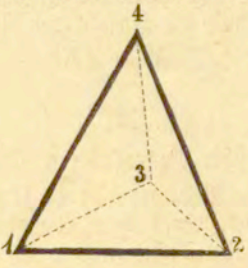
$$E + F = K + 2$$

erhält man daher mit Hülfe der vorstehenden Ausdrücke

$$F = 4,\ E = 4,\ K = 6.$$

Das reguläre Polyeder hat also 4 Seitenflächen, 4 Ecken und 6 Kanten. Ein solches, von vier gleichseitigen Dreiecken begrenztes Polyeder heißt **Tetraeder** (Fig. 51).

Fig. 51.



b. Bei dem regulären Polyeder, dessen Ecken durch vier reguläre Dreiecke gebildet werden, ist $W = 4E$ und $W = 3F$, auch ist $W = 2K$; mithin ist $4E = 3F$ und $2K = 3F$. Aus der Gleichung

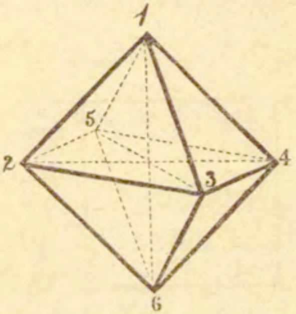
$$E + F = K + 2$$

ergibt sich nun mit Benutzung der vorhergehenden Ausdrücke

$$F = 8,\ E = 6,\ K = 12.$$

Das reguläre Polyeder hat also 8 Seitenflächen, 6 Ecken und 12 Kanten. Ein solches, von acht gleichseitigen Dreiecken begrenztes Polyeder heißt **Oktaeder** (Fig. 52).

Fig. 52.



c. Bei dem regulären Polyeder, dessen Ecken durch fünf reguläre Dreiecke gebildet werden, ist $W = 5E$ und $W = 3F$, auch ist $W = 2K$; daher ist $5E = 3F$ und $2K = 3F$. Somit ergibt sich aus der Gleichung

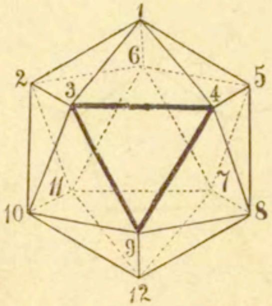
$$E + F = K + 2$$

durch Elimination mit Hülfe der vorstehenden Ausdrücke

$$F = 20,\ E = 12,\ K = 30.$$

Das reguläre Polyeder hat also 20 Seitenflächen, 12 Ecken und 30 Kanten. Ein solches, von zwanzig gleichseitigen Dreiecken begrenztes Polyeder heißt **Ikosaeder** (Fig. 53).

Fig. 53.



d. Bei dem regulären Polyeder, dessen Ecken durch drei reguläre Vierecke (Quadrate) gebildet werden, ist $W = 3E$ und $W = 4F$, auch ist $W = 2K$; mithin ist $3E = 4F$ und $2K = 4F$. Demnach aus der Gleichung

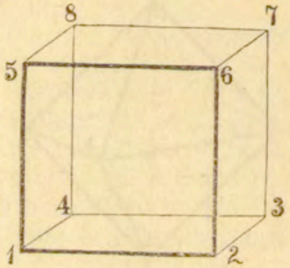
$$E + F = K + 2$$

erhält man durch Benutzung der vorhergehenden Ausdrücke

$$F = 6,\ E = 8,\ K = 12.$$

Das reguläre Polyeder hat also 6 Seitenflächen, 8 Ecken und 12 Kanten. Ein solches, von sechs Quadraten begrenztes Polyeder heißt **Hexaeder** (Würfel, Kubus) (Fig. 54).

Fig. 54.



e. Bei dem regulären Polyeder, dessen Ecken durch drei reguläre Fünfecke gebildet werden, ist $W = 3E$ und $W = 5F$, auch ist $W = 2K$; folglich ist $3E = 5F$ und $2K = 5F$. Aus der Gleichung

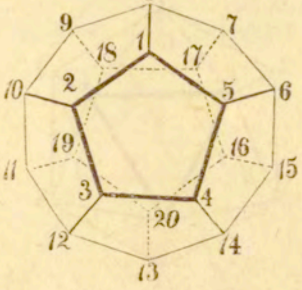
$$E + F = K + 2$$

ergibt sich daher mit Hülfe der vorstehenden Ausdrücke

$$F = 12,\ E = 20,\ K = 30.$$

Das reguläre Polyeder hat also 12 Seitenflächen, 20 Ecken und 30 Kanten. Ein solches, von zwölf regulären Fünfecken begrenztes Polyeder heißt **Dodekaeder** (Fig. 55).

Fig. 55.



3. In jedem regulären Polyeder gibt es einen Punkt, welcher von allen Seiten, so wie von allen Ecken gleich weit entfernt ist (Fig 56).

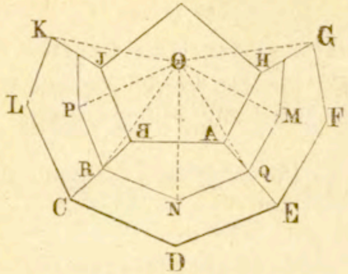


Fig. 56.

Beweis. In der Mitte der Kanten errichte man in den Seitenflächen des Polyeders Senkrechten, so werden diese sich in den Mittelpunkten derselben, in M, N, P u. s. w. schneiden; auch werden $\sphericalangle MQN$, $\sphericalangle NRP$ u. s. w. die offenbar einander gleichen Neigungswinkel je zweier Seitenflächen bilden und ihre Ebenen daher (§. 9:2) auf den Seitenflächen senkrecht stehen. Denkt man sich nun in den Mittelpunkten M und N zweier an einander stoßenden Seitenflächen Senkrechten errichtet, so werden diese (§. 8:3) in die Ebene MQN fallen, und ihr Durchschnittspunkt O ist der Punkt, welcher von den Seiten, so wie von den Ecken des Polyeders gleich weit entfernt ist. Man verbinde nämlich O mit Q, so ist offenbar $\triangle OQM \cong \triangle OQN$, mithin $OM = ON$. Verbindet man ferner O mit P und R, so ist, da aus der Vergleichung der congruenten Dreiecke $\triangle ONR$ und $\triangle ONQ$ sich $\sphericalangle ORN$ als Hälfte des Neigungswinkels und demnach gleich $\sphericalangle ORP$ ergibt, $\triangle ORP \cong \triangle ORN$, folglich $OP = ON$ und $\sphericalangle OPR = \sphericalangle ONR = R$, also (§. 8:2) OP zugleich senkrecht auf der betreffenden Seitenfläche u. s. w. Demnach ist der Punkt O von allen Seiten des Polyeders gleich weit entfernt. — Verbindet man nun O mit den Ecken des Polyeders, mit G, K u. s. w., so ist $\triangle OMG \cong \triangle OPK$, folglich $OG = OK$ u. s. w. Daher ist der Punkt O auch von allen Ecken des Polyeders gleich weit entfernt.

§. 24.

Uebungs-Aufgaben über die ebenflächigen Körper.

1. Das Prisma.

a) Geometrische Oerter.

9. Der g. O. für die Gegenfläche eines Prismas über festliegender Grundfläche und von gegebenem Inhalt besteht aus zwei Ebenen.

10. Der g. O. für die dritte Seitenkante eines dreiseitigen Prismas über festliegender Seitenfläche und von gegebenem Inhalt besteht aus zwei Ebenen.

b) Constructionen.

43—44. Ein gerades dreiseitiges Prisma $ABC\alpha\beta\gamma$ mit bei C rechtwinkliger Grundfläche ist gegeben; durch einen in der Seitenkante $C\gamma$ festliegenden Punkt P eine die beiden andern Seitenkanten in X und Y schneidende Ebene PXY zu legen, so daß $\sphericalangle XPY = R$ und

43. PY gleich einer gegebenen Strecke p.

44. XY gleich einer gegebenen Strecke q.

45—46. Ein beliebiges dreiseitiges Prisma $ABC\alpha\beta\gamma$ ist gegeben; durch einen in der Seitenkante $C\gamma$ festliegenden Punkt P eine die beiden anderen Seitenkanten in X und Y schneidende Ebene PXY zu legen, so daß sie auf der Seitenfläche $AB\alpha\beta$ senkrecht steht und

45. PX gleich einer gegebenen Strecke p.

46. XY gleich einer gegebenen Strecke q.

47—48. Ein beliebiges dreiseitiges Prisma $ABC\alpha\beta\gamma$ ist gegeben; durch eine zwischen den Seitenkanten $A\alpha$ und $B\beta$ festliegende Strecke MN eine die Seitenkante $C\gamma$ in X schneidende Ebene MNX zu legen, so daß

47. MX gleich einer gegebenen Strecke p.

48. $\sphericalangle MNX$ gleich einem gegebenen Winkel φ.

49—50. Ein gerades Prisma mit quadratischer Grundfläche ist gegeben; durch einen in einer Seitenkante $A\alpha$ festliegenden Punkt P eine Ebene zu legen, so daß der Schnitt

49. ein Rechteck mit gegebenem Seitenverhältniß p:q.

50. ein Rhombus mit gegebenem Winkel α.

c) Berechnungen.

51. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines senkrechten dreiseitigen, vierseitigen, fünfseitigen, sechsseitigen Prismas mit regulärer Grundfläche, wenn die Grundkanten so wie die Seitenkanten gleich a sind?

Antw. $K_3 = \frac{1}{4} a^3 \sqrt{3}$, 2c., $K_5 = \frac{1}{4} a^3 \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$.

52. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines schiefen dreiseitigen, vierseitigen, fünfseitigen, sechsseitigen Prismas mit regulärer Grundfläche, wenn die Grundkanten so wie die Seitenkanten gleich a und letztere gegen die Grundfläche unter einem Winkel von $\frac{1}{2}$ R oder von $\frac{2}{3}$ R geneigt sind?

Antw. $K_3 = \frac{1}{8} a^3 \sqrt{6}$, 2c., $K_5 = \frac{1}{8} a^3 \sqrt{10(5 + 2\sqrt{5})}$.

$K_3 = \frac{3}{8} a^3$, 2c., $K_5 = \frac{1}{8} a^3 \sqrt{15(5 + 2\sqrt{5})}$.

53. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines senkrechten dreiseitigen, vierseitigen, fünfseitigen, sechsseitigen Prismas mit regulärer Grundfläche, wenn die Gesammtoberfläche gleich O und die Grundfläche gleich G ist?

Antw. $K_3 = \frac{1}{6} (O - 2G) \sqrt[4]{3G^2}$, 2c., $K_5 = \frac{1}{10} (O - 2G) \sqrt[4]{5(5 + 2\sqrt{5}) G^2}$.

54. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines senkrechten dreiseitigen, vierseitigen, fünfseitigen, sechsseitigen Prismas mit regulärer Grundfläche, wenn die Gesammtoberfläche gleich O und die Summe der Seitenflächen gleich S ist?

Antw. $K_3 = \frac{1}{12} S \sqrt{O - S} \sqrt[4]{12}$, 2c., $K_5 = \frac{1}{20} S \sqrt{2(O - S)} \sqrt[4]{5(5 + 2\sqrt{5})}$.

55. Wie groß ist die Summe der Seitenflächen eines senkrechten dreiseitigen, vierseitigen, fünfseitigen, sechsseitigen Prismas mit regulärer Grundfläche, wenn die Höhe gleich H und der Inhalt gleich K ist?

Antw. $S_3 = 2\sqrt{3 K H \sqrt{3}}$, 2c., $S_5 = 2\sqrt{5 K H \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}$.

56. Wie groß ist die Schnittfläche eines senkrechten Parallelepipedons mit regulärer Grundfläche, wenn die schneidende Ebene durch eine Grundkante und die gegenüberliegende Gegenkante geht, und wenn der Inhalt des Parallelepipedons gleich K und die Grundkante gleich a ist?

Antw. $F = \frac{1}{a} \sqrt{a^6 + K^2}$.

2. Die Pyramide.

a) Geometrische Oerter.

11. Der g. O. für die Spitze einer Pyramide über festliegender Grundfläche und von gegebenem Inhalt besteht aus zwei Ebenen.

12. Der g. O. für die gemeinsame Spitze zweier Pyramiden über je einer festliegenden Grundfläche und von gleichem Inhalt besteht aus zwei Ebenen.

b) Constructionen.

57—58. Eine dreiseitige Pyramide ist gegeben; durch dieselbe eine die Seitenkanten schneidende Ebene zu legen, so daß in der abgeschnittenen Pyramide die drei Seitenflächen gleich und die Schnittebene

57. durch einen in einer Seitenkante festliegenden Punkt P geht.

58. von der Spitze der Pyramide einen gegebenen Abstand p hat.

59—60. Eine vierseitige Pyramide ist gegeben; durch dieselbe eine die Seitenkanten schneidende Ebene zu legen, so daß der Schnitt ein Trapez und

59. die parallelen Gegenseiten desselben durch zwei in zwei gegenüberliegenden Seitenflächen festliegende Punkte P_1 und P_3 gehen.

60. die eine parallele Seite durch einen in einer Seitenfläche festliegenden Punkt P geht und die andere eine gegebene Länge m hat.

c) Berechnungen.

61. Wie groß ist der körperliche Inhalt einer geraden dreiseitigen, vierseitigen, fünfseitigen, sechsseitigen Pyramide mit regulärer Grundfläche, wenn jede Grundkante gleich a und jede Seitenkante gleich b ist?

Antw. $K_3 = \frac{1}{12} a^2 \sqrt{3 b^2 - a^2}$, ꝛc.,

$$K_5 = \frac{1}{12} a^2 \sqrt{5 b^2 (5 + 2\sqrt{5}) - \tfrac{5}{2} a^2 (7 + 3\sqrt{5})}.$$

62. Wie groß ist die Oberfläche einer geraden dreiseitigen, vierseitigen, fünfseitigen, sechsseitigen Pyramide mit regulärer Grundfläche, wenn jede Grundkante gleich a und jede Seitenkante gleich b ist?

Antw. $O_3 = \frac{1}{4} a \left(a + \sqrt{3 (4 b^2 - a^2)}\right) \sqrt{3}$, ꝛc.

63. Wie groß ist die Grundkante einer dreiseitigen, vierseitigen, fünfseitigen, sechsseitigen Pyramide mit regulärer Grundfläche, wenn der Inhalt der Pyramide gleich K und ihre Höhe gleich H ist?

Antw. $a_3 = 2\sqrt{\frac{K\sqrt{3}}{H}}$, 2c., $a_5 = 2\sqrt{\frac{3K\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{5H}}$.

64. Wie groß ist die Seitenoberfläche einer geraden dreiseitigen, vierseitigen, fünfseitigen, sechsseitigen Pyramide mit regulärer Grundfläche, wenn die Höhe der Pyramide gleich H und die Grundkante gleich a ist?

Antw. $S_3 = \frac{1}{4} a \sqrt{3(12H^2 + a^2)}$, 2c.,

$$S_5 = \frac{1}{4} a \sqrt{5(20H^2 + (5+2\sqrt{5})a^2)}.$$

65. Wie groß ist die Höhe einer geraden dreiseitigen, vierseitigen, fünfseitigen, sechsseitigen Pyramide mit regulärer Grundfläche, wenn die Seitenoberfläche der Pyramide gleich S und die Grundkante gleich a ist?

Antw. $H_3 = \frac{1}{6a}\sqrt{16S^2 - 3a^4}$, 2c.,

$$H_5 = \frac{1}{10a}\sqrt{16S^2 - 5(5+2\sqrt{5})a^4}.$$

66. Wie groß ist die Entfernung der Schnittflächen vom Scheitel einer Pyramide, wenn dieselben parallel der Grundfläche sind und die Pyramide in 2, 3, ·· n gleiche Theile theilen, und wenn überdies die Höhe der Pyramide gleich H ist?

Antw. $E_2 = \frac{1}{2} H \sqrt[3]{4}$, $E_3 = \frac{1}{3} H \sqrt[3]{9}$; 2c.,

$$E_n = \frac{1}{n} H \sqrt[3]{n^2}.$$

67. Wie groß sind die Schnittflächen einer abgestumpften Pyramide, wenn dieselben parallel der Grundfläche sind und die Höhe der Pyramide von der Grundfläche an in 2, 3, ·· n gleiche Theile theilen, und wenn überdies Grund- und Gegenfläche der Pyramide gleich G und g sind?

Antw. $F_2 = \frac{1}{4}(G + 2\sqrt{Gg} + g)$, 2c., $F_n = \left(\frac{(n-1)\sqrt{G} + \sqrt{g}}{n}\right)^2$.

68. Wie groß ist die Schnittfläche einer abgestumpften Pyramide, wenn dieselbe parallel der Grundfläche ist und die Pyramide so theilt, daß der obere und untere Abschnitt der Höhe (der Pyramide) das Verhältniß p:q haben, und wenn überdies Grund- und Gegenfläche der Pyramide gleich G und g sind?

Antw. $F = \left(\frac{p\sqrt{G} + q\sqrt{g}}{p+q}\right)^2$; $F' = \sqrt[3]{\frac{pG\sqrt{G} + qg\sqrt{g}}{p+q}}$.

3. Die regulären Körper.

a) Das Tetraeder.

69—70. Wie groß ist die Entfernung des Mittelpunktes eines Tetraeders

69. von den Ecken, wenn die Kante desselben gleich a ist?

Antw. $r = \frac{1}{4} a \sqrt{6}$.

70. von den Seiten, wenn die Kante desselben gleich a ist?

Antw. $\varrho = \frac{1}{12} a \sqrt{6}$.

71—72. Wie groß ist die Kante eines Tetraeders, wenn die Entfernung des Mittelpunktes

71. von den Ecken gleich r ist?

Antw. $a = \frac{2}{3} r \sqrt{6}$.

72. von den Seiten gleich ϱ ist?

Antw. $a = 2 \varrho \sqrt{6}$.

73—75. Wie groß ist die Oberfläche eines Tetraeders, wenn

73. die Kante desselben gleich a ist?

Antw. $O = a^2 \sqrt{3}$.

74. die Entfernung des Mittelpunktes von den Ecken gleich r ist?

Antw. $O = \frac{8}{3} r^2 \sqrt{3}$.

75. die Entfernung des Mittelpunktes von den Seiten gleich ϱ ist?

Antw. $O = 24 \varrho^2 \sqrt{3}$.

76—78. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines Tetraeders, wenn

76. die Kante desselben gleich a ist?

Antw. $K = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$.

77. die Entfernung des Mittelpunktes von den Ecken gleich r ist?

Antw. $K = \frac{8}{27} r^3 \sqrt{3}$.

78. die Entfernung des Mittelpunktes von den Seiten gleich ϱ ist?

Antw. $K = 8 \varrho^3 \sqrt{3}$.

---

b) Das Hexaeder.

79—80. Wie groß ist die Entfernung des Mittelpunktes eines Hexaeders

79. von den Ecken, wenn die Kante desselben gleich a ist?

Antw. $r = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$.

80. von den Seiten, wenn die Kante desselben gleich a ist?

Antw. $\varrho = \frac{1}{2} a$.

81—82. Wie groß ist die Kante eines Hexaeders, wenn die Entfernung des Mittelpunktes

81. von den Ecken gleich r ist?

Antw. $a = \frac{2}{3} r \sqrt{3}$.

82. von den Seiten gleich ϱ ist?

Antw. $a = 2 \varrho$.

83—85. Wie groß ist die Oberfläche eines Hexaeders, wenn

83. die Kante desselben gleich a ist?

Antw. $O = 6 a^2$.

84. die Entfernung des Mittelpunktes von den Ecken gleich r ist?

Antw. $O = 8 r^2$.

85. die Entfernung des Mittelpunktes von den Seiten gleich ϱ ist?

Antw. $O = 24 \varrho^2$.

86—88. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines Hexaeders, wenn

86. die Kante desselben gleich a ist?

Antw. $K = a^3$.

87. die Entfernung des Mittelpunktes von den Ecken gleich r ist?

Antw. $K = \frac{8}{9} r^3 \sqrt{3}$.

88. die Entfernung des Mittelpunktes von den Seiten gleich ϱ ist?

Antw. $K = 8\varrho^3$.

---

c) Das Oktaeder.

89—90. Wie groß ist die Entfernung des Mittelpunktes eines Oktaeders

89. von den Ecken, wenn die Kante desselben gleich a ist?

Antw. $r = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$.

90. von den Seiten, wenn die Kante desselben gleich a ist?

Antw. $\varrho = \frac{1}{6} a \sqrt{6}$.

91—92. Wie groß ist die Kante eines Oktaeders, wenn die Entfernung des Mittelpunktes

91. von den Ecken gleich r ist?

Antw. $a = r\sqrt{2}$.

92. von den Seiten gleich ϱ ist?

Antw. $a = \varrho\sqrt{6}$.

93—95. Wie groß ist die Oberfläche eines Oktaeders, wenn

93. die Kante desselben gleich a ist?

Antw. $O = 2a^2\sqrt{3}$.

94. die Entfernung des Mittelpunktes von den Ecken gleich r ist?

Antw. $O = 4r^2\sqrt{3}$.

95. die Entfernung des Mittelpunktes von den Seiten gleich ϱ ist?

Antw. $O = 12\varrho^2\sqrt{3}$.

96—98. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines Oktaeders, wenn

96. die Kante desselben gleich a ist?

Antw. $K = \frac{1}{3} a^3\sqrt{2}$.

97. die Entfernung des Mittelpunktes von den Ecken gleich r ist?

Antw. $K = \frac{4}{3} r^3$.

98. die Entfernung des Mittelpunktes von den Seiten gleich ϱ ist?

Antw. $K = 4\varrho^3\sqrt{3}$.

---

d) Das Dodekaeder.

99—100. Wie groß ist die Entfernung des Mittelpunktes eines Dodekaeders

99. von den Ecken, wenn die Kante desselben gleich a ist?

Antw. $r = \frac{1}{4} a \left(1 + \sqrt{5}\right) \sqrt{3}.$

100. von den Seiten, wenn die Kante desselben gleich a ist?

Antw. $\varrho = \frac{1}{20} a \sqrt{10 \left(25 + 11 \sqrt{5}\right)}.$

101—102. Wie groß ist die Kante eines Dodekaeders, wenn die Entfernung des Mittelpunktes

101. von den Ecken gleich r ist?

Antw. $a = \frac{1}{3} r \left(\sqrt{5} - 1\right) \sqrt{3}.$

102. von den Seiten gleich ϱ ist?

