LXXXV.

FERMAT A DIGBY [1].

REMARQUES SUR L'ARITHMÉTIQUE DES INFINIS DU S. J. WALLIS.

MERCREDI 15 AOUT 1657.

(*Comm. ep.*, n° 13; *Va.*, p. 193-196.)

I. En son Épître il déclare comment il s'est mis à la recherche de la quadrature du cercle et dit que quelques vérités, qui ont été découvertes en Géométrie, lui ont donné l'espérance qu'elle se pourroit trouver. Ces vérités sont :

Que la raison des cercles infinis du cône aux infinis du cylindre est connue, savoir celle du cône au cylindre qui a même base et hauteur; et pareillement la raison des diamètres desdits cercles, savoir celle du triangle qui passe par l'axe du cône au parallélogramme qui passe par l'axe du cylindre;

Comme aussi on a la raison du conoïde parabolique au cylindre circonscrit, et celle de la parabole au parallélogramme qui passent par leurs axes, qui sont comme l'assemblage des diamètres des cercles infinis qui composent lesdits solides;

De plus, qu'on a aussi trouvé la raison des ordonnées (tant au triangle qu'au conoïde parabolique ou parabole), qui sont les diamètres desdits cercles.

D'où il conclut que, puisqu'on a trouvé aussi la raison de la sphère au cylindre circonscrit, ou celle de l'infinité des cercles parallèles, dont on peut concevoir que la sphère est composée, à pareille multitude de ceux qui se peuvent feindre au cylindre, on pourra aussi espérer de pouvoir découvrir la raison des ordonnées en la sphère ou au cercle à celles du cylindre ou quarré, savoir la raison des dia-

[1] Pièce apportée par White à Brouncker en même temps que la précédente (premiers jours d'octobre 1657). Wallis répondit (à Digby) par la Lettre 16 du *Commercium*.

mètres des cercles infinis qui composent la sphère aux diamètres des cercles du cylindre. Ce qui seroit avoir la quadrature du cercle.

Mais, de même qu'on ne pourroit pas avoir la raison de tous les diamètres pris ensemble des cercles qui composent le cône à ceux du cylindre circonscrit, si on n'avoit la quadrature du triangle; non plus que la raison des diamètres des cercles qui composent le conoïde parabolique à ceux qui font le cylindre circonscrit, si on n'avoit la quadrature de la parabole; ainsi on ne pourra pas connoître la raison des diamètres de tous les cercles qui composent la sphère à ceux des cercles qui composent le cylindre circonscrit, si l'on n'a pas la quadrature du cercle. Car, de demander la raison qu'il y a entre les diamètres de tous les cercles parallèles qu'on peut concevoir en la sphère (lesquels diamètres, pris tous ensemble, ne sont autre chose qu'un cercle) et ceux des cercles qu'on peut feindre au cylindre circonscrit (lesquels font un quarré circonscrit audit cercle), cela n'est autre chose que de demander la raison du cercle au quarré circonscrit.

II. En la même Épître [1], après avoir posé une suite de nombres, savoir :

$$1, \quad 6, \quad 30, \quad 140, \quad 630,$$

il demande le terme moyen qui doit être mis entre 1 et 6. Je réponds que, si on a égard à la suite entière des dits nombres, on ne peut poser aucun terme moyen entre les dits 1 et 6, pource qu'en cette suite les

[1] Si, dans la suite de Wallis, on considère l'unité comme étant le terme de rang o, le terme de rang n sera

$$T_n = \frac{3.5\ldots(2n-1)(2n+1)}{1.2\ldots(n-1)n}\,2^n,$$

et l'on peut aussi poser

$$T_n = \frac{2n+1}{\pi}\,2^{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}x\,dx, \quad \text{ou bien} \quad T_n = \frac{2^{2n}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}x\,dx} = \frac{2^{2n}}{\int_0^1 \frac{z^{2n+1}\,dz}{\sqrt{1-z^2}}},$$

d'où

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{8}{\pi}.$$

nombres ne font pas une proportion continue, mais, en autant de façons que l'un est comparé à l'autre, autant font-ils de proportions différentes; de sorte que ce sont plusieurs proportions ou progressions disjointes et ainsi, quand on prendroit un terme moyen entre 1 et 6, il n'auroit rien de commun avec les autres nombres.

