seront baillées et l'autre parie que le premier ne réussira pas, quel est leur parti?

6. Toutes ces questions ont des méthodes et des règles différentes. Si on n'en peut venir à bout, je vous les expliquerai toutes avec leurs démonstrations; la plus subtile et la plus malaisée est celle du vrai parti de celui qui tient le dé au jeu de la chance contre les autres (1).

7. Soit encore, si vous voulez, deux joueurs qui jouent au piquet; le premier entreprend d'avoir trois as en ses douze premières cartes; quel est le parti de celui-ci contre l'autre qui parie qu'il n'aura point les trois as?

LXXVII *bis*.

HUYGENS A CARCAVI (2).

JEUDI 6 JUILLET 1656.

(*Corresp. de Huygens*, n° 308.)

.... 1. J'ay veu par la solution que Monsieur de Fermat a faite de mon Probleme (3) qu'il a la methode universelle pour trouver tout ce qui appartient à cette matiere, ce que je desirois seulement de sçavoir en la proposant. La mesme raison de 30 à 31 est dans le traité que j'ay envoyé à Monsieur Schoten il y a 2 mois : dans le mesme il y a aussi un Theoreme duquel je me sers dans toutes ces questions des partis du jeu; et je le mettray icy, parce qu'autrement je ne pourrois pas vous faire voir que je suis venu à bout des Problemes que Monsieur de Fermat a proposez, le calcul de quelques uns d'entre iceux estant si long que je n'ay pas assez de patience pour en rechercher le dernier

(1) Il s'agit probablement de la question exposée Lettre LXXVIII, 3.
(2) Extrait communiqué à Fermat et à Pascal (*voir* ci-après LXXVIII, 1) et répondant à la pièce précédente, LXXVII.
(3) *Voir* Pièce LXXVII, 1.

produit; c'est pourquoy dans ceux la, apres vous avoir expliqué le dit theoreme, je me contenteray de mettre la methode par laquelle l'on y peut parvenir.

2. Le Theoreme est cettui-cy :

Si le nombre des hazards qu'on a pour avoir b soit p, et le nombre des hazards qu'on a pour avoir c soit q, cela vaut autant que si l'on avait $\frac{bp+cq}{p+q}$.

Par exemple si j'avois 2 hazards pour avoir $\frac{1}{3}$ de ce qui est mis au jeu et 5 hazards pour en avoir $\frac{1}{2}$, je multiplie $\frac{1}{3}$ par 2 et $\frac{1}{2}$ par 5. Puis j'adjouste ensemble les produits qui sont $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{2}$; la somme est $\frac{19}{6}$, laquelle je divise par $5+2$, c'est 7; dont j'ay $\frac{19}{42}$. Je dis qu'il m'appartient $\frac{19}{42}$ de ce qui est mis au jeu.

3. La premiere des questions de Monsieur de Fermat (¹) est telle : A et B jouent à 2 dez. A gaignera en amenant 6 points. B gaignera en amenant 7 points. A poussera le dé la première fois, et puis B deux fois de suite et puis A deux fois de suite, et ainsi jusques à ce que l'un ou l'autre ait gaigné.

Pour faire les partis je nommeray d ce qui est mis au jeu, et je mettray x pour la part qui en appartient au joueur A.

Or il est evident que, quand A aura fait le premier coup et B ses deux coups de suite, et encore A l'un de ses deux coups, sans que ny l'un ny l'autre ait rencontré, que alors A aura derechef la mesme apparence pour gaigner qu'il avoit des le commencement, et que par consequent il luy appartiendra derechef la mesme part de ce qui est mis au jeu, c'est à dire x.

Partant, lorsque A vient à faire le premier de ses deux coups de suite, il aura

5 hazards pour avoir d,
et 31 hazards pour avoir x,

(¹) Pièce LXXVII, 2.

car de 36 divers coups que produisent 2 dez, il y en a 5 de 6 points, c'est à dire qui luy donnent d ou ce qui est mis au jeu, et 31 qui luy font manquer les 6 points, et ainsi luy donnent x, le mettant en estat d'avoir encore un coup à faire devant que le tour de B soit venu. Mais

$$\left.\begin{array}{r}\text{5 hazards pour avoir } d\\ \text{et 31 hazards pour avoir } x\end{array}\right\}\text{ valent autant par le theoreme precedent que}$$

$\frac{5d+31x}{36}$. Cecy est donc la part de A lorsque A fait le premier de ses deux coups de suite.

