XXII.

SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI DELL'ELASTICITÀ NEL CASO DI UNA SFERA ISOTROPA

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XIX_1, 1910_1; pp. 107–114.

§ 1. — La funzione intera $V(z \mid x, y)$.

Abbiasi la funzione continua $S_0(x, y)$ definita per i valori di x, y tali che

$$0 < x < y < a$$

e sia

$$|S_0(x, y)| < M.$$

Si costruiscano col processo iterativo che ho dato per la risoluzione delle equazioni integrali (1) le funzioni $S_i(x, y)$ definite da

$$S_i(x, y) = \int_x^y S_{j-1}(x, \xi)\, S_{i-j}(\xi, y)\, d\xi. \tag{1}$$

Avremo

$$|S_i(x, y)| < \frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!},$$

quindi la funzione

$$V(z \mid x, y) = \sum_0^\infty{}_n \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} S_n(x, y) \tag{I}$$

sarà una funzione olomorfa di z in tutto il piano complesso.

Teorema I. - *Qualunque sia il numero positivo* α *avremo*

$$\lim_{|z|=\infty} \frac{V(z \mid x, y)}{e^{\alpha|z|}} = 0.$$

Infatti

$$|V(z \mid x, y)| \leq \sum_0^\infty{}_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!}$$

$$= \sum_0^{m-1}{}_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!} + \sum_0^\infty{}_n \frac{|z|^{m+n+1}}{(m+n+1)!} \frac{M^{m+n+1}(x-y)^{m+n+1}}{(m+n)!}.$$

(1) *Sulla inversione degli integrali definiti*, « Rend. Acc. dei Lincei », vol. V, 1896, pp. 177–185. [In queste « Opere »: vol. secondo, XIX, pp. 255–262].

Ora scelto ε comunque piccolo potremo determinare m in modo che si abbia

$$\frac{M^{m+n+1}(y-x)^{m+n+1}}{(m+n)!} < \varepsilon\alpha^{m+n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots, \infty)$$

quindi

$$|V(z|x,y)| < \sum_0^{m-1}{}_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!} + \varepsilon\sum_0^{\infty}{}_n \frac{|z|^{m+n+1}}{(m+n+1)!}\alpha^{m+n+1},$$

d'altra parte

$$e^{\alpha|z|} = \sum_0^{\infty}{}_n \frac{|\alpha z|^n}{n!} > \sum_0^{\infty}{}_n \frac{|z|^{m+n+1}}{(m+n+1)!}\alpha^{m+n+1}$$

e per conseguenza

$$\frac{|V(z|x,y)|}{e^{\alpha|z|}} < \varepsilon + \frac{\displaystyle\sum_0^{m-1}{}_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!}}{\displaystyle\sum_0^{\infty}\frac{|z|^{m+n+1}\alpha^{m+n+1}}{(m+n+1)!}}$$

$$< \varepsilon + \frac{\displaystyle\sum_0^{m-1}{}_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!}}{\displaystyle\frac{|z|^{m+1}\alpha^{m+1}}{(m+1)!}}.$$

Ma noi possiamo prendere $|z|$ così grande che l'ultimo termine

$$\frac{\displaystyle\sum_0^{m-1}{}_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!}}{\displaystyle\frac{|z|^{m+1}\alpha^{m+1}}{(m+1)!}} = \sum_0^{m-1}\frac{(m+1)!}{|z|^{m-n}}\frac{M^{n+1}(y+x)^n}{n!\,(n+1)!\,\alpha^{m+1}}$$

si riduca minore di una quantità piccola ad arbitrio e perciò col crescere indefinito di $|z|$ la quantità $V(z)|x,y)/e^{\alpha|z|}$ tenderà a zero.

Corollario. – *Posto* $V(\log \rho/r|x,y)$ *con* ρ *e* r *reali e positivi, se* ρ *cresce indefinitamente (oppure tende a* 0), V *si manterrà finita, oppure diverrà infinita di ordine inferiore a qualsiasi potenza positiva di* ρ *(oppure di* $1/\rho$)

§ 2. – Il teorema d'addizione della funzione $V(z|x,y)$.