Antw. $a = \varrho \sqrt{2 \left(25 - 11 \sqrt{5}\right)}.$

103—105. Wie groß ist die Oberfläche eines Dodekaeders, wenn

103. die Kante desselben gleich a ist?

Antw. $O = 3 a^2 \sqrt{5 \left(5 + 2 \sqrt{5}\right)}.$

104. die Entfernung des Mittelpunktes von den Ecken gleich r ist?

Antw. $O = 2 r^2 \sqrt{10 \left(5 - \sqrt{5}\right)}.$

105. die Entfernung des Mittelpunktes von den Seiten gleich ϱ ist?

Antw. $O = 30 \varrho^2 \sqrt{2 \left(65 - 29 \sqrt{5}\right)}.$

106—108. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines Dodekaeders, wenn

106. die Kante desselben gleich a ist?

Antw. $K = \frac{1}{4} a^3 \left(15 + 7 \sqrt{5}\right).$

107. die Entfernung des Mittelpunktes von den Ecken gleich r ist?

Antw. $K = \frac{2}{9} r^3 \left(5 + \sqrt{5}\right) \sqrt{3}.$

108. die Entfernung des Mittelpunktes von den Seiten gleich ϱ ist?

Antw. $K = 10\,\varrho^3 \sqrt{2\left(65 + 29\sqrt{5}\right)}$.

---

e) Das Ikosaeder.

109—110. Wie groß ist die Entfernung des Mittelpunktes eines Ikosaeders

109. von den Ecken, wenn die Kante desselben gleich a ist?

Antw. $r = \frac{1}{4}\,a \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

110. von den Seiten, wenn die Kante desselben gleich a ist?

Antw. $\varrho = \frac{1}{12}\,a\left(3 + \sqrt{5}\right)\sqrt{3}$.

111—112. Wie groß ist die Kante eines Ikosaeders, wenn die Entfernung des Mittelpunktes

111. von den Ecken gleich r ist?

Antw. $a = \frac{1}{5}\,r \sqrt{10\left(5 - \sqrt{5}\right)}$.

112. von den Seiten gleich ϱ ist?

Antw. $a = \varrho\left(3 - \sqrt{5}\right)\sqrt{3}$.

113—115. Wie groß ist die Oberfläche eines Ikosaeders, wenn

113. die Kante desselben gleich a ist?

Antw. $O = 5\,a^2\sqrt{3}$.

114. die Entfernung des Mittelpunktes von den Ecken gleich r ist?

Antw. $O = 2\,r^2\left(5 - \sqrt{5}\right)\sqrt{3}$.

115. die Entfernung des Mittelpunktes von den Seiten gleich ϱ ist?

Antw. $O = 30\,\varrho^2\left(7 - 3\sqrt{5}\right)\sqrt{3}$.

116—118. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines Ikosaeders, wenn

116. die Kante desselben gleich a ist?

Antw. $K = \frac{5}{12}\,a^3\left(3 + \sqrt{5}\right)$.

117. die Entfernung des Mittelpunktes von den Ecken gleich r ist?

Antw. $K = \frac{2}{3} r^3 \sqrt{2\left(5 + \sqrt{5}\right)}$.

118. die Entfernung des Mittelpunktes von den Seiten gleich ϱ ist?

Antw. $K = 10 \varrho^3 \left(7 - 3\sqrt{5}\right) \sqrt{3}$.

Dritter Abschnitt.

Die krummflächigen Körper.

§. 25.

Vorbemerkung.

Außer den ebenflächigen Körpern zieht die elementare Stereometrie in ihre Betrachtung noch einige krummflächige Körper, welche entweder ganz oder theilweise von gekrümmten Begrenzungsflächen eingeschlossen sind. Dahin gehören der Cylinder und der Kegel, welche theilweise eine gekrümmte Begrenzungsfläche haben, und die Kugel, welche ganz von einer krummen Oberfläche begrenzt ist.

I. Der Cylinder.

§. 26.

Begriff des Cylinders.

Erklärungen. Denkt man sich die Mittelpunkte zweier im Raume festliegenden parallelen und gleichen Kreise durch eine feste Gerade verbunden, denkt sich ferner eine andere Gerade längs den Peripherien beider Kreise sich so bewegen, daß sie der festen Geraden stets parallel bleibt, so entsteht eine Cylinderfläche und, von dieser und den Ebenen der beiden Kreise begrenzt, ein krummflächiger Körper, welcher Cylinder genannt wird (Fig. 57).

Fig. 57.

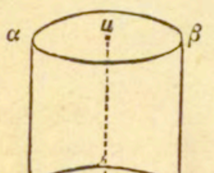
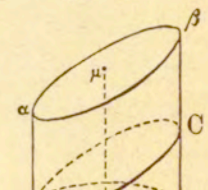


Fig 58.



Ein Cylinder ist also ein krummflächiger Körper, welcher von zwei parallelen gleichen Kreisen als *Gegenflächen* (*Grundfläche* und *Gegenfläche*) und von einer gekrümmten Seitenfläche, der *Cylinderfläche* oder dem *Cylindermantel*, begrenzt ist. Der senkrechte Abstand der Grundfläche und Gegenfläche von einander heißt die *Höhe* des Cylinders. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Grund- und Gegenfläche heißt die Axe, und jede der Axe parallele Gerade auf dem Cylindermantel eine *Seitenlinie* des Cylinders. Ein Cylinder heißt *gerade* oder *schief*, je nachdem die Axe desselben senkrecht oder schief zur Grundfläche steht. Die Axe ist beim geraden Cylinder der Höhe gleich. Jeder Schnitt durch die Axe des Cylinders ihrer Länge nach heißt ein *Axenschnitt*, ein Axenschnitt senkrecht zur Grundfläche ein *Normalschnitt*. Eine Ebene, welche mit der Cylinderfläche eine Seitenlinie gemeinsam hat, heißt eine *Berührungsebene*, die gemeinsame Seitenlinie die *Berührungslinie*.

Schneidet man den Cylinder durch eine gegen die Grundfläche geneigte Ebene, so heißt der zwischen der Grundfläche und der Schnittfläche enthaltene Theil desselben ein *abgeschrägter* Cylinder (Fig. 58), und geht die schneidende Ebene zugleich durch einen Punkt im Umfange der Grundfläche, so heißt der zwischen der Grundfläche und der Schnittfläche enthaltene Theil (ABC) ein *Cylinderhuf*.

§. 27.

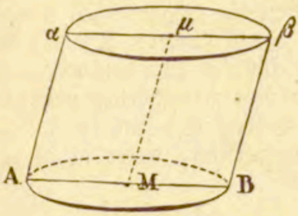
Lehrsätze über den Cylinder.

1. Jeder Schnitt durch die Axe des Cylinders ist ein Parallelogramm (Fig. 59).

Sei $M\mu$ die Axe des Cylinders,

der Axenschnitt $AB\beta\alpha$ ist ein Parallelogramm,

Fig. 59.



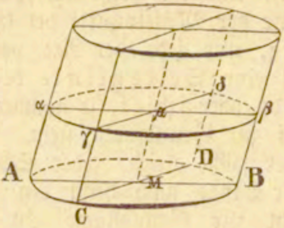
Beweis. Die Seitenlinien $A\alpha$ und $B\beta$ des Cylinders sowohl, als auch die Durchschnittslinien AB und $\alpha\beta$ des Axenschnitts mit den parallelen Gegenflächen sind offenbar einander parallel. Da also $A\alpha \ddagger B\beta$ und $AB \ddagger \alpha\beta$, so ist $AB\beta\alpha$ ein Parallelogramm.

2. Jeder Schnitt parallel der Grundfläche des Cylinders ist ein Kreis (Fig. 60).

$$\alpha\gamma\beta\delta \ddagger ACBD,$$

der Parallelschnitt $\alpha\gamma\beta\delta$ ist ein Kreis.

Fig. 60.



Beweis. Man denke sich durch die Axe des Cylinders beliebig viele Schnitte gelegt, so entstehen die Parallelogramme $AM\mu\alpha$, $BM\mu\beta$, $CM\mu\gamma$ u. s. w., daher ist $MA = \mu\alpha$, $MB = \mu\beta$, $MC = \mu\gamma$ u. s. w. Da aber $MA = MB = MC$ u. s. w., so ist auch $\mu\alpha = \mu\beta = \mu\gamma$ u. s. w., folglich ist der Parallelschnitt $\alpha\gamma\beta\delta$ ein Kreis.

3. Der Inhalt eines Cylinders ist gleich dem Producte aus seiner Grundfläche und Höhe.

Sei C der Inhalt, F die Grundfläche und H die Höhe des Cylinders,

$$C = F \cdot H.$$

Beweis. Man denke sich in den Cylinder gleich hohe Prismen mit regulären Gegenflächen und von stets zunehmender Seitenanzahl einbeschrieben (deren Gegenflächen also den Gegenflächen des Cylinders selbst einbeschrieben sind), so werden die Gegenflächen dieser Prismen sich den Gegenflächen des Cylinders bezüglich des Umfanges, und die Prismen selbst sich dem Cylinder bezüglich des Inhalts als ihrer Grenze unaufhörlich nähern. Für diese Grenze gilt aber in Betreff des Inhalts dieselbe Beziehung, wie für die Prismen selbst, daher ist in der That der Inhalt des Cylinders

$$C = F \cdot H.$$

Zusatz. Bezeichnet man den Radius der Grundfläche mit R, so erhält man für den Inhalt des Cylinders (Plan. §. 91:3)

$$C = R^2\pi \cdot H.$$

4. Die Mantelfläche eines geraden Cylinders ist gleich dem Producte aus dem Umfange seiner Grundfläche und der Höhe.

Sei M die Mantelfläche, U der Umfang der Grundfläche, H die Höhe,

$$M = U \cdot H.$$

Beweis. Man denke sich die Mantelfläche des Cylinders nach einer Seitenlinie aufgeschlitzt und in eine Ebene ausgebreitet. Alsdann erhält man ein Rechteck, dessen Höhe gleich der Höhe H des Cylinders, und dessen Grundlinie gleich dem Umfange U der Grundfläche des Cylinders ist, daher ist offenbar die Mantelfläche des geraden Cylinders

$$M = U \cdot H.$$

Zusatz. Bezeichnet man den Radius der Grundfläche mit R, so erhält man für die Mantelfläche des geraden Cylinders (Plan. §. 91:1)

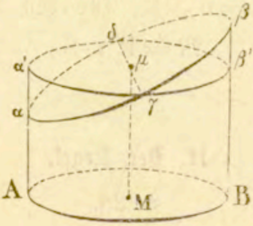
$$M = 2R\pi \cdot H.$$

5. Der Inhalt eines abgeschrägten geraden Cylinders ist gleich dem Producte aus seiner Grundfläche und der Axe (Fig. 61).

Sei F die Grundfläche und A die Axe,

$$AB\alpha\beta = F \cdot A.$$

Fig. 61.



Beweis. Man denke sich durch den Endpunkt μ der Axe einen der Grundfläche parallelen Schnitt $\alpha'\beta'$ gelegt; alsdann sind die beiden hufförmigen Körper $\gamma\delta\alpha\alpha'$ und $\gamma\delta\beta\beta'$ nach dem Princip der Deckung offenbar congruent, also Cyl $AB\alpha\beta$ = Cyl. $AB\alpha'\beta'$. Folglich ist (L. 3) der Inhalt des abgeschrägten geraden Cylinders

$$AB\alpha\beta = F \cdot A.$$

Zusatz 1. Bezeichnet man den Radius der Grundfläche mit R, die größte Seitenlinie des Cylinders $B\beta$ mit S, die kleinste $A\alpha$ mit s, so erhält man für den Inhalt des abgeschrägten geraden Cylinders (Plan. §. 43:2)

$$AB\alpha\beta = \tfrac{1}{2}R^2\pi \cdot (S + s).$$

Zusatz 2. Beim Cylinderhufe ist die kleinste Seitenlinie $s = o$, und setzt man (Fig. 58) die größte Seitelinie $BC = S$, so erhält man für den Inhalt des geraden Cylinderhufes

$$ABC = \tfrac{1}{2} R^2 \pi \cdot S.$$

6. Die Mantelfläche eines abgeschrägten geraden Cylinders ist gleich dem Producte aus dem Umfange seiner Grundfläche und der Axe (Fig. 61).

Sei $\mathfrak{M}$ die Mantelfläche, U der Umfang der Grundfläche, A die Axe,

$$\mathfrak{M} = U \cdot A.$$

Beweis. Man lege durch den Endpunkt μ der Axe den der Grundfläche parallelen Schnitt $\alpha'\beta'$, alsdann ist nach dem Princip der Deckung der Hufmantel $\gamma\alpha\alpha'\delta =$ dem Hufmantel $\gamma\beta\beta'\delta$, daher auch der Cylindermantel $AB\alpha\beta =$ dem Cylindermantel $AB\alpha'\beta'$, folglich (L. 4) die Mantelfläche des abgeschrägten geraden Cylinders

$$\mathfrak{M} = U \cdot A.$$

Zusatz. Bezeichnet man den Radius der Grundfläche mit R, die größte Seitenlinie des Cylinders mit S, die kleinste mit s, so erhält man für die Mantelfläche des abgeschrägten geraden Cylinders

$$\mathfrak{M} = R\pi \cdot (S + s),$$

und, indem man $s = o$ setzt, für den Mantel des geraden Cylinderhufes

$$\mathfrak{M} = R\pi \cdot S.$$

II. Der Kegel.

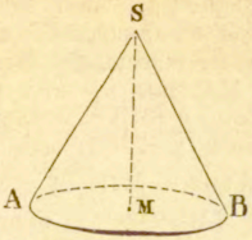
§. 28.

Begriff des Kegels.

Erklärungen. Denkt man sich einen festliegenden Kreis und außerhalb seiner Ebene im Raume einen festen Punkt, denkt sich ferner eine gerade Linie längs der Peripherie des Kreises sich so bewegen, daß sie beständig durch den festen Punkt geht, so entsteht eine Kegelfläche und, von dieser und der Ebene des Kreises begrenzt, ein krummflächiger Körper, welcher Kegel genannt wird (Fig. 62).

Der Kegel ist also ein krummflächiger Körper, welcher von einem Kreise, als Grundfläche, und von einer gekrümmten Seitenfläche, der Kegelfläche oder dem Kegelmantel, begrenzt ist. Der feste Punkt, durch welchen die den Kegelmantel beschreibende Gerade geht, heißt die Spitze oder der Scheitel, und der senkrechte Abstand desselben von der Grundfläche die

Fig. 62.



Höhe des Kegels. Die Verbindungslinie der Spitze mit dem Mittelpunkte der Grundfläche heißt die Axe, und jede Gerade auf dem Kegelmantel von der Spitze nach dem Umfange der Grundfläche eine Seitenlinie des Kegels. Der Kegel heißt gerade oder schief, je nachdem die Axe desselben senkrecht oder schief auf der Grundfläche steht. Beim geraden Kegel fällt die Axe mit der Höhe zusammen. Jeder Schnitt durch die Axe des Kegels ihrer Länge nach heißt ein Axenschnitt, ein Axenschnitt senkrecht zur Grundfläche ein Normalschnitt. Der durch die Mitte der Höhe mit der Grundfläche parallel gelegte Schnitt wird der mittlere Schnitt oder der Mittelschnitt genannt. Eine Ebene, welche mit der Kegelfläche eine Seitenlinie gemeinsam hat, heißt eine Berührungsebene, die gemeinsame Seitenlinie die Berührungslinie.

Wird ein Kegel durch eine Ebene parallel der Grundfläche geschnitten, so heißt der zwischen der Grundfläche und dem ihr parallelen Schnitte als Gegenfläche enthaltene Theil desselben ein abgestumpfter Kegel. Der senkrechte Abstand der Grundfläche und Gegenfläche von einander heißt seine Höhe.

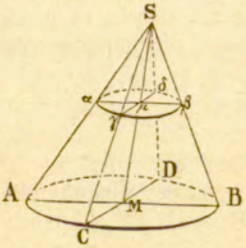
§. 29.

Lehrsätze über den Kegel.

1. Jeder Schnitt parallel der Grundfläche des Kegels ist ein Kreis (Fig. 63).

$$\frac{\alpha\gamma\beta\delta \mathrel{+\!\!\!\!\!\!\;\not\;} ACBD,}{\text{der Parallelschnitt } \alpha\gamma\beta\delta \text{ ist ein Kreis.}}$$

Fig. 63.



Beweis. Man lege durch die Axe beliebig viele Ebenen; da diese die Grundfläche und die ihr parallel gelegte Schnittfläche in parallelen Geraden MA und $\mu\alpha$, MB und $\mu\beta$, MC und $\mu\gamma$ u. s. w. schneiden, so ist $\triangle SMA \sim \triangle S\mu\alpha$, $\triangle SMB \sim \triangle S\mu\beta$, $\triangle SMC \sim \triangle S\mu\gamma$, und daher (Planim. §. 77:3) verhält sich $(SM : S\mu) =$

$$MA : \mu\alpha = MB : \mu\beta = MC : \mu\gamma.$$

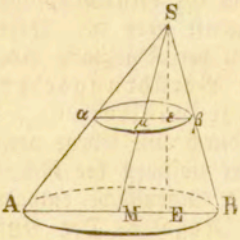
Da aber $MA = MB = MC$, so ist auch $\mu\alpha = \mu\beta = \mu\gamma$, und folglich ist der Parallelschnitt $\alpha\gamma\beta\delta$ ein Kreis.

2. Die Grundfläche des Kegels und eine der Grundfläche parallele Schnittfläche verhalten sich wie die Quadrate ihrer senkrechten Abstände von der Spitze (Fig. 64).

Seien F und f die parallelen Grund- und Schnittfläche, H und h ihre senkrechten Abstände von der Spitze des Kegels,

$$F : f = H^2 : h^2.$$

Fig. 64.



Beweis. Man lege durch die Axe des Kegels SM und die senkrechten Abstände $SE = H$ und $S\varepsilon = h$ eine Ebene, den Normalschnitt SAB, so ist offenbar (Plan. §. 90:2 und §. 77:3 und 1)

$$F : f = (MA^2 : \mu\alpha^2 = SM^2 : S\mu^2) = SE^2 : S\varepsilon^2,$$

d. i.

$$F : f = H^2 : h^2.$$

3. Der Inhalt eines Kegels ist gleich dem dritten Theile des Productes aus seiner Grundfläche und Höhe.

Sei K der Inhalt, F die Grundfläche und H die Höhe,

$$K = \tfrac{1}{3} F \cdot H.$$

Beweis. Man denke sich in den Kegel gleich hohe Pyramiden mit regulärer Grundfläche und von stets zunehmender Seitenanzahl einbeschrieben (deren Grundflächen also der Grundfläche des Kegels selbst einbeschrieben sind), so werden die Grundflächen dieser Pyramiden sich der Grundfläche des Kegels bezüglich des Umfanges, und die Pyramiden selbst sich dem Kegel bezüglich des Inhalts als ihrer Grenze unaufhörlich nähern. Für diese Grenze gilt aber in Betreff des Inhalts dieselbe Beziehung, wie für die Pyramiden selbst; daher ist der Inhalt des Kegels

$$\mathfrak{K} = \tfrac{1}{3} F \cdot H.$$

Zusatz. Bezeichnet man den Radius der Grundfläche mit R, so ist

$$\mathfrak{K} = \tfrac{1}{3} R^2 \pi \; H.$$

4. Die Mantelfläche eines geraden Kegels ist gleich dem halben Producte aus dem Umfange der Grundfläche und der Seitenlinie des Kegels (Fig. 65).

Sei M die Mantelfl., U der Umfang der Grundfl., S die Seitenlinie,

$$M = \tfrac{1}{2} U \cdot S.$$

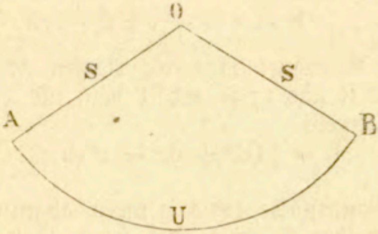


Fig. 65.

Beweis. Man denke sich den Kegelmantel nach einer Seitenlinie aufgeschlitzt und in eine Ebene ausgebreitet, so erhält man einen Kreisausschnitt, dessen Bogenlänge gleich dem Umfange der Grundfläche und dessen Radius gleich der Seitenlinie des Kegels ist. Daher ist (Plan. §. 91:4) der Inhalt der Mantelfläche des geraden Kegels

$$M = \tfrac{1}{2} U \cdot S.$$

Zusatz. Bezeichnet man den Radius der Grundfläche mit R, so erhält man für die Mantelfläche des geraden Kegels

$$M = R\pi \cdot S.$$

Bezeichnet man den Radius des der Grundfläche parallelen mittleren Schnittes mit ϱ, so ist $R = 2\varrho$ (Plan. §. 37:2, Zus.), und daher die Mantelfläche des geraden Kegels

$$M = 2\varrho\pi \cdot S.$$

5. Der Inhalt eines abgestumpften Kegels ist gleich dem dritten Theile des Productes aus seiner Höhe und der Summe aus den beiden parallelen Gegenflächen und deren geometrischem Mittel.

Sei K der Inhalt, F und f die Gegenflächen und h die Höhe,

$$K = \frac{1}{3}(F + \sqrt{Ff} + f)h.$$

Beweis. Man denke sich in den abgestumpften Kegel gleich hohe abgestumpfte Pyramiden mit regulären Gegenflächen und von stets zunehmender Seitenanzahl einbeschrieben (deren Gegenflächen also den Gegenflächen des abgestumpften Kegels selbst einbeschrieben sind), so werden die Gegenflächen dieser abgestumpften Pyramiden sich den Gegenflächen des abgestumpften Kegels bezüglich des Umfanges, und die abgestumpften Pyramiden selbst sich dem abgestumpften Kegel bezüglich des Inhalts als ihrer Grenze unaufhörlich nähern. Für diese Grenze gilt aber in Betreff des Inhalts dieselbe Beziehung, wie für die abgestumpfte Pyramide, folglich ist der Inhalt des abgestumpften Kegels

$$K = \frac{1}{3}(F + \sqrt{Ff} + f)h.$$

Zusatz. Bezeichnet man die Radien der Grund- und Gegenfläche mit R und r, so erhält man für den Inhalt des abgestumpften Kegels

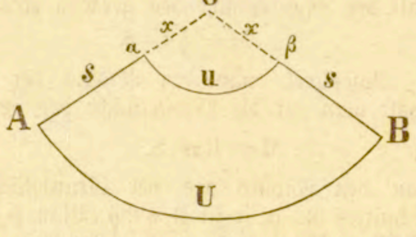
$$K = \frac{1}{3}(R^2 + Rr + r^2)h\pi.$$

6. Die Mantelfläche eines geraden abgestumpften Kegels ist gleich dem halben Producte aus seiner Seitenlinie und der Summe der Umfänge der beiden Gegenflächen (Fig. 66).