Le coup d'auparavant c'est quand B fait le dernier de ses deux coups, et parce qu'il gaigne en amenant 7 points lesquels se rencontrent en 6 façons différentes et qu'alors A perd, donques à ce coup A aura

$$\begin{array}{l}\text{6 hazards pour avoir 0 ou rien,}\\ \text{et 30 hazards pour avoir } \dfrac{5d+31x}{36},\end{array}$$

car son tour sera venu de faire deux coups de suite; lesquels hazards par le précédent théorème valent $\frac{150d+930x}{1296}$. Cecy est donc la part de A, lorsque B fait le dernier de ses 2 coups de suite.

Quand donc B fait le premier de ses 2 coups, A aura

$$\begin{array}{l}\text{6 hazards pour avoir 0,}\\ \text{30 hazards pour } < \text{avoir} > \dfrac{150d+930x}{1296},\end{array}$$

ce qui vaut $\frac{4500d+27900x}{46656}$.

Quand donc A fait le premier coup de tous, A aura

$$\begin{array}{l}\text{5 hazards pour avoir } d,\\ \text{31 hazards pour avoir } \dfrac{4500d+27900x}{46656},\end{array}$$

ce qui vaut $\frac{372780d+864900x}{1679616}$.

Cecy est donc égal à x, et partant x égal à $\frac{10355}{22631} < d >$.

Le parti du joueur A est donc $\frac{10355}{22631}$ de ce qui est mis au jeu, et le reste $\frac{12276}{22631}$ est le party de B, et l'un est à l'autre comme $\frac{10355}{12276}$, qui sont les mesmes nombres de Monsieur de Fermat.

4. Dans la seconde question (¹) où il suppose que le joueur A joue premierement deux fois, et puis le joueur B trois fois et ensuite le joueur A $<$ deux fois et puis le joueur B $>$ trois fois, la methode est tout à fait semblable, et j'y trouve aussi les mesmes nombres que Monsieur de Fermat, mais qu'il les faut transposer : c'est-à-dire que le party de A est à celui de B comme 87451 à 72360, au lieu qu'il a mis 72360 à 87451.

5. La troisieme est (²) quand trois joueurs A, B et C parient avec toutes les 52 cartes que celuy qui aura plus tost un cœur gaignera, et que l'on suppose que A prend la premiere carte, B la seconde, C la troisieme et ainsi consecutivement jusques à ce que l'un ait gaigné.

Il y a 13 cœurs parmy ces 52 cartes, c'est pourquoy s'il arrivoit que toutes les autres 39 fussent prises selon le dit ordre sans que personne eust rencontré un cœur, alors ce seroit le tour du joueur A de prendre et il auroit gaigné asseurement. Quand donc C prend la trente-neuvieme carte, au cas que jusques là personne n'ait rencontré, il est certain que A aura 13 hazards pour avoir perdu et 1 hazard pour avoir tout ce qui est mis au jeu, que j'appelleray d comme devant. Or, d'avoir

13 hazards pour avoir 0,
et 1 hazard pour avoir d,

cela vaut $\frac{1d}{14}$ par nostre theoreme; d'icy je cognois que, quand B prend la trente-huitieme carte, A aura

13 hazards pour avoir 0,
et 2 hazards pour avoir $\frac{1}{14}d$

(¹) Pièce LXXVII, 3.
(²) Pièce LXXVII, 4.

(c'est quand B manque de rencontrer un cœur, car alors c'est à C de prendre la trente-neuvieme); lesquels hazards valent $\frac{1}{105}d$.

Quand A prend la trente-septieme, A aura donc

$$13 \text{ hazards pour avoir } d,$$
$$\text{et } 3 \text{ hazards pour avoir } \frac{1\,d}{105},$$

ce qui vaut $\frac{1368}{1680}d$.

Ainsi en reculant tousjours d'une carte l'on sçaura à la fin la part de A, lorsqu'il prend la premiere de toutes, et de la mesme maniere se trouvera le party de B, et le reste sera celuy de C.

6. La quatrieme est [1] quand deux joueurs jouent à la prime avec 40 cartes et que le joueur A entreprend de ramener prime, et B parie que A ne reussira pas dans les quatre premieres cartes. L'on m'a dit que d'avoir prime c'est avoir 4 cartes differentes, à sçavoir une de chasque sorte. Je trouve donc que le party de A est à celui de B comme 1000 à 8139, de sorte que l'on peut bien parier 8 contre 1 que quelqu'un n'amesnera pas prime.