Si eseguisca il prodotto

$$V(z|x,\xi)\,V(u|\xi,y);$$

avremo

$$= \sum_0^{\infty}{}_n\sum_0^{n}{}_i \frac{z^{i+1}u^{n+1-i}}{(i+1)!\,(n+1-i)!}S_i(x,\xi)\,S_{n-1}(\xi,y),$$

quindi

$$\int_x^y \mathrm{V}(z \mid x, \xi)\, \mathrm{V}(u \mid \xi, y)\, d\xi = \sum_0^\infty \mathrm{S}_{n+1}(x, y) \sum_0^n \frac{z^{i+1}\, u^{n+i-1}}{(i+1)!\,(n+1-i)!}$$

$$= \sum_0^\infty {}_n \mathrm{S}_n(x, y) \frac{(z+u)^{n+1}}{(n+1)!} - \sum_0^\infty {}_n \mathrm{S}_n(x, y) \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} - \sum_0^\infty {}_n \mathrm{S}_n(x, y) \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Tenendo dunque presente la (I) avremo il

TEOREMA II. - *La funzione olomorfa* $\mathrm{V}(z \mid x, y)$ *gode del seguente teorema di addizione*

$$\text{(A)} \qquad \mathrm{V}(z+u \mid x, y) - \mathrm{V}(z \mid x, y) - \mathrm{V}(u \mid x, y) = \int_x^y \mathrm{V}(z \mid x, \xi)\, \mathrm{V}(u \mid \xi, y)\, d\xi.$$

Posto

$$\frac{\partial \mathrm{V}(z \mid x, y)}{\partial z} = \mathrm{V}'(z \mid x, y) \quad , \quad \frac{\partial^2 \mathrm{V}(z \mid x, y)}{\partial z^2} = \mathrm{V}''(z \mid x, y), \cdots$$

si hanno le formule che si deducono facilmente dalla (A)

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{V}'(z+u \mid x, y) - \mathrm{V}'(z \mid x, y)$$

$$= \int_x^y \mathrm{V}'(z \mid x, \xi)\, \mathrm{V}(u \mid \xi, y)\, d\xi = \int_x^y \mathrm{V}'(z \mid \xi, y)\, \mathrm{V}(u \mid x, \xi)\, d\xi$$

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{V}^{(i+h+1)}(z+u \mid x, y) = \int_x^y \mathrm{V}^{(i)}(z \mid x, \xi)\, \mathrm{V}^{(h)}(u \mid \xi, y)\, d\xi \qquad (i, h = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{V}'(z \mid x, y) - \mathrm{V}'(0 \mid x, y)$$

$$= \int_x^y \mathrm{V}(z \mid x, \xi)\, \mathrm{V}'(0 \mid \xi, y)\, d\xi = \int_x^y \mathrm{V}(z \mid \xi, y)\, \mathrm{V}'(0 \mid x, \xi)\, d\xi$$

$$\text{(4')} \qquad \mathrm{V}'(z \mid x, y) - \mathrm{S}_0(x, y)$$

$$= \int_x^y \mathrm{V}(z \mid x, \xi)\, \mathrm{S}_0(\xi, y)\, d\xi = \int_x^y \mathrm{V}(z \mid \xi, y)\, \mathrm{S}_0(x, \xi)\, d\xi.$$

Reciprocamente può dimostrarsi che il teorema d'addizione (A) individua le funzioni del tipo (I).

§ 3. - SOLUZIONE DI UNA EQUAZIONE INTEGRO-DIFFERENZIALE AUSILIARIA.

Abbiasi l'equazione integro-differenziale

$$\text{(B)} \qquad y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + cf(x, y) + \int_0^x \mathrm{S}_0(\xi, x)\, f(\xi, y)\, d\xi = \varphi(x, y)$$

in cui f è la funzione incognita, finita e continua per x compreso fra 0 ed a ed y compreso fra 0 e b; c è un coefficiente costante positivo, $S_o(\xi, x)$ e $\varphi(x, y)$ sono funzioni note, finite e continue. Moltiplicando ambo i membri per $V(z \mid x, x_1)$ e integrando fra 0 e x_1 risulterà

$$\int_0^{x_1}\left[y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + cf(x,y)\right]V(z \mid x, x_1)\,dx$$

$$+\int_0^{x_1} V(z \mid x, x_1)\,dx\int_0^x S_o(\xi, x) f(\xi, y)\,d\xi = \int_0^{x_1}\varphi(x,y)\,V(z \mid x, x_1)\,dx\,.$$