Sei M die Mantelfläche, s die Seitenlinie, U und u die Umfänge der Gegenflächen,

$$M = \frac{1}{2}(U + u)s.$$

Fig. 66.



Beweis. Man denke sich die Mantelfläche nach einer Seitenlinie aufgeschlitzt und in eine Ebene ausgebreitet, so entsteht das krummlinige Trapez $AB\alpha\beta$, dessen Seiten $A\alpha$ und $B\beta$ gleich s, und dessen parallele Gegenseiten AB und $\alpha\beta$ gleich U und u sind. Verlängert man nun $A\alpha$ und $B\beta$ bis zu ihrem Durchschnitt O und bezeichnet $O\alpha$ mit x, so ist der Kreissector $OAB = \frac{1}{2}U(s+x)$ und Kreissector $O\alpha\beta = \frac{1}{2}ux$, folglich das krummlinige Trapez oder die Mantelfläche des abgestumpften Kegels

$$M = \tfrac{1}{2}U(s+x) - \tfrac{1}{2}ux = \tfrac{1}{2}Us + \tfrac{1}{2}(U-u)x.$$

Nun aber ist $U:u = (s+x):x$ (Plan. §. 91:2, Zus.), also $(U-u):u = s:x$, folglich $(U-u)x = us$. Mit Rücksicht hierauf ergibt sich für die Mantelfläche des abgestumpften Kegels

$$M = \tfrac{1}{2}(U+u)s.$$

Zusatz. Bezeichnet man die Radien der Grund- und Gegenfläche mit R und r, so ist $U+u = 2(R+r)\pi$, folglich erhält man für die Mantelfläche des abgestumpften Kegels

$$M = (R+r)s\pi.$$

Bezeichnet ϱ den Radius des der Grundfläche parallelen mittleren Schnittes, so ist $R+r = 2\varrho$ (Plan. §. 43:2), und folglich auch die Mantelfläche des abgestumpften Kegels

$$M = 2\varrho\pi \cdot s.$$

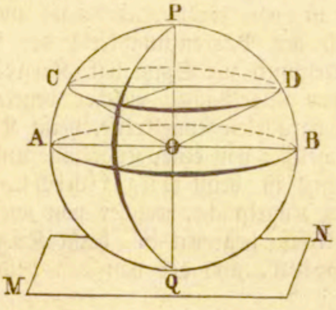
III. Die Kugel.

§. 30.

Begriff der Kugel.

Erklärungen. Denkt man sich einen Halbkreis um seinen Durchmesser als feste Axe so lange gedreht, bis er in seine erste Lage zurückgekehrt ist, so entsteht eine Kugelfläche und von dieser begrenzt ein krummflächiger Körper, welcher Kugel genannt wird (Fig. 67).

Fig. 67.



Die Kugel ist also ein Körper, welcher ringsum von einer gekrümmten Oberfläche begrenzt ist, deren Punkte alle von einem innern Punkte gleich weit entfernt sind. Die gekrümmte Oberfläche heißt eben Kugelfläche und der innere Punkt, von welchem alle Punkte der Kugelfläche gleich weit entfernt sind, der Mittelpunkt der Kugel. Jede vom Mittelpunkte bis zur Kugelfläche gezogene Gerade wird Radius oder Halbmesser, und jede durch den Mittelpunkt gezogene und auf beiden Seiten von der Kugelfläche begrenzte gerade Linie Diameter oder Durchmesser genannt.

Aus den gegebenen Erklärungen erhellt, daß alle Radien so wie alle Durchmesser einer Kugel einander gleich sind, daß ferner die Kugel durch eine durch ihren Mittelpunkt gelegte Ebene in einem Kreise geschnitten und in zwei gleiche Theile, Halbkugeln, getheilt wird. Aber auch von jeder anderen Ebene wird die Kugel, wie sogleich (§. 31:1) wird gezeigt werden, in einem Kreise geschnitten. Jeder Kreis, in welchem die Kugel geschnitten wird, heißt Kugelkreis, und zwar, wenn er durch den Mittelpunkt geht, ein größter (Hauptkreis), dagegen ein kleiner (Nebenkreis), wenn er nicht durch den Mittelpunkt geht. Der auf die Ebene eines Kugelkreises senkrecht gezogene Durchmesser (PQ) heißt die Axe des Kugelkreises und ihre Endpunkte werden die Pole desselben genannt.

Eine Ebene, welche mit der Kugelfläche mehr als einen Punkt gemeinsam hat, also theils innerhalb theils außerhalb der Kugel liegt, heißt eine schneidende Ebene; eine Ebene dagegen, welche mit der Kugelfläche nur einen Punkt gemeinsam hat, also mit Ausnahme dieses Punktes ganz außerhalb der Kugel liegt, heißt eine Berührungsebene (MN), und der Punkt, welchen sie mit der Kugel gemeinsam hat, der Berührungspunkt.

Ein Theil der Kugelfläche, welcher von dem Umfange eines Kugelkreises begrenzt ist, wird Kugelschale, und ein Theil der Kugel, welcher von einer Kugelschale und einem Kugelkreise begrenzt ist, Kugelabschnitt, so wie ein Theil der Kugel, welcher begrenzt ist von einer Kugelschale und einem Kegelmantel, der durch den Begrenzungskreis der Kugelschale geht und den Kugelmittelpunkt zur Spitze hat, Kugelkegel genannt.

Ein Theil der Kugelfläche, welcher begrenzt ist von den Umfängen zweier parallelen Kugelkreise, heißt Kugelzone; ein Theil der Kugel, welcher von einer Kugelzone und zwei parallelen Kugelkreisen begrenzt ist, heißt Kugelschicht.

Ein Theil der Kugelfläche, welcher von zwei halben Umfängen größter Kugelkreise begrenzt ist, heißt Kugelzweieck oder sphärisches Zweieck, und der von den beiden Kugelkreisen gebildete Flächenwinkel der Winkel des sphärischen Zweiecks; ein Theil der Kugel, welcher begrenzt ist von einem Kugelzweieck und den zugehörigen Kugelhalbkreisen, heißt Kugelausschnitt.

Ein Theil der Kugelfläche, welcher begrenzt ist von drei Bogen größter Kugelkreise, wird Kugeldreieck oder sphärisches Dreieck genannt; die Bogen der Kugelkreise heißen die Seiten und die von den Kugelkreisen gebildeten Flächenwinkel die Winkel des sphärischen Dreiecks. Zwei Kugeldreiecke, deren Ecken paarweise diametral einander gegenüber liegen, heißen Gegendreiecke. Ein Theil der Kugel, welcher begrenzt ist von einem Kugeldreieck und den zugehörigen Ausschnitten größter Kugelkreise wird (dreiseitige) Kugelpyramide genannt.

Ein ebenflächiger Körper heißt in die Kugel beschrieben, wenn alle Ecken desselben in der Kugelfläche liegen; ein krummflächiger Körper heißt in die Kugel beschrieben, wenn der Umfang der Grundfläche und der Gegenfläche, beziehungsweise die Spitze, in der Kugelfläche liegt. Ein Körper heißt um die Kugel beschrieben, wenn alle Begrenzungsflächen desselben die Kugel berühren.

Auch bei Kugeln unterscheidet man, den polarischen, Potenz- und Aehnlichkeits-Beziehungen bei Kreisen entsprechend, conjugirte Pole, conjugirte Polaren, conjugirte Polarebenen, Punkt gleicher Potenz, Potenzlinie, Potenzebene, Aehnlichkeitspunkte, Aehnlichkeitsstralen.

§. 31.

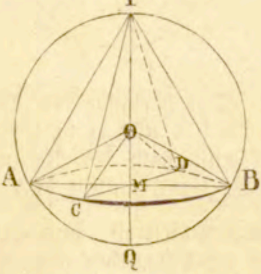
Lehrsätze über die Grundeigenschaften der Kugel.

1. Eine Kugel wird von einer Ebene überall in einem Kreise geschnitten (Fig. 68).

Die Kugel O werde durch eine Ebene geschnitten,

der Schnitt ACBD ist ein Kreis.

Fig. 68.



Beweis. Man fälle vom Mittelpunkte O auf die Ebene des Schnittes die Senkrechte OM und verbinde beliebig viele Punkte A, C, B, D seines Umfanges mit O und M, so ist $\triangle OMA \cong \triangle OMC \cong \triangle OMB$ u. s. w., mithin $MA = MC = MB$ u. s. w., folglich die Schnittfläche ACBD ein Kreis.

Zusatz 1. Die Verbindungslinie des Mittelpunktes der Kugel mit dem Mittelpunkte eines Kugelkreises steht senkrecht auf dem Kugelkreise.

Zusatz 2. Die in dem Mittelpunkte eines Kugelkreises errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

2. Die Pole eines jeden Kugelkreises sind von allen Punkten seines Umfanges gleich weit entfernt (Fig. 68).

PQ sei die Axe des Kugelkreises M,

$PA = PC = PB$.

Beweis. Man verbinde den Mittelpunkt M des Kugelkreises so wie seinen Pol P mit den Punkten A, C, B im Umfange des Kugelkreises, so ist offenbar $\triangle PMA \cong \triangle PMC \cong \triangle PMB$, folglich $PA = PC = PB$.

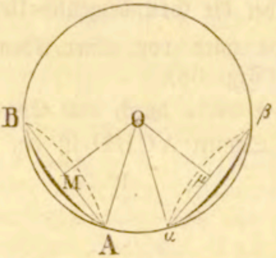
3. Zwei von dem Mittelpunkte der Kugel gleich weit entfernte Kugelkreise sind einander gleich (Fig. 69).

OM und $O\mu$ senkrecht auf den Kugelkreisen M und μ,

$OM = O\mu$,

$MA = \mu\alpha$.

Fig. 69.



Beweis. Man verbinde den Mittelpunkt der Kugel O mit den Punkten A und α in dem Umfange der beiden Kugelkreise; da nun nach der Voraussetzung $OM = O\mu$, so ist $\triangle OMA \cong \triangle O\mu\alpha$, mithin $MA = \mu\alpha$.

4. Zwei gleiche Kugelkreise sind vom Mittelpunkte der Kugel gleichweit entfernt (Fig. 69).

OM und $O\mu$ senkrecht auf den Kugelkreisen M und μ,

$$\frac{MA = \mu\alpha,}{OM = O\mu.}$$

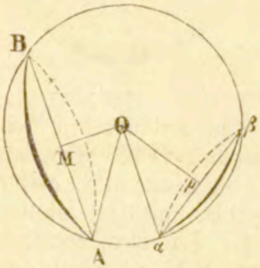
Beweis. Man verbinde wieder den Mittelpunkt der Kugel O mit den Punkten A und α in dem Umfange der beiden Kugelkreise. Da nun nach der Voraussetzung $MA = \mu\alpha$, so ist $\triangle OMA \cong \triangle O\mu\alpha$, folglich $OM = O\mu$.

5. Von zwei vom Mittelpunkte der Kugel ungleich weit entfernten Kugelkreisen ist der dem Mittelpunkte nähere der größere (Fig. 70).

OM und $O\mu$ senkrecht auf den Kugelkreisen M und μ,

$$\frac{OM < O\mu,}{MA > \mu\alpha.}$$

Fig. 70.



Beweis. Man verbinde den Mittelpunkt der Kugel O mit den Punkten A und α in dem Umfange der beiden Kugelkreise; da nun in den beiden rechtwinkligen Dreiecken OMA und $O\mu\alpha$, welche gleiche Hypotenuse haben, nach Voraussetzung $OM < O\mu$, so ist (Planim. §. 36:3) $MA > \mu\alpha$.

6. Zwei ungleiche Kugelkreise sind ungleich weit vom Mittelpunkt der Kugel entfernt, und zwar liegt der größere näher am Mittelpunkt (Fig. 70).

OM und $O\mu$ senkrecht auf den Kugelkreisen M und μ,

$$\frac{MA > \mu\alpha,}{OM < O\mu.}$$

Beweis. Man verbinde den Mittelpunkt der Kugel O wieder mit den Punkten A und α in dem Umfange der beiden Kugelkreise; da nun in den beiden rechtwinkligen Dreiecken OMA und $O\mu\alpha$, welche gleiche Hypotenuse haben, nach der Voraussetzung $MA > \mu\alpha$, so ist (Plan. §. 36:3) $OM < O\mu$.

§. 32.

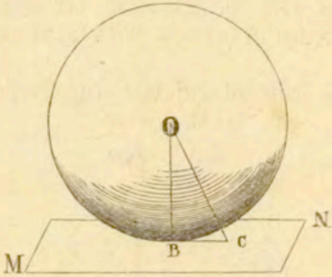
Lehrsätze über die Berührungsebene der Kugel.

1. Eine im Endpunkte eines Radius zu demselben senkrecht gelegte Ebene ist eine Berührungsebene der Kugel (Fig. 71).

$MN \perp OB$,

MN Berührungsebene der Kugel O.

Fig. 71.



Beweis. Man verbinde den Mittelpunkt der Kugel O so wie den Endpunkt B des Radius OB mit einem beliebigen Punkte C der Ebene MN, alsdann ist $\sphericalangle OBC = R$, mithin $OC > OB$, und liegt folglich der Punkt C außerhalb der Kugel. Da aber, ebenso wie C, jeder andere Punkt der Ebene MN außerhalb der Kugel liegt, so ist MN eine Berührungsebene.

Zusatz. In jedem Punkte der Kugelfläche gibt es nur eine Berührungsebene.

2. Der Radius zum Berührungspunkt steht senkrecht auf der Berührungsebene der Kugel (Fig. 71).

B sei der Berührungspunkt der Ebene MN,

$OB \perp MN$.

Beweis. Stände der Radius zum Berührungspunkt, OB, nicht senkrecht auf der Ebene MN, so könnte man von O eine andere Gerade OC auf MN senkrecht fällen; alsdann wäre aber, wenn man BC zieht, $\sphericalangle OCB = R$, also $OC < OB$, und es läge mithin der Punkt C der Berührungsebene innerhalb der Kugel, was unmöglich ist.

Zusatz. Die vom Mittelpunkt der Kugel auf die Berührungsebene gefällte Senkrechte trifft den Berührungspunkt, so wie die im Berührungspunkt auf die Berührungsebene errichtete Senkrechte den Mittelpunkt der Kugel.

§. 33.

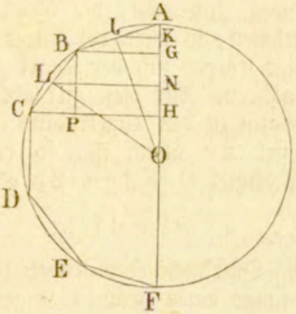
Lehrsätze über die Oberfläche und den Inhalt der Kugel und ihrer Theile.

1. Die Oberfläche der Kugel ist gleich dem vierfachen Inhalte des größten Kugelkreises (Fig. 72).

Sei O die Oberfläche, r der Radius der Kugel,

$$O = 4 r^2 \pi.$$

Fig. 72.



Beweis. Man denke sich in einen Kreis ein reguläres Vieleck von gerader Seitenanzahl A B C D E F... beschrieben und dieses zugleich mit dem Kreise um den Durchmesser A F gedreht, so wird der Kreis eine Kugel und das Vieleck einen aus abgestumpften und zwei vollständigen Kegeln bestehenden kreiskantigen Körper beschreiben. Sind nun AB und BC die Seitenlinien eines der vollständigen und der abgestumpften Kegel, sind ferner JK und LN die Radien ihrer mittleren Schnitte, so sind die Mantelflächen M und M′ des vollständigen und des abgestumpften Kegels (§. 29:4, Zus. und 6, Zus.)

$$M = 2\pi \cdot JK \cdot AB \text{ und } M' = 2\pi \cdot LN \cdot BC.$$

Zieht man nun in dem Vielecke die kleineren Radien OJ und OL und die Senkrechte BP, so ist $\triangle AGB \sim \triangle JKO$ und $\triangle BPC \sim \triangle LNO$, mithin

$$AB : AG = OJ : JK \text{ und } BC : BP = OL : LN,$$

folglich ist

$$JK \cdot AB = OJ \cdot AG,$$
$$LN \cdot BC = (OL \cdot BP) = OL \cdot GH.$$

Dies beachtet und $OJ = OL = \varrho$ gesetzt, sind die Ausdrücke für die beiden Mantelflächen

$$M = 2\varrho\pi \cdot AG \quad \text{und} \quad M' = 2\varrho\pi \cdot GH.$$

So ist nun jede der einzelnen Mantelflächen gleich dem Producte aus dem Umfange des dem Vielecke einbeschriebenen Kreises und der Höhe des entsprechenden Kegels, mithin die Summe derselben oder die ganze kreiskantige Oberfläche

$$W = 2\varrho\pi \cdot AF.$$

Läßt man nun die Anzahl der Seiten des einbeschriebenen Vielecks beständig zunehmen, die Größe der Seiten also beständig abnehmen, so wird der durch Umdrehung gebildete kreiskantige Körper sich der Kugel als seiner Grenze unaufhörlich nähern. Für diese gilt aber dieselbe Relation, und da ϱ alsdann in den Kugelradius r übergeht und AF dem Durchmesser 2r gleich ist, so erhält man für die Oberfläche der Kugel $O = 2r\pi \cdot 2r$ oder

$$O = 4r^2\pi.$$

Zusatz 1. Die Oberfläche der Kugel ist gleich dem Producte aus dem Umfange eines größten Kugelkreises und ihrem Durchmesser; denn es ist

$$O = 2r\pi \cdot 2r.$$

Zusatz 2. Die Oberfläche einer Kugelschale, so wie einer Kugelzone ist gleich dem Producte aus dem Umfange eines größten Kugelkreises und ihrer Höhe. Sind die Höhen beider gleich h, so ist, wenn man die Kugelschale mit S und die Kugelzone mit Z bezeichnet,

$$S = 2r\pi \cdot h \quad \text{und} \quad Z = 2r\pi \cdot h.$$

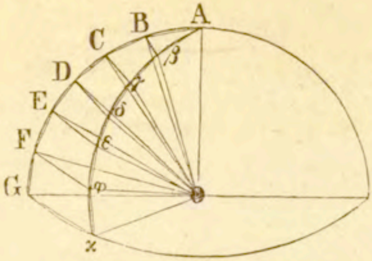
Zusatz 3. Die Oberfläche der Kugel, der Kugelschale, der Kugelzone ist daher auch gleich dem Mantel eines geraden Cylinders, welcher einen größten Kugelkreis zur Grundfläche und die Höhe der Kugel, der Kugelschale, der Kugelzone zur Höhe hat.

2. Der Inhalt der Kugel ist gleich dem dritten Theile des Productes aus der Oberfläche und dem Radius der Kugel (Fig. 73).

Sei K der Inhalt, r der Radius der Kugel,

$$K = \tfrac{4}{3} r^3 \pi.$$

Fig. 73.



Beweis. Man denke sich in die Kugel auf die Art, wie die Figur andeutet, ein Polyeder beschrieben, dessen Oberfläche F sei, und nehme die Seitenflächen desselben $AB\beta$, $BC\gamma\beta$, u. s. w. als Grundflächen von Pyramiden an, deren gemeinsame Spitze der Mittelpunkt der Kugel ist. Ist nun ϱ die Höhe aller dieser Pyramiden, so ist der Inhalt des Polyeders offenbar $\frac{1}{3}\varrho \cdot F$. Läßt man nun aber die Anzahl der Seiten des einbeschriebenen Polyeders beständig zunehmen, so wird der Inhalt desselben dem Inhalte K der Kugel als seiner Grenze sich unaufhörlich nähern. Für diese gilt aber dieselbe Relation, und da beim Uebergang zur Grenze die für alle Pyramiden gleiche Höhe dem Kugelradius r gleich wird und die Oberfläche des Polyeders in die Oberfläche der Kugel übergeht, diese aber $4r^2\pi$ ist, so erhält man für den Inhalt der Kugel

$$K = \tfrac{4}{3} r^3 \pi.$$

Zusatz 1. Der Inhalt der Kugel ist gleich dem Inhalte einer Pyramide, welche die Oberfläche der Kugel zur Grundfläche und ihren Radius zur Höhe hat; denn es ist auch

$$K = \tfrac{1}{3} r \cdot 4 r^2 \pi.$$

Zusatz 2. Der Inhalt eines Kugelkegels, wenn h die Höhe der begrenzenden Kugelschale bezeichnet, ist (L. 1, Zus. 2)

$$X = \tfrac{2}{3} r^2 \pi \cdot h.$$

Zusatz 3. Kegel, Kugel, Cylinder von gleichem Grundkreise und gleicher Höhe verhalten sich wie 1 : 2 : 3 (Archimedes, 212 vor Chr.):

$$\mathfrak{K} : K : C = 1 : 2 : 3.$$

3. Der Inhalt eines Kugelabschnitts, wenn h die Höhe der begrenzenden Kugelschale und r den Radius der Kugel bezeichnet, ist

$$J = \tfrac{1}{3}(3r - h)h^2 \pi.$$

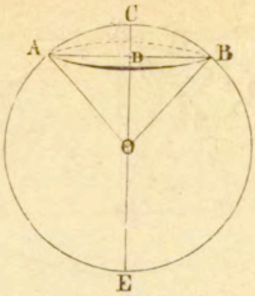


Fig. 74.

