s'achever dans peu de temps, et cependant on pourra mettre au jour la première Partie que vous avez en votre pouvoir.

Si M. Pascal goûte mon ouverture, qui est principalement fondée sur la grande estime que je fais de son génie, de son savoir et de son esprit, je commencerai d'abord à vous faire part de mes inventions numériques. Adieu.

Je suis, Monsieur, votre très humble et très obéissant serviteur,

FERMAT.

A Toulouse, ce 9 août 1654.

LXXII.

PASCAL A FERMAT.

LUNDI 24 AOUT 1654.

(*Va*, p. 184-188.)

MONSIEUR,

1. Je ne pus vous ouvrir ma pensée entière touchant les partis de plusieurs joueurs par l'ordinaire passé, et même j'ai quelque répugnance à le faire, de peur qu'en ceci cette admirable convenance, qui étoit entre nous et qui m'étoit si chère, ne commence à se démentir, car je crains que nous ne soyons de différents avis sur ce sujet. Je vous veux ouvrir toutes mes raisons, et vous me ferez la grâce de me redresser, si j'erre, ou de m'affermir, si j'ai bien rencontré. Je vous le demande tout de bon et sincèrement, car je ne me tiendrai pour certain que quand vous serez de mon côté.

Quand il n'y a que *deux* joueurs, votre méthode, qui procède par les combinaisons, est très sûre; mais, quand il y en a *trois*, je crois avoir démonstration qu'elle est mal juste, si ce n'est que vous y procédiez de quelque autre manière que je n'entends pas. Mais la méthode que je vous ai ouverte et dont je me sers partout est commune à toutes les conditions imaginables de toutes sortes de partis, au lieu que celle des combinaisons (dont je ne me sers qu'aux rencontres particulières où elle est plus courte que la générale) n'est bonne qu'en ces seules occasions et non pas aux autres.

Je suis sûr que je me donnerai à entendre, mais il me faudra un peu de discours et à vous un peu de patience.

2. Voici comment vous procédez quand il y a *deux* joueurs :

Si deux joueurs, jouant en plusieurs parties, se trouvent en cet état qu'il manque *deux* parties au premier et *trois* au second, pour trouver le parti, il faut, dites-vous, voir en combien de parties le jeu sera décidé absolument.

Il est aisé de supputer que ce sera en *quatre* parties, d'où vous concluez qu'il faut voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs et voir combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier et combien pour le second et partager l'argent suivant cette proportion. J'eusse eu peine à entendre ce discours-là, si je ne l'eusse su de moi-même auparavant; aussi vous l'aviez écrit dans cette pensée. Donc, pour voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, il faut imaginer qu'ils jouent avec un dé à deux faces (puisqu'ils ne sont que deux joueurs), comme à croix et pile, et qu'ils jettent quatre de ces dés (parce qu'ils jouent en quatre parties); et maintenant il faut voir combien ces dés peuvent avoir d'assiettes différentes. Cela est aisé à supputer : ils en peuvent avoir *seize* qui est le second degré de *quatre,* c'est-à-dire le quarré. Car figurons-nous qu'une des faces est marquée a, favorable au premier joueur, et l'autre b, favorable au second; donc ces quatre dés peuvent s'asseoir sur une de ces seize assiettes :

a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b
a	a	a	a	b	b	b	b	a	a	a	a	b	b	b	b
a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2

et, parce qu'il manque deux parties au premier joueur, toutes les faces qui ont deux *a* le font gagner : donc il en a 11 pour lui; et parce qu'il y manque trois parties au second, toutes les faces où il y a trois *b* le peuvent faire gagner : donc il y en a 5. Donc il faut qu'ils partagent la somme comme 11 à 5.

Voilà votre méthode quand il y a *deux* joueurs; sur quoi vous dites que, s'il y en a davantage, il ne sera pas difficile de faire les partis par la même méthode.

3. Sur cela, Monsieur, j'ai à vous dire que ce parti pour deux joueurs, fondé sur les combinaisons, est très juste et très bon; mais que, s'il y a plus de deux joueurs, il ne sera pas toujours juste et je vous dirai la raison de cette différence.