Ma

$$\int_0^{x_1} V(z \mid x, x_1)\,dx\int_0^x S_o(\xi, x) f(\xi, y)\,d\xi$$

$$=\int_0^{x_1} f(\xi, y)\,d\xi\int_\xi^{x_1} V(z \mid x, x_1)\,S_o(\xi, x)\,dx\,,$$

quindi, tenendo conto della (4'),

$$\int_0^{x_1}\left[\left(y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + cf(x,y)\right)V(z \mid x, x_1) + f(x,y)\,V'(z \mid x, x_1)\right]dx$$

$$-\int_0^{x_1} S_o(x, x_1) f(x, y)\,dx = \int_0^{x_1}\varphi(x,y)\,V(z \mid x, x_1)\,dx\,.$$

Il secondo integrale del primo membro si potrà ricavare dalla (B), onde la equazione precedente potrà scriversi

$$y\frac{\partial f(x_1,y)}{\partial y}\,cf(x_1,y) + \int_0^{x_1}\left[\left(y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + cf(x,y)\right)V(z \mid x, x_1)\right.$$

$$\left.+ f(x,y)\,V'(z \mid x, x_1)\right]dx = \varphi(x_1, y) + \int_0^{x_1}\varphi(x,y)\,V(z \mid x, x_1)\,dx\,.$$

Posto $z = \log(y/y_1)$ sarà $V'(z \mid x, x_1) = y\partial V(z \mid x, x_1)/\partial y$, perciò moltiplicando ambo i membri della equazione precedente per y^{c-1} essa si scriverà

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y^c f(x_1, y)\right) + \int_0^{x_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^c\,V(z \mid x, x_1)\,f(x,y)\right)dx$$

$$=\left[\varphi(x_1, y) + \int_0^{x_1}\varphi(x,y)\,V(z \mid x, x_1)\,dx\right]y^{c-1}.$$

Moltiplichiamo ora ambo i membri della equazione precedente per dy ed integriamo fra 0 ed y_1. Tenendo conto del corollario stabilito nel § 1, avremo

$$y_1^c f(x_1, y_1) = \int_0^{y_1} y^{c-1}\left[\varphi(x,y) + \int_0^{x_1}\varphi(x,y)\,V(z \mid x, x_1)\,dx\right]dy$$

o anche

$$(C) \qquad f(x,y) = \frac{1}{y^c}\int_0^y y^{c-1}\left[\varphi(x,\eta) + \int_0^x \varphi(\xi,\eta)\,V\left(\log\frac{\eta}{y}\mid \xi, x\right)d\xi\right]d\eta\,.$$

Dunque, se la (B) ammette una soluzione finita e continua, questa sarà data dalla (C) e reciprocamente può facilmente riconoscersi che la (C) è finita e continua e soddisfa la (B). Però se togliamo la condizione alla f di esser finita per $y = 0$, la soluzione generale della (B) sarà la somma di due termini, il primo dei quali sarà la espressione (C), ed il secondo sarà

$$F(x,y) = \left(\frac{y_0}{y}\right)^c\left[\psi(x) + \int_0^x \psi(\xi)\,V\left(\log\frac{y_0}{y}\mid \xi, x\right)d\xi\right],$$

in cui $\psi(x)$ è una funzione arbitraria, mentre si ha

$$F(x, y_0) = \psi(x).$$

Per le applicazioni che dovremo fare basterà valerci della espressione (C).

§ 4. - Problema della sfera elastica isotropa nel caso ereditario.

In una Nota testè pubblicata [2] ho espresso, nel caso ereditario, le componenti degli spostamenti dei punti di un corpo elastico isotropo mediante le forze di massa, le tensioni superficiali, e gli spostamenti superficiali.

Noi vogliamo ora, pel caso della sfera, eliminare nella soluzione le tensioni superficiali, esprimendo la soluzione stessa mediante gli spostamenti superficiali [3]. Quanto alle forze di massa le supporremo nulle, giacchè sarà facile ricondurre il caso generale a questo caso particolare. La eliminazione potrà farsi anche senza ricorrere alle formule suddette, ma direttamente.

Supposte nulle le forze di massa, le (3) della Nota citata al principio di questo paragrafo, si scriveranno

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} \Delta^2 u = \dfrac{\partial\vartheta}{\partial x} \\[2ex] \Delta^2 v = \dfrac{\partial\vartheta}{\partial y} \\[2ex] \Delta^2 w = \dfrac{\partial\vartheta}{\partial z}, \end{cases}$$

avendo posto, secondo le notazioni adoperate nella Nota suddetta,

$$\vartheta = (1 - A_1^{-1} A_2)\,\theta\,.$$

(2) *Equazioni integro-differenziali della elasticità nel caso della isotropia*, « Rend. Acc. dei Lincei » seduta del 19 dicembre 1909. [In questo vol.: XXI, pp. 294-303].