Beweis. Der Inhalt des Kugelabschnittes (Fig. 74) wird offenbar erhalten, wenn man den zu demselben gehörenden Kugelkegel um den Kegel, welcher den Kreisschnitt des Kugelabschnittes zur Grundfläche und den Mittelpunkt der Kugel zur Spitze hat, entweder vermindert oder vermehrt, je nachdem $r > $ oder $< h$ ist. Da nun aber $AD^2 = CD \cdot DE = h(2r - h)$ und die Höhe des Kegels $\pm(r - h)$, je nachdem $r >$ oder $< h$ ist, so ist der Inhalt dieses Kegels $= \pm \frac{1}{3} h (2r - h)(r - h)\pi$, und da der Inhalt des Kugelkegels $= \frac{2}{3} r^2 \pi \cdot h$, so ist der Inhalt des Kugelabschnittes in jedem der beiden Fälle

$$J = \tfrac{2}{3} r^2 \pi h - \tfrac{1}{3} h (2r - h)(r - h)\pi.$$

Durch Vereinfachung dieses Ausdrucks ergibt sich aber sofort

$$J = \tfrac{1}{3}(3r - h) h^2 \pi.$$

4. Der Inhalt einer Kugelschicht, wenn h die Höhe derselben, a den Abstand ihrer größeren Grundfläche vom Mittelpunkt und r den Radius der Kugel bezeichnet, ist

$$\Sigma = (r^2 - a^2 - ah - \tfrac{1}{3} h^2) h \pi.$$

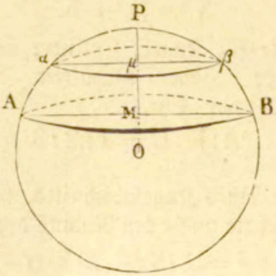


Fig. 75.

Beweis. Der Inhalt der Kugelschicht (Fig. 75) ergibt sich offenbar als Differenz der beiden Kugelabschnitte, von welchen der größere die Höhe $PM = (r - a)$, der kleinere die Höhe $P\mu = (r - a - h)$ hat. Nun ist aber (L. 3) der Inhalt des größeren Abschnittes $= \frac{1}{3}(2r + a)(r - a)^2\pi$, der des kleineren Abschnittes $= \frac{1}{3}(2r + a + h)(r - a - h)^2\pi$; folglich ist der Inhalt der Kugelschicht

$$\tfrac{1}{3}\Big((2r + a)(r - a)^2 - (2r + a + h)(r - a - h)^2\Big)\pi,$$

aus welchem Ausdrucke sich durch Vereinfachung sofort ergibt

$$\Sigma = (r^2 - a^2 - ah - \tfrac{1}{3}h^2)h\pi.$$

Zusatz. Bezeichnet man den Radius der größeren Grundfläche der Kugelschicht mit ϱ_1, den Radius der kleineren Grundfläche mit ϱ_2, so ist offenbar

$$\varrho_1{}^2 = r^2 - a^2,$$

$$\varrho_2{}^2 = r^2 - (a + h)^2 = r^2 - a^2 - 2ah - h^2,$$

mithin $$\varrho_1{}^2 + \varrho_2{}^2 = 2r^2 - 2a^2 - 2ah - h^2,$$

also $$r^2 - a^2 - ah = \frac{\varrho_1{}^2 + \varrho_2{}^2 + h^2}{2}.$$

Mit Rücksicht hierauf erhält man für den Inhalt der Kugelschicht den einfachen Ausdruck:

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}(\varrho_1{}^2 + \varrho_2{}^2 + \tfrac{1}{3}h^2)h\pi.$$

§. 34.

Lehrsätze über das Kugelzweieck und Kugeldreieck, über den Kugelausschnitt und die Kugelpyramide.

1. Zwei Kugelzweiecke einer Kugel, welche von gleich gegen einander geneigten Kugelkreisen gebildet werden, sind an Flächeninhalt gleich (Fig 76).

Die Neigungswinkel α und β seien einander gleich,

$$ACFB = ADGB.$$

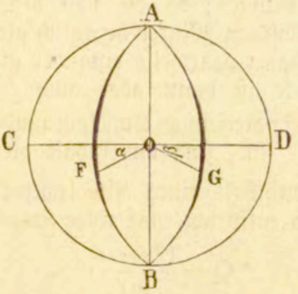


Fig. 76.

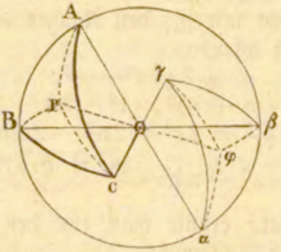
Beweis. Da nach Voraussetzung die Neigungswinkel α und β einander gleich sind, so läßt sich durch Drehung um den Durchmesser AB das Kugelzweieck ADGB so auf das Kugelzweieck ACFB legen, daß der Bogen AGB auf den Bogen ACB und der Bogen ADB auf den Bogen AFB fällt. Beide Kugelzweiecke decken sich also und sind folglich einander gleich.

2. Zwei Kugeldreiecke einer Kugel, welche Gegendreiecke sind, sind an Flächeninhalt gleich (Fig. 77).

$\triangle$ABC Gegendreieck von $\triangle \alpha\beta\gamma$,

$\triangle ABC = \triangle \alpha\beta\gamma$.

Fig. 77.

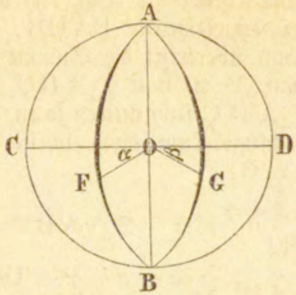


Beweis. Man denke sich die Ecken A, B, C, so wie die Ecken α, β, γ durch Sehnen mit einander verbunden, so sind die ebenen Dreiecke ABC und $\alpha\beta\gamma$ offenbar wegen Gleichheit der drei Seiten einander congruent und zugleich parallel, und daher auch die durch A, B, C und α, β, γ gedachten kleinern Kugelkreise einander gleich und zugleich parallel. Seien nun P und φ die Pole dieser Kreise, und diese Pole mit den Ecken der Dreiecke durch Bogen größter Kugelkreise verbunden, so sind diese Bogen alle einander gleich (§. 31:2), also $PA = PB = PC = \varphi\alpha = \varphi\beta = \varphi\gamma$. Als gleichschenkelige Dreiecke lassen sich nun die Dreiecke APB und $\alpha\varphi\beta$, APC und $\alpha\varphi\gamma$, BPC und $\beta\varphi\gamma$ zur Deckung bringen, da die von den gleichen Scheitelseiten eingeschlossenen Winkel bezüglich gleich sind, und diese Dreiecke sind daher paarweise einander gleich. Als Summe gleicher Dreiecke ist dann aber auch $\triangle ABC = \triangle \alpha\beta\gamma$.

Zusatz. Zwei dreiseitige Kugelpyramiden, deren Grundflächen Gegendreiecke sind, sind an Inhalt gleich.

3. Der Flächeninhalt eines Kugelzweiecks, welches einem Winkel von α Grad entspricht, auf einer Kugel vom Radius r ist

$$Q = \frac{r^2 \pi \cdot \alpha}{90}.$$

Fig. 78. 

Beweis. Offenbar verhält sich (Fig. 78) die Oberfläche des Zweiecks zur Oberfläche der ganzen Kugel, wie α^0 zu 360^0, also

$$Q : 4\,r^2\pi = \alpha : 360,$$

woraus folgt
$$Q = \frac{r^2\pi \cdot \alpha}{90}.$$

4. Der körperliche Inhalt eines Kugelausschnittes, welcher einem Winkel von α Grad entspricht, bei einer Kugel vom Radius r ist

$$K = \frac{r^3\pi \cdot \alpha}{270}.$$

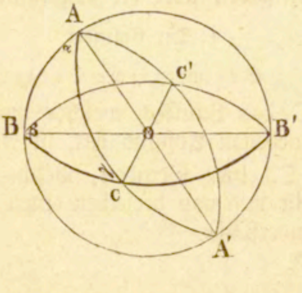
Beweis. Offenbar verhält sich (Fig. 78) der Inhalt des Kugelausschnittes zum Inhalte der ganzen Kugel, wie α^0 zu 360^0, also

$$K : \tfrac{4}{3}\,r^3\pi = \alpha : 360,$$

woraus folgt
$$K = \frac{r^3\pi \cdot \alpha}{270}.$$

5. Der Flächeninhalt eines Kugeldreiecks, welches die Winkel α, β, γ enthält, auf einer Kugel vom Radius r ist

$$\triangle\, ABC = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180}{180}\, r^2\pi.$$

Fig. 79. 

Beweis. Man denke sich (Fig. 79) das Kugeldreieck zu jedem der drei Kugelzweiecke $BACB'$, $CABC'$, $ABCA'$ ergänzt; alsdann übertrifft die Summe dieser drei Kugelzweiecke, da man (L. 2) statt $\triangle ABC'$ das diesem gleiche Gegendreieck $\triangle A'B'C$ substituiren kann, offenbar die Oberfläche der Halbkugel um das Zweifache von $\triangle ABC$. Demnach ist (L. 3)

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{90} r^2\pi - 2\triangle ABC = 2r^2\pi,$$

folglich $$\triangle ABC = \frac{\alpha+\beta+\gamma-180}{180} r^2\pi.$$

6. Der körperliche Inhalt einer dreiseitigen Kugelpyramide, deren Grundfläche die Winkel α, β, γ enthält, bei einer Kugel vom Radius r ist

$$ABCO = \frac{\alpha+\beta+\gamma-180}{540} r^3\pi.$$

Beweis. Man denke sich (Fig. 79) die Kugelpyramide zu jedem der drei Kugelausschnitte $B(AC)B'$, $C(AB)C'$, $A(BC)A'$ ergänzt, alsdann übertrifft die Summe dieser drei Kugelausschnitte, da man (L. 2, Zus.) statt der Kugelpyramide $ABC'O$ die ihr gleiche Kugelpyramide $A'B'CO$ setzen kann, den Inhalt der Halbkugel um das Zweifache der Kugelpyramide. Demnach ist (L. 4)

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{270} r^3\pi - 2\cdot ABCO = \tfrac{2}{3} r^3\pi,$$

folglich $$ABCO = \frac{\alpha+\beta+\gamma-180}{540} r^3\pi.$$

---

§. 35.

Uebungs-Aufgaben über die krummflächigen Körper.

1. Der Cylinder.

a) Geometrische Oerter.

13. Der g. O. des Punktes, welcher von einer festliegenden Geraden einen gegebenen Abstand hat, ist eine Cylinderfläche.

14. Der g. O. einer Geraden, welche einer festliegenden Geraden parallel ist und von derselben einen gegebenen Abstand hat, ist eine Cylinderfläche.

15. Der g. O. des Punktes, dessen Abstände von zwei festliegenden parallelen Geraden in einem gegebenen Verhältnisse stehen, ist eine Cylinderfläche.

16. Der g. O. für die Durchschnittslinie zweier an einen festliegenden geraden Cylinder gelegten Berührungsebenen, welche sich unter einem gegebenen Winkel α schneiden, ist eine Cylinderfläche.

b) Constructionen.

119. Ein festliegender Cylinder und auf der Cylinderfläche ein festliegender Punkt P sind gegeben; durch P an den Cylinder eine Berührungsebene zu legen.

120. Ein festliegender Cylinder und außerhalb der Cylinderfläche ein festliegender Punkt P sind gegeben; durch P an den Cylinder eine Berührungsebene zu legen.

121. Ein festliegender gerader Cylinder und eine festliegende Gerade L sind gegeben; an den Cylinder eine Berührungsebene zu legen, welche mit L parallel ist.

122. Ein festliegender gerader Cylinder und eine Berührungsebene desselben sind gegeben; an denselben eine zweite Berührungsebene zu legen, welche die erstere unter einem gegebenen Winkel α schneidet.

c) Berechnungen.

123. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines Cylinders, wenn die Höhe so wie der Durchmesser der Grundfläche desselben gleich d ist?

Antw. $K = \frac{1}{4} d^3 \pi$.

124. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines Cylinders, wenn die Höhe desselben gleich h und der Umfang der Grundfläche gleich u ist?

Antw. $K = \frac{u^2 h}{4\pi}$.

125. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines geraden Cylinders, wenn die Mantelfläche desselben gleich m und die Grundfläche gleich g ist?

Antw. $K = \frac{1}{2} m \sqrt{\frac{g}{\pi}}$.

126. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines geraden Cylinders, wenn die Mantelfläche desselben gleich m und die Gesammtoberfläche gleich f ist?

Antw. $K = \frac{1}{2} m \sqrt{\frac{f-m}{2\pi}}$.

127. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines geraden Cylinders, wenn der Axenschnitt desselben ein Quadrat, dessen Inhalt gleich a ist?

Antw. $K = \frac{1}{4} a \pi \sqrt{a}$.

128. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines geraden Cylinders, wenn der Axenschnitt desselben gleich a und die Grundfläche gleich g ist?

Antw. $K = \frac{1}{2} a \sqrt{g\pi}$.

129. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines abgeschrägten geraden Cylinders, wenn die kleinste Seitenlinie desselben gleich s, die größte Seitenlinie gleich S, und der Durchmesser der Grundfläche gleich d ist?

Antw. $K = \frac{1}{8}(S+s) d^2 \pi$.

130. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines abgeschrägten geraden Cylinders, wenn die kleinste Seitenlinie desselben gleich s, die größte Seitenlinie gleich S, und der Umfang der Grundfläche gleich u ist?

Antw. $K = \frac{1}{8\pi}(S+s) u^2$.

131. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines geraden Cylinderhufes, wenn die Seitenhöhe so wie der Durchmesser der Grundfläche desselben gleich d ist?

Antw. $K = \frac{1}{8} d^3 \pi$.

132. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines geraden Cylinderhufes, wenn der Umfang der Grundfläche desselben gleich u und die Seitenhöhe gleich h ist?

Antw. $K = \frac{u^2 h}{8\pi}$.

133. Wie groß ist die Oberfläche eines geraden Cylinders, wenn die Höhe desselben gleich h und der Umfang der Grundfläche gleich u ist?

Antw. $O = u\left(\frac{u}{2\pi} + h\right)$.

134. Wie groß ist die Oberfläche eines geraden Cylinders, wenn die Höhe desselben gleich h und der Inhalt gleich K ist?

Antw. $O = 2\left(\frac{K}{h} + \sqrt{Kh\pi}\right)$.

135. Wie groß ist die Mantelfläche eines geraden Cylinders, wenn der Axenschnitt desselben ein Quadrat von dem Umfange p ist?

Antw. $M = \frac{1}{16} p^2 \pi$.

136. Wie groß ist die Mantelfläche eines geraden Cylinders, wenn der Inhalt desselben gleich K und der Axenschnitt ein Quadrat ist?

Antw. $M = 2\sqrt[3]{2K^2\pi}$.

137. Wie groß ist die Grundfläche eines geraden Cylinders, wenn der Inhalt desselben gleich K und die Höhe dem Radius der Grundfläche gleich ist?

Antw. $G = \sqrt[3]{K^2\pi}$.

138. Wie groß ist die Grundfläche eines geraden Cylinders, wenn der Inhalt desselben gleich K und der Axenschnitt ein Quadrat ist?

Antw. $G = \sqrt[3]{\frac{K^2\pi}{4}}$.

139. Wie groß ist die Höhe eines Cylinders, wenn der Inhalt desselben gleich K und der Durchmesser der Grundfläche gleich d ist?

Antw. $H = \frac{4K}{d^2\pi}$.

140. Wie groß ist die Höhe eines Cylinders, wenn der Inhalt desselben gleich K und die Höhe dem Umfange der Grundfläche gleich ist?

Antw. $H = \sqrt[3]{4K\pi}$.

141. Wie groß ist die Dicke eines geraden Cylinders, wenn der Inhalt desselben gleich K und die Höhe gleich h ist?

Antw. $D = \sqrt{\frac{4K}{h\pi}}$.

142. Wie groß ist die Dicke eines geraden Cylinders, wenn der Inhalt desselben gleich K und die Höhe dem halben Umfange der Grundfläche gleich ist?

Antw. $D = \sqrt[3]{\frac{8K}{\pi^2}}$.

---

2. Der Kegel.

a) Geometrische Oerter.

17. Der g. O. einer Geraden, welche durch einen festliegenden Punkt geht und von einem zweiten festliegenden Punkt einen gegebenen Abstand hat, ist eine Kegelfläche.

18. Der g. O. einer Geraden, welche von zwei festliegenden Punkten gegebene Abstände hat, besteht aus zwei Kegelflächen.

19. Der g. O. einer Geraden, welche durch einen festliegenden Punkt geht und eine festliegende Ebene unter einem gegebenen Winkel α schneidet, ist eine Kegelfläche.

20. Der g. O. für die Durchschnittslinie zweier an einen festliegenden geraden Kegel gelegten Berührungsebenen, welche sich unter einem gegebenen Winkel α schneiden, ist eine Kegelfläche.

b) Constructionen.

143. Ein festliegender Kegel und auf der Kegelfläche ein festliegender Punkt P sind gegeben; durch P an denselben eine Berührungsebene zu legen.

144. Ein festliegender Kegel und außerhalb der Kegelfläche ein festliegender Punkt P sind gegeben, durch P an denselben eine Berührungsebene zu legen.

145. Ein festliegender gerader Kegel und eine festliegende Gerade L sind gegeben; an den Kegel eine Berührungsebene zu legen, welche mit L parallel ist.

146. Ein festliegender gerader Kegel und eine Berührungsebene desselben sind gegeben; an denselben eine zweite Berührungsebene zu legen, welche die erstere unter einem gegebenen Winkel α schneidet.

c) Berechnungen.

147. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines geraden Kegels, wenn der Axenschnitt desselben ein gleichseitiges Dreieck, dessen Flächeninhalt gleich a ist?

Antw. $K = \frac{1}{9} a \pi \sqrt[4]{27 a^2}$.

148. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines geraden Kegels, wenn der Axenschnitt desselben ein gleichseitiges Dreieck und die Grundfläche gleich g ist?

Antw. $K = \frac{1}{3} g \sqrt{\frac{3g}{\pi}}$.

149. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines geraden Kegels, wenn der Axenschnitt desselben gleich a und die Seitenlinie gleich s ist?

Antw. $K = \frac{a\pi}{6}(\sqrt{s^2 + 2a} + \sqrt{s^2 - 2a})$.

150. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines geraden Kegels, wenn die Grundfläche desselben gleich g und die Mantelfläche gleich m ist?

Antw. $K = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{g(m+g)(m-g)}{\pi}}$.

151. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines geraden Kegels, wenn die Mantelfläche desselben gleich m und die Seitenlinie gleich s ist?

Antw. $K = \frac{m^2}{3 s^3 \pi^2} \sqrt{s^4 \pi^2 - m^2}$.

152. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines geraden Kegels, wenn die Höhe desselben gleich h und der Centriwinkel des ausgebreiteten Kegelmantels gleich α ist?

Antw. $K = \frac{h^3 \alpha^2 \pi}{3(360 + \alpha)(360 - \alpha)}$.

153. Wie groß ist die Oberfläche eines geraden Kegels, wenn die Höhe desselben gleich h und der Radius der Grundfläche gleich r ist?

Antw. $O = r\pi(r + \sqrt{h^2 + r^2})$.

154. Wie groß ist die Oberfläche eines geraden Kegels, wenn der Inhalt desselben gleich K und die Höhe gleich h ist?

Antw. $O = \frac{3K + \sqrt{3K(h^3\pi + 3K)}}{h}$.

155. Wie groß ist die Mantelfläche eines geraden Kegels, wenn der Inhalt desselben gleich K und der Radius der Grundfläche gleich r ist?

Antw. $M = \frac{\sqrt{r^6\pi^2 + 9K^2}}{r}$.

156. Wie groß ist die Mantelfläche eines geraden Kegels, wenn der Axenschnitt desselben ein rechtwinkliges Dreieck und der Umfang der Grundfläche gleich u ist?

Antw. $M = \frac{u^2}{4\pi}\sqrt{2}$.

157. Wie groß ist die Höhe eines geraden Kegels, wenn der Inhalt desselben gleich K und der Axenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist?

Antw. $H = \sqrt[3]{\frac{9K}{\pi}}$.

158. Wie groß ist die Höhe eines geraden Kegels, wenn die Mantelfläche desselben gleich m und der Axenschnitt ein rechtwinkliges Dreieck ist?

Antw. $H = \sqrt{\frac{m\sqrt{2}}{2\pi}}$.

159. Wie groß ist die Schnittfläche eines geraden Kegels, welche in dem Abstande a von der Spitze mit der Grundfläche parallel gelegt ist, wenn die Höhe des Kegels gleich h und die Seitenlinie gleich s ist?

Antw. $S = \frac{(s^2 - h^2)a^2\pi}{h^2}$.

160. Wie groß ist die Schnittfläche eines geraden Kegels, welche in dem Abstande a von der Spitze mit der Grundfläche parallel gelegt ist, wenn die Höhe des Kegels gleich h und die Mantelfläche gleich m ist?

Antw. $S = \frac{a^2}{2h^2}\left(\sqrt{h^4\pi^2 + 4m^2} - h^2\pi\right)$.

161. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines abgestumpften geraden Kegels, wenn die Seitenlinie desselben gleich s und die Durchmesser der beiden Gegenflächen gleich D und d sind?

Antw. $K = \frac{1}{24}\pi(D^2 + Dd + d^2)\sqrt{4s^2 - (D-d)^2}$.

162. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines abgestumpften geraden Kegels, wenn die Mantelfläche desselben gleich m, die Seitenlinie gleich s und die Summe der Gegenflächen gleich N ist?

Antw. $K = \frac{(s^2N\pi + m^2)\sqrt{s^4\pi^2 - 2s^2N\pi + m^2}}{6s^3\pi^2}$.

163. Wie groß ist die Mantelfläche eines abgestumpften geraden Kegels, wenn die Höhe desselben gleich h und die Durchmesser der beiden Gegenflächen gleich D und d sind?

Antw. $M = \frac{1}{4}\pi(D + d)\sqrt{4h^2 + (D - d)^2}$.

164. Wie groß ist die Mantelfläche eines abgestumpften geraden Kegels, wenn der Inhalt desselben gleich K, die Höhe gleich h, und das Verhältniß der Radien der unteren und oberen Gegenfläche p zu q ist?

Antw. $M = \frac{(p+q)\sqrt{3K[h^3\pi(p^2 + pq + q^2) + 3K(p-q)^2]}}{(p^2 + pq + q^2)h}$.

165. Wie groß sind die beiden Gegenflächen eines abgestumpften geraden Kegels, wenn das Verhältniß der unteren und oberen Gegenfläche p zu q ist, und wenn ferner der Inhalt des abgestumpften Kegels gleich K und die Höhe gleich h ist?

Antw. $G = \frac{3Kp}{h(p + \sqrt{pq} + q)}$ und $g = \frac{3Kq}{h(p + \sqrt{pq} + q)}$.

166. Wie groß ist die Schnittfläche eines abgestumpften geraden Kegels, wenn dieselbe parallel der Grundfläche ist und den abgestumpften Kegel in einen oberen und unteren Theil nach dem Verhältniß p zu q theilt, und wenn ferner die Radien der beiden Gegenflächen R und r sind?