Je communiquai votre méthode à nos Messieurs, sur quoi M. de Roberval me fit cette objection :

Que c'est à tort que l'on prend l'art de faire le parti sur la supposition qu'on joue en *quatre* parties, vu que, quand il manque *deux* parties à l'un et *trois* à l'autre, il n'est pas de nécessité que l'on joue *quatre* parties, pouvant arriver qu'on n'en jouera que *deux* ou *trois*, ou à la vérité peut-être *quatre;*

Et ainsi qu'il ne voyoit pas pourquoi on prétendoit de faire le parti juste sur une condition feinte qu'on jouera *quatre* parties, vu que la condition naturelle du jeu est qu'on ne jouera plus dès que l'un des joueurs aura gagné, et qu'au moins, si cela n'étoit faux, cela n'étoit pas démontré, de sorte qu'il avoit quelque soupçon que nous avions fait un paralogisme.

Je lui répondis que je ne me fondois pas tant sur cette méthode des combinaisons, laquelle véritablement n'est pas en son lieu en cette occasion, comme sur mon autre méthode universelle, à qui rien n'échappe et qui porte sa démonstration avec soi, qui trouve le même parti précisément que celle des combinaisons; et de plus je lui démontrai la vérité du parti entre deux joueurs par les combinaisons en cette sorte :

N'est-il pas vrai que, si deux joueurs, se trouvant en cet état de l'hypothèse qu'il manque *deux* parties à l'un et *trois* à l'autre, conviennent maintenant de gré à gré qu'on joue *quatre* parties complètes, c'est-à-dire qu'on jette les quatre dés à deux faces tous à la fois, n'est-il pas vrai, dis-je, que, s'ils ont délibéré de jouer les quatre parties, le parti doit être, tel que nous avons dit, suivant la multitude des assiettes favorables à chacun?

Il en demeura d'accord et cela en effet est démonstratif; mais il nioit que la même chose subsistât en ne s'astreignant pas à jouer les *quatre* parties. Je lui dis donc ainsi :

N'est-il pas clair que les mêmes joueurs, n'étant pas astreints à jouer < les > quatre parties, mais voulant quitter le jeu dès que l'un auroit atteint son nombre, peuvent sans dommage ni avantage s'astreindre à jouer les quatre parties entières et que cette convention ne change en aucune manière leur condition? Car, si le premier gagne les deux premières parties de *quatre* et qu'ainsi il ait gagné, refusera-t-il de jouer encore deux parties, vu que, s'il les gagne, il n'a pas mieux gagné, et s'il les perd, il n'a pas moins gagné? car ces deux que l'autre a gagné ne lui suffisent pas, puisqu'il lui en faut trois, et ainsi il n'y a pas assez de quatre parties pour faire qu'ils puissent tous deux atteindre le nombre qui leur manque.

Certainement il est aisé de considérer qu'il est absolument égal et indifférent à l'un et à l'autre de jouer en la condition naturelle à leur jeu, qui est de finir dès qu'un aura son compte, ou de jouer les quatre parties entières : donc, puisque ces deux conditions sont égales et indifférentes, le parti doit être tout pareil en l'une et en l'autre. Or, il est juste quand ils sont obligés de jouer quatre parties, comme je l'ai montré : donc il est juste aussi en l'autre cas.

Voilà comment je le démontrai et, si vous y prenez garde, cette démonstration est fondée sur l'égalité des deux conditions, vraie et feinte, à l'égard de deux joueurs, et qu'en l'une et en l'autre un même gagnera toujours et, si l'un gagne ou perd en l'une, il gagnera ou perdra en l'autre et jamais deux n'auront leur compte.

4. Suivons la même pointe pour *trois* joueurs et posons qu'il manque

une partie au premier, qu'il en manque *deux* au second et *deux* au troisième. Pour faire le parti, suivant la même méthode des combinaisons, il faut chercher d'abord en combien de parties le jeu sera décidé, comme nous avons fait quand il y avoit deux joueurs : ce sera en *trois*, car ils ne sauroient jouer *trios* parties sans que la décision soit arrivée nécessairement.

