

mets vos propres termes) que si j'entreprends de trouver le six en huit coups et que j'en aie joué trois sans le rencontrer, si mon joueur me propose de ne point jouer mon quatrième coup et qu'il veuille me désintéresser à cause que je pourrais le rencontrer, il m'appartiendra  $\frac{125}{1296}$  de la somme entière de nos mises.

Ce qui pourtant n'est pas vrai, suivant mon principe. Car, en ce cas, les trois premiers coups n'ayant rien acquis à celui qui tient le dé, la somme totale restant dans le jeu, celui qui tient le dé et qui convient de ne pas jouer son quatrième coup, doit prendre pour son indemnité  $\frac{1}{6}$  du total.

Et s'il avoit joué quatre coups sans trouver le point cherché et qu'on convint qu'il ne joueroit pas le cinquième, il auroit de même pour son indemnité  $\frac{1}{6}$  du total. Car la somme entière restant dans le jeu, il ne suit pas seulement du principe, mais il est de même du sens naturel que chaque coup doit donner un égal avantage.

Je vous prie donc que je sache si nous sommes conformes au principe, ainsi que je crois, ou si nous différons seulement en l'application.

Je suis, de tout mon cœur, etc.

FERMAT.

---

LXX.

PASCAL A FERMAT.

MERCREDI 29 JUILLET 1654.

(*Va*, p. 179-183.)

MONSIEUR,

1. L'impatience me prend aussi bien qu'à vous et, quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de

II. — FERMAT.

37

m'étendre, mais, en un mot, vous avez trouvé les deux partis <sup>(1)</sup> des dés et des parties dans la parfaite justesse : j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous.

J'admire bien davantage la méthode des parties que celle des dés; j'avois vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le chevalier de Méré, qui est celui qui m'a proposé ces questions, et aussi M. de Roberval : mais M. de Méré n'avoit jamais pu trouver la juste valeur des parties ni de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvois seul qui eusse connu cette proportion.

2. Votre méthode est très-sûre et est celle qui m'est la première venue à la pensée dans cette recherche; mais, parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ai trouvé un abrégé et proprement une autre méthode bien plus courte et plus nette, que je voudrois vous pouvoir dire ici en peu de mots : car je voudrois désormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvoit, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris.

Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en *trois parties*, et chacun a mis 32 pistoles au jeu :

Posons que le premier en ait *deux* et l'autre *une*; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir 64 pistoles; si l'autre la gagne, ils sont *deux parties à deux parties*, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir chacun 32 pistoles.

(1) *Parti* signifie ici répartition entre des joueurs, d'après leurs chances relatives, de la masse des enjeux, dans le cas où le jeu est abandonné avant sa fin.

Le *parti des dés* dont il s'agit ici paraît avoir été simplement demandé dans le cas où celui qui tient les dés a parié d'amener un point déterminé en un nombre de coups convenu (voir Lettre LXIX et ci-après, LXX, 7).

Quant au *parti des parties*, la question est clairement exposée ci-après (2 à 6). Comparer, à la suite du *Traité du triangle arithmétique* de Pascal, l'application qui en est faite à ce même problème (*Œuvres de Pascal*, édition de 1779, V, p. 32).

Considérez donc, Monsieur, que, si le premier gagne, il lui appartient 64; s'il perd, il lui appartient 32. Donc, s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : « Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne; mais » pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez, le » hasard est égal. Partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me » donnez, outre cela, mes 32 qui me sont sûres. » Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.

Posons maintenant que le premier ait *deux* parties et l'autre *point*, et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier la gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent, auquel le premier aura *deux* parties et l'autre *une*.

Or, nous avons déjà montré qu'en ce cas il appartient, à celui qui a les *deux* parties, 48 pistoles : donc, s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi : « Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64; » si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48 : donc donnez-moi » les 48 qui me sont certaines, au cas même que je perde, et partageons » les 16 autres par la moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous » les gagniez comme moi. » Ainsi il aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles.

