ligne courbe est convexe ou concave, si la tangente est parallèle à l'axe ou diamètre, et de quel côté elle fait son concours lorsqu'elle n'est pas parallèle; ce qui serait trop long à décrire par le menu [1], et suffit de dire que nous trouvons des équations impossibles pour avoir pris le concours du mauvais côté, etc., de sorte qu'il paroît, même sans faire un plus grand discours, que l'équation se soudra aisément si le concours peut exister et en aussi peu de temps qu'on puisse imaginer.

XXVII.

DESCARTES A MERSENNE [2].

LUNDI 3 MAI 1638.

(D, III, 60.)

Mon Révérend Père,

1. Il y a déjà quelques jours que j'ai reçu votre dernière du 26 mars, où vous me mandez les exceptions [3] de ceux qui soutiennent l'Écrit

(1) A partir des mots *et suffit*, le texte est conjectural. Le brouillon d'Arbogast porte (les mots *en italique* sont ceux pour lesquels il a particulièrement hésité) :

« Et suffit lors que *nous trouvons* des équations impossibles, *nous ayons* pris le concours du mauvais côté *etc. de sorte* qu'il paroît *même sans faire un* plus grand *retour*, que l'équation *soit toujours* aussi *si le* concours peut exister et en aussi peu de temps qu'on puisse imaginer. »

Arbogast a ajouté en note : « Il me paroît que cette leçon est véritable, nous n'en avons pas mis la fin dans la copie au net, par ce que nous craignions de nous tromper. »

(2) Le texte de cette lettre a été corrigé sur l'original, actuellement conservé à la Bibliothèque Victor Cousin.

(3) Ces *exceptions* se retrouvent développées dans l'*Escrit de quelques amis de Monsieur de Fermat*, imprimé *Lettres de Descartes*, éd. Clerselier, III, 58. Mais Descartes ne l'avait pas encore reçu (*voir* ci-après, Lettre XXIX, 3); c'est donc à tort que la note de l'exemplaire de l'Institut, reproduite par Cousin (*Œuvres de Descartes*, t. VII, p. 23), assigne à cet Écrit la date du 15 mars 1638. Il ne doit avoir été envoyé qu'en avril; Descartes répondit seulement à Mersenne par la lettre III, 59 de l'édition Clerselier; la date du 14 avril 1638, indiquée pour cette lettre par l'annotateur anonyme (*Œuvres de Descartes*, éd. Cousin, t. VII, p. 35) est également trop reculée, Roberval n'ayant pas encore eu connaissance de cette réponse le 1er juin 1638.

de M. Fermat *de maximis etc.* Mais elles ont si peu de couleur que je n'ai pas cru qu'elles valûssent la peine que j'y répondisse. Toutefois, pource que je n'ai point eu depuis de vos nouvelles et que je crains que ce ne soit l'attente de ma réponse qui vous fasse différer de m'écrire, j'aime mieux mettre ici pour une fois tout ce que j'en pense, afin de n'avoir jamais plus besoin d'en parler.

2. Premièrement, lorsqu'ils disent qu'il n'y a point de *maxima* dans la parabole ([1]), et que M. F. trouve les tangentes par une règle du tout séparée de celle dont il use pour trouver *maximam,* ils lui font tort en ce qu'ils veulent faire croire qu'il ait ignoré que la règle qui enseigne à trouver les plus grandes sert aussi à trouver les tangentes des lignes courbes : ce qui seroit une ignorance très grossière, à cause que c'est principalement à cela qu'elle doit servir; et ils démentent son Écrit où, après avoir expliqué sa méthode pour trouver les plus grandes, il met expressément : *Ad superiorem methodum inventionem tangentium ad data puncta in lineis quibuscumque curvis reducimus* ([2]).

Il est vrai qu'il ne l'a pas suivie en l'exemple qu'il en a donné touchant la parabole, mais la cause en est manifeste. Car, étant défectueuse pour ce cas-là et ses semblables (au moins en la façon qu'il la propose), il n'aura pu trouver son compte en la voulant suivre, et cela l'aura obligé à prendre un autre chemin, par lequel rencontrant d'abord la conclusion qu'il savoit d'ailleurs être vraie, il a pensé avoir bien opéré et n'a pas pris garde à ce qui manquoit en son raisonnement.