Il faut voir maintenant combien trois parties se combinent entre trois joueurs et combien il y en a de favorables à l'un, combien à l'autre et combien au dernier et, suivant cette proportion, distribuer l'argent de même qu'on a fait en l'hypothèse de deux joueurs.

Pour voir combien il y a de combinaisons en tout, cela est aisé : c'est la troisième puissance de 3, c'est-à-dire son cube 27. Car, si on jette *trois* dés à la fois (puisqu'il faut jouer trois parties), qui aient chacun *trois* faces (puisqu'il y a trois joueurs), l'une marquée *a* favorable au premier, l'autre *b* pour le second, l'autre *c* pour le troisième, il est manifeste que ces trois dés jetés ensemble peuvent s'asseoir sur 27 assiettes différentes, savoir :

a	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
a	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*
a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1			1	1	1	1			1		
				2						2		2	2	2		2						2				
								3									3			3			3	3	3	3

Or, il ne manque qu'*une* partie au premier : donc toutes les assiettes où il y a un *a* sont pour lui : donc il y en a 19.

Il manque *deux* parties au second : donc toutes les assiettes où il y a deux *b* sont pour lui : donc il y en a 7:

Il manque *deux* parties au troisième; donc toutes les assiettes où il y a deux *c* sont pour lui; donc il y en a 7.

Si de là on concluoit qu'il faudroit donner à chacun suivant la proportion de 19, 7, 7, on se tromperoit trop grossièrement et je n'ai garde de croire que vous le fassiez ainsi; car il y a quelques faces favorables au premier et au second tout ensemble, comme *abb*, car le premier y trouve un *a* qu'il lui faut, et le second deux *b* qui lui manquent; et ainsi *acc* est pour le premier et le troisième.

Donc il ne faut pas compter ces faces qui sont communes à deux comme valant la somme entière à chacun, mais seulement la moitié. Car, s'il arrivoit l'assiette *acc*, le premier et le troisième auroient même droit à la somme, ayant chacun leur compte, donc ils partageroient l'argent par la moitié; mais s'il arrive l'assiette *aab*, le premier gagne seul. Il faut donc faire la supputation ainsi :

Il y a 13 assiettes qui donnent l'entier au premier et 6 qui lui donnent la moitié et 8 qui ne lui valent rien : donc, si la somme entière est une pistole, il y a 13 faces qui lui valent chacune une pistole, il y a 6 faces qui lui valent chacune $\frac{1}{2}$ pistole et 8 qui ne valent rien.

Donc, en cas de parti, il faut multiplier

	13 par une pistole,	qui font	13
	6 par une demi,	qui font	3
	8 par zéro,	qui font	0
Somme...	27	Somme...	16

et diviser la somme des valeurs, 16, par la somme des assiettes, 27, qui fait la fraction $\frac{16}{27}$, qui est ce qui appartient au premier en cas de parti, savoir 16 pistoles de 27.

Le parti du second et du troisième joueur se trouvera de même :

Il y a	4 assiettes qui lui valent 1 pistole : multipliez...	4
Il y a	3 assiettes qui lui valent $\frac{1}{2}$ pistole : multipliez...	$1\frac{1}{2}$
Et	20 assiettes qui ne lui valent rien	0
Somme...	27 Somme...	$5\frac{1}{2}$

Donc il appartient au second joueur 5 pistoles et $\frac{1}{2}$ sur 27, et autant au troisième, et ces trois sommes, $5\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$ et 16, étant jointes, font les 27.

5. Voilà, ce me semble, de quelle manière il faudroit faire les partis par les combinaisons suivant votre méthode, si ce n'est que vous ayez quelque autre chose sur ce sujet que je ne puis savoir. Mais, si je ne me trompe, ce parti est mal juste.

La raison en est qu'on suppose une chose fausse, qui est qu'on joue en *trois* parties infailliblement, au lieu que la condition naturelle de ce jeu-là est qu'on ne joue que jusques à ce qu'un des joueurs ait atteint le nombre de parties qui lui manque, auquel cas le jeu cesse.

