

XXXVIII bis.

FERMAT A MERSENNE.

DIMANCHE 1 AVRIL 1640.

(Va, p. 173-176.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Je vous dois deux réponses pour les deux dernières Lettres que j'ai reçues de votre part et que j'ai trouvées toutes deux en même temps à mon retour de la campagne; le sujet de la première concerne Monsieur Desargues et celui de la seconde Monsieur de Frenicle.

2. Je suspends la réponse aux questions de Monsieur Desargues, jusques à ce que j'aurai vu par votre faveur le troisième Livre des Coniques de Monsieur Mydorge et les autres <sup>(1)</sup>, s'il y en a d'imprimés depuis les deux premiers qui sont les seuls que j'ai en mon pouvoir. Je vous promets alors de m'étendre sur tout ce qu'il semble que vous desirez de moi, et cependant je suis obligé de vous dire que j'estime beaucoup Monsieur Desargues et d'autant plus qu'il est lui seul inventeur de ses Coniques; son livret, qui passe, dites-vous, pour jargon, m'a paru très intelligible et très ingénieux <sup>(2)</sup>.

(1) Les deux premiers Livres des Coniques de Mydorge avaient été publiés en 1631 sous le titre :

Claudii Mydorgii patricii Parisini Prodrumi Catoptricornum et Dioptricornum sive Conicorum operis ad abdita radii reflexi et refracti mysteria prævii et facem præferentis Libri primus et secundus. D. A. L. G. — Parisiis, Ex typographia I. Dedin, via Nucum, sub signo trium Columbarum, M.DC.XXXI. Cum privilegio Regis (in-folio).

Les deux suivants furent ajoutés dans la réédition de 1639 :

Claudii Mydorgii. . . Libri quatuor priores. D. A. L. G. — Parisiis, Ex typographia I. Dedin, via Nucum, sub insigni parvi Scuti, M.DC.XXXIX. Cum privilegio Regis.

(2) Il s'agit du *Brouillon project d'une atteinte aux euenemens des rencontres d'un cone avec un plan, par le S. G. D. L.*, dont l'édition originale, imprimée à Paris en 1639, est introuvable (Œuvres de Desargues, éd. Poudra, I, pages 97 à 230). — La correspondance de Fermat ne contient aucune autre indication sur les questions que lui avait posées Desargues.

3. Pour Monsieur de Frenicle, ses inventions en Arithmétique me ravissent et je vous déclare ingénument que j'admire ce génie qui, sans aide d'Algèbre, pousse si avant dans la connoissance des nombres entiers, et ce que j'y trouve de plus excellent consiste en la vitesse de ses opérations, de quoi font foi les nombres aliquotaires qu'il manie avec tant d'aisance. S'il vouloit m'obliger de me mettre dans quelqu'une de ses routes, je lui en aurois très grande obligation et ne ferois jamais difficulté de l'avouer, car les voies ordinaires me lassent et, lorsque j'entreprends quelqu'une de ces questions, il me semble que je vois devant moi

Magnum maris æquor arandum (1),

à cause de ces fréquentes divisions qu'il faut faire pour trouver les nombres premiers. Ce n'est pas que mon analyse soit défectueuse, mais elle est lente et longue pour ce regard et j'ose dire sans vanité que, si je pouvois l'accompagner de cette facilité, je trouverois de fort belles choses. Je voudrois avoir mérité par mes services la faveur que je lui demande et ne désespère pas même de la payer par quelques inventions qui peut-être seront nouvelles à Monsieur Frenicle.

(B, f<sup>o</sup> 3 r<sup>o</sup>) (2).

4. Pour la méthode que j'oppose à la *syncrise* (3), ce n'est seulement que pour éviter les divisions qui sont souvent très fâcheuses en cette sorte de questions.

Soit, par exemple :

$$bda - ba^2 - a^3 = \text{æq.} \quad z^{\text{sol.}}$$

Cette équation peut avoir trois solutions, desquelles soit par exemple  $n$  l'une qui soit donnée. Il faut trouver les autres deux.

(1) Virgile, *Enéide*, II, 780 : Longa tibi exsilia et vastum maris æquor arandum.

(2) Le fragment qui suit est inédit; il est reproduit d'après l'extrait de la Lettre du 1<sup>er</sup> avril 1640, que contient le manuscrit Vieq-d'Azyr-Boncompagni. Il est très improbable que les notations algébriques, dans lesquelles dominent les habitudes cartésiennes, soient réellement celles de Fermat.

(3) Voir Tome I, page 147, note 3. — Comparer Lettre XXXVII, 4.