Antw. $S = \pi\sqrt[3]{\left(\frac{pR^3 + qr^3}{p + q}\right)^2}$.

---

3. Die Kugel.

a) Geometrische Oerter.

21—25. Der g. O. des Mittelpunktes einer Kugelfläche, welche

21. durch zwei festliegende Punkte P und P′ geht, ist eine Ebene.

22. zwei festliegende parallele Ebenen E und E′ berührt, ist eine Ebene.

23. zwei festliegende sich schneidende Ebenen E und E′ berührt, besteht aus zwei Ebenen.

24. durch drei festliegende Punkte P, P′, P″ geht, ist eine Gerade.

25. drei festliegende sich schneidende Ebenen E, E′, E″ berührt, besteht aus vier Geraden.

26—27. Der g. O. des Punktes, dessen Entfernungen

26. von zwei festliegenden Punkten P, P′ in einem gegebenen Verhältnisse m : n stehen, ist eine Kugelfläche.

27. von drei festliegenden Punkten P, P′ P″ in einem gegebenen Verhältnisse m : n : r stehen, ist ein Kreis.

28—29. Der g. O. des Punktes, in welchem

28. zwei festliegende Kugelflächen unter gleichen Winkeln erscheinen, ist eine Kugelfläche.

29. drei festliegende Kugelflächen unter gleichen Winkeln erscheinen, ist ein Kreis.

30—31. Der g. O. des Punktes, welcher einem festliegenden Punkt P harmonisch zugeordnet ist in Bezug auf die Punktpaare, in welchen

30. eine durch P gehende Gerade zwei festliegende Ebenen E und E′ schneidet, ist eine Ebne.

31. eine durch P gehende Gerade eine festliegende Kugelfläche O schneidet, ist eine Ebene.

32—33. Der g. O. des Punktes, welcher in Bezug auf eine festliegende Kugelfläche O als Pol zugeordnet ist

32. allen Geraden, welche durch einen festliegenden Punkt P gehen, ist eine Ebene.

33. allen Ebenen, welche durch einen festliegenden Punkt P gehen, ist eine Ebene.

34—38. Der g. O. des Mittelpunktes einer Kugelfläche, welche

34. durch einen festliegenden Punkt P geht und eine festliegende Kugelfläche O rechtwinklig schneidet, der g. O. des Punktes gleicher Potenz für P und O, ist eine Ebene.

35. zwei festliegende Kugelflächen O und O′ rechtwinklig schneidet, der g. O. des Punktes gleicher Potenz für O und O′, ist eine Ebene.

36. durch zwei festliegende Punkte P und P′ geht und eine festliegende Kugelfläche O rechtwinklig schneidet, der g. O. des Punktes gleicher Potenz für P und P′ und O, ist eine Gerade.

37. durch einen festliegenden Punkt P geht und zwei festliegende Kugelflächen O und O′ rechtwinklig schneidet, der g. O. des Punktes gleicher Potenz für P und O und O′, ist eine Gerade.

38. drei festliegende Kugelflächen O, O′, O″ rechtwinklig schneidet, der g. O. des Punktes gleicher Potenz für O und O′ und O″, ist eine Gerade.

39—40. Der g. O. des Punktes, welcher jede von einem festliegenden Punkte P an eine festliegende Kugelfläche O gezogene Gerade PA innerlich oder äußerlich so theilt, daß constant

39. $PA : PX = p : q$, ist eine Kugelfläche.

40. $PX : XA = p : q$, ist eine Kugelfläche.

b) Constructionen.

167—170. An eine festliegende Kugelfläche eine Berührungsebene zu legen, welche

167. durch einen auf der Kugelfläche festliegenden Punkt P geht.

168. durch eine außerhalb der Kugelfläche festliegende Gerade L geht.

169. zwei festliegende windschiefe Geraden L und L' unter einem gegebenen Winkel α schneidet.

170. drei festliegende windschiefe Geraden L, L', L'' unter gleichen Winkeln schneidet.

171—172. Eine Kugelfläche O und ein Punkt P sind festliegend gegeben; zu P in Bezug auf O zu bestimmen

171. den zugeordneten Pol.

172. die zugeordnete Polarebene.

173—174. Eine Kugelfläche O und eine Ebene E sind festliegend gegeben; zu E in Bezug auf O zu bestimmen

173. den zugeordneten Pol.

174. die zugeordnete Polarebene.

175. Zwei Kugelflächen O und O', die eine außerhalb der andern, sind festliegend gegeben; die Potenzebene derselben zu bestimmen.

176. Zwei Kugelflächen O und O', die eine innerhalb der andern, sind festliegend gegeben; die Potenzebene derselben zu bestimmen.

177. Drei Kugelflächen sind festliegend gegeben; eine Gerade zu bestimmen, für welche die von je einem Punkte derselben an die drei Kugelflächen gelegten Tangenten einander gleich sind.

178. Vier Kugelflächen sind festliegend gegeben; einen Punkt zu bestimmen, für welchen die von demselben an die vier Kugelflächen gelegten Tangenten einander gleich sind.

c) Berechnungen.

179. Wie groß ist der körperliche Inhalt einer Kugel, wenn ihre Oberfläche gleich O ist?

Antw. $K = \frac{1}{6} O \sqrt{\frac{O}{\pi}}$.

180. Wie groß ist der körperliche Inhalt einer Kugel, in welche ein senkrechter Cylinder einbeschrieben werden kann, dessen Höhe gleich h und dessen Dicke gleich d ist?

Antw. $K = \frac{1}{6} \pi \sqrt{(h^2 + d^2)^3}$.

181. Wie groß ist der körperliche Inhalt einer Kugel, wenn der Flächeninhalt eines Kugelkreises in der Entfernung a vom Mittelpunkte gleich g ist?

Antw. $K = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{(g + a^2\pi)^3}{\pi}}$.

182. Wie groß ist der körperliche Inhalt einer Kugel, wenn der Flächeninhalt eines Kugelkreises in der Entfernung b vom Pole der m^{te} Theil eines größten Kugelkreises ist?

Antw. $K = \frac{4}{3} b^3 \pi (m \pm \sqrt{m^2 - m})^3$.

183. Wie groß ist der körperliche Inhalt einer Kugel, welche von drei gleichen und sich gegenseitig berührenden Kugeln, jede vom Inhalt v, von Innen berührt wird, deren Mittelpunkte in der Ebene eines größten Kugelkreises liegen?

Antw. $K = \frac{1}{9} v (45 + 26 \sqrt{3})$.

184. Wie groß ist der körperliche Inhalt einer Kugel, welche von vier gleichen und sich gegenseitig berührenden Kugeln, jede vom Inhalt v, von Innen berührt wird, deren Mittelpunkte in der Ebene eines größten Kugelkreises liegen?

Antw. $K = v (7 + 5 \sqrt{2})$.

185. Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel, wenn der körperliche Inhalt derselben gleich K ist?

Antw. $O = \sqrt[3]{36 K^2 \pi}$.

186. Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel, wenn dieselbe zwei Kugeln an Inhalt gleich ist, deren Radien gleich R und r sind?

Antw. $O = 4 \pi \sqrt[3]{(R^3 + r^3)^2}$.

187. Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel, wenn dieselbe an Inhalt n mal größer ist, als eine Kugel vom Inhalte K?

Antw. $O = \sqrt[3]{36 \pi n^2 K^2}$.

188. Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel, wenn dieselbe die Grundfläche und die Mantelfläche eines gleichseitigen Kegels berührt, dessen Inhalt gleich K ist?

Antw. $O = \frac{4}{3}\sqrt[3]{3K^2\pi}$.

189. Wie groß ist der Inhalt eines Kugelsegmentes, wenn die Höhe desselben gleich h und der Durchmesser der begrenzenden Kreisfläche gleich d ist?

Antw. $K = \frac{1}{24} h\pi (3d^2 + 4h^2)$.

190. Wie groß ist der Inhalt eines Kugelsegmentes, wenn der Durchmesser der Kugel gleich D und der Durchmesser der begrenzenden Kreisfläche gleich d ist?

Antw. $K = \frac{1}{24}\pi\left[2D^3 - (2D^2 + d^2)\sqrt{D^2 - d^2}\right]$.

191. Wie groß ist der Inhalt einer Kugelschicht, welche begrenzt ist von einem größten Kugelkreise und einem 3 mal (p mal) kleineren Kugelkreise, wenn die Höhe der Kugelschicht gleich h ist?

Antw. $\Sigma = \frac{7}{6} h^3 \pi$; $\Sigma = \frac{(2p+1)h^2\pi}{3(p-1)}$.

192. Wie groß ist der Inhalt einer Kugelschicht, welche begrenzt ist von einem größten Kugelkreise und einem 5 mal (q mal) kleineren Kugelkreise, wenn der Radius der Kugel gleich r ist?

Antw. $\Sigma = \frac{22}{75} r^3 \pi \sqrt{5}$; $\Sigma = \frac{r^3\pi(2q+1)}{3q}\sqrt{\frac{q-1}{q}}$.

193. Wie groß ist der Inhalt einer Kugelschicht, wenn die Höhe derselben gleich h, der Radius der Kugel gleich r, und der Radius des kleineren Begrenzungskreises gleich ϱ ist?

Antw. $\Sigma = (\varrho^2 - \frac{1}{3}h^2 + h\sqrt{r^2 - \varrho^2})h\pi$.

194. Wie groß ist der Inhalt einer Kugelschicht, wenn die Radien des größeren und des kleineren Begrenzungskreises gleich ϱ_1 und ϱ_2, und der Radius der Kugel gleich r ist?

Antw. $\Sigma = \frac{1}{3}\pi\left(r^2 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2 - \sqrt{(r^2 - \varrho_1^2)(r^2 - \varrho_2^2)}\right) \times$
$$\left(\sqrt{r^2 - \varrho_2^2} - \sqrt{r^2 - \varrho_1^2}\right).$$

195. Wie groß ist der Inhalt eines Kugelkegels, wenn ein Axenschnitt die Grundfläche desselben in einem Kreisquadranten schneidet und der Radius der Kugel gleich r ist?

Antw. $K = \frac{1}{3}(2 - \sqrt{2})r^3\pi$.

196. Wie groß ist der Inhalt eines Kugelkegels, wenn ein Axenschnitt die Grundfläche desselben in einem Sextanten schneidet und die Höhe des zugehörigen Segmentes gleich h ist?

Antw. $K = \frac{8}{3}(7 + 4\sqrt{3})\, h^3 \pi$.

197. Wie groß ist eine Kugelschale, wenn die Höhe derselben gleich h und der Radius des Begrenzungskreises gleich a ist?

Antw. $S = (a^2 + h^2)\pi$.

198. Wie groß ist eine Kugelzone, deren Begrenzungskreise ein größter Kugelkreis und ein p mal kleinerer Kugelkreis sind, wenn der Radius der Kugel gleich r ist?

Antw. $Z = 2 r^2 \pi \sqrt{\frac{p-1}{p}}$.

199. Wie groß ist die Schnittfläche einer Kugel, wenn die Entfernung derselben vom Mittelpunkte gleich a und der Inhalt der Kugel gleich K ist?

Antw. $S = \left(\sqrt[3]{\left(\frac{3K}{4\pi}\right)^2} - a^2\right)\pi$.

200. Wie groß ist der Durchmesser einer Kugel, wenn zwei unter einem Winkel von α Grad durch denselben gelegte Ebenen einen Kugelausschnitt bilden, dessen Inhalt gleich K ist?

Antw. $D = \sqrt[3]{\frac{360 \cdot 6K}{\alpha \cdot \pi}}$.

201. Wie groß ist der körperliche Inhalt einer Kugel, wenn die Kante des in dieselbe beschriebenen Tetraeders, Hexaeders, Oktaeders, Dodekaeders, Ikosaeders bezüglich gleich a ist?

Antw. $K_4 = \frac{1}{8} a^3 \pi \sqrt{6}$; 2c.

202. Wie groß ist der körperliche Inhalt einer Kugel, wenn die Kante des um dieselbe beschriebenen Tetraeders, Hexaeders, Oktaeders, Dodekaeders, Ikosaeders bezüglich gleich a ist?

Antw. $K_4 = \frac{1}{216} a^3 \pi \sqrt{6}$; 2c.

203. Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel, wenn die Kante des in dieselbe beschriebenen Tetraeders, Hexaeders, Oktaeders, Dodekaeders, Ikosaeders bezüglich gleich a ist?

Antw. $O_4 = \frac{3}{2} a^2 \pi$; 2c.

204. Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel, wenn die Kante des um dieselbe beschriebenen Tetraeders, Hexaeders, Oktaeders, Dodekaeders, Ikosaeders bezüglich gleich a ist?
Antw. $O_4 = \frac{1}{6}a^2\pi$; rc.

205. Wie groß ist das Volumen eines Körpers, welcher durch Rotation eines regulären Vielecks von gerader Seitenanzahl um einen Durchmesser als Axe entsteht, wenn seine Seite gleich a und der größere Radius gleich r ist?
Antw. $V = \frac{1}{3}r\pi(4r^2 - a^2)$.

206. Wie groß ist das Volumen eines Körpers, welcher durch Rotation eines Dreiecks um eine außerhalb desselben in seiner Ebene liegende Axe entsteht, wenn die Entfernungen seiner Eckpunkte von der Axe gleich p, q, r, oder die Entfernung seines Schwerpunktes von der Axe gleich s ist?
Antw. $V = \frac{2}{3}\pi(p+q+r)\cdot\triangle ABC$; $V = 2s\pi\cdot\triangle ABC$.

207. Wie groß ist das Volumen und die Oberfläche des Körpers, welcher durch Rotation eines regulären Vielecks um eine außerhalb desselben in seiner Ebene liegende Axe enſteht, wenn sein Inhalt gleich F, sein Umfang gleich U, und die Entfernung seines Mittelpunktes von der Axe gleich s ist?
Antw. $V = 2s\pi\cdot F$; $O = 2s\pi\cdot U$.

208. Wie groß ist das Volumen und die Oberfläche des Körpers, welcher durch Rotation eines Kreises um eine außerhalb desselben in seiner Ebene liegende Axe entsteht, wenn der Radius des Kreises gleich r, und die Entfernung des Mittelpunktes von der Axe gleich s ist?
Antw. $V = 2sr^2\pi^2$; $O = 4sr\pi^2$.

§. 36.

Stereometrisch-trigonometrische Aufgaben.

209. Wie groß ist der Inhalt der beiden Prismen, in welche ein rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Kanten a, b, c sind, durch eine durch die Seitenkante b gelegte Ebene zerlegt wird, wenn diese mit der Seitenebene ab einen Winkel α bildet?
Antw. $K_1 = \frac{1}{2}a^2b\,\text{tang}\,\alpha$, $K_2 = \frac{1}{2}ab(2c - a\,\text{tang}\,\alpha)$.

210. Wie groß ist der Inhalt der beiden Prismen, in welche ein rechtwinkliges Parallelepipedon mit quadratischer Grundfläche durch eine durch die Grundkante und die gegenüberliegende Seiten-

fläche gelegte Ebene zerlegt wird, wenn dieselbe gegen die Grundfläche unter dem Winkel α geneigt ist, ihre größere Seite gleich m und die Seitenkante des Parallelepipedons gleich c ist?

Antw. $K_1 = \frac{1}{4} m^3 \sin 2\alpha \cos\alpha$; $K_2 = \frac{1}{2} m^2 \cos^2\alpha (2c - m \sin\alpha)$.

211. Wie groß ist der Inhalt eines abgeschrägten Prismas, welches entsteht, wenn in einem dreiseitigen senkrechten Prisma mit regulärer Grundfläche durch eine Gegenkante und die gegenüberliegende Seitenkante ein zur Gegenfläche unter dem Winkel α geneigte Ebene gelegt wird, wenn überdies die kürzeste Seitenkante des abgeschrägten Prismas gleich c und die Grundkante gleich a ist?

Antw. $K = \frac{1}{4} a^2 (c\sqrt{3} + a \operatorname{tang}\alpha)$.

212. Wie groß ist die Schnittfläche eines Prismas, welche entsteht, wenn in einem dreiseitigen senkrechten Prisma mit regulärer Grundfläche durch eine Grundkante und die gegenüberliegende Seitenkante eine zur Grundfläche unter einem Winkel α geneigte Ebene gelegt wird, wenn überdies der Inhalt der abgeschnittenen Pyramide gleich P ist?

Antw. $S = \sqrt[3]{\frac{6 P^2 \sqrt{3}}{\sin 2\alpha}}$.

213. Wie groß ist der Cylinderhuf und der abgeschrägte Cylinder, welche entstehen, wenn in einem geraden Cylinder durch einen Punkt im Umfange der Grundfläche eine zur Grundfläche unter einem Winkel α geneigte Ebene gelegt wird, wenn überdies der Durchmesser der Grundfläche gleich d und die Höhe des Cylinders gleich h ist?

Antw. $C_h = \frac{1}{8} d^3 \pi \cdot \operatorname{tang}\alpha$; $C_s = \frac{1}{4} d^2 \pi (h - \frac{1}{2} d \operatorname{tang}\alpha)$.

214. Wie groß ist das Mittelstück eines geraden Cylinders, welches entsteht, wenn zwei durch je einen Punkt im Umfange der Grund- und der Gegenfläche gelegte Ebenen gegen diese unter den Winkeln α und β geneigt sind, wenn überdies die Höhe des Cylinders gleich h und der Radius der Grundfläche gleich r ist?

Antw. $M = r^2 \pi [h - r(\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta)]$.

215. Wie groß ist der Inhalt eines geraden Kegels, wenn die Seitenlinie desselben gleich a und unter dem Winkel α gegen die Grundfläche geneigt ist?

Antw. $K = \frac{1}{6} a^3 \pi \sin 2\alpha \cos\alpha$.

216. Wie groß ist der Inhalt eines schiefen Kegels, wenn die kleinste Seitenlinie desselben gleich a und gegen die Grundfläche unter dem Winkel α, die größte Seitenlinie aber unter dem Winkel β gegen die Grundfläche geneigt ist?

Antw. $K = \frac{1}{3} a \pi \sin\alpha \left(\frac{a \sin(\alpha+\beta)}{2 \sin\beta}\right)^2$.

217. Wie groß ist der Radius der Grundfläche eines geraden Kegels, wenn der Inhalt desselben gleich K und der Winkel an der Spitze des Axenschnittes gleich γ ist?

Antw. $r = \sqrt[3]{\frac{3 K \operatorname{tang} \frac{1}{2}\gamma}{\pi}}$.

218. Wie groß ist der Radius der Grundfläche eines geraden Kegels, wenn die Gesammtoberfläche desselben gleich Q und der Winkel an der Spitze des Axenschnittes gleich γ ist?

Antw. $r = \sqrt{\frac{Q \sin \frac{1}{2}\gamma}{(1 + \sin \frac{1}{2}\gamma)\pi}}$.

219. Wie groß ist der Winkel γ an der Spitze des Axenschnittes eines geraden Kegels, wenn die Grundfläche desselben gleich f und die Höhe gleich h ist?

Antw. $\sphericalangle \gamma = 2 \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \sqrt{\frac{f}{h^2 \pi}}\right)$.

220. Wie groß ist der Neigungswinkel α der Seitenlinie gegen die Grundfläche eines geraden Kegels, wenn die Höhe desselben gleich h und die Mantelfläche gleich m ist?

Antw. $\sphericalangle \alpha = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{h^2 \pi}{m}\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{m}{h^2 \pi}\right)^2}}\right)$.

221. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines Kugelkegels, wenn der Centriwinkel des Axenschnittes gleich ω und der Radius der Kugel gleich r ist?

Antw. $K = \frac{2}{3} r^3 \pi \left(1 - \cos \frac{1}{2}\omega\right)$.

222. Wie groß ist der körperliche Inhalt eines Kugelkegels, wenn der Centriwinkel des Axenschnittes gleich ω und die Höhe des zugehörigen einfachen Kegels gleich h ist?

Antw. $K = \frac{2}{3} \left(\frac{h}{\cos \frac{1}{2}\omega}\right)^3 \left(1 - \cos \frac{1}{2}\omega\right) \pi$.

223. Wie groß ist der Centriwinkel des Axenschnittes eines Kugelkegels, wenn der körperliche Inhalt desselben gleich K und der Radius der Kugel gleich r ist?

Antw. $\sphericalangle \omega = 2 \operatorname{arc} \left(\cos = 1 - \frac{3K}{2r^3\pi}\right)$.

224. Wie groß ist der Centriwinkel des Axenschnittes eines Kugelkegels, wenn der körperliche Inhalt desselben gleich K und die Höhe des zugehörigen Kugelsegmentes gleich h ist?

Antw. $\sphericalangle \omega = 2 \operatorname{arc} \left(\cos = 1 - h\sqrt{\frac{2\pi h}{3K}}\right)$.

§. 37.

Größte und kleinste Werthe, Maxima und Minima der Oberflächen und der Volumina der Körper.

a) Lehnsätze aus der Arithmetik.

α) Zerlegt man eine Zahl in mehrere gleiche Summanden, so ist das Product aus diesen gleichen Summanden ein Maximum, d. h. größer als jedes andere Product, welches aus gleich vielen oder ungleichen Summanden der Zahl gebildet ist.

So ist z. B. $12 = 4 + 4 + 4$ und $= 2 + 3 + 7$; aber es ist
$$4 \cdot 4 \cdot 4 > 2 \cdot 3 \cdot 7.$$

β) Zerlegt man eine Zahl in mehrere gleiche Factoren, so ist die Summe aus diesen gleichen Factoren ein Minimum, d. h. kleiner als jede andere Summe, welche aus gleich vielen aber ungleichen Factoren der Zahl gebildet ist.

So ist z. B. $216 = 6 \cdot 6 \cdot 6$ und $= 4 \cdot 6 \cdot 9$; aber es ist
$$6 + 6 + 6 < 4 + 6 + 9.$$

b) Anwendung dieser Sätze.

225. Unter allen geraden quadratischen Parallelepipeden, welche eine gegebene Gesammtoberfläche haben, dasjenige zu bestimmen, dessen Volumen ein Maximum ist.

Unter allen geraden quadratischen Parallelepipeden, welche ein gegebenes Volumen haben, dasjenige zu bestimmen, dessen Gesammtoberfläche ein Minimum ist.