(3) *Sulle equazioni integro-differenziali della teoria della elasticità*, § 4, « Rend. Acc. dei Lincei », seduta del 7 novembre 1909. [In questo vol.: XX, pp. 288-293].

Avremo poi

$$\Delta^2 \vartheta = 0 .$$

In conseguenza di un teorema del prof. ALMANSI [4], da lui impiegato per la soluzione del problema ordinario della sfera elastica, sarà dunque

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= U + (r^2 - R^2) \frac{\partial f}{\partial x} \\ v &= V + (r^2 - R^2) \frac{\partial f}{\partial y} \\ w &= W + (r^2 - R^2) \frac{\partial f}{\partial z}, \end{aligned} \right.$$

ove U , V , W , f sono funzioni armoniche, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, R è una costante, e

$$(6) \qquad \frac{1}{2} f + r \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{4} \vartheta .$$

Posta l'origine nel centro della sfera elastica di raggio R, le funzioni U , V , W saranno determinate entro la sfera quando si conosceranno gli spostamenti al contorno.

Scriviamo

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \Theta ,$$

avremo allora, in virtù delle (5),

$$\theta = \Theta + 2 r \frac{\partial f}{\partial r} ,$$

quindi

$$(7) \qquad \vartheta = (1 - A_1^{-1} A_2)\left(\Theta + 2 r \frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

ed eliminando ϑ fra la (6) e la (7), resulterà

$$f + (1 + A_1^{-1} A_2) r \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{2} (1 - A_1^{-1} A_2) \Theta ,$$

da cui segue

$$(8) \qquad r \frac{\partial f}{\partial r} + A_1 (A_1 + A_2)^{-1} f = \frac{1}{2} (A_1 + A_2)^{-1} (A_1 - A_2) \Theta .$$

Poniamo, supponendo per semplicità $t_0 = 0$,

$$A_1 (A_1 + A_2)^{-1} f = c f (t , r) + \int_0^t S_0 (\tau , t) f (\tau , r) \, d\tau$$

$$\frac{1}{2} (A_1 + A_2)^{-1} (A_1 - A_2) \Theta = \Phi (t , r) .$$

(4) *Sulla deformazione della sfera elastica.* «Memorie della Acc. delle Scienze di Torino», anno 1896–97.

$S_0(r, t)$ e $\Phi(t, r)$ saranno funzioni che si calcolano facilmente e che quindi possono supporsi note e inoltre sarà

$$c = \frac{K}{L + 3K}.$$

Nelle formule precedenti f e Φ vanno considerate come funzioni di t, del raggio vettore r e dei due angoli polari, avendo cambiato le coordinate cartesiane x, y, z in quelle polari. Però, per semplicità, sono state scritte solo esplicitamente le due variabili t e r.

La (8) si scriverà dunque

$$r\frac{\partial f(t, r)}{\partial r} + cf(t, r) + \int_0^t S_0(\tau, t) f(\tau, r)\, d\tau = \Phi(t, r).$$

Posto poi

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= f_1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= f_2 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= f_3 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \varphi_1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \varphi_2 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \varphi_3 \end{aligned}\right.$$

per una formula del prof. ALMANSI [5] avremo

$$r\frac{\partial f_i(t, r)}{\partial r} + (c + 1) f_i(t, r) + \int_0^t S_0(\tau, t) f_i(\tau, r)\, d\tau = \varphi_i(t, r) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Applichiamo ora la (C). Si avrà

$$f_i = \frac{1}{r^{c+1}} \int_0^r \rho^c \left[\varphi_i(t, \rho) + \int_0^t \varphi_i(\tau, \rho)\, V\left(\log\frac{\rho}{r} \,\middle|\, \tau, t\right) d\tau\right] d\rho \qquad (i = 1, 2, 3),$$

e quindi

(III) $\qquad u = U + (r^2 - R^2) f_1, \; v = V + (r^2 - R^2) f_2, \; w = W + (r^2 - R^2) f_3$

saranno determinate completamente.

(5) Loco cit., § 2.