Pour y parvenir, il est nécessaire de baisser cette équation d'un degré, ce que Viète fait par division et M. Descartes aussi; voici comme je procède :

$n$  est égal à  $a$ ; or il y a deux lignes égales à  $a$ , inégales à  $n$ . Posons que l'une de ces deux lignes soit  $n + e$ , et faisons maintenant l'équation comme si  $n + e$  étoit  $a$ , nous aurons

$$bdn + bde - be^2 - e^3 - bn^2 - 2bne - 3ne^2 - n^3 - 3n^2e \quad \text{æq.} \quad z^{\text{sol.}}$$

Or, puisque  $a$  est égal à  $n$ , donc

$$bda - ba^2 - a^3 \quad \text{sera égal à} \quad bdn - bn^2 - n^3.$$

Mais

$$bda - ba^2 - a^3 \quad \text{est égal à} \quad z^{\text{sol.}},$$

par la première équation; donc

$$bdn - bn^2 - n^3 \quad \text{est égal à} \quad z^{\text{sol.}}$$

Otez donc d'un côté de la seconde équation  $bdn - bn^2 - n^3$ , et de l'autre côté  $z^{\text{sol}}$ , il restera

$$bde - be^2 - e^3 - 2bne - 3ne^2 - 3n^2e \quad \text{æq.} \quad 0.$$

Et, le tout divisé par  $e$ , qui est une division simple et non composée comme celle de Viète et des autres, restera

$$bd - be - e^2 - 2bn - 3ne - 3n^2 \quad \text{æq.} \quad 0$$

et ainsi l'équation ne sera que quarrée et, lorsque  $e$  sera connu, en y ajoutant  $n$ , vous aurez la ligne cherchée.

Ce n'est pas que j'estime beaucoup ceci, ni que j'aie tout dit en vous donnant ce seul exemple, mais c'est seulement pour la facilité de l'opération.

5. Je viens aux propositions des quarrés (1) : sur quoi je vous puis protester que je n'ai jamais vu ni Stiphelius ni cette *Clavicule* et ne sais

(1) Voir Lettre XXXVIII, 1 à 3. — Ici reprend le texte donné par les *Varia*. Le carré magique est inédit.

ce que ces livres contiennent et, pour faire voir que j'ai vu peut-être plus loin qu'eux et satisfaire à la semonce de M. Frenicle, je vous envoie le quarré de 14 aux conditions requises, duquel, si vous ôtez deux enceintes, le restant sera aussi quarré aux conditions requises et, si vous ôtez encore deux enceintes de ce restant, ce qui restera sera encore quarré aux mêmes conditions.

1	2	185	186	5	6	7	190	191	192	11	194	195	14
15	16	26	25	24	177	176	175	174	173	172	171	27	28
42	156	31	165	159	34	35	162	37	164	158	40	167	29
56	142	152	46	52	149	148	147	146	47	53	45	153	43
57	128	59	130	61	135	134	63	132	66	137	68	139	70
71	125	73	123	122	76	120	119	19	75	116	82	114	84
85	111	96	109	108	107	91	92	90	103	102	87	100	98
112	97	110	95	89	93	105	106	104	94	88	101	86	99
126	83	115	81	80	118	77	78	121	117	74	124	72	113
140	69	138	60	131	62	64	133	65	136	67	129	58	127
141	55	54	144	150	51	50	49	48	145	151	143	44	154
168	41	157	32	33	160	161	36	163	38	39	166	30	155
182	170	180	179	178	23	22	21	20	19	18	17	181	169
183	184	3	4	187	188	189	8	9	10	193	12	13	196

Le premier quarré fait en ces lignes 1379; le deuxième fait 985; le troisième fait 591.

6. Or, ne doutez point que je ne possède la méthode générale pour faire toute sorte de quarrés en cette sorte et aux conditions qu'ôtant tel nombre d'enceintes qu'on voudra, le restant soit encore quarré, etc.

Mais, à n'ôter qu'une seule enceinte, je crois la question impossible : à quoi peut-être M. Frenicle ne prit pas garde <sup>(1)</sup>, lorsqu'il me proposa d'ôter trois enceintes de 22, et puis deux du restant, et puis une du restant. Car, aux deux premiers cas, la question est faisable en beaucoup de manières, mais au troisième je ne l'estime point possible : de quoi la raison dépend de ma règle, laquelle je n'ai pourtant ni trouvée ni cherchée que lorsque j'ai reçu la Lettre de M. Frenicle, et c'est pour cela que je ne détermine pas absolument l'impossibilité de ce cas, jusqu'à ce que j'aurai eu encore quelques jours pour y songer de nouveau.

7. Mais ce que je trouve de plus beau en ma règle, et que je ne crois pas avoir été touché ni par Stiphelius ni par aucun autre, est que je puis déterminer en combien de façons, et non plus, chaque carré peut être disposé aux conditions requises, comme par exemple, s'il m'est permis de demander à M. Frenicle, en combien de sortes différentes 22 peut être rangé.