Auflösung. Es sei x die Grundkante, z die Seitenkante, v das Volumen und f die Gesammtoberfläche des Parallelepipedons; alsdann ist

$$1)\ v = x^2 z, \qquad 2)\ f = 2x^2 + 4xz.$$

Aus diesen beiden Gleichungen leite man eine Gleichung mit nur einer Unbekannten ab; aus (2) ergibt sich $xz = \frac{1}{4}(f - 2x^2)$, und nach (1) ist daher

$$\tfrac{1}{4}x(f - 2x^2) = v.$$

Diese Gleichung hat man nun so umzuformen, daß auf der ersten Seite die Summe der Factoren des Products constant wird. Man quadrire zu dem Ende und multiplicire mit 4, so erhält man

$$4x^2(f - 2x^2)(f - 2x^2) = 64v^2, \qquad \text{I.}$$

wodurch also zugleich

$$4x^2 + (f - 2x^2) + (f - 2x^2) = 2f. \qquad \text{II.}$$

Aus den Gleichungen I und II nun, nach den vorstehenden Lehnsätzen (α) und (β), ist ersichtlich, daß

a) $64v^2$, also auch v ein Maximum, wenn $12x^2 = 2f$, oder $x^2 = \frac{1}{6}f$, also $z^2 = \frac{1}{6}f$, und $v^2 = \frac{1}{216}f^3$;

b) $2f$, also auch f ein Minimum, wenn $4x^2 = \sqrt[3]{64v^2}$, oder $x = \sqrt[3]{v}$, also $z = \sqrt[3]{v}$, und $f = 6\sqrt[3]{v^2}$.

Das gesuchte Parallelepipedon ist demnach ein Würfel.

226. Unter allen geraden quadratischen Pyramiden, welche eine gegebene Gesammtoberfläche haben, diejenige zu bestimmen, deren Volumen ein Maximum ist.

Unter allen geraden quadratischen Pyramiden, welche ein gegebenes Volumen haben, diejenige zu bestimmen, deren Gesammtoberfläche ein Minimum ist.

Auflösung. Sei x die Grundkante, z die Höhe, v das Volumen, und f die Gesammtoberfläche der Pyramide; dann ist

$$1)\ v = \tfrac{1}{3}x^2z, \qquad 2)\ f = x^2 + 2x\sqrt{z^2 + \tfrac{1}{4}x^2}.$$

Behufs Ableitung einer Gleichung mit nur einer Unbekannten ergibt sich aus (1) $x^2 \cdot x^2z^2 = 9v^2$, und aus (2) folgt $4x^2(z^2 + \frac{1}{4}x^2) = (f - x^2)^2$, und hieraus

$$x^2z^2 = \tfrac{1}{4}f^2 - \tfrac{1}{2}fx^2.$$

Durch Einsetzung dieses Werthes in die erhaltene Gleichung $x^2 \cdot x^2z^2 = 9v^2$ ergibt sich

$$x^2(\tfrac{1}{4}f^2 - \tfrac{1}{2}fx^2) = 9v^2.$$

Diese Gleichung ist nun so umzuformen, daß auf der ersten Seite die Summe der Factoren des Products constant wird. Zu dem Ende gebe man derselben die folgende Form

$$x^2(\tfrac{1}{2}f - x^2) = \frac{18\,v^2}{f}; \qquad \text{I.}$$

zugleich ist dann $x^2 + (\tfrac{1}{2}f - x^2) = \tfrac{1}{2}f.$ II.

Aus den Gleichungen I und II nun, nach den Lehnsätzen (α) und (β), erhellt, daß

a) $\frac{18\,v^2}{f}$, also auch v ein Maximum, wenn $2x^2 = \tfrac{1}{2}f$, oder $x^2 = \tfrac{1}{4}f$, also $z^2 = \tfrac{1}{2}f$, und $v^2 = \tfrac{1}{288}f^3$;

b) $\tfrac{1}{2}f$, also auch f ein Minimum, wenn $x^2 = \sqrt{\frac{18\,v^2}{f}}$, oder $x^2 = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{36\,v^2}$, also $z^2 = \sqrt[3]{36\,v^2}$, und $f = 2\sqrt[3]{36\,v^2}$.

227. Unter allen geraden Cylindern, welche sich einer gegebenen Kugel einbeschreiben lassen, denjenigen zu bestimmen, dessen Mantelfläche ein Maximum ist.

Unter allen geraden Cylindern, welche eine gegebene Mantelfläche haben, denjenigen zu bestimmen, für welchen die umbeschriebene Kugel ein Minimum ist.

Auflösung. Sei x der Grundradius, z die Höhe, f die Mantelfläche des Cylinders, und r der Radius der Kugel; dann ist

$$1)\ f = 2x\pi \cdot z, \qquad 2)\ 4x^2 + z^2 = 4r^2.$$

Um aus diesen beiden Gleichungen eine Gleichung mit nur einer Unbekannten abzuleiten, setze man aus (1) $x^2z^2 = \frac{f^2}{4\pi^2}$, und da aus (2) $z^2 = 4(r^2 - x^2)$, so ergibt sich

$$4x^2(r^2 - x^2) = \frac{f^2}{4\pi^2}.$$

Damit in dieser Gleichung auf der ersten Seite die Summe der Factoren des Products constant wird, dividire man durch 4, wodurch man erhält

$$x^2(r^2 - x^2) = \frac{f^2}{16\pi^2}; \qquad \text{I.}$$

zugleich ist dann $x^2 + (r^2 - x^2) = r^2.$ II.

Aus den Gleichungen I und II nun, nach den Lehnsätzen (α) und (β), ergibt sich, daß

a) $\frac{f^2}{16\pi^2}$, also auch f ein Maximum, wenn $2x^2 = r^2$, oder $x^2 = \tfrac{1}{2}r^2$, also $z^2 = 2r^2$, und $f = 2r^2\pi$;

b) r^2, also auch r ein **Minimum**, wenn $x^2 = \sqrt{\frac{f^2}{16\pi^2}}$, oder

$$x^2 = \frac{f}{4\pi}, \text{ also } z^2 = \frac{f}{\pi}, \text{ und } r^2 = \frac{f}{2\pi}.$$

228. Unter allen geraden Kegeln, welche sich einer **gegebenen Kugel** einbeschreiben lassen, denjenigen zu bestimmen, dessen **Mantelfläche ein Maximum** ist.

Unter allen geraden Kegeln, welche eine **gegebene Mantelfläche** haben, denjenigen zu bestimmen, für welchen die **umbeschriebene Kugel ein Minimum** ist.

Auflösung. Sei x der Grundradius, z die Höhe, f die Mantelfläche, und r der Radius der Kugel; dann ist

$$1)\ f = x\pi \cdot \sqrt{x^2 + z^2}, \qquad 2)\ x^2 = z(2r - z).$$

Behufs Ableitung einer Gleichung mit nur **einer** Unbekannten, erhält man aus (1) $x^2\pi^2(x^2 + z^2) = f^2$, und daher ergibt sich mit Rücksicht auf (2)

$$2rz \cdot z(2r - z)\pi^2 = f^2,$$

oder, indem man, damit auf der ersten Seite der Gleichung die Summe der Factoren des Products constant wird, zweckmäßig umformt,

$$z \cdot z(4r - 2z) = \frac{f^2}{r\pi^2}; \qquad \text{I.}$$

so daß zugleich $\quad z + z + (4r - 2z) = 4r. \qquad$ II.

Aus den Gleichungen I und II nun, nach den Lehnsätzen (α) und (β), folgt, daß

a) $\frac{f^2}{r\pi^2}$, also auch f ein **Maximum**, wenn $3z = 4r$, oder

$$z = \tfrac{4}{3}r, \text{ also } x^2 = \tfrac{8}{9}r^2, \text{ und } f = \tfrac{8}{9}r^2\pi\sqrt{3};$$

b) $4r$, also auch r ein **Minimum**, wenn $z = \sqrt[3]{\frac{f^2}{r\pi^2}}$, oder

$$z^2 = \frac{2f\sqrt{3}}{3\pi}, \text{ also } x^2 = \frac{f\sqrt{3}}{3\pi}, \ r^2 = \frac{3f\sqrt{3}}{8\pi}.$$

229. Unter allen geraden Kegeln, welche sich einer gegebenen Kugel umbeschreiben lassen, denjenigen zu bestimmen, dessen Volumen ein **Minimum** ist.

Auflösung. Sei x der Grundradius, z die Höhe, v das Volumen des Kegels, und r der Radius der Kugel; alsdann hat man die Gleichung

$$1)\quad v = \tfrac{1}{3}x^2\pi \cdot z.$$

Hieraus leite man eine Gleichung mit nur einer Unbekannten ab. Aus der Proportion $x^2 : z^2 = r^2 : z(z-2r)$ folgt aber

$$2)\quad x^2 = \frac{r^2 z}{z-2r},$$

und durch Einsetzung dieses Werthes von x^2 in (1) ergibt sich die Gleichung mit nur einer Unbekannten

$$3)\quad \frac{z^2}{z-2r} = \frac{3v}{r^2\pi}.$$

Jetzt nehme man die reciproken Werthe; dann erhält man, indem man zugleich die erste Seite der Gleichung in Form eines Productes schreibt,

$$4)\quad \frac{1}{z}\left(1-\frac{2r}{z}\right) = \frac{r^2\pi}{3v},$$

oder nach Multiplication mit $2r$, damit auf der ersten Seite der Gleichung die Summe der Factoren des Productes constant wird,

$$\frac{2r}{z}\left(1-\frac{2r}{z}\right) = \frac{2r^3\pi}{3v}, \qquad \text{I.}$$

so daß also zugleich $\frac{2r}{z} + \left(1-\frac{2r}{z}\right) = 1.$ II.

Aus den Gleichungen I und II nun, nach den Lehnsätzen (α) und (β), ist ersichtlich, daß $\frac{2r^3\pi}{3v}$, also auch $\frac{1}{v}$ ein Maximum, demnach v ein Minimum, wenn $\frac{2r}{z} = \frac{1}{2}$, oder

$$z = 4r, \text{ also } x = r\sqrt{2}, \text{ und } v = \tfrac{8}{3} r^3 \pi.$$

230. Unter allen geraden Kegeln, welche sich einer gegebenen Kugel umbeschreiben lassen, denjenigen zu bestimmen, dessen Mantelfläche ein Minimum ist.

Auflösung. (Andere Methode.) Sei x der Grundradius, z die Höhe, f die Mantelfläche des Kegels, und r der Radius der Kugel; alsdann ist

$$1)\quad f = x\pi \cdot \sqrt{x^2+z^2}.$$

Um aus dieser Gleichung eine Gleichung mit nur einer Unbekannten abzuleiten, beachte man, daß

$$x : z = r : \sqrt{z(z-2r)},$$

aus welcher Proportion sich sodann ergibt

$$2)\quad x = \frac{rz}{\sqrt{z(z-2r)}}, \text{ also } 3)\quad x^2 = \frac{r^2 z}{z-2r}.$$

Setzt man diese Werthe in Gleichung (1) ein, so erhält man eine Gleichung nur mit der einen Unbekannten z, nämlich

$$4)\quad f = \frac{r z \pi \sqrt{z(z-r)}}{z-2r}.$$

Diese Gleichung löse man nach z auf. Alsdann erhält man, indem man quadrirt und ordnet,

$$z^2 - \frac{r^2\pi + f}{r\pi} z = -\frac{2f}{\pi},$$

und hieraus ergibt sich nun für z der Werth

$$5)\quad z = \frac{(r^2\pi + f) \pm \sqrt{r^4\pi^2 + f^2 - 6r^2 f\pi}}{2r\pi}.$$

Damit der Werth von z reell bleibt, muß der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv sein. Man ergänze nun die beiden letzten Glieder dieses Ausdrucks zu einem vollständigen Quadrat, indem man $9r^4\pi^2$ zugleich addirt und subtrahirt; alsdann erhält man

$$6)\quad z = \frac{(r^2\pi + f) \pm \sqrt{(f - 3r^2\pi)^2 - 8r^4\pi^2}}{2r\pi}.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß z reell bleibt, so lange $(f - 3r^2\pi)^2$ nicht kleiner als $8r^4\pi^2$ ist. Der kleinste Werth, den $(f - 3r^2\pi)^2$ annehmen kann und durch den auch der kleinste Werth von f bedingt ist, ist

$$7)\quad (f - 3r^2\pi)^2 = 8r^4\pi^2,$$

woraus als Minimum der Mantelfläche des Kegels sich ergibt

$$8)\quad f = r^2\pi(3 + 2\sqrt{2}).$$

Durch Einsetzung dieses Werthes von f in Gleichung (6) erhält man alsdann für die Höhe des Kegels

$$9)\quad z = r(2 + \sqrt{2}),$$

und durch Einsetzung des Werthes von z in Gleichung (2) für den Grundradius des Kegels

$$10)\quad x = r\sqrt{1 + \sqrt{2}}.$$

§. 38.

Uebungs-Aufgaben über Maxima und Minima der Oberflächen und der Volumina der Körper.

231. Unter allen geraden quadratischen Parallelepipeden, deren Seitenflächen mit einer Grundfläche eine gegebene Summe bilden, dasjenige zu bestimmen, dessen Volumen ein Maximum ist.

Unter allen geraden quadratischen Parallelepipeden, welche ein gegebenes Volumen haben, dasjenige zu bestimmen, für welches die Summe der Seitenflächen und einer Grundfläche ein Minimum ist.

Ist x die Grundkante, z die Seitenkante, v das Volumen, und f die Summe der Seitenflächen und einer Grundfläche des Parallelepipedons, so ist

Antw. a) $x^2 = \frac{1}{3} f, \quad z^2 = \frac{1}{12} f, \quad v^2 = \frac{1}{108} f^3;$

b) $x = \sqrt[3]{2v}, \quad z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2v}, \quad f = 3\sqrt[3]{4v^2}.$

232. Unter allen geraden quadratischen Pyramiden, deren Seitenflächen eine gegebene Summe bilden, diejenige zu bestimmen, deren Volumen ein Maximum ist.

Unter allen geraden quadratischen Pyramiden, welche ein gegebenes Volumen haben, diejenige zu bestimmen, für welche die Summe der Seitenflächen ein Minimum ist.

Ist x die Grundkante, z die Höhe, v das Volumen, und f die Summe der Seitenflächen der Pyramide, so ist

Antw. a) $x^2 = \frac{1}{3} f\sqrt{3}, \quad z^2 = \frac{1}{6} f\sqrt{3}, \quad v^2 = \frac{1}{162} f^3\sqrt{3};$

b) $x^2 = \sqrt[3]{18v^2}, \quad z^2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{18v^2}, \quad f^3 = 54v^2\sqrt{3}.$

233. Unter allen geraden Cylindern, welche eine gegebene Gesammtoberfläche haben, denjenigen zu bestimmen, dessen Volumen ein Maximum ist.

Unter allen geraden Cylindern, welche ein gegebenes Volumen haben, denjenigen zu bestimmen, dessen Gesammtoberfläche ein Minimum ist.

Ist x der Grundradius, z die Höhe, v das Volumen, und f die Gesammtoberfläche des Cylinders, so ist

Antw. a) $x^2 = \frac{f}{6\pi}, \quad z^2 = \frac{2f}{3\pi}, \quad v^2 = \frac{f^3}{54\pi};$

b) $x = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}, \quad z = 2\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}, \quad f = 3\sqrt[3]{2v^2\pi}.$

234. Unter allen geraden Cylindern, deren Mantelfläche mit der Grundfläche eine gegebene Summe bildet, denjenigen zu bestimmen, dessen Volumen ein Maximum ist.

Unter allen geraden Cylindern, welche ein gegebenes Volumen haben, denjenigen zu bestimmen, für welchen die Summe der Mantelfläche und der Grundfläche ein Minimum ist.

Ist x der Grundradius, z die Höhe, v das Volumen, und f die Summe der Mantelfläche und einer Grundfläche des Cylinders, so ist

Antw. a) $x^2 = \frac{f}{3\pi}$, $z^2 = \frac{f}{3\pi}$, $v^2 = \frac{f^3}{27\pi}$;

b) $x = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$, $z = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$, $f = 3\sqrt[3]{v^2\pi}$.

235. Unter allen geraden Kegeln, welche eine gegebene Gesammtoberfläche haben, denjenigen zu bestimmen, dessen Volumen ein Maximum ist.

Unter allen geraden Kegeln, welche ein gegebenes Volumen haben, denjenigen zu bestimmen, dessen Gesammtoberfläche ein Minimum ist.

Ist x der Grundradius, z die Höhe, v das Volumen, und f die Gesammtoberfläche des Kegels, so ist

Antw. a) $x^2 = \frac{f}{4\pi}$, $z^2 = \frac{2f}{\pi}$, $v^2 = \frac{f^3}{72\pi}$;

b) $x^2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9v^2}{\pi^2}}$, $z = 2\sqrt[3]{\frac{3v}{\pi}}$, $f = 2\sqrt[3]{9v^2\pi}$.

236. Unter allen geraden Kegeln, welche eine gegebene Mantelfläche haben, denjenigen zu bestimmen, dessen Volumen ein Maximum ist.

Unter allen geraden Kegeln, welche ein gegebenes Volumen haben, denjenigen zu bestimmen, dessen Mantelfläche ein Minimum ist.

Ist x der Grundradius, z die Höhe, v das Volumen, und f die Mantelfläche des Kegels, so ist

Antw. a) $x^2 = \frac{f\sqrt{3}}{3\pi}$, $z^2 = \frac{2f\sqrt{3}}{3\pi}$, $v^2 = \frac{2f^3\sqrt{3}}{81\pi}$;

b) $x^2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{36v^2}{\pi^2}}$, $z = \sqrt[3]{\frac{6v}{\pi}}$, $f^2 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{6v^4\pi^2}$.

237. Unter allen geraden quadratischen Parallelepipeden, welche sich einer gegebenen Kugel einbeschreiben lassen, dasjenige zu bestimmen, für welches die Summe der Seitenflächen ein Maximum ist.

Unter allen geraden quadratischen Parallelepipeden, deren Seitenflächen eine gegebene Summe bilden, dasjenige zu bestimmen, für welches die umbeschriebene Kugel ein Minimum ist.

Ist x die Grundkante, z die Seitenkante, f die Summe der Seitenflächen des Parallelepipedons, und r der Radius der Kugel, so ist

Antw. a) $x = r$, $z = r\sqrt{2}$, $f = 4r^2\sqrt{2}$;

b) $x^2 = \frac{1}{8}f\sqrt{2}$, $z^2 = \frac{1}{4}f\sqrt{2}$, $r^2 = \frac{1}{8}f\sqrt{2}$.

238. Unter allen geraden quadratischen Pyramiden, welche sich einer gegebenen Kugel einbeschreiben lassen, diejenige zu bestimmen, deren Volumen ein Maximum ist.

Unter allen geraden quadratischen Pyramiden, welche ein gegebenes Volumen haben, diejenige zu bestimmen, für welche die umbeschriebene Kugel ein Minimum ist.

Ist x die Grundkante, z die Höhe, v das Volumen der Pyramide, und r der Radius der Kugel, so ist

Antw. a) $z = \frac{4}{3}r$, $x = \frac{4}{3}r$, $v = \frac{64}{81}r^3$;

b) $z = \sqrt[3]{3v}$, $x = \sqrt[3]{3v}$, $r = \frac{3}{4}\sqrt[3]{3v}$.

239. Unter allen geraden quadratischen Pyramiden, welche sich einer gegebenen Kugel einbeschreiben lassen, diejenige zu bestimmen, für welche die Summe der Seitenflächen ein Maximum ist.

Unter allen geraden quadratischen Pyramiden, deren Seitenflächen eine gegebene Summe bilden, diejenige zu bestimmen, für welche die umbeschriebene Kugel ein Minimum ist.

Ist x die Grundkante, z die Höhe, f die Summe der Seitenflächen der Pyramide, und r der Radius der Kugel, so ist

Antw. a) $z^2 = 2r^2$, $x^2 = 4r^2(\sqrt{2} - 1)$, $f = 4r^2$;

b) $z^2 = \frac{1}{2}f$, $x^2 = f(\sqrt{2} - 1)$, $r^2 = \frac{1}{4}f$.

240. Unter allen geraden Cylindern, welche sich einer gegebenen Kugel einbeschreiben lassen, denjenigen zu bestimmen, dessen Volumen ein Maximum ist.

Unter allen geraden Cylindern, welche ein gegebenes Volumen haben, denjenigen zu bestimmen, für welchen die umbeschriebene Kugel ein Minimum ist.

Ist x der Grundradius, z die Höhe, v das Volumen des Cylinders, und r der Radius der Kugel, so ist

Antw. a) $x^2 = \frac{2}{3} r^2, \qquad z^2 = \frac{4}{3} r^2, \qquad v = \frac{4}{9} r^3 \pi \sqrt{3};$

$$\text{b)}\ x^2 = \tfrac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{4 v^2}{\pi^2}}, \quad z = \sqrt[3]{\frac{2 v}{\pi}}, \quad r^2 = \tfrac{3}{4} \sqrt[3]{\frac{4 v^2}{\pi^2}}.$$

241. Unter allen geraden Cylindern, welche sich einer gegebenen Halbkugel einbeschreiben lassen, denjenigen zu bestimmen, dessen Volumen ein Maximum ist.

Unter allen geraden Cylindern, welche ein gegebenes Volumen haben, denjenigen zu bestimmen, für welchen die umbeschriebene Halbkugel ein Minimum ist.

Ist x der Grundradius, z die Höhe, v das Volumen des Cylinders, und r der Radius der Halbkugel, so ist

Antw. a) $x^2 = \frac{2}{3} r^2, \qquad z^2 = \frac{1}{3} r^2, \qquad v^2 = \frac{2}{27} r^6 \pi^2;$

$$\text{b)}\ x^2 = 2 \sqrt[3]{\frac{v^2}{4 \pi^2}}, \quad z = \sqrt[3]{\frac{v}{2 \pi}}, \quad r^2 = 3 \sqrt[3]{\frac{v^2}{4 \pi^2}}.$$

242. Unter allen geraden Cylindern, welche sich einer gegebenen Halbkugel einbeschreiben lassen, denjenigen zu bestimmen, dessen Mantelfläche ein Maximum ist.

Unter allen geraden Cylindern, welche eine gegebene Mantelfläche haben, denjenigen zu bestimmen, für welchen die umbeschriebene Halbkugel ein Minimum ist.