Ce n'est pas qu'il ne puisse arriver qu'on joue trois parties, mais il peut arriver aussi qu'on n'en jouera qu'une ou deux, et rien de nécessité.

Mais d'où vient, dira-t-on, qu'il n'est pas permis de faire en cette rencontre la même supposition feinte que quand il y avoit deux joueurs? En voici la raison :

Dans la condition véritable de ces trois joueurs, il n'y en a qu'un qui peut gagner, car la condition est que, dès qu'un a gagné, le jeu cesse. Mais, en la condition feinte, deux peuvent atteindre le nombre de leurs parties : savoir, si le premier en gagne une qui lui manque, et un des autres, deux qui lui manquent; car ils n'auront joué que trois parties, au lieu que, quand il n'y avoit que deux joueurs, la condition feinte et la véritable convenoient pour les avantages des joueurs en tout; et c'est ce qui met l'extrême différence entre la condition feinte et la véritable.

Que si les joueurs, se trouvant en l'état de l'hypothèse, c'est-à-dire s'il manque *une* partie au premier et *deux* au second et *deux* au troisième, veulent maintenant de gré à gré et conviennent de cette condition qu'on jouera *trois* parties complètes, et que ceux qui auront atteint le nombre qui leur manque prendront la somme entière, s'ils se trouvent seuls qui l'aient atteint, ou, s'il se trouve que deux l'aient atteint, qu'ils la partageront également, *en ce cas,* le parti se doit faire comme je viens de le donner, que le premier ait 16, le second $5\frac{1}{2}$, le troisième $5\frac{1}{2}$, de 27 pistoles, et cela porte sa démonstration de soi-même en supposant cette condition ainsi.

Mais s'ils jouent simplement à condition, non pas qu'on joue nécessairement trois parties, mais seulement jusques à ce que l'un d'entre eux ait atteint ses parties, et qu'alors le jeu cesse sans donner moyen à un autre d'y arriver, lors il appartient au premier 17 pistoles, au second 5, au troisième 5, de 27.

Et cela se trouve par ma méthode générale qui détermine aussi qu'en la condition précédente, il en faut 16 au premier, $5\frac{1}{2}$ au second, et $5\frac{1}{2}$ au troisième, sans se servir des combinaisons, car elle va partout seule et sans obstacle.

6. Voilà, Monsieur, mes pensées sur ce sujet sur lequel je n'ai d'autre avantage sur vous que celui d'y avoir beaucoup plus médité; mais c'est peu de chose à votre égard, puisque vos premières vues sont plus pénétrantes que la longueur de mes efforts.

Je ne laisse pas de vous ouvrir mes raisons pour en attendre le jugement de vous. Je crois vous avoir fait connoître par là que la méthode des combinaisons est bonne entre deux joueurs par accident, comme elle l'est aussi quelquefois entre trois joueurs, comme quand il manque *une* partie à l'un, *une* à l'autre et *deux* à l'autre, parce qu'en ce cas le nombre des parties dans lesquelles le jeu sera achevé ne suffit pas pour en faire gagner deux; mais elle n'est pas générale et n'est bonne généralement qu'au cas seulement qu'on soit astreint à jouer un certain nombre de parties exactement.

De sorte que, comme vous n'aviez pas ma méthode quand vous m'avez proposé le parti de plusieurs joueurs, mais seulement celle des combinaisons, je crains que nous soyons de sentimens différens sur ce sujet.

Je vous supplie de me mander de quelle sorte vous procédez en la recherche de ce parti. Je recevrai votre réponse avec respect et avec joie, quand même votre sentiment me seroit contraire. Je suis etc.

LXXIII.

FERMAT A PASCAL (1).

SAMEDI 29 AOUT 1654.

(*OEuvres de Pascal*, IV, p. 435-437.)

MONSIEUR,

1. Nos coups fourrés continuent toujours et je suis aussi bien que

(1) Cette lettre a été écrite par Fermat avant qu'il eût reçu la précédente.