XIX.

ALCUNE OSSERVAZIONI SOPRA PROPRIETÀ ATTE AD INDIVIDUARE UNA FUNZIONE

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XVIII₁, 1909₁; pp. 263–266.

1. Insieme corrispondente ad un punto. – Abbiasi un campo finito a due dimensioni [1] limitato da un contorno. Ad ogni punto A interno al campo faremo corrispondere un insieme di elementi interni al campo stesso. Lo diremo l'*insieme corrispondente al punto* A e lo denoteremo con E (A).

Questo insieme potrà essere costituito da un numero finito di punti o di linee o di aree o anche da un insieme enumerabile di tutti questi elementi o di parte di essi.

2. Massa dell'insieme corrispondente al punto A. – Supponiamo distribuita in E (A) una massa e questa sia tale che ogni elemento di E (A) abbia una massa o una densità positiva in modo che, se il punto A' appartiene ad E (A), la massa contenuta entro ogni cerchio avente per centro A' sia un numero diverso da zero, finito e positivo. Denoteremo con M (A) la massa totale distribuita in E (A). Potrà darsi che un medesimo punto B appartenga contemporaneamente, tanto all'insieme corrispondente ad un punto A, quanto all'insieme corrispondente ad un punto A'. La massa o la densità distribuita in B, considerato come appartenente ad E (A), sarà in generale diversa dalla massa o densità distribuita in B considerato come appartenente ad E (A').

3. Potenziale di una funzione u sulla massa M (A). – Sia $u(x, y)$ una funzione qualsiasi finita e assolutamente continua in tutto il campo σ; ammetteremo che, operando su $u(x, y)$ come sopra una funzione potenziale, si possa calcolarne il potenziale sulla massa M (A) mediante somme o integrali estesi agli elementi costituenti l'insieme E (A). Lo chiameremo il *potenziale della funzione u sulla massa* M (A) e lo indicheremo con P $[u, M(A)]$.

4. Connessione. — Preso un punto A consideriamo un punto A' appartenente ad E (A), quindi un punto A'' appartenente ad E (A'), poi un punto A''' appartenente ad E (A'') e così di seguito.

(1) È evidente che le osservazioni seguenti possono estendersi al caso di campi di un numero qualunque di dimensioni.

I punti A, A′, A″, A‴, ··· diremo che formano un *seguito di punti connessi*.

Diremo poi che *un punto* A *è connesso col contorno di* σ, se, scelto un numero ε comunque piccolo, potremo sempre trovare un seguito finito di punti A, A′, A″, A‴, ··· connessi, uno dei quali dista da un punto del contorno meno di ε.

5. TEOREMA I. – *La funzione u assolutamente continua e finita nel campo σ è determinata quando:* 1° *in ogni punto* A *interno al campo si conosce*

$$\frac{1}{M(A)} P[u, M(A)] - u(A);$$

2° *si conoscono i valori della funzione u al contorno del campo*; 3° *tutti i punti interni al campo sono connessi col contorno.*

Per dimostrare questo teorema basterà dimostrare che, se u è nulla al contorno, e per i punti interni si ha

$$\frac{1}{M(A)} P[u, M(A)] - u(A) = 0, \tag{1}$$

u è nulla internamente al campo. Infatti se, sotto queste condizioni, u non fosse sempre nulla internamente al campo, dovrebbe avere nell'interno almeno un massimo o un minimo diversi da zero. Per fissare le idee supponiamo che nel punto interno A si abbia un massimo G. Allora u dovrà avere il valore G in tutti i punti di E(A), perché se, in un punto B di E(A), u avesse un valore G′ inferiore a G, si potrebbe trovare un cerchio ω avente per centro B nei punti del quale u sarebbe inferiore a $(G'+G)/2$. La porzione della massa M(A) contenuta entro ω deve essere per dato diversa da zero, finita e positiva; chiamandola m avremmo per conseguenza

$$\frac{1}{M(A)} P[u, M(A)] < G - \frac{G - G'}{2} \frac{m}{M}$$

e quindi, essendo $u(A) = G$, la (1) non potrebbe sussistere.

Ora, se u assume il valore G in tutti i punti di E(A), e se A′ appartiene ad E(A), u dovrà avere il valore G in tutti i punti di E(A′) e così, se A″ appartiene a questo insieme, u dovrà avere il valore G in tutti i punti di E(A″) e così di seguito.

Ora se ogni punto A interno è connesso col contorno, scelto ε piccolo ad arbitrio potremo trovare un punto interno che dista da un punto del contorno meno di ε ed in cui u assume il valore G. Ne segue, per la continuità uniforme di u, che G deve essere minore di qualunque quantità assegnabile, e perciò l'esistenza del massimo interno al campo è impossibile.