Ist x der Grundradius, z die Höhe, f die Mantelfläche des Cylinders, und r der Radius der Halbkugel, so ist

Antw. a) $x^2 = \frac{1}{2} r^2, \quad z^2 = \frac{1}{2} r^2, \quad f = r^2 \pi,$

$$\text{b)}\ x^2 = \frac{f}{2 \pi}, \quad z^2 = \frac{f}{2 \pi}, \quad r = \sqrt{\frac{f}{\pi}}.$$

243. Unter allen geraden Kegeln, welche sich einer gegebenen Kugel einbeschreiben lassen, denjenigen zu bestimmen, dessen Volumen ein Maximum ist.

Unter allen geraden Kegeln, welche ein gegebenes Volumen haben, denjenigen zu bestimmen, für welchen die umbeschriebene Kugel ein Minimum ist.

Ist x der Grundradius, z die Höhe, v das Volumen des Kegels, und r der Radius der Kugel, so ist

Antw. a) $z = \frac{4}{3} r, \qquad x = \frac{2}{3} r \sqrt{2}, \qquad v = \frac{32}{81} r^3 \pi;$

b) $z = \sqrt[3]{\frac{6\,v}{\pi}}, \quad x^2 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{36\,v^2}{\pi^2}}, \quad r = \frac{3}{4} \sqrt[3]{\frac{6\,v}{\pi}}.$

244. Unter allen abgestumpften Kegeln, welche sich einer gegebenen Halbkugel einbeschreiben lassen, denjenigen zu bestimmen, dessen Mantelfläche ein Maximum ist.

Unter allen abgestumpften Kegeln, welche eine gegebene Mantelfläche haben, denjenigen zu bestimmen, für welchen die umbeschriebene Halbkugel ein Minimum ist.

Ist x der Radius der Gegenfläche, z die Höhe, f die Mantelfläche des abgestumpften Kegels, und r der Radius der Halbkugel, so ist

Antw. a) $x = \frac{1}{3} r, \qquad z^2 = \frac{8}{9} r^2, \qquad f = \frac{8}{9} r^2 \pi \sqrt{3};$

b) $x^2 = \frac{f\sqrt{3}}{24\,\pi}, \quad z^2 = \frac{f\sqrt{3}}{3\,\pi}, \quad r^2 = \frac{3\,f\sqrt{3}}{8\,\pi}.$

245. Unter allen Kugelabschnitten, welche eine gegebene Gesammtoberfläche haben, denjenigen zu bestimmen, dessen Volumen ein Maximum ist.

Unter allen Kugelabschnitten, welche ein gegebenes Volumen haben, denjenigen zu bestimmen, dessen Gesammtoberfläche ein Minimum ist.

Ist x der Radius der Kugel, z die Höhe des Kugelabschnittes, f die Gesammtoberfläche, v das Volumen, so ist

Antw. a) $z = \sqrt{\frac{f}{\pi}}, \qquad x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{f}{\pi}}, \qquad v = \frac{1}{6} f \sqrt{\frac{f}{\pi}},$

b) $z = \sqrt[3]{\frac{6\,v}{\pi}}, \quad x = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{6\,v}{\pi}}, \quad f = \sqrt[3]{36\,v^2 \pi}.$

246. Unter allen Kugeln, deren Mittelpunkte in einem festliegenden Punkte auf der Oberfläche einer gegebenen Kugel liegen, diejenige zu bestimmen, deren Schalenoberfläche innerhalb dieser Kugel ein Maximum ist.

Ist x der Radius der gesuchten Kugel, z die Höhe der Kugelschale, f die Schalenoberfläche, und r der Radius der gegebenen Kugel, so ist

Antw. $x = \frac{4}{3} r, \quad z = \frac{4}{9} r, \quad f = \frac{32}{27} r^2 \pi.$

247—249. Unter allen Kugeln, welche sich einem geraden Kegel von der Höhe h und dem Grundradius r so einbeschreiben lassen, daß sie den Kegelmantel berühren und die Grundfläche schneiden, diejenige zu bestimmen, für welche von dem in den Kegel fallenden Kugelabschnitt

247. die Schalenoberfläche ein Maximum ist.

Ist s die Seitenlinie des Kegels, x der Radius der Kugel, z die Höhe der Kugelschale, f die Schalenoberfläche, so ist

Antw. $z = \frac{1}{2} h, \quad x = \frac{r h}{2(s-r)}, \quad f = \frac{r h^2 \pi}{2(s-r)}.$

248. die Gesammtoberfläche ein Maximum ist.

Ist s die Seitenlinie des Kegels, x der Radius der Kugel, z die Höhe der Kugelschale, f die Gesammtoberfläche, so ist

Antw. $z = \frac{2 r h}{3r + s}, \quad x = \frac{r h (r + s)}{(3r + s)(s - r)}, \quad f = \frac{4 r^2 h^2 \pi}{(3r + s)(s - r)}.$

249. das Volumen ein Maximum ist.

Ist s die Seitenlinie des Kegels, x der Radius der Kugel, z die Höhe der Kugelschale, v das Volumen, so ist

Antw. $z = \frac{2 r h}{2r + s}, \quad x = \frac{r h s}{(2r + s)(s - r)}, \quad v = \frac{4 r^3 h^3 \pi}{3(2r + s)^2 (s - r)}.$

250. Unter allen geraden Kegeln, welche sich einer gegebenen Kugel umbeschreiben lassen, denjenigen zu bestimmen, dessen Gesammtoberfläche ein Minimum ist.

Ist x der Grundradius, z die Höhe, f die Gesammtoberfläche des Kegels, und r der Radius der Kugel, so ist

Antw. $z = 4r, \quad x = r\sqrt{2}, \quad f = 8 r^2 \pi.$

251. Unter allen geraden Kegeln, welche sich einer gegebenen Halbkugel umbeschreiben lassen, denjenigen zu bestimmen, dessen Mantelfläche ein Minimum ist.

Ist x der Grundradius, z die Höhe, f die Mantelfläche des Kegels, und r der Radius der Halbkugel, so ist

Antw. $z = r\sqrt{3}, \quad x = \frac{1}{2} r\sqrt{6}, \quad f = \frac{3}{2} r^2 \pi \sqrt{6}.$

252. Unter allen geraden Kegeln, welche sich einer gegebenen Halbkugel umbeschreiben lassen, denjenigen zu bestimmen, dessen Volumen ein Minimum ist.

Ist x der Grundradius, z die Höhe, v das Volumen des Kegels, und r der Radius der Halbkugel, so ist

Antw. $z = r\sqrt{3}, \quad x = \frac{1}{2} r\sqrt{6}, \quad v = \frac{1}{2} r^3 \pi \sqrt{3}.$

253. Unter allen geraden Kegeln, welche sich einer gegebenen Halbkugel umbeschreiben lassen, denjenigen zu bestimmen, dessen Gesammtoberfläche ein Minimum ist.

Ist x der Grundradius, z die Höhe, f die Gesammtoberfläche des Kegels, und r der Radius der Halbkugel, so ist

Antw. $z = 2r$, $x = \frac{2}{3} r\sqrt{3}$, $f = 4r^2\pi$.

254. Unter allen abgestumpften Kegeln, welche sich einer gegebenen Halbkugel umbeschreiben lassen, denjenigen zu bestimmen, dessen Volumen ein Minimum ist.

Ist x der Radius der Grundfläche, y der Radius der Gegenfläche, v das Volumen des abgestumpften Kegels, und r der Radius der Halbkugel, so ist

Antw. $v = \frac{1}{6} r^3\pi(2+\sqrt{7})$, $y = \frac{1}{7} r\sqrt[4]{343}$, $x = \frac{1}{14} r(1+\sqrt{7})\sqrt[4]{343}$.

Anhang zur fünften Lehrstufe.

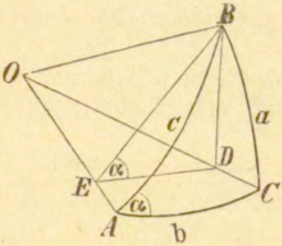
Das sphärische Dreieck.

§. 39.

Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks.

Es sei (Fig. 80) $\triangle$ A B C ein bei C rechtwinkliges sphärisches Dreieck. Construirt man durch Verbindung des Kugelmittelpunktes O mit den Eckpunkten A, B, C die dreiseitige körperliche Ecke O A B C, zieht aus B auf die Kanten O C und O A die Senkrechten B D und B E, so wie die Verbindungslinie D E,

Fig. 80.



so steht (§. 8 : 2) B D auch senkrecht auf der Ebene O C A, folglich (§. 6 : 2) E D als Projection von B E auch senkrecht auf O A. Von den entstandenen geradlinigen Dreiecken sind daher die Dreiecke B D O und B D E bei D, die Dreiecke B E O und D E O bei E rechtwinklig. Auch ist nun im Dreieck A B C offenbar $\sphericalangle \alpha$ durch $\sphericalangle$ B E D ausgedrückt, so wie die Seiten desselben a, b, c bezüglich durch die Mittelpunktswinkel B O C, A O C, A O B ausgedrückt sind. Mit Rücksicht hierauf beweisen sich nun leicht die folgenden

Lehrsätze über das rechtwinklige sphärische Dreieck.

1. Beziehung zwischen der Hypotenuse, einer Kathete und dem dieser gegenüberliegenden Winkel:

In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke ist der Sinus eines spitzen Winkels gleich dem Quotient aus den Sinus der gegenüberliegenden Kathete und der Hypotenuse:

$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}; \quad \sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c}.$$

Beweis. Es ist

$$\sin\alpha = \frac{BD}{BE} = \frac{BD:OB}{BE:OB} = \frac{\sin a}{\sin c}.$$

2. Beziehung zwischen der Hypotenuse, einer Kathete und dem dieser anliegenden Winkel:

In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke ist der Cosinus eines spitzen Winkels gleich dem Quotient aus den Tangenten der anliegenden Kathete und der Hypotenuse:

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} c}; \quad \cos\beta = \frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} c}.$$

Beweis. Es ist

$$\cos\alpha = \frac{ED}{BE} = \frac{ED:OE}{BE:OE} = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} c}.$$

3. Beziehung zwischen der Hypotenuse und den beiden Katheten:

In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke ist der Cosinus der Hypotenuse gleich dem Producte aus den Cosinus der beiden Katheten:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b.$$

Beweis. Es ist

$$\cos c = \frac{OE}{OB} = \frac{OE}{OD} \cdot \frac{OD}{OB} = \cos a \cdot \cos b.$$

4. Beziehung zwischen den beiden Katheten und einem spitzen Winkel:

In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke ist der Sinus einer Kathete gleich dem Quotient aus den Tangenten der anderen Kathete und des dieser gegenüberliegenden Winkels:

$$\sin b = \frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang}\alpha}; \quad \sin a = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang}\beta}.$$

Beweis. Es ist

$$\sin b = \frac{DE}{OD} = \frac{BD:OD}{BD:DE} = \frac{\tang a}{\tang \alpha}.$$

5. Beziehung zwischen einer Kathete und den beiden spitzen Winkeln:

In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke ist der Cosinus einer Kathete gleich dem Quotient aus dem Cosinus der gegenüberliegenden und dem Sinus des anliegenden Winkels:

$$\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}; \quad \cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}.$$

Beweis. Es ist (zufolge L. 3) $\cos a = \frac{\cos c}{\cos b}$; daher auch

$$\cos a = \frac{\cos c \sin b}{\cos b \sin c} : \frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\tang b}{\tang c} : \frac{\sin b}{\sin c}, \text{ d. i. (L. 2 u. 1)}$$

$$\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}.$$

6. Beziehung zwischen der Hypotenuse und den beiden spitzen Winkeln:

In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke ist der Cosinus der Hypotenuse gleich dem Producte aus den Cotangenten der beiden spitzen Winkel:

$$\cos c = \cotg \alpha \cdot \cotg \beta.$$

Beweis. Durch Multiplication von $\sin a$ mit $\sin b$ (L. 4) ergibt sich

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{\tang a \cdot \tang b}{\tang \alpha \cdot \tang \beta},$$

woraus folgt

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{\tang \alpha} \cdot \frac{1}{\tang \beta}, \text{ d. i. (L. 3)}$$

$$\cos c = \cotg \alpha \cdot \cotg \beta.$$

Die Neper'sche Regel. Führt man mit Neper in die vorstehend (§. 39) entwickelten Formeln statt der Katheten a und b deren Complemente ein und bezeichnet diese bezüglich mit a' und b', und setzt demgemäß in diese Formeln $\sin a'$ statt $\cos a$, $\cos a'$ statt $\sin a$, $\cotg a'$ statt $\tang a$, ferner $\sin b'$ statt $\cos b$, $\cos b'$ statt $\sin b$, $\cotg b'$ statt $\tang b$, so lassen sich dieselben in folgender dem Gedächtnisse leicht einzuprägender Form darstellen:

$\cos a' = \sin \alpha \cdot \sin c$ (L. 1)	$\cos a' = \operatorname{cotg} b' \cdot \operatorname{cotg} \beta$ (L. 4)
$\cos b' = \sin \beta \cdot \sin c$ (L. 1)	$\cos b' = \operatorname{cotg} a' \cdot \operatorname{cotg} \alpha$ (L. 4)
$\cos \alpha = \sin a' \cdot \sin \beta$ (L. 5)	$\cos \alpha = \operatorname{cotg} b' \cdot \operatorname{cotg} c$ (L. 2)
$\cos \beta = \sin b' \cdot \sin \alpha$ (L. 5)	$\cos \beta = \operatorname{cotg} a' \cdot \operatorname{cotg} c$ (L. 2)
$\cos c = \sin a' \cdot \sin b'$ (L. 3)	$\cos c = \operatorname{cotg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \beta$ (L. 6)

β

c a′

α b′

Bezüglich der in Frage kommenden fünf Stücke des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks besteht demnach unter obiger Voraussetzung der die Neper'sche Regel genannte Satz:

1. Der Cosinus eines Stückes ist gleich dem Producte aus den Sinus der beiden gegenüberliegenden Stücke;

2. Der Cosinus eines Stückes ist gleich dem Producte aus den Cotangenten der beiden anliegenden Stücke.

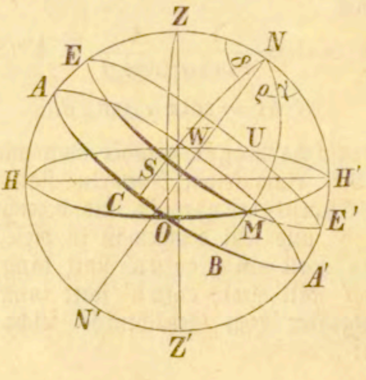
§. 40.

Uebungs-Aufgaben über das rechtwinklige sphärische Dreieck.

255. Wie groß ist für Coblenz am längsten Tage die Morgenweite, der Bogen des Horizontes zwischen dem Aufgangspunkt der Sonne und dem Ostpunkt, und welches die Zeit des Sonnenaufgangs? Die Schiefe der Ekliptik zu 23°27′30″, die Breite von Coblenz zu 50°21′39″ angenommen.

Auflösung. Es sei an der Himmelskugel (Fig. 81) OHWH′ der Horizont, HZH′Z′ der Meridian von Coblenz, Z das Zenith, N der Nordpol, OAWA′ der Aequator, O der

Fig. 81



Ostpunkt, MEU der Tagebogen der Sonne am längsten Tage, also M der Punkt des Sonnenaufgangs, OM die Morgenweite und NMN′ der stets durch das Gestirn und den Pol gehende und zum Aequator senkrechte Stundenkreis.

I. Zur Bestimmung des Orts des Sonnenaufgangs hat man alsdann in dem bei B rechtwinkligen sphärischen $\triangle$ OMB (Fig. 81) offenbar MB = der Schiefe der Ekliptik AE = 23°27′30″ und $\sphericalangle$MOB = $\sphericalangle$HOA = HZ — AZ = 90° — 50°21′39″; und daher (zufolge §. 39:1)

$$\sin OM = \frac{\sin MB}{\sin MOB} = \frac{\sin 23^0 27' 30''}{\sin(90^0 - 50^0 21' 39'')},$$

$$\log \sin OM = \begin{cases} \log \sin 23^0 27'30'' = & 9{,}5999726 - 10 \\ -\log \cos 50^0 21' 39'' = & -9{,}8047870 + 10 \end{cases}$$
$$9{,}7951856 - 10$$

$$OM = 38^0 36' 32''.$$

Die Sonne geht daher 38°36′32″ nördlich vom Ostpunkt auf.

II. Zur Bestimmung der Zeit des Sonnenaufgangs hat man in dem bei H′ rechtwinkligen $\triangle$NH′M, in welchem, die Stunden von Mitternacht an gezählt, γ den Stundenwinkel bezeichnet, die Polhöhe NH′ = der geographischen Breite AZ = 50°21′39″, ferner NM = 90° — 23°27′30″, und daher (zufolge §. 39:2)

$$\cos\gamma = \frac{\text{tang}\, NH'}{\text{tang}\, NM} = \frac{\text{tang}\, 50^0 21' 39''}{\text{tang}(90^0 - 23^0 27' 30'')},$$

$$\log \cos\gamma = \begin{cases} \log \text{tang}\, 50^0 21' 39'' = & 10{,}0817473 - 10 \\ -\log \text{cotg}\, 23^0 27' 30'' = & -10{,}3625624 + 10 \end{cases}$$
$$9{,}7191849 - 10$$

$$\sphericalangle\gamma = 58^0 24' 39'' = 3 \text{ Uhr } 53 \text{ Min. } 38 \text{ Sec.}$$

Die Sonne geht also auf um 3 Uhr 53 Min. 38 Sec., oder mit Abzug von 8 Minuten in Folge der Stralenbrechung (Phys. §. 172) um 3 Uhr 49 Min. 38 Sec. nach Mitternacht.

256. Wie hoch und wann steht für Coblenz die Sonne am längsten Tage genau im Osten?

Auflösung. Man ziehe (Fig. 81) durch den Ostpunkt O den stets durch das Gestirn und das Zenith gehenden Höhenkreis ZO, welcher den Tagebogen MEU in S schneidet, so ist S der Ort der Sonne; ferner ziehe man durch S den Stundenkreis NC.

I. Zur Bestimmung der Sonnenhöhe SO hat man nun in dem bei C rechtwinkligen sphärischen $\triangle OCS$ offenbar $SC = 23^0 27' 30''$ und $\sphericalangle SOC = AZ = 50^0 21' 39''$, folglich (zufolge §. 39:1)

$$\sin SO = \frac{\sin SC}{\sin SOC} = \frac{\sin 23^0 27' 30''}{\sin 50^0 21' 39''},$$

$$\log \sin SO = \begin{cases} \log \sin 23^0 27' 30'' = & 9{,}5999726 - 10 \\ -\log \sin 50^0 21' 39'' = & -9{,}8865344 + 10 \end{cases}$$
$$\overline{9{,}7134382 - 10}$$

$$SO = 31^0 7' 37''.$$

II. Zur Bestimmung der Zeit dieses Sonnenstandes hat man in dem bei Z rechtwinkligen sphärischen $\triangle NZS$, in welchem δ das Supplement des Stundenwinkels ϱ, die Stunden von Mitternacht an gerechnet, bezeichnet, $NZ = 90^0 - 50^0 21' 39''$, $NS = 90^0 - 23^0 27' 30''$, folglich (§. 39:2) $\cos\delta$ oder

$$\cos(180^0 - \varrho) = \frac{\operatorname{tang} NZ}{\operatorname{tang} NS} = \frac{\operatorname{tang}(90^0 - 50^0 21' 39'')}{\operatorname{tang}(90^0 - 23^0 27' 30'')},$$

$$\log\cos(180^0 - \varrho) = \begin{cases} \log \operatorname{cotg} 50^0 21' 39'' = & 9{,}9182527 - 10 \\ -\log \operatorname{cotg} 23^0 27' 30'' = & -10{,}3625624 + 10 \end{cases}$$
$$\overline{9{,}5556903 - 10}$$

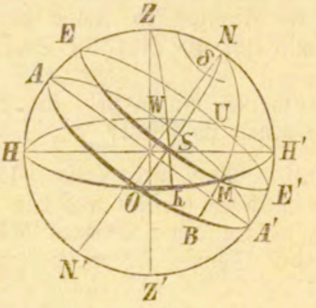
$$180^0 - \varrho = 68^0 55' 51'',$$

daher $\varrho = 111^0 4' 9'' = 7$ Uhr 24 Min. 16 Sec.

257. Wie groß ist für Coblenz die Dauer des längsten Tages?

Auflösung. Die Dauer des Tages hängt ab von der Größe des Tagebogens. Der halbe Tagebogen ME (Fig. 82) wird aber gemessen durch den Winkel δ in dem bei H rechtwinkligen sphärischen $\triangle MHN$; da in diesem $NM = 90^0 - 23^0 27' 30''$ und $NH = 180^0 - 50^0 21' 39''$, so ist (zufolge §. 39:2)

Fig. 82.



$$\cos\delta = \frac{\operatorname{tang} NH}{\operatorname{tang} NM} = \frac{\operatorname{tang}(180^0 - 50^0 21' 39'')}{\operatorname{tang}(90^0 - 23^0 27' 30'')} = \frac{-\operatorname{tang} 50^0 21' 39''}{\operatorname{cotg} 23^0 27' 30''},$$

$$\log\cos\delta = \begin{cases} \log\operatorname{tang} 50^0 21' 39'' = 10{,}0817473 - 10 \\ -\log\operatorname{cotg} 23^0 27' 30'' = -10{,}3625624 + 10 \end{cases}$$
$$\overline{9{,}7191849 - 10},$$

mithin, da $\cos\delta$ negativ, also $\sphericalangle\delta > 90^0$ ist, der halbe Tagebogen

$$\sphericalangle\delta = 180^0 - 58^0 24' 39'' = 121^0 35' 21'',$$

daher der ganze Tagebogen $\sphericalangle 2\delta = 243^0 10' 42''$, und folglich die Länge des Tages 16 Stund. 12 Min. 42 Sec., oder indem man die Verlängerung des Tages in Folge der Stralenbrechung um 8 Minuten (Phys. §. 172) berücksichtigt,

16 Stund. 20 Min. 42 Sec.

258. Wie groß ist die Zenithdistanz der Sonne für Coblenz am längsten Tage um 6 Uhr Morgens?

Auflösung. Zieht man den der Zeit 6 Uhr Morgens entsprechenden durch den Ostpunkt gehenden Stundenkreis NO (Fig. 82), so gibt der Durchschnittspunkt S dieses Stundenkreises mit dem Tagebogen MEU den Ort der Sonne um 6 Uhr Morgens; zieht man ferner durch S den Höhenkreis Zh, so bezeichnet ZS die Zenithdistanz der Sonne um diese Zeit. Nun ist in dem bei N rechtwinkligen sphärischen $\triangle ZNS$ offenbar $ZN = 90^0 - 50^0 21' 39''$ und $NS = 90^0 - 23^0 27' 30''$; mithin (§. 39:3)

$$\cos ZS = \cos ZN \cdot \cos NS$$
$$= \cos(90^0 - 50^0 21' 39'') \cdot \cos(90^0 - 23^0 27' 30''),$$

$$\log\cos ZS = \begin{cases} \log\sin 50^0 21' 39'' = 9{,}8865343 - 10 \\ +\log\sin 23^0 27' 30'' = +9{,}5999726 - 10 \end{cases}$$
$$\overline{9{,}4865069 - 10}$$

$$ZS = 72^0 8' 54''.$$

259. Ein Schiff segelt auf seiner Fahrt von New-York, 40°42′40″ N. Breite und 76°20′30″ W. Länge, nach Capstadt bis zum Aequator auf einem größten Kreise und schneidet denselben südlich der Insel St. Paul in einem Punkte von 31°39′20″ W. Länge; wie groß ist die Fahrstrecke bis zum Aequator, und wie groß das Azimut des Schiffscurses?