3. Outre cela, lorsqu'ils disent que la ligne EP, tirée au dedans de la parabole ([3]), est, absolument parlant, plus grande que la ligne EB,

([1]) *Voir* Lettre XXV, fig. 60. L'objection de Descartes contre la règle de Fermat était que pour trouver la tangente BE au point B de la parabole, il fallait chercher le maximum de BE, considéré comme droite à mener du point E à la parabole. Roberval et Pascal repoussaient à bon droit ce raisonnement.

([2]) *Voir* Tome I, page 134, les deux dernières lignes.

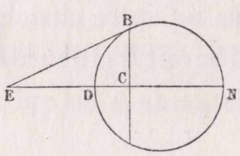
([3]) *Voir* fig. 60, page 127. Il faut supposer la droite EP menée de E à un point de la parabole plus éloigné que B par rapport à E.

ils ne disent rien qui serve à leur cause. Car il n'est pas requis qu'elle soit la plus grande absolument parlant, mais seulement qu'elle soit la plus grande sous certaines conditions, comme ils ont eux-mêmes défini au commencement de l'Écrit [1] qu'ils m'ont envoyé, où ils disent que cette invention de M. F. est *touchant les plus grandes et les moindres lignes ou les plus grands et les moindres espaces que l'on puisse mener ou faire sous certaines conditions proposées.*

Et ils ne sauroient nier que la ligne EB ne soit la plus grande qu'on puisse mener du point E jusques à la parabole sous les conditions que j'ai proposées, à savoir qu'elle n'aille que jusques à elle sans la traverser, comme ils ont assez dû entendre dès le premier coup. Mais pour faire mieux voir que leur excuse n'est aucunement valable, je donnerai ici un autre exemple où je ne parlerai ni de tangente ni de parabole, et où toutefois la règle de M. Fer. manquera en même façon qu'au précédent. Aussi bien vous vous plaignez quand je vous envoie du papier vide, et vous ne m'avez point donné d'autre matière pour remplir cette feuille.

Soit donné le cercle BDN (*fig.* 62), et que le point E qui en est dehors soit aussi donné et qu'il faille tirer de ce point E vers ce cercle

Fig. 62.



une ligne droite, en sorte que la partie de cette ligne qui sera hors de ce cercle entre sa circonférence et le point donné E soit la plus grande. Voici comment la règle donnée par M. Fer. enseigne qu'il y faut procéder.

Ayant mené la ligne EDN par le centre du cercle et sa partie ED étant nommée B, et sa partie DN qui est le diamètre étant C, *statuatur*

[1] Écrit perdu, envoyé par Mersenne à Descartes le 8 février 1638.

quilibet quæstionis terminus esse A [1], ce qui ne se peut mieux faire qu'en menant BC perpendiculaire sur DN et prenant A pour CD.

Et inventâ maximâ etc. Pour trouver donc cette *maximam*, à savoir BE, puisque DC est A et DN est C, le quarré de BC est

$$A \text{ in } C - A\,quad.,$$

et puisque DC est A et DE est B, le quarré de CE est

$$Aq. + Bq. + A \text{ in } B \text{ bis},$$

lequel joint au quarré de BC fait le quarré de la plus grande BE, qui est

$$A \text{ in } C + Bq. + A \text{ in } B \text{ bis}.$$

Ponatur rursus idem qui prius terminus esse $A + E$, *iterumque inveniatur maxima,* ce qui ne se peut faire autrement, en suite de ce qui a précédé, qu'en posant $A + E$ pour DC. Et lors le quarré de BC est

$$C \text{ in } A + C \text{ in } E - Aq. - A \text{ in } E \text{ bis} - Eq.;$$

puis le quarré de CE est

$$Aq. + A \text{ in } E \text{ bis} + Eq. + Bq. + A \text{ in } B \text{ bis} + E \text{ in } B \text{ bis},$$

lequel, étant joint à l'autre, fait

$$A \text{ in } C + E \text{ in } C + Bq. + A \text{ in } B \text{ bis} + E \text{ in } B \text{ bis}$$

pour le quarré de la plus grande BE.

Adæquentur, c'est-à-dire qu'il faut poser

$$A \text{ in } C + Bq. + A \text{ in } B \text{ bis égal à } A \text{ in } C + E \text{ in } C + Bq. + A \text{ in } B \text{ bis} + E \text{ in } B \text{ bis}.$$

Et demptis æqualibus [2], il reste

$$E \text{ in } C + E \text{ in } B \text{ bis égal à rien},$$

ce qui montre manifestement l'erreur de la règle.