8. Je passe bien plus outre, et passant aux solides qui le sont effectivement, j'ai trouvé une règle générale pour ranger tous les cubes à l'infini, en telle façon que toutes les lignes de leurs carrés, tant diagonales, de largeur, de longueur que de hauteur, fassent un même nombre, et déterminer outre cela en combien de façons différentes chaque cube doit être rangé, ce qui, me semble, est une des plus belles choses de l'Arithmétique.

Vous en trouverez un exemple <sup>(2)</sup> sur le cube 64, à côté du carré de 14.

Il faut ranger les quatre carrés qui font la solidité du cube, en telle façon que le premier soit dessous ; le deuxième soit mis sur le premier, en telle façon que 53 soit sur 4 et 56 sur 1 ; il faut ensuite mettre le troisième sur le deuxième, en telle façon que 60 soit sur 53 et 57

<sup>(1)</sup> Voir Lettre XXXVIII, 3. — Comparer Lettre XL, 3.

<sup>(2)</sup> Les carrés ci-après se trouvaient, ainsi que le carré magique reproduit plus haut <sup>(5)</sup>, transcrits sur une feuille détachée ; ils ne sont pas non plus donnés dans les *Varia*.

sur 56; et enfin il faut mettre le quatrième sur le troisième, en sorte que 13 soit sur 60 et 16 sur 57. Cela étant fait, vous aurez un cube qui sera divisé en douze quarrés, lesquels se trouveront tous disposés aux conditions requises; il y aura en tout 72 lignes différentes, chacune desquelles fera une même somme, savoir 130.

1.	2.	3.	4.																																																																
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">62</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">63</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">41</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">23</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">22</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">44</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">21</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">43</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">42</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">24</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">64</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">61</td></tr> </table>	4	62	63	1	41	23	22	44	21	43	42	24	64	2	3	61	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">53</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">11</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">56</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">32</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">34</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">35</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">29</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">36</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">30</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">31</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">32</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">9</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">55</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">54</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">12</td></tr> </table>	53	11	10	56	32	34	35	29	36	30	31	32	9	55	54	12	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">60</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">7</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">57</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">17</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">47</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">46</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">20</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">45</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">19</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">18</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">48</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">58</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">59</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</td></tr> </table>	60	6	7	57	17	47	46	20	45	19	18	48	8	58	59	5	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">13</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">51</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">16</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">40</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">26</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">27</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">37</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">28</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">38</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">39</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">25</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">49</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">15</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">14</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">52</td></tr> </table>	13	51	50	16	40	26	27	37	28	38	39	25	49	15	14	52
4	62	63	1																																																																
41	23	22	44																																																																
21	43	42	24																																																																
64	2	3	61																																																																
53	11	10	56																																																																
32	34	35	29																																																																
36	30	31	32																																																																
9	55	54	12																																																																
60	6	7	57																																																																
17	47	46	20																																																																
45	19	18	48																																																																
8	58	59	5																																																																
13	51	50	16																																																																
40	26	27	37																																																																
28	38	39	25																																																																
49	15	14	52																																																																

9. Vous voyez combien ceci est au-dessus du tétraèdre et de l'hexagone <sup>(1)</sup> de M. Frenicle, desquels le premier n'est pas solide en effet, mais par fiction seulement, quoique je ne doute pas qu'il ne puisse être haussé en solide; mais, dans ces deux propositions, il y a beaucoup de nombres superflus dans les entre-deux des lignes qui aboutissent ou au sommet ou au centre, ce qui fait qu'elles ne sont pas si parfaites que la mienne, en laquelle je puis encore ôter les enceintes requises et faire que le restant demeure aussi cube, etc.

Je soumets pourtant le tout à mondit S<sup>r</sup> de Frenicle et crois que, si j'avois l'honneur d'être connu de lui, il auroit omis quelques paroles qui sont dans sa Lettre. Je ne resterai pas de lui assurer l'estime que je fais de lui et de le conjurer de me faire part de sa méthode.

10. Pour le solide de la roulette, je le réduirois bien à des solides plus simples, mais à des sphères, cônes ou cylindres qui soient créés par des lignes droites données, il me semble qu'il est impossible.

Excusez si le papier me manque, etc.

11. P.-S. Depuis ma Lettre écrite <sup>(2)</sup>, un de mes vieux papiers m'est

<sup>(1)</sup> Voir Lettre XXXVIII, 5 et 6.

<sup>(2)</sup> Ce post-scriptum paraît appartenir à une Lettre antérieure et avoir été l'occasion de la Lettre XXXVIII de Frenicle.