TEOREMA II. – *La funzione u finita e assolutamente continua nel campo σ è determinata quando per ogni punto* A *interno al campo si conosce*

$$\frac{1}{\alpha M(A)} P[u, M(A)] - u(A),$$

essendo α un coefficiente il cui limite inferiore è maggiore di 1.

Proviamo che se la (2) è nulla, u deve esser sempre nulla. Infatti se u in A avesse un valore G diverso da zero, dovrebbe esistere un punto A' appartenente ad E (A) in cui u avrebbe un valore assoluto eguale o superiore ad $\alpha' \mid G \mid$, rappresentando con α' il limite inferiore di α; e di qui si ricava che dovrebbe esistere un punto A'' appartenente ad E (A') in cui u assumerebbe un valore assoluto, eguale o superiore ad $\alpha'^2 \mid G \mid$ e così di seguito, indefinitamente. Dunque esisterebbero valori di u tali che il loro valore assoluto sarebbe tanto grande quanto ci piace.

TEOREMA III. – *Due funzioni finite e continue assolutamente nel campo* σ, *tali che calcolando in ogni punto interno*

$$\frac{1}{\alpha M(A)} P[u, M(A)] - u(A)$$

si trova per ambedue lo stesso valore, debbono essere eguali fra loro in qualche punto interno o del contorno del campo, se il limite superiore di α *è minore di* 1.

Mi risparmio di dare la dimostrazione ben facile di questa proposizione.

6. ESEMPIO. – Supponiamo che E (A) sia una circonferenza C_A avente il centro in A e la densità con cui è distribuita la massa sia 1. Allora il teorema I del § 5 diverrà: *La funzione u assolutamente continua nel campo* σ *è determinata quando:* 1° *si conosce per ogni punto* A *interno al campo la differenza fra il valore medio di u sopra* C_A *e il valore al centro;* 2° *si conoscono i valori di u al contorno del campo:* 3° *tutti i punti interni al campo sono connessi col contorno.*

Supposto ora che il teorema di esistenza delle funzioni armoniche valga pel campo σ, avremo in particolare la proposizione: *se la differenza fra il valore medio di u sopra* C_A *e il valore al centro sarà nulla, la funzione sarà armonica.*

7. Già da vario tempo ero in possesso delle precedenti osservazioni che non avevo però reso note; mi sono permesso di pubblicarle avendo letto la interessante Nota del prof. E. LEVI inserita in questi Rendiconti: *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche* [2]. Se si suppone la condizione della continuità assoluta della funzione u, affinché possa dirsi che essa è armonica, non è necessario sapere che il suo valore in ogni punto è la media dei valori che assume sopra *tutte* le circonferenze interne al campo e aventi il centro in quel punto; basta sapere che la proprietà sussiste per *una sola* di dette circonferenze, purché esista la connessione col contorno. Ma è da osservare che in tal modo la condizione posta della continuità non può togliersi, anche supponendo la integrabilità di u lungo le circonferenze

(2) Il dott UMBERTO CRUDELI mi comunica che, indipendentemente dalle mie antecedenti ricerche, egli era giunto a dimostrare lo stesso teorema del LEVI ricorrendo alla considerazione di massimi o minimi interni, ma con condizioni più restrittive di quelle poste dal LEVI.

C_A e la integrabilità superficiale. Ciò caratterizza la differenza che passa colla proposizione del LEVI.

Si può riconoscere facilmente questo con un esempio. Supponendo che r rappresenti la distanza del centro da un punto generico, prendiamo una funzione u eguale a $-\log r$ in tutti i punti della corona circolare compresa fra la circonferenza C di raggio 1 e quella C' concentrica di raggio $1/4$, esclusi però i punti di quest'ultima circonferenza. Si prenda quindi come valore di u in un punto qualsiasi A della circonferenza C' o interno ad essa il valore medio che assume u in una circonferenza C_A avente il centro in quel punto e giacente internamente alla corona circolare. D'altra parte ad ogni punto A interno alla corona si può far corrispondere una circonferenza C_A avente il centro in quel punto e giacente internamente alla corona stessa (ma non avente nell'interno il cerchio C') in modo che tutti i punti interni alla corona siano connessi coi punti della circonferenza C di raggio 1 che forma il contorno dell'intero campo circolare che si considera.

Avremo allora: 1° u sarà compreso fra 0 e $\log 4$; 2° la differenza fra il valore medio di u in C_A e il valore di u in A sarà nulla; 3° tutti i punti A, interni a C, saranno connessi col contorno, e nondimeno la funzione u non sarà armonica perché si annullerà al contorno C e non sarà nulla nell'interno del campo. È evidente che u sarà discontinua, e che si potrà limitarne la discontinuità solo ai punti della circonferenza C'.

Farò per ultimo osservare che le considerazioni svolte nel § 5, hanno relazione da un lato col calcolo delle differenze finite, mentre d'altro lato sono intimamente collegate colle questioni delle equazioni integrali; in particolare il Teorema I è collegato coi casi in cui il determinante si annulla.