Posons enfin que le premier n'ait qu'*une* partie et l'autre *point*. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel que, si le premier la gagne, il aura *deux* parties à *point*, et partant, par le cas précédent, il lui appartient 56; s'il la perd, ils sont partie à partie : donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : « Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont » sûres, et partageons le reste de 56 par la moitié. De 56 ôtez 32, » reste 24; partagez donc 24 par la moitié, prenez-en 12 et moi 12, » qui, avec 32, font 44. »

Or, par ce moyen, vous voyez, par les simples soustractions, que, pour la première partie, il appartient sur l'argent de l'autre 12 pistoles; pour la seconde, autres 12; et pour la dernière, 8.

Or, pour ne plus faire de mystère, puisque vous voyez aussi bien

tout à découvert et que je n'en faisais que pour voir si je ne me trompois pas, la valeur (j'entends sa valeur sur l'argent de l'autre seulement) de la dernière partie de *deux* est double de la < dernière > partie de *trois* et quadruple de la dernière partie de *quatre* et octuple de la dernière partie de *cing*, etc.

3. Mais la proportion des premières parties n'est pas si aisée à trouver : elle est donc ainsi, car je ne veux rien déguiser, et voici le problème dont je faisais tant de cas, comme en effet il me plaît fort :

*Étant donné tel nombre de parties qu'on voudra, trouver la valeur de la première.*

Soit le nombre des parties donné, par exemple 8. Prenez les *huit* premiers nombres pairs et les *huit* premiers nombres impairs, savoir :

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16

et

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.

Multipliez les nombres pairs en cette sorte : le premier par le second, le produit par le troisième, le produit par le quatrième, le produit par le cinquième, etc. ; multipliez les nombres impairs de la même sorte : le premier par le second, le produit par le troisième, etc.

Le dernier produit des pairs est le *dénominateur* et le dernier produit des impairs est le *numérateur* de la fraction qui exprime la valeur de la première partie de *huit* : c'est-à-dire que, si on joue chacun le nombre de pistoles exprimé par le produit des pairs, il en appartiendrait sur l'argent de l'autre le nombre exprimé par le produit des impairs.

Ce qui se démontre, mais avec beaucoup de peine, par les combinaisons telles que vous les avez imaginées, et je n'ai pu le démontrer par cette autre voie que je viens de vous dire, mais seulement par celle des combinaisons. Et voici les propositions qui y mènent, qui sont proprement des propositions arithmétiques touchant les combinaisons, dont j'ai d'assez belles propriétés :

4. Si d'un nombre quelconque de lettres, par exemple de 8 :

A, B, C, D, E, F, G, H,

vous en prenez toutes les combinaisons possibles de 4 lettres et ensuite toutes les combinaisons possibles de 5 lettres, et puis de 6, de 7 et de 8, etc., et qu'ainsi vous preniez toutes les combinaisons possibles depuis la multitude qui est la moitié de la toute jusqu'au tout, je dis que, si vous joignez ensemble la moitié de la combinaison de 4 avec chacune des combinaisons supérieures, la somme sera le nombre tantième de la progression quaternaire à commencer par le binaire, qui est la moitié de la multitude.

Par exemple, et je vous le dirai en latin, car le français n'y vaut rien :

*Si quotlibet litterarum, verbi gratia octo :*

A, B, C, D, E, F, G, H,

*sumantur omnes combinationes quaternariï, quinquenariï, senariï, etc., usque ad octonarium, dico, si jungas dimidium combinationis quaternariï, nempe 35 (dimidium 70), cum omnibus combinationibus quinquenariï, nempe 56, plus omnibus combinationibus senariï, nempe 28, plus omnibus combinationibus septenariï, nempe 8, plus omnibus combinationibus octonariï, nempe 1, factum esse quartum numerum progressionis quaternariï cujus origo est 2 : dico quartum numerum, quia 4 octonariï dimidium est.*

*Sunt enim numeri progressionis quaternariï, cujus origo est 2, isti :*

2, 8, 32, 128, 512, etc.,

*quorum 2 primus est, 8 secundus, 32 tertius et 128 quartus : cui 128 æquantur*

+ 35 dimidium combinationis 4 litterarum  
 + 56 combinationis 5 litterarum  
 + 28 combinationis 6 litterarum  
 + 8 combinationis 7 litterarum  
 + 1 combinationis 8 litterarum.