Toute la proportion ou suite, qu'on peut remarquer entre ces nombres, consiste au rapport qu'ont entre eux les nombres dont ils proviennent par multiplication, auxquels on voit une espèce de progression arithmétique. Néanmoins il ne sçauroit passer aux nombres susdits, en telle sorte que, par icelui, on puisse donner un terme moyen entre deux des nombres, qui ait correspondance à toute la suite.

Au contraire, la propriété même de cette progression fait qu'il n'y en peut avoir; voici comment :

Les nombres donnés

$$1,\quad 6,\quad 30,\quad 140,\quad 630$$

sont produits par les suivants en multipliant :

$$1,\quad 4\frac{2}{1},\quad 4\frac{2}{2},\quad 4\frac{2}{3},\quad 4\frac{2}{4},$$

ou les équivalents :

$$1,\quad \frac{6}{1},\quad \frac{10}{2},\quad \frac{14}{3},\quad \frac{18}{4}.$$

En ces nombres, qui servent à faire les donnés, il est facile de voir où est le rapport. Il consiste, aux premiers, en la seule augmentation du dénominateur de la fraction qui y est jointe, ce qui fait diminuer les nombres d'autant plus qu'ils s'éloignent du premier terme, savoir de 1; et aux seconds

$$1,\quad \frac{6}{1},\quad \frac{10}{2},\quad \text{etc.},$$

qui sont les mêmes en autres termes, les numérateurs des fractions augmentent de 4 et les dénominateurs de l'unité, ce qui fait pareillement diminuer les nombres tant plus la progression avance : en sorte que celui qui est le plus proche du premier terme 1, savoir $4\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$, qui vaut 6, est le plus grand de tous.

Il faut aussi remarquer que le rapport des nombres de la dite progression n'arrive pas jusques au premier terme 1, ou plutôt ne commence pas dès le premier terme, mais au second seulement, qui est sa borne. De sorte que, si on vouloit augmenter les termes de la dite progression, en la changeant et mettant un nombre moyen entre le premier et le second terme, savoir entre 1 et $4\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$, il ne faudroit pas avoir égard à 1, mais aux autres nombres

$$4\frac{2}{1},\quad 4\frac{2}{2},\quad 4\frac{2}{3},\quad 4\frac{2}{4},$$

ou à ces autres qui sont les mêmes :

$$\frac{6}{1},\quad \frac{10}{2},\quad \frac{14}{3},\quad \frac{18}{4};$$

car cette progression n'auroit pas de suite, si on la commençoit par 1.

Puis donc : qu'il ne faut pas avoir égard au premier terme 1, qui n'a rien de commun avec les nombres de la dite progression, mais aux autres seulement; et qu'ils augmentent à mesure qu'ils approchent du premier terme 1 : il s'ensuit que le nombre, qu'on prendroit entre 1 et $4\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$, seroit plus grand que le dit $\frac{6}{1}$ ou 6, et il faudroit multiplier le premier terme 1 par ce nombre moyen qui seroit plus grand que 6, pour avoir le moyen terme entre les deux premiers des nombres premièrement donnés, qui sont 1 et 6 (car les dits nombres donnés

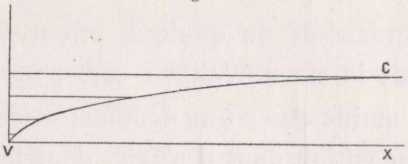
$$1,\quad 6,\quad 30,\quad 140,\quad 630$$

n'ont point d'autre rapport ou liaison que celle qu'ils empruntent de leurs multiplicateurs, autrement ils n'en ont aucune). Et ainsi on auroit un nombre plus grand que 6 pour le moyen terme d'entre 1 et 6; ce qui est absurde.

De là s'ensuit qu'on ne peut donner le moyen terme entre 1 et 6, en tant qu'ils sont compris en la suite ou progression des nombres : 1, 6, 30, 140, 630.

On peut inférer de là que la ligne courbe VC (*fig.* 86) ([1]) n'est point égale en elle-même et qu'elle ne peut provenir d'aucun mouvement continu qui soit égal ou réglé, mais de plusieurs, différens suivant ses parties; et que c'est une ligne composée de portions de plusieurs courbes comprises entre les parallèles à l'axe VX de la figure. Car, en

Fig. 86.



icelle, il est bien nécessaire que la moyenne ligne tirée entre la première et la seconde parallèle, savoir entre 1 et 6, soit moindre que 6. Mais, outre que cette moyenne ligne seroit de différente longueur suivant la nature et la propriété de cette portion de la courbe VC, qui n'a rien de commun avec les autres portions, comme a été dit, elle n'auroit rapport qu'avec les deux termes 1, 6, et non pas avec les autres, ni avec les moyennes qu'on auroit tirées entre deux, si on prenoit le tout conjointement.

III. En la première proposition le dit sieur Wallis propose une suite de quantités commençant par o (qui représente le point) et qui se suivent en progression arithmétique, et cherche quelle raison il y a entre la somme des dites quantités et la somme d'autant de termes égaux à la plus grande des données.

Le moyen qu'il donne pour trouver cette raison est de prendre les sommes de diverses quantités de nombres commençant par les moindres, puis comparer les raisons les unes aux autres et inférer de là une proposition universelle.

On se pourroit servir de cette méthode, si la démonstration de ce

([1]) La figure ne se trouvant pas dans le *Commercium,* nous la restituons d'après l'*Arithmetica infinitorum* de Wallis (*Opera mathematica,* Oxford, 1695, in-f°, tome I, p. 477).

qui est proposé étoit bien cachée et, qu'auparavant de s'engager à la chercher, on se voulut assurer à peu près de la vérité; mais il ne s'y faut fier que de bonne sorte et on doit y apporter les précautions nécessaires. Car on pourroit proposer telle chose et prendre telle règle pour la trouver qu'elle seroit bonne à plusieurs particuliers et néanmoins seroit fausse en effet et non universelle. De sorte qu'il faut être fort circonspect pour s'en servir, quoiqu'en y apportant la diligence requise, elle puisse être fort utile, mais non pas pour prendre, pour fondement de quelque science, ce qu'on en aura déduit, comme fait le sieur Wallis : car, pour cela, on ne se doit contenter de rien moins que d'une démonstration, et principalement au sujet de la proposition dont il s'agit, dont la solution et démonstration est fort facile.

Voici comme on démontrera que les dites quantités proposées, étant jointes ensemble, font la moitié d'autant de quantités égales à la plus grande d'icelles :

Soient exposées des quantités ou nombres qui commencent par le point ou par o, et qui se suivent en progression arithmétique; et soient celles de la première ligne

1° Quantités données..............................	o a b c d
2° Quantités égales à la plus grande des données....	d d d d d
3° Excès des plus grandes par dessus les données...	d c b a o

Puisque les quantités données sont en progression arithmétique, le troisième terme b surpassera le second de pareille quantité que le second (savoir a) surpasse le premier qui est o; mais l'excès de a par dessus o est a : et, partant, toutes ces quantités se surpasseront l'une l'autre de proche en proche selon la quantité du second terme a. Et si on prend les quantités de deux en deux, laissant une d'icelles entre deux, comme sont a, c, ou b, d de la première ligne, leur différence sera le troisième terme, comme il est évident. Et de même, si on les prenoit de trois en trois, elles auroient le quatrième terme c pour leur différence.

De là il s'ensuit que, si on prend autant de termes égaux au plus grand terme d des quantités données, comme en la seconde ligne, leur excès par dessus les quantités données sera égal aux dites quantités données, comme on [le] voit en la troisième ligne. Car l'excès de d par dessus la plus grande des quantités données, savoir par dessus d, est o, qui est le premier terme des quantités données; l'excès du même d par dessus le terme précédent c est le second terme a, comme il a été montré, savoir pource que les deux quantités c et d sont prochaines; et ensuite l'excès de d par dessus b sera b, et ainsi des autres, jusques à ce qu'enfin, étant au premier terme o, l'excès de d par dessus icelui sera le même d.

Et ainsi la ligne des excès, qui est la troisième, sera égale à la première qui contient les quantités données; mais la première et la troisième ligne étant jointes ensemble (savoir les quantités données étant jointes aux excès des quantités de la seconde ligne par dessus celles de la première, qui sont les données), font la dite seconde ligne, qui a chacun de ses termes égal au plus grand de ceux de la première : partant la seconde ligne, ou le plus grand terme des données pris autant de fois qu'il y a de termes, sera double de la première ligne, c'est à dire des quantités données. Ce qu'il falloit démontrer.

IV. En la seconde proposition, il requiert que le premier terme soit o et le second 1. Autrement il dit que *moderatio est adhibenda*.

A cela je dis que, si on commence par o, quelque nombre qu'on mette pour le second terme, la somme d'autant de fois le plus grand terme sera toujours double des quantités données. Car, si pour a, b, c, d on prend quelques nombres qu'on voudra, qui soient en progression arithmétique depuis le premier terme o, cela succédera toujours en la même sorte, ainsi qu'il a été ci-devant démontré.