5. Et afin qu'il ne puisse plus y avoir personne si aveugle qu'il ne

(1) Descartes reprend successivement, comme dans la Lettre XXV, les différentes phrases du texte de la règle donnée par Fermat (Tome I, page 133).

(2) Fermat avait dit *communibus* (Tome I, p. 133, ligne 3 en remontant).

la voie, je dirai ici en quelle sorte on la peut corriger. Car, bien que j'en aie touché un mot en ce que j'ai écrit à M. Mydorge ([1]), il y est néanmoins en telle façon que je ne désirois pas encore que tout le monde le pût entendre.

Premièrement donc à ces mots *et inventâ maximâ*, il est bon d'ajouter *vel aliâ quâlibet cujus ope possit postea maxima inveniri.* Car souvent, en cherchant ainsi la plus grande, on s'engage en beaucoup de calculs superflus.

Toutefois cela n'est pas un point essentiel; mais le principal et celui qui est le fondement de toute la règle est omis en l'endroit où sont ces mots : *Adæquentur duo homogenea maximæ aut minimæ æqualia,* lesquels ne signifient autre chose sinon que la somme qui explique *maximam in terminis sub A gradu ut libet involutis,* doit être supposée égale à celle qui l'explique *in terminis sub A et E gradibus ut libet coefficientibus.*

Et vous demanderez, s'il vous plaît, à ceux qui la soutiennent, si ce n'est pas ainsi qu'ils l'entendent, avant que de les avertir de ce qui doit y être ajouté : à savoir, au lieu de dire simplement *adæquentur,* il falloit dire : *adæquentur tali modo, ut quantitas per istam æquationem invenienda sit quidem una, cùm ad maximam aut minimam refertur, sed una emergens ex duabus quæ per eamdem æquationem possent inveniri essentque inæquales, si ad minorem maximâ vel ad majorem minimâ referrentur* ([2]).

6. Ainsi, en l'exemple que je viens de donner, ce n'est pas assez de chercher le quarré de la plus grande en deux façons; mais outre cela, il faut dire :

comme ce quarré, lorsqu'il est A in $C + Bq. + A$ in B bis,
est au même quarré, lorsqu'il est A in $C + E$ in $C + Bq. + A$ in B bis $+ E$ in B bis,
ainsi C in $A - Aq.$, qui est le quarré de BC,
est à C in $A + C$ in $E - Aq. - A$ in E bis $- Eq.$, qui est aussi le même quarré.

([1]) *Lettres de Descartes,* éd. Clerselier, III, 57, page 306.

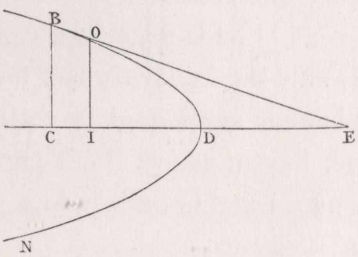
([2]) Descartes essaye de ramener la méthode de Fermat à la sienne propre, c'est-à-dire à la recherche de la condition sous laquelle deux racines d'une équation deviennent égales.

Puis multipliant le premier de ces quarrés par le quatrième, on le doit supposer égal au second multiplié par le troisième, et après, en démêlant cette équation suivant la règle, on trouve son compte, à savoir que CD est $\frac{C \text{ in } B}{B \text{ bis} + C}$, comme il doit être.

7. Tout de même, en l'exemple de la parabole qui avoit été pris par M. F., et que j'avois suivi en mon premier Écrit [1], voici comme il faut opérer :

Soit BDN (*fig.* 60) la parabole donnée, dont DC est le diamètre, et que du point donné B il faille tirer la ligne droite BE, qui rencontre

Fig. 60.



DC au point E et qui soit la plus grande qu'on puisse tirer du même point E jusques à la parabole : — à savoir au dehors de cette parabole, comme ceux qui ne sont point sourds volontaires entendent assez, de ce que je la nomme la plus grande.