5. Voilà la première proposition qui est purement arithmétique; l'autre regarde la doctrine des parties et est telle :

Il faut dire auparavant : si on a *une* partie de 5, par exemple, et qu'ainsi il en manque 4, le jeu sera infailliblement décidé en 8, qui est double de 4.

La valeur de la première partie de 5 sur l'argent de l'autre est la fraction qui a pour numérateur la moitié de la combinaison de 4 sur 8 (je prends 4 parce qu'il est égal au nombre des parties qui manque, et 8 parce qu'il est double de 4) et pour dénominateur ce même numérateur plus toutes les combinaisons supérieures.

Ainsi, si j'ai *une* partie de 5, il m'appartient, sur l'argent de mon joueur,  $\frac{35}{128}$  : c'est-à-dire que, s'il a mis 128 pistoles, j'en prends 35 et lui laisse le reste, 93.

Or cette fraction  $\frac{35}{128}$  est la même que celle-là :  $\frac{105}{384}$ , laquelle est faite par la multiplication des pairs pour le dénominateur et la multiplication des impairs pour le numérateur.

Vous verrez bien sans doute tout cela, si vous vous en donnez tant soit peu la peine : c'est pourquoi je trouve inutile de vous en entretenir davantage.

6. Je vous envoie néanmoins une de mes vieilles Tables; je n'ai pas le loisir de la copier, je la referai.

Vous y verrez comme toujours que la valeur de la première partie est égale à celle de la seconde, ce qui se trouve aisément par les combinaisons.

Vous verrez de même que les nombres de la première ligne augmentent toujours; ceux de la seconde de même; ceux de la troisième de même.

Mais ensuite ceux de la quatrième diminuent; ceux de la cinquième, etc. Ce qui est étrange.

Si on joue chacun 256 en

	6 parties.	5 parties.	4 parties.	3 parties.	2 parties.	1 partie.
1 <sup>re</sup> partie.....	63	70	80	96	128	256
2 <sup>e</sup> partie.....	63	70	80	96	128	
3 <sup>e</sup> partie.....	56	60	64	64		
4 <sup>e</sup> partie.....	42	40	32			
5 <sup>e</sup> partie.....	24	16				
6 <sup>e</sup> partie.....	8					

Il m'appartient, sur les 256 pistoles de mon joueur, pour la

Si on joue 256 chacun en

	6 parties.	5 parties.	4 parties.	3 parties.	2 parties.	1 partie.
la 1 <sup>re</sup> partie.....	63	70	80	96	128	256
les 2 premières parties....	126	140	160	192	256	
les 3 premières parties....	182	200	224	256		
les 4 premières parties....	224	240	256			
les 5 premières parties....	248	256				
les 6 premières parties....	256					

Il m'appartient, sur les 256 de mon joueur, pour

7. Je n'ai pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnoit fort M. < de Méré >, car il a très bon esprit, mais il n'est pas géomètre (c'est, comme vous savez, un grand défaut) et

même il ne comprend pas qu'une ligne mathématique soit divisible à l'infini et croit fort bien entendre qu'elle est composée de points en nombre fini, et jamais je n'ai pu l'en tirer. Si vous le pouviez faire, on le rendroit parfait.

Il me disoit donc qu'il avoit trouvé fausseté dans les nombres par cette raison :

Si on entreprend de faire un *six* avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4, comme de 671 à 625.

Si on entreprend de faire *sonnés* avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en 24.

Et néanmoins 24 est à 36 (qui est le nombre des faces de deux dés) comme 4 à 6 (qui est le nombre des faces d'un dé).

Voilà quel étoit son grand scandale qui lui faisoit dire hautement que les propositions n'étoient pas constantes et que l'Arithmétique se démentoit : mais vous en verrez bien aisément la raison par les principes où vous êtes.

