

A la seconde question, je vous réponds que le dernier de ces nombres est composé et se fait du produit de ces deux :

898 423 et 112 303,

qui sont premiers ⁽¹⁾.

Je suis toujours, mon Révérend Père,

Votre très humble et très affectionné serviteur,

FERMAT.

A Toulouse, ce 7 avril 1643.

LVII.

FRAGMENT D'UNE LETTRE DE FERMAT ⁽²⁾.

< 1643 >

(A, f^o 74.)

Tout nombre impair non carré est différent d'un carré par un carré, ou est la différence de deux carrés, autant de fois qu'il est

(1) Sur le problème ainsi posé, il était aisé de trouver la composition du dernier nombre. En effet, si, pour trouver le rapport du produit à la somme des parties aliquotes, on part du premier nombre qui est $2^{26} \times 5^3$, on remarque que 2^{26} a, pour somme de ses parties aliquotes, $223 \times 616\,318\,177$. Le second de ces deux facteurs correspond de même à la somme $2 \times 7^3 \times 898\,423$. Ce dernier facteur ne se retrouvant pas, comme les précédents, parmi ceux du produit proposé, il est naturel d'essayer de diviser par lui le dernier nombre donné, dès que l'on ignore si celui-ci est premier. Par conséquent, quelque méthode que possédât Fermat pour rechercher si un nombre est premier ou non (*voir* Pièce LVII), il est improbable qu'il ait employé cette méthode et fait des calculs plus longs que ceux que nous avons indiqués.

(2) Le fragment qui suit a été publié par M. Charles Henry (*Recherches etc.*, p. 191) d'après le brouillon d'Arbogast, transcrit d'une copie perdue de Mersenne. Il ne renferme que l'exposé d'une méthode pour la recherche des diviseurs d'un nombre, en commençant par les plus grands, et répond ainsi à une question faite par Mersenne pour le compte de Frenicle (*Cp.* LVI, 4) et sur laquelle les correspondants de Fermat ont dû revenir. Mais la copie d'Arbogast porte le titre : *Des nombres des parties aliquotes*, qui semble indiquer que ce fragment faisait partie d'une communication beaucoup plus étendue, adressée soit à Mersenne, soit à Frenicle. Dans ce cas, la date en serait probablement postérieure à celle que suppose le rang assigné à cette pièce pour la rapprocher de la Lettre LVI.

composé de deux nombres, et, si les quarrés sont premiers entre eux, les nombres compositeurs le sont aussi. Mais si les quarrés ont entre eux un commun diviseur, le nombre en question sera aussi divisible par le même commun diviseur, et les nombres compositeurs seront divisibles par le côté de ce commun diviseur.

Par exemple : 45 est composé de 5 et de 9, de 3 et de 15, de 1 et de 45. Partant, il sera trois fois la différence de deux quarrés : savoir de 4 et de 49, qui sont premiers entre eux, comme aussi sont les compositeurs correspondants 5 et 9; plus, de 36 et de 81, qui ont 9 pour commun diviseur, et les compositeurs correspondants, 3 et 15, ont le côté de 9, savoir 3, pour commun diviseur; enfin 45 est la différence de 484 et 529, qui ont 1 et 45 pour compositeurs correspondants.

Il est fort aisé de trouver les quarrés satisfaisants, quand on a le nombre et ses parties, et d'avoir les parties lorsqu'on a les quarrés.

Cette proposition se trouve quasi tout par tout. On en pourrait quasi autant dire des pairesments pairs, excepté 4, avec quelque petite modification.

Cela posé, qu'un nombre me soit donné, par exemple 2 027 651 281, on demande s'il est premier ou composé, et de quels nombres il est composé, au cas qu'il le soit.

J'extraits la racine, pour connoître le moindre des dits nombres, et trouve 45 029 avec 40 440 de reste, lequel j'ôte du double plus 1 de la racine trouvée, savoir de 90 059 : reste 49 619, lequel n'est pas quarré, parce que aucun quarré ne finit par 19, et partant je lui ajoute 90 061, savoir 2 plus que 90 059 qui est le double plus 1 de la racine 45 029. Et parce que la somme 139 680 n'est pas encore quarrée, comme on le voit par les finales, je lui ajoute encore le même nombre augmenté de 2, savoir 90 063, et je continue ainsi d'ajouter tant que la somme soit un quarré, comme on peut voir ici (1). Ce qui n'arrive qu'à 1040 400, qui est quarré de 1020, et partant le nombre donné est composé; car il est aisé, par l'inspection des dites sommes, de voir qu'il n'y a au-

(1) Fermat avait dû effectuer en marge les calculs indiqués, qui n'ont pas été reproduits sur la copie.

cune qui soit nombre quarré que la dernière, car les quarrés ne peuvent souffrir les finales qu'elles ont, si ce n'est 499 944 qui néanmoins n'est pas quarré.

Pour savoir maintenant les nombres qui composent 2 027 651 281, j'ôte le nombre que j'ai premièrement ajouté, savoir 90 061, du dernier ajouté 90 081. Il reste 20, à la moitié duquel plus 2, savoir à 12, j'ajoute la racine premièrement trouvée 45 029. La somme est 45 041, auquel nombre ajoutant et ôtant 1020, racine de la dernière somme 1 040 400, on aura 46 061 et 44 021, qui sont les deux nombres plus prochains qui composent 2 027 651 281. Ce sont aussi les seuls, pource que l'un et l'autre sont premiers.

Si l'on alloit par la voie ordinaire, pour trouver la composition d'un tel nombre, au lieu de onze additions, il eût fallu diviser par tous les nombres depuis 7 jusqu'à 44 021.

Plusieurs abrégés se peuvent trouver, comme lorsqu'on ne fait qu'une addition au lieu de dix, aux endroits où les sommes ont leurs finales quarrées, quand les compositeurs sont beaucoup éloignés l'un de l'autre.

LVIII.

FERMAT A < SAINT-MARTIN > (1).

DIMANCHE 31 MAI 1643.

(B, f° 9 v°.)

1. *Donner le sixième triangle qui a l'unité pour différence de ses deux petits côtés.*

(1) Fragment inédit d'une lettre perdue. Il porte comme titre, dans le manuscrit : « *Extraict d'une lre du 31 may 1643 à M. DF.* », ce qui indiquerait Frenicle comme le destinataire. Mais, si l'on compare la Lettre L de Frenicle à Fermat, il est très improbable que le premier ait proposé au second deux questions dont il lui avait auparavant donné une solution. Il est établi d'autre part, par les lettres suivantes (LIX et LX), que les questions énoncées par Fermat dans la présente (3) étaient proposées à S^t-Martin et à Frenicle. Le destinataire effectif fut donc plutôt S^t-Martin et la confusion s'explique d'ailleurs facilement.