7. La cinquieme et derniere question [2] est quand deux joueurs jouent au piquet et que le premier entreprend d'avoir 3 as dans ses douze premieres cartes et que l'autre parie qu'il ne les aura pas. Pour resoudre celle-cy, je supposeray qu'il prend ses 12 cartes une à une, car il n'importe aucunement. S'il arrive donc que celuy qui l'entreprend ayant pris 11 cartes ait desja rencontré 2 as, il y aura parmi les 25 cartes qui restent encore 2 as, et partant il aura en ce cas 2 hazards pour avoir gaigné, c'est pour avoir d, et 23 hazards pour avoir 0, c'est à dire pour perdre : ce qui vaut $\frac{2}{25}d$.

[1] Pièce LXXVII, 5.
[2] Pièce LXXVII, 7.

Quand il a pris 10 cartes, s'il a rencontré 2 as, il aura donc

2 hazards pour avoir d,

et 24 hazards pour avoir $\frac{2}{25}d$, c'est pour avoir seulement 2 as en 11 cartes;

lesquels hazards valent $\frac{49}{325}d$.

Mais quand il a pris 10 cartes, s'il n'a encore que 1 as, il y aura parmy les 26 restantes 3 as; c'est pourquoy alors il aura

3 hazards pour avoir $\frac{2}{25}d$, c'est pour avoir 2 as en 11 cartes,

et 23 hazards pour avoir 0, c'est pour avoir 1 as en 11 cartes,

car avec cecy il ne sçauroit gagner; lesquels hazards valent $\frac{3}{325}d$.

Quand il a pris 9 cartes, s'il a 2 as, il aura

2 hazards pour avoir d,

et 25 hazards pour avoir $\frac{49}{325}d$, c'est pour avoir seulement 2 as en 10 cartes,

lesquels hazards valent $\frac{1875}{8775}d$.

Mais ayant pris 9 cartes, s'il n'a encore qu'1 as, il aura

3 hazards pour avoir $\frac{49}{325}d$, c'est 2 as en 10 cartes,

et 24 hazards pour avoir $\frac{3}{325}d$, c'est 1 as en 10 cartes,

ce qui vaut $\frac{219}{8775}d$.

Et enfin si parmi ses 9 cartes il n'a encore aucun as, il aura

4 hazards pour avoir $\frac{3}{325}d$, c'est 1 as en 10 cartes,

et 23 hazards pour avoir 0, c'est pas 1 as en 10 cartes,
car alors il ne sçauroit gaigner,

lesquels hazards valent $\frac{12}{8775}d$.

Ainsi par cette méthode en reculant tousjours d'une carte je sçauray à la fin la part du joueur A, lorsqu'il n'a encore pris aucune carte et que par consequent il n'a pas encore 1 as : laquelle ayant ostée de d, le reste sera la part du joueur B. Ce qu'il falloit trouver.

8. Si j'estois bien informé de l'estat de la question au jeu de la chance que Monsieur de Fermat dit estre la plus malaisée [1], j'essayerois aussi de la resoudre. Pour celles que je viens de traiter, je vous prie, Monsieur, de me faire la faveur de les communiquer à Monsieur Milon, et que je puisse sçavoir si ce que Messieurs de Fermat et Pascal en auront trouvé sera conforme à ce que j'en explique. Je desire aussi fort de sçavoir s'ils ne se servent pas du mesme theoreme que moy.

. . . .

LXXVIII.

CARCAVI A HUYGENS [2].

JEUDI 28 SEPTEMBRE 1656.

(*Corresp. Huyg.*, n° 336.)

Monsieur,

1. Il y a déjà longtemps que j'ai fait voir à Messieurs de Fermat et Pascal ce que vous aviez pris la peine d'envoyer à M. Mylon et à moi touchant les partis [3], mais je n'ai pu me donner l'honneur de vous faire réponse, la chose n'ayant pas dépendu absolument de moi et la commodité de ces Messieurs ne s'étant pas toujours rencontrée avec le desir que j'avois de vous satisfaire.

M. Pascal se sert du même principe que vous et voici comme il l'énonce :

S'il y a tel nombre de hasards qu'on voudra, comme par exemple 10

[1] Pièce LXXVII, 6.
[2] Publiée pour la première fois par M. Charles Henry (*Pierre de Carcavy*, p. 18).
[3] *Voir* la Lettre précédente.