Je mettrai par ordre tout ce que j'en ai fait, quand j'aurai achevé des Traités géométriques où je travaille il y a déjà quelque temps.

8. J'en ai fait aussi d'arithmétiques, sur le sujet desquels je vous supplie de me mander votre avis sur cette démonstration.

Je pose le lemme que tout le monde sait : que la somme de tant de nombres qu'on voudra de la progression continue depuis l'unité, comme

$$1, 2, 3, 4,$$

étant prise deux fois, est égale au dernier, 4, mené dans le prochainement plus grand, 5 : c'est-à-dire que la somme des nombres contenus dans  $A$ , étant prise deux fois, est égale au produit

$$A \text{ in } (A + 1),$$

Maintenant je viens à ma proposition :

*Duorum quorumlibet cuborum proximorum differentia, unitate demptâ, sextupla est omnium numerorum in minoris radice contentorum.*



*Sint duæ radices R, S unitate differentes : dico*

*$R^3 - S^3 - 1$  æquari summæ numerorum in S contentorum sexies sumptæ.*

*Etenim S vocetur A : ergo R est*

$$A + 1.$$

*Igitur cubus radicis R, seu A + 1, est*

$$A^3 + 3A^2 + 3A + 1^3.$$

*Cubus vero S, seu A, est*

$$A^3,$$

*et horum differentia est*

$$3A^2 + 3A + 1^3,$$

*id est  $R^3 - S^3$ ; igitur, si auferatur unitas,*

$$3A^2 + 3A \quad \text{æq.} \quad R^3 - S^3 - 1.$$

*Sed duplum summæ numerorum in A seu S contentorum æquatur, ex lemme,*

$$A \text{ in } (A + 1), \quad \text{hoc est} \quad A^2 + A :$$

*igitur sextuplum summæ numerorum in A contentorum æquatur*

$$3A^2 + 3A.$$

*Sed*

$$3A^2 + 3A \quad \text{æq.} \quad R^3 - S^3 - 1;$$

*igitur*

*$R^3 - S^3 - 1$  æq. sextuplo summæ numerorum in A seu S contentorum.*

*Quod erat demonstrandum.*

On ne m'a pas fait de difficulté là-dessus, mais on m'a dit qu'on ne m'en faisoit pas par cette raison que tout le monde est accoutumé aujourd'hui à cette méthode; et moi je prétends que, sans me faire grâce, on doit admettre cette démonstration comme d'un genre excellent : j'en attends néanmoins votre avis avec toute soumission.

Tout ce que j'ai démontré en Arithmétique est de cette nature.

9. Voici encore deux difficultés :

J'ai démontré une proposition plane en me servant du cube d'une ligne comparé au cube d'une autre : je prétends que cela est purement géométrique et dans la sévérité la plus grande.

De même j'ai résolu le problème :

*De quatre plans, quatre points et quatre sphères, quatre quelconques étant donnés, trouver une sphère qui, touchant les sphères données, passe par les points donnés et laisse sur les plans des portions de sphères capables d'angles donnés,*

et celui-ci :

*De trois cercles, trois points, trois lignes, < trois > quelconques étant donnés, trouver un cercle qui, touchant les cercles et les points, laisse sur les lignes un arc capable d'angle donné.*

J'ai résolu ces problèmes *plainement*, n'employant dans la construction que des cercles et des lignes droites ; mais, dans la démonstration, je me sers de lieux solides, de paraboles ou hyperboles : je prétends néanmoins qu'attendu que la construction est plane, ma solution est plane et doit passer pour telle.

C'est bien mal reconnaître l'honneur que vous me faites de souffrir mes entretiens que de vous importuner si longtemps ; je ne pense jamais vous dire que deux mots, et si je ne vous dis pas ce que j'ai le plus sur le cœur, qui est que, plus je vous connois, plus je vous admire et vous honore et que, si vous voyiez à quel point cela est, vous donneriez une place dans votre amitié à celui qui est, Monsieur, votre etc.