Je prends B pour BC et D pour DC, d'où il suit que le côté droit est $\frac{Bq.}{D}$, et sans m'arrêter à chercher la plus grande, je cherche seulement le quarré de BC en d'autres termes que ceux qui sont connus, en prenant A pour la ligne CE, et par après en prenant $A + E$ pour la même : à savoir, je la cherche premièrement par le triangle BCE, car

$$\text{comme } A \text{ est à } B, \quad \text{ainsi } A + E \text{ est à } \frac{A \text{ in } B + E \text{ in } B}{A},$$

qui par conséquent représente BC, et son quarré est

$$\frac{Aq. \text{in } Bq. + A \text{ in } E \text{ in } Bq. \text{bis} + Eq. \text{in } Bq.}{Aq.};$$

[1] Lettre XXV.

puis je la cherche par la parabole, car, quand EC est $A+E$, DC est $D+E$, et le quarré de BC est

$$\frac{Bq.\,\text{in}\,D+Bq.\,\text{in}\,E}{D},$$

qui doit être égal au précédent, à savoir

$$\frac{A\,\text{in}\,E\,\text{in}\,Bq.\,\text{bis}+Eq.\,\text{in}\,Bq.}{Aq.}\ \text{égal à}\ \frac{Bq.\,\text{in}\,E}{D}.$$

D'où l'on trouve, en suivant la règle, que A, c'est-à-dire CE, est double de D, c'est-à-dire CD, comme elle doit être.

Or il est à remarquer que cette condition qui étoit omise, est la même que j'ai expliquée (¹) en la page 346, comme le fondement de la méthode dont je me suis servi pour trouver les tangentes, et qu'elle est aussi tout le fondement sur lequel la règle de M. F. doit être appuyée; en sorte que, l'ayant omise, il fait paroître qu'il n'a trouvé sa règle qu'à tâtons, ou du moins qu'il n'en a pas conçu clairement les principes.

Et ce n'est point merveille qu'il l'ait pu former sans cela, car elle réussit en plusieurs cas, nonobstant qu'on ne pense point à observer cette condition, à savoir en ceux où l'on ne peut venir à l'équation qu'en l'observant, et la plupart sont de ce genre.

8. Pour ce qui est de l'autre article, où j'ai repris la façon dont se sert M. F. pour trouver la tangente de la parabole, vous dites qu'ils assurent tous qu'il faut prendre une propriété spécifique de l'hyperbole ou de l'ellipse pour en trouver les tangentes. En quoi nous sommes d'accord, car j'assure aussi la même chose et j'ai apporté expressément les exemples de l'ellipse et de l'hyperbole, qui concluent très mal, pour montrer que M. Fermat conclut mal aussi touchant la parabole dont il ne donne point de propriété spécifique.

Car de dire (²) qu'il y a plus grande proportion de CD à DI que du

(¹) *Géométrie* de Descartes, éd. Hermann, pages 36 et 37.
(²) *Voir* Tome I, page 135, lignes 4 à 6.

quarré de BC au quarré de OI, ce n'est nullement une propriété spécifique de la parabole, vu qu'elle convient à toutes les ellipses et à une infinité d'autres lignes courbes, au moins lorsqu'on prend le point O entre les points B et E comme il a fait, et s'il l'eût pris au delà, elle eût convenu aux hyperboles. De façon que, pour la rendre spécifique, il ne falloit pas simplement dire *sumendo quodlibet punctum in recta* BE, mais il y falloit ajouter *sive sumatur illud intra puncta* B *et* E, *sive ultra punctum* B *in lineâ* EB *productâ*. Et cela ne peut être sous-entendu en son discours, à cause qu'il y décrit la ligne BE comme terminée des deux côtés, à savoir, d'un côté par le point B qui est donné, et de l'autre par la rencontre du diamètre CD.

Outre cela il falloit faire deux équations et montrer qu'on trouve la même chose en supposant EI être $A + E$, que lorsqu'on le suppose être $A - E$. Car sans cela le raisonnement de cette opération est imparfait et ne conclut rien.

9. Voilà sérieusement la vérité de cette affaire. Au reste, pour ce que vous ajoutez, que ces Messieurs qui ont pris connoissance de notre entretien ont envie de nous rendre amis, M. Fermat et moi, vous les assurerez, s'il vous plaît, qu'il n'y a personne au monde qui recherche ni qui chérisse l'amitié des honnêtes gens plus que je fais, et que je ne crois pas qu'il me puisse savoir mauvais gré de ce que j'ai dit franchement mon opinion de son Écrit, vu qu'il m'y avoit provoqué. C'est un exercice entièrement contraire à mon humeur que de reprendre les autres, et je ne sache point l'avoir encore jamais tant pratiqué qu'en cette occasion; mais je ne la pouvois éviter après son défi, sinon en le méprisant, ce qui l'eût sans doute plus offensé que ma réponse.

Je suis, mon Révérend Père,

Votre très humble et très affectionné serviteur,

DESCARTES.

Du 3 mai 1638.