Auflösung. Es bezeichne (Fig. 83) C die Lage von New-York, AB den Aequator, CF den Meridian von New-York, CB die Bahn des Schiffes. Diese drei größten Kugelkreise bilden nun ein bei F rechtwinkliges sphärisches Dreieck CFB, in welchem als geogr. Breite von New-York $CF = 40^0 42' 40''$, und als Differenz der geogr. Längen von New-York und dem Schnittpunkt des Aequators $FB = 44^0 41' 10''$. Daher hat man

I. zur Bestimmung der Fahrstrecke CB (§. 39:3)

$$\cos CB = \cos CF \cdot \cos FB = \cos 40^0 42' 40'' \cdot \cos 44^0 41' 10'',$$

$$\log \cos CB = \begin{cases} \log \cos 40^0 42' 40'' = 9{,}8796737 - 10 \\ + \log \cos 44^0 41' 10'' = +\,9{,}8518513 - 10 \end{cases}$$
$$ 9{,}7315250 - 10$$

$$CB = 57^0 23' 23'',25 = 1130{,}84 \text{ Meilen.}$$

II. zur Bestimmung des Azimutes $\sphericalangle FCB$ (§. 39:4)

$$\operatorname{tang} FCB = \frac{\operatorname{tang} FB}{\sin CF} = \frac{\operatorname{tang} 44^0 41' 10''}{\sin 40^0 42' 40''},$$

$$\log \operatorname{tang} FCB = \begin{cases} \log \operatorname{tang} 44^0 41' 10'' = 9{,}9952414 - 10 \\ - \log \sin 40^0 42' 40'' = -9{,}8144110 + 10 \end{cases}$$
$$\phantom{\log \operatorname{tang} FCB =} 0{,}1808304$$

$$\sphericalangle FCB = 56^0 35' 52'',40.$$

260. Ein Schiff verläßt Lissabon auf einem größten Kreise unter dem Azimut von $53^0 23' 42''$ und schneidet den Aequator unter einem Winkel von $51^0 12' 40''$ bei der Insel Meriana in der Mündung des Amazonenflusses. Wie weit westlich und wie weit überhaupt liegt diese Insel von Lissabon?

Auflösung. Es bezeichne (Fig. 83) C die Lage von Lissabon, AB den Aequator, CF den Meridian von Lissabon, CA die Bahn des Schiffes, so bilden diese drei größten Kugelkreise ein bei F rechtwinkliges sphärisches Dreieck CFA. In diesem ist als bekanntes Azimut $\sphericalangle FCA = 53^0 23' 42''$, und als Winkel, unter welchem das Schiff den Aequator schneidet, $\sphericalangle CAF = 51^0 12' 40''$. Daher hat man

I. zur Bestimmung des Längenunterschiedes AF (§. 39:5)

$$\cos AF = \frac{\cos FCA}{\sin CAF} = \frac{\cos 53^0 23' 42''}{\sin 51^0 12' 40''},$$

$$\log\cos AF = \begin{cases} \log\cos 53^0 23'42'' = & 9{,}7754611 - 10 \\ -\log\sin 51^0 12'40'' = & -9{,}8917935 + 10 \\ \hline & 9{,}8836676 - 10 \end{cases}$$

$$AF = 40^0 5'31'',3.$$

II. zur Bestimmung der directen Entfernung CA (§. 39:6)

$$\cos CA = \operatorname{cotg} CAF \cdot \operatorname{cotg} FCA = \operatorname{cotg} 51^0 12'40'' \cdot \operatorname{cotg} 53^0 23'42'',$$

$$\log\cos CA = \begin{cases} \log\operatorname{cotg} 51^0 12'40'' = & 9{,}9050947 - 10 \\ +\log\operatorname{cotg} 53^0 23'42'' = & +9{,}8708724 - 10 \\ \hline & 9{,}7759671 - 10 \end{cases}$$

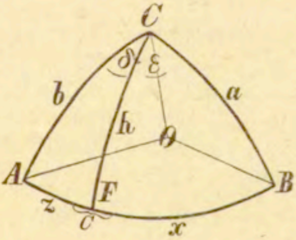
$$CA = 53^0 20'43'',3 = 800{,}18 \text{ Meilen.}$$

§. 41.

Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks.

Es sei $\triangle ABC$ (Fig. 83) ein schiefwinkliges sphärisches Dreieck. Zieht man aus einer Ecke desselben, aus C etwa, auf

Fig. 83.



die gegenüberliegende Seite AB senkrecht den Hauptbogen CF, so zerfällt dasselbe in zwei rechtwinklige sphärische Dreiecke, und es beweisen sich dann leicht die folgenden

Lehrsätze über das schiefwinklige sphärische Dreieck.

1. Beziehung zwischen zwei Seiten und den diesen gegenüberliegenden Winkeln:

In jedem sphärischen Dreiecke verhalten sich die Sinus zweier Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel:

$$\sin a : \sin b = \sin\alpha : \sin\beta.$$

Beweis. Es ist (zufolge §. 39, L. 1) offenbar $\sin CF$ gleich

$$\sin a \cdot \sin\beta = \sin b \cdot \sin\alpha,$$

folglich $\qquad \sin a : \sin b = \sin\alpha : \sin\beta.$

2. Beziehung zwischen den drei Seiten und einem Winkel:

In jedem sphärischen Dreiecke ist der Cosinus einer Seite gleich dem Producte aus dem Cosinus des gegenüberliegenden Winkels und den Sinus der beiden anderen Seiten vermehrt um das Product aus den Cosinus dieser beiden Seiten:

$$\cos a = \cos\alpha \cdot \sin b \cdot \sin c + \cos b \cdot \cos c.$$

Beweis. Es ist (§. 39, L. 3) offenbar

$$\cos a = \cos h \cdot \cos x = \cos h \cdot \cos (c - z),$$

oder, wenn man (§. 39 : 3) $\cos h = \frac{\cos b}{\cos z}$ einsetzt, $\cos(c-z)$ entwickelt und durch $\cos z$ dividirt,

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \cos b \cdot \sin c \cdot \tang z;$$

da aber $\tang z = \tang b \cdot \cos\alpha$ (§. 39:2), so ergibt sich

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha, \text{ d. i.}$$

$$\cos a = \cos\alpha \cdot \sin b \cdot \sin c + \cos b \cdot \cos c.$$

3. Beziehung zwischen den drei Winkeln und einer Seite:

In jedem sphärischen Dreiecke ist der Cosinus eines Winkels gleich dem Producte aus dem Cosinus der gegenüberliegenden Seite und den Sinus der beiden anderen Winkel vermindert um das Product aus den Cosinus dieser beiden Winkel:

$$\cos\alpha = \cos a \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma - \cos\beta \cdot \cos\gamma.$$

Beweis. Es ist (zufolge §. 39:5) offenbar

$$\cos\alpha = \cos h \cdot \sin\delta = \frac{\cos\beta \cdot \sin(\gamma - \varepsilon)}{\sin\varepsilon}$$

$$= \frac{\cos\beta \sin\gamma \cos\varepsilon - \cos\beta \cos\gamma \sin\varepsilon}{\sin\varepsilon}$$

$$= \cos\beta \sin\gamma \cotg\varepsilon - \cos\beta \cos\gamma.$$

Da aber $\cotg\varepsilon = \cos a \cdot \tang\beta$ (nach §. 39:6), so ergibt sich

$$\cos\alpha = \cos a \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma - \cos\beta \cdot \cos\gamma.$$

4. Beziehung zwischen zwei Seiten, dem eingeschlossenen und einem gegenüberliegenden Winkel:

In jedem sphärischen Dreiecke ist das Product aus den Cosinus der einen von zwei Seiten und des von diesen eingeschlossenen Winkels gleich dem Producte aus dem Sinus dieser Seite und der Cotangente der zweiten Seite, vermindert um das Product aus dem Sinus des eingeschlossenen Winkels und der Cotangente des der zweiten Seite gegenüberliegenden Winkels:

$$\cos a \cdot \cos \beta = \sin a \cdot \cot g\, c - \sin \beta \cdot \cot g\, \gamma.$$

Beweis. Es ist (nach L. 2) für cos b und cos c entsprechend

$$\cos b = \cos \beta \cdot \sin a \cdot \sin c + \cos a \cdot \cos c,$$

$$\cos c = \cos \gamma \cdot \sin a \cdot \sin b + \cos a \cdot \cos b.$$

Entwickelt man aus der ersten dieser Gleichungen den Werth von $\cos \beta$ und multiplicirt denselben mit cos a, so erhält man

$$\cos a \cdot \cos \beta = \frac{\cos a \cdot \cos b - \cos^2 a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}.$$

Substituirt man hierin den Werth von cos a · cos b aus der zweiten Gleichung, so erhält man

$$\cos a \cdot \cos \beta = \frac{\cos c - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma - \cos^2 a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}$$

$$= \frac{\cos c\,(1 - \cos^2 a) - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma}{\sin a \cdot \sin c},$$

folglich, indem man $\sin^2 a$ statt $1 - \cos^2 a$ und $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$ statt $\frac{\sin b}{\sin c}$ einsetzt,

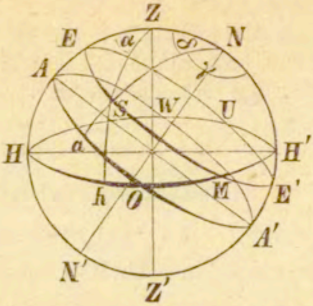
$$\cos a \cdot \cos \beta = \sin a \cdot \cot g\, c - \sin \beta \cdot \cot g\, \gamma.$$

§. 42.

Uebungs-Aufgaben über das schiefwinklige sphärische Dreieck.

261. Wie viel Uhr ist es an einem Orte in dem Augenblicke, wo am Tage des Sommer-Solstitiums die Höhe der Sonne zu 41°31′11″,55 und das östliche Azimut derselben zu 76°24′59″ beobachtet wird?

Auflösung. Es sei (Fig. 84) S der Ort der Sonne zur Zeit der Beobachtung; zieht man alsdann den Stundenkreis NSa und den Höhenkreis ZSh, so ist Hh = $\sphericalangle \alpha$ das Azimut, Sh die Höhe, Sa die Declination der Sonne und $\sphericalangle \gamma$ der Stundenwinkel, also $\sphericalangle \delta$ das Supplement des Stundenwinkels γ, und daher ist in dem sphärischen Dreiecke NZS offenbar

Fig 84. 

$ZS = 90^0 - 41^0 31' 11'',55$, $NS = 90^0 - 23^0 27' 30''$, $\sphericalangle SZN = 180^0 - 76^0 24' 59''$. Nun aber ist in dem $\triangle NZS$ (§. 41:1)

$$\sin NS : \sin ZS = \sin SZN : \sin(180^0 - \gamma),$$

mithin
$$\sin(180^0 - \gamma) = \frac{\sin ZS \cdot \sin SZN}{\sin NS},$$

oder, indem man die oben angegebenen Werthe berücksichtigt,

$$\sin(180^0 - \gamma) = \frac{\cos 41^0 31' 11'',55 \cdot \sin 76^0 24' 59''}{\cos 23^0 27' 30''},$$

$$\log\sin(180^0 - \gamma) = \begin{cases} \log\cos 41^0 31' 11'',55 = & 9{,}8743228 - 10 \\ + \log\sin 76^0 24' 59'' & = + 9{,}9876789 - 10 \\ - \log\cos 23^0 27' 30'' & = - 9{,}9625350 + 10 \end{cases}$$
$$9{,}8994667 - 10$$

$$180^0 - \gamma = 52^0 30', \quad \sphericalangle \gamma = 127^0 30'.$$

Es ist also zur Zeit der Beobachtung $8\frac{1}{2}$ Uhr Morgens.

262. Wie weit ist Coblenz von Berlin direct entfernt, wenn man nach den Tafeln der connaissance des temps die Breite und Länge von Coblenz zu $50^0 21' 39''$ N. und $5^0 15' 44''$ O., von Berlin zu $52^0 30' 36''$ N. und $11^0 3' 34''$ O. annimmt?

Auflösung. Bezeichne C und B (Fig. 85) die Lage der Städte Coblenz und Berlin, seien NA, Na und Na' die Meridian-Quadranten bezüglich von Paris, Coblenz und Berlin, so ist Ca und Ba' bezüglich die geogr. Breite von Coblenz und Berlin, und $Aa' - Aa = aa'$ oder $\sphericalangle CNB$ der Längenunterschied beider Orte, und daher in dem sphärischen $\triangle NCB$ offenbar $NC = 90^0 - 50^0 21' 39''$ und $NB = 90^0 - 52^0 30' 36''$, so wie $\sphericalangle CNB = 11^0 3' 34'' - 5^0 15' 44'' = 5^0 47' 50''$. Im $\triangle NCB$ ist nun aber bezüglich der gesuchten Entfernung CB (§. 41:2)

$$\cos CB = \cos CNB \cdot \sin NC \cdot \sin NB + \cos NC \cdot \cos NB,$$

oder mit Rücksicht auf obige Werthe

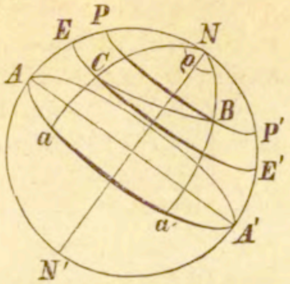


Fig. 85.

$$\cos CB = \begin{cases} \cos 5^0 47'50'' \cdot \cos 50^0 21'39'' \cdot \cos 52^0 30'36'' \\ + \sin 50^0 21'39'' \cdot \sin 52^0 30'36''. \end{cases}$$

Setzt man nun

$$x = \cos 5^0 47'50'' \cdot \cos 50^0 21'39'' \cdot \cos 52^0 30'36'',$$

$$y = \sin 50^0 21'39'' \cdot \sin 52^0 30'36'',$$

so ist

$$\log x = \begin{cases} \log\cos 5^0 47'50'' = 9{,}9977731 - 10 \\ + \log\cos 50^0 21'39'' = + 9{,}8047870 - 10 \\ + \log\cos 52^0 30'36'' = + 9{,}7843483 - 10 \end{cases}$$

$$0{,}5869084 - 1$$

$$x = 0{,}3862855;$$

$$\log y = \begin{cases} \log\sin 50^0 21'39'' = 9{,}8865343 - 10 \\ + \log\sin 52^0 30'36'' = + 9{,}8995248 - 10 \end{cases}$$

$$0{,}7860591 - 1$$

$$y = 0{,}6110252;$$

folglich $\cos CB = x + y = 0{,}9973107,$

$$\log\cos CB = 9{,}9988305 - 10,$$

$$CB = 4^0 12'10'' = 63{,}04 \text{ Meilen.}$$

263. Wie viel Uhr ist es zu Coblenz zur Zeit, wo Morgens bei einer Declination der Sonne von $12^0 8'10$ nördlich die Höhe der Sonne zu $41^0 6'8''$ beobachtet wird, die geogr. Breite von Coblenz zu $50^0 21'39''$ angenommen?

Auflösung. Um die Zeit zu bestimmen, hat man zunächst den Stundenwinkel zu berechnen. Sei nun (Fig. 84) S der Stand der Sonne, so ist, wenn man den Stundenkreis NSa und den Höhenkreis ZSh zieht, Sa die Declination und Sh die Höhe der Sonne, und $\sphericalangle\gamma$ der Stundenwinkel, also $\sphericalangle\delta$ das Supplement des Stundenwinkels γ, und daher in dem sphärischen $\triangle$ NZS offenbar $ZS = 90^0 - 41^0 6'8''$, $NS = 90^0 - 12^0 8'10''$, $NZ = 90^0 - 50^0 21'39''$. In dem $\triangle$ NZS ist nun aber (zufolge §. 41:2) $\cos\delta$ oder

$$\cos(180^0 - \gamma) = \frac{\cos ZS - \cos NS \cdot \cos NZ}{\sin NS \cdot \sin NZ},$$

oder mit Berücksichtigung der obigen Werthe

$$\cos(180^0 - \gamma) = \begin{cases} \dfrac{\sin 41^0 6' 8''}{\cos 12^0 8' 10'' \cdot \cos 50^0 21' 39''} \\ - \operatorname{tang} 12^0 8' 10'' \cdot \operatorname{tang} 50^0 21' 39''. \end{cases}$$

Setzt man nun

$$x = \frac{\sin 41^0 6' 8''}{\cos 12^0 8' 10'' \cdot \cos 50^0 21' 39''},$$

$$y = \operatorname{tang} 12^0 8' 10'' \cdot \operatorname{tang} 50^0 21' 39'',$$

so ist

$$\log x = \begin{cases} \log \sin 41^0\ 6'\ 8'' = 9{,}8178327 - 10 \\ - \log \cos 12^0\ 8' 10'' = -9{,}9901838 + 10 \\ - \log \cos 50^0 21' 39'' = -9{,}8047870 + 10 \end{cases}$$

$$0{,}0228619$$

$$x = 1{,}0540517;$$

$$\log y = \begin{cases} \log \operatorname{tang} 12^0\ 8' 10'' = 9{,}3325207 - 10 \\ + \log \operatorname{tang} 50^0 21' 39'' = +\ 10{,}0817473 - 10 \end{cases}$$

$$0{,}4142680 - 1$$

$$y = 0{,}2595781;$$

folglich

$$\cos(180^0 - \gamma) = x - y = 0{,}7944736,$$

$$\log \cos(180^0 - \gamma) = 9{,}9000795 - 10,$$

$$(180^0 - \gamma) = 37^0 23' 40'',$$

$$\sphericalangle \gamma = 142^0 36' 20'' = 9 \text{ Uhr } 30 \text{ Min. } 25{,}33 \text{ Sec.}$$

264. Ein Schiff segelt von Brighton, $50^0 49' 48''$ n. Br. und $18^0 3' 20''$ ö. L., auf einem größten Kreise unter dem Azimut von $63^0 40' 10''$ westlich; unter welchem Winkel und unter welchem Breitegrade schneidet dasselbe den Meridian von Ferro?

Auflösung. Es sei (Fig. 86) Na' und Na bezüglich der Meridianquadrant von Brighton und von Ferro, B die Lage von Brighton, C der Punkt, in welchem das Schiff den Meridian von Ferro schneidet, und BC die Bahn des Schiffes; so ist Ba' und Ca bezüglich die geogr. Breite von Brighton und dem Schneidepunkt im Meridian von Ferro, ferner aa' oder $\sphericalangle CNB$ die geogr. Länge von Brighton und $\sphericalangle CBa'$

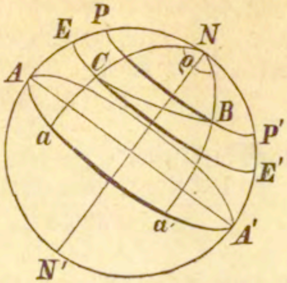


Fig. 86.

das Azimut. In dem sphärischen $\triangle$ NCB ist nun daher $NB = 90^0 - 50^0 49' 48''$, $\sphericalangle CNB = 18^0 3' 20''$ und $\sphericalangle NBC = 180^0 - 63^0 40' 10''$. Nun ist aber in $\triangle$ NCB

I. zur Bestimmung des Winkels NCB, unter welchem das Schiff den Meridian von Ferro schneidet (§. 41:3)

$$\cos NCB = \cos NB \cdot \sin CNB \cdot \sin NBC - \cos CNB \cdot \cos NBC,$$

oder indem man die obigen Werthe berücksichtigt,

$$\cos NCB = \begin{cases} \sin 50^0 49' 48'' \cdot \sin 18^0 3' 20'' \cdot \sin 63^0 40' 10'' \\ + \cos 18^0 3' 20'' \cdot \cos 63^0 40' 10''. \end{cases}$$

Setzt man nun

$$x = \sin 50^0 49' 48'' \cdot \sin 18^0 3' 20'' \cdot \sin 63^0 40' 10'',$$
$$y = \cos 18^0 3' 20'' \cdot \cos 63^0 40' 10'',$$

so ist

$$\log x = \begin{cases} \log \sin 50^0 49' 48'' = 9{,}8894560 - 10 \\ + \log \sin 18^0\ 3' 20'' = + 9{,}4912763 - 10 \\ + \log \sin 63^0 40' 10'' = + 9{,}9524292 - 10 \end{cases}$$
$$\overline{9{,}3331615 - 10}$$

$$x = 0{,}2153582;$$

$$\log y = \begin{cases} \log \cos 18^0\ 3' 20'' = 9{,}9780693 - 10 \\ + \log \cos 63^0 40' 10'' = + 9{,}6469418 - 10 \end{cases}$$
$$\overline{9{,}6250111 - 10}$$

$$y = 0{,}4217073;$$

folglich

$$\cos NCB = x + y = 0{,}6370655,$$
$$\log \cos NCB = 9{,}8041841 - 10,$$
$$\sphericalangle NCB = 50^0 25' 35'',94.$$

II. zur Bestimmung des Breitegrades Ca, unter welchem das Schiff den Meridian von Ferro schneidet, (zufolge §. 41:4) cotg CN oder

$$\operatorname{cotg}(90^0 - Ca) = \frac{\cos NB \cdot \cos CNB + \sin CNB \cdot \operatorname{cotg} NBC}{\sin NB},$$

Fünfte Lehrstufe.

Geometrie des Raumes.

Anhang zur fünften Lehrstufe.

Das sphärische Dreieck.

Druck von L. Schwann in Neuß.

Boymann, Trigonometrie