Über Differentialgleichungen in Vektorräumen

von

A. Hoborski (Kraków)

Die vektorielle Behandlung der klassischen Differentialgeometrie im euklidischen Raume R_3 giebt oft Anlass zu folgendem Problem: *es sind drei linear unabhängige Vektoren* $\boldsymbol{a}_i$ $(i=1,2,3)$, *als Funktionen von s zu suchen, die dem System:*

$$\frac{d\boldsymbol{a}_i}{ds}=\sum_{k=1}^{3}\lambda_{ik}\,\boldsymbol{a}_k \qquad (i=1,2,3) \tag{1}$$

genügen, wobei λ_{ik} *bekannte Skalarfunktionen von s bedeuten.*

Wenn wir entsprechende Voraussetzungen über λ_{ik} tun, so ist das System (1) lösbar. Wir wollen seine *allgemeine Lösung* bestimmen. Zu diesem Zwecke erhalten wir aus (1) zuerst das System[1]):

$$\frac{d(\boldsymbol{a}_i\times\boldsymbol{e}_j)}{ds}=\sum_{k=1}^{3}\lambda_{ik}\,\boldsymbol{a}_k\times\boldsymbol{e}_j, \qquad (i,j=1,2,3) \tag{2}$$

wo $\boldsymbol{e}_j$ drei konstante, ortogonale Einheitsvektoren bedeuten. Die neun Skalare $\boldsymbol{a}_i\times\boldsymbol{e}_j$ $(i,j=1,2,3)$ genügen also dem System:

$$\frac{d\eta_i}{ds}=\sum_{k=1}^{3}\lambda_{ik}\,\eta_k \qquad (i=1,2,3) \tag{3}$$

von gewöhnlichen, linearen und homogenen Differentialgleichungen. Bei entsprechenden Voraussetzungen über λ_{ik} ist die allge-

1) Das innere (skalare) Produkt zweier Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ bezeichnen wir mit $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

meine Lösung von (3) eine lineare und homogene Kombination von drei Lösungