CIV.

FERMAT A CARCAVI [1].

< SEPTEMBRE 1659 >

(*Correspondance Huygens*, n° 700.)
(Bibl. nat. fr. 13040, f° 139-140.)

1. J'envoyai l'année passée à M. Frenicle la démonstration par laquelle je prouvois qu'il n'y a aucun nombre que le seul 7 qui, étant le double d'un quarré — 1, soit la racine d'un quarré de la même nature, car 49 est le double d'un quarré, 25, — 1.

2. Je veux même que M. de Zulichem voie que cette comparaison des lignes spirales et paraboliques se peut rendre plus générale, et peut-être sera-t-il surpris de lire la proposition suivante, dont je lui garantis la vérité :

En la figure 38 de M. Dettonville (*fig.* 94), on peut considérer les spirales quarrées, cubiques, quarréquarrées, etc., tout de même que les paraboles cubiques, quarréquarrées, etc.

Si la spirale ordinaire, en laquelle comme toute la circonférence à la portion E8B, ainsi la droite BA à la droite AC, se compare avec la parabole ordinaire en laquelle comme la droite RA à la droite 6A, ainsi le quarré de la droite RP est au quarré de la droite 6Q, et le rapport est tel :

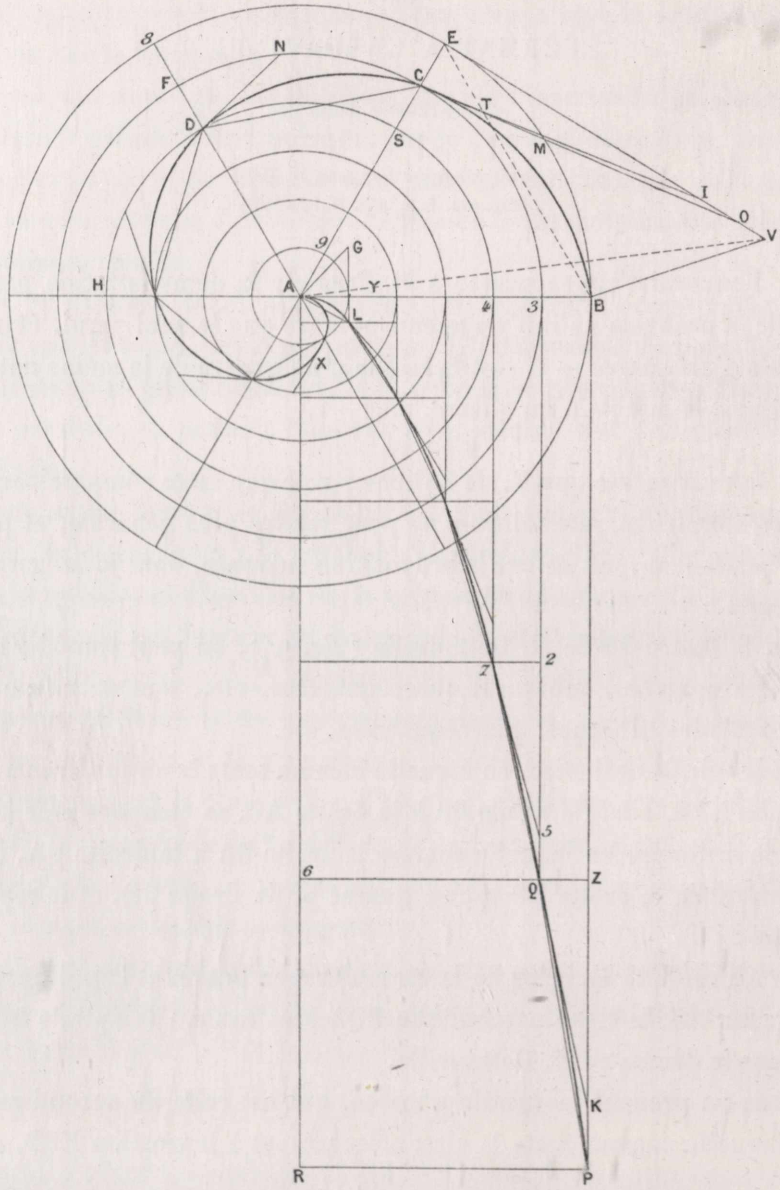
Si AR est faite égale à $\frac{1}{2}$ de la circonférence totale, et l'appliquée RP au rayon AB, la ligne parabolique PQA sera égale à la spirale BCDA, comme le démontre M. Dettonville.

Mais en prenant la spirale quarrée, qui est celle du second genre, en laquelle comme toute la circonférence est à la portion E8B, ainsi

[1] Publiée pour la première fois par M. Charles Henry (*Recherches*, p. 176-177). — Cet extrait, envoyé par Carcavi à Huygens en même temps que le précédent, provient d'une lettre postérieure de Fermat.

le quarré du rayon AB est au quarré du rayon AC, on peut la com-

Fig. 94.



parer avec la parabole cubique, qui est la parabole du second genre.

Soit fait, en la parabole cubique, l'axe AR égal aux $\frac{2}{3}$ de la circonférence totale, et l'appliquée RP aussi égale au rayon AB; la parabole AP du second genre sera égale à la spirale du second genre BCDA.

Si la spirale est cubique, il la faudra comparer avec la parabole quarréquarrée, et faire les $\frac{3}{4}$ de la circonférence totale égaux à l'axe AR de la parabole quarréquarrée, et l'appliquée RP toujours égale au rayon AB.

La parabole quarréquarrée PQA, du troisième genre, sera égale à la spirale cubique du troisième genre en laquelle comme toute la circonférence à la portion E8B, ainsi le cube du rayon AB au cube du rayon AC; et à l'infini, en augmentant toujours chaque numérateur et dénominateur de la fraction, de l'unité :

L'axe de la parabole ordinaire étant ...	$\frac{1}{2}$ de la circonférence,
L'axe de la parabole cubique..........	$\frac{2}{3}$ de la même circonférence,
L'axe de la parabole quarréquarrée ...	$\frac{3}{4}$
L'axe de la parabole quarrécubique ...	$\frac{4}{5}$
Puis	$\frac{5}{6}$, etc.

D'où il est aisé de conclure qu'il y a des spirales dans cette progression qui sont plus grandes que la circonférence du cercle qui les produit, mais qu'elles sont toujours moindres que la somme de ladite circonférence et du rayon.

Voilà un paradoxe géométrique, sur lequel peut-être M. Dettonville et M. de Zulichem n'ont pas encore rêvé. En tout cas, je les supplie de croire que je ne l'ai point de personne, et que ma méthode dont vous avez le chiffre longtemps avant que le Livre de M. Dettonville parût, est la source de beaucoup d'autres belles découvertes sur le sujet des lignes courbes comparées, ou avec des droites, ou avec d'autres lignes courbes de diverse nature. Je vous en dirai peut-être un jour qui vous surprendront.

3. M. de Zulichem désire encore savoir si ma méthode s'étend à trouver la dimension des surfaces courbes des conoïdes et des sphéroïdes. Vous pouvez l'assurer que oui, et qu'elle va encore bien plus loin. Il m'entendra assez lorsque je lui assurerai :

1° Que je n'ai point vu aucune de ses propositions sur ce sujet;

2° Que la surface du conoïde parabolique autour de l'axe se trouve par la règle et le compas et est un problème plan;

Que les surfaces des conoïdes hyperboliques et sphéroïdes supposent la quadrature de l'hyperbole et quelques fois de l'ellipse,

Et qu'enfin le conoïde parabolique autour de l'appliquée fait une surface courbe qui suppose, pour être exactement mesurée, la quadrature de l'hyperbole.

Je puis même donner une ligne droite égale à toute portion de parabole donnée, en supposant la quadrature de l'hyperbole, c'est-à-dire de l'espace hyperbolique.

J'ajouterois toutes les constructions de mes propositions, mais le loisir me manque.