de M. Descartes, à lui fournir un passeport et à lui marquer sa route en la faisant sortir de ce point fatal. J'en dirois davantage si je n'appréhendois de passer dans votre esprit pour un homme qui auroit envie de

Barbam vellere mortuo leoni (¹).

J'attends, Monsieur, votre réplique ou celle de M. Rohault, que j'estime comme je dois; et je vous assure à l'avance que je ne cherche que la vérité sans chicane, et que je suis de tout mon cœur, Monsieur, votre très humble et très affectionné serviteur,

FERMAT.

XCVI.

FERMAT A KENELM DIGBY (²).

(*Comm. ep.*, nº XLVII.)

1. Illustrissimos Viros Vicecomitem Brouncker et Johannem Wallisium quæstionum numericarum a me propositarum solutiones tandem dedisse legitimas libens agnosco, imo et gaudeo. Noluerunt Viri Clarissimi vel unico momento impares sese aut ἥττονας quæstionibus propositis confiteri; mallem ipsos et quæstiones ipsas dignas laboribus Anglicis statim agnovisse et, postquam adepti ipsarum solutiones fuissent, triumphum eo illustriorem egisse quo certamen magis arduum apparuisset. Contrarium ipsis visum est; id sane gloriæ illustrissimæ et ingeniosissimæ nationis condonandum. Verùm, ut deinceps ingenue utrimque agamus, fatentur Galli propositis quæstionibus satisfecisse Anglos; sed fateantur vicissim Angli quæstiones ipsas dignas fuisse quæ ipsis proponerentur, nec dedignentur in posterum numerorum

(¹) MARTIAL, livre X, épigr. 90.
(²) Envoyée par Digby à Wallis, le 19 juin 1658.

integrorum naturam accuratius examinare et introspicere, imo et doctrinam istam, quâ pollent ingenii vi et subtilitate, propagare.

2. Quod ut ab illis libentius impetremus, Diophantum ipsum et celeberrimum illius interpretem Bachetum ad auctoritatem rei proponimus.

Supponit Diophantus in plerisque Libri IV et V quæstionibus *numerum omnem integrum vel esse quadratum vel ex duobus aut tribus aut quatuor quadratis compositum*. Id sibi Bachetus, in commentariis ad quæstionem XXXI Libri IV, perfecta demonstratione assequi nondum licuisse fatetur. Id Renatus ipse Descartes incognitum sibi ingenue declarat in epistola quadam, quam propediem edendam accepimus, imo et viam, qua huc perveniatur, difficillimam et abstrusissimam esse non diffitetur [1]. Cur igitur de propositionis illius dignitate dubitemus, non video. Ejus tamen perfectam demonstrationem a me inventam moneo Viros Clarissimos.

Possem et plerasque adjungere propositiones non solum celeberrimas, sed et firmissimis demonstrationibus probatas; exempli causa :

Omnis numerus primus qui unitate superat quaternarii multiplicem, est compositus ex duobus quadratis. Hujusmodi sunt 5, 13, 17, 29, 37, 41, etc.

Omnis numerus primus qui unitate superat ternarii multiplicem, est compositus ex quadrato et triplo alterius quadrati. Tales sunt 7, 13, 19, 31, 37, 43, etc.

Omnis numerus primus qui vel unitate vel ternario superat octonarii multiplicem, componitur ex quadrato et duplo alterius quadrati. Tales sunt 3, 11, 17, 19, 41, 43, etc.

Sed et præcedentem Bacheti propositionem generaliter olim Domino

(1) *Lettres de Mr Descartes*, éd. Clerselier, III, 66, p. 365 : « Mais pour ce Theoreme, qui est sans doute l'un des plus beaux qu'on puisse trouver touchant les nombres, je n'en sçay point la demonstration, et je la juge si difficile que je n'ose entreprendre de la chercher. » (Lettre à Mersenne, du 27 juillet 1638.) Descartes parle du théorème général énoncé dans la Lettre de Fermat pour Sainte-Croix (ci-dessus XII, **3**) et rappelé ci-après.

de Sainte-Croix proposuimus ([1]), ejusque demonstrationem non ignoramus.

Omnis numerus integer : vel est triangulus vel ex duobus aut tribus triangulis compositus; est quadratus vel ex duobus, tribus aut quatuor quadratis compositus; est pentagonus vel ex duobus, tribus, quatuor aut quinque pentagonis compositus; est hexagonus vel ex duobus, tribus, quatuor, quinque vel sex hexagonis compositus; et sic uniformi in infinitum enuntiatione.

3. Hæc omnia et alia infinita quæ ad numeros integros spectant, quæque a nobis et inventa et generaliter demonstrata sunt, possemus et proponere Viris Clarissimis et, proponendo, negotium saltem aliquod ipsis facessere. Sed ingenuitatem gallicam sapient magis propositiones aliquot quarum demonstrationem a nobis ignorari non diffitemur, licet de earum veritate nobis constet.

Meminimus Archimedem non dedignatum propositionibus Cononis, veris quidem, sed tamen indemonstratis, ultimam manum imponere, earumque veritatem demonstrationibus illis subtilissimis confirmare. Cur igitur simile auxilium a Viris Clarissimis non exspectem, Conon scilicet Gallicus ab Archimedibus Anglis?

1° Potestates omnes numeri 2, quarum exponentes sunt termini progressionis geometricæ ejusdem numeri 2, unitate auctæ, sunt numeri primi ([2]).

Exponatur progressio geometrica 2, cum suis exponentibus :

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.

Primus terminus 2, auctus unitate, facit 3, qui est numerus primus.

Secundus terminus 4, auctus unitate, facit 5, qui est pariter numerus primus.

([1]) *Voir* Lettre XII, **3**.
([2]) *Voir* Lettre XLIII, **3**.

Quartus terminus 16, auctus unitate, facit 17, numerum primum.

Octavus terminus 256, auctus unitate, facit 257, numerum primum.

Sume generaliter omnes potestates 2, quarum exponentes sunt numeri progressionis, idem accidet. Nam, si sumas deinde decimum sextum terminum, qui est 65536, ille auctus faciet 65537, numerum primum. Hoc pacto, potest dari et assignari nullo negotio numerus primus dato quocumque numero major.

Quæritur demonstratio illius propositionis, pulchræ sane, sed et verissimæ, cujus ope, ut jam diximus, problema alias difficillimum solvi statim potest : *Dato quovis numero, invenire numerum primum dato numero majorem.* Hujus clavis beneficio reserabunt fortasse Viri Clarissimi mysterium omne de numeris primis, hoc est : *Dato numero quovis, invenire* via brevissima et facillima *an sit primus vel compositus.*

2° Deinde : Duplum cujuslibet numeri primi unitate minoris quam multiplex octonarii, componitur ex tribus quadratis.

Esto quilibet numerus primus, unitate minor quam octonarii multiplex ut sunt 7, 23, 31, 47, etc.; eorum duplex est 14, 46, 62, 94 : componitur ex tribus quadratis.

Propositionem illam veram asserimus, sed Cononis modo, nondum aut asserente aut demonstrante Archimede.

3° Si duo numeri primi, desinentes aut in 3 aut in 7, et quaternarii multiplicem ternario superantes, inter se ducantur, productum componitur ex quadrato et quintuplo alterius quadrati.

Tales sunt numeri 3, 7, 23, 43, 47, 67, etc. Sume duos ex illis, exempli gratia, 7 et 23; quod sub iis fit, 161, componetur ex quadrato et quintuplo alterius quadrati. Nam 81, quadratus, et quintuplum 16 æquantur 161.

Id verum asserimus generaliter et demonstrationem tantum exspectamus. Singulorum autem ex ipsis quadrati componuntur ex quadrato et quintuplo alterius quadrati : quod et demonstrandum proponitur.

4. Sed ne demonstrationibus nimium fortasse deesse videamur, sequentem propositionem et asserimus et possumus demonstrare.

Nullus numerus triangulus, præter unitatem, æquatur numero quadratoquadrato.

Sint trianguli, ut norint omnes,

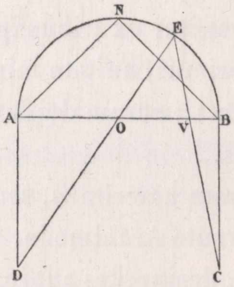
1. 3. 10. 15. 21. 28. 36. 45. etc.

Nullus omnino, facta in infinitum progressione, præter solam unitatem, erit quadratoquadratus.

5. Ne autem ad numeros integros deficiente Geometria videamur confugisse, en aliquot propositiones geometricas, quæ Angliam invisere non erubescent. Priores duas ex restituta a nobis Porismatum Euclideorum Geometria excerpsimus.

Esto semicirculus ANB (*fig.* 90) super diametro AB. Bisecetur in N

Fig. 90.



semicircumferentia ANB et, junctis NA, NB, a punctis A et B excitentur perpendiculares AD, BC, ipsis AN, NB æquales. Sumpto quolibet in semicircumferentia puncto, ut E, junctis rectis DE, EC occurrentibus diametro in punctis O et V, aio duo quadrata AV, BO simul sumpta esse, in hoc casu, æqualia quadrato diametri AB.

Generalius in Tractatu nostro hoc problema aut theorema proponebamus, sed in præsens speciale hoc sufficit [1].

Esto parabole quævis AMC (*fig.* 91), in qua sumantur duo quælibet puncta A et B et diameter quævis MN. Sumatur quodcumque aliud punctum in parabole, ut C, a quo ad puncta A et B jungantur

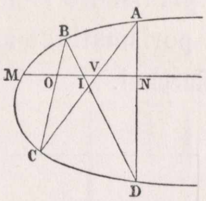
[1] *Voir* Tome I, p. 81 : *Porisma quintum.*

rectæ diametrum secantes. In eadem semper ratione secabitur diameter. Nam, sumpto alio quovis puncto D, erit

MO ad OV ut MI ad IN,

et semper similes abscissæ a diametro in eadem erunt ratione (1).

Fig. 91.



Hæc a nobis et inventa sunt et demonstrata, quæ ἀμοιβαίως pro theoremate frusti conici offerimus (2).

6. Sed et quæ nondum ex omni parte completa sunt, tentanda Anglis proponere non dubitamus.

Datis punctis, rectis aut circulis, invenire parabolen quæ per data puncta transeat et datas rectas aut circulos contingat.

Dari autem quatuor ex istis sufficit. Exempli gratia : Datis duobus punctis, recta et circulo, invenire parabolen quæ per data puncta transeat et rectam circulumque datos contingat. Unde emergunt quindecim problemata.

In ellipsi aut hyperbole idem proponatur; sed eo casu debent dari quinque aut puncta aut rectæ aut circuli aut quædam ex istis numero quinque, et inde emergunt 21 problemata.

Nos olim in Tractatu De contactibus sphæricis similia in sphæra expedivimus et tandem feliciter problema sequens construximus : Datis quatuor sphæris, invenire quartam quæ quatuor datas contingat (3). Tractatum integrum penes Dominum de Carcavi invenies.

(1) *Voir* Tome I, p. 79 : *Porisma secundum*.

(2) Cubature du tronc de cône oblique, dans la lettre XXIII du *Commercium epistolicum* (de Wallis à Digby, le 4 mars 1658, v. s.).

(3) *Voir* Tome I, p. 69.

Monemus tantum Viros Clarissimos ut, sepositis tantisper speciebus Analyseos, problemata geometrica via Euclidea et Apolloniana exsequantur, ne pereat paulatim elegantia et construendi et demonstrandi, cui præcipue operam dedisse veteres innuunt satis et Data Euclidis et alii a Pappo enumerati Analyseos libri; quos omni ex parte jam olim supplevimus dum operibus Vietæ, Ghetaldi, Snellii Tractatus nostros De locis planis, De locis solidis et linearibus, De locis ad superficiem, et De porismatibus adjecimus (1) : quos omnes habet dictus Dominus de Carcavi.

XCVII.

FERMAT A CLERSELIER.

DIMANCHE 16 JUIN 1658.

(D., III, 48; Bibl. nat. fr. 3280, nouv. acq., f^{os} 62-65.)

Monsieur,

1. Nous laissâmes dernièrement la balle de M. Descartes en belle peine (2). C'est dans la figure de la page 19 de la Dioptrique, où elle faisoit tous ses efforts pour sortir du point B à l'honneur de M. Descartes; mais elle y trouva toutes les issues fermées en suivant le raisonnement de cet auteur, et même nous ne pouvons lui donner présentement de secours, si nous ne faisons changer de biais à sa logique.

Reprenons la figure de la page 15 (*fig.* 53) et supposons que la balle qui va dans la droite AB diminue sa vitesse par moitié en arrivant au point B.

Si elle continuoit dans le même milieu, et que le plan CBE ne lui fût point opposé, elle iroit toujours en ligne droite vers D, avec cette différence pourtant qu'elle emploieroit depuis B jusques à D le double

(1) *Voir* Tome I, pages 3; 91; 111; 76.
(2) *Voir* ci-dessus la fin de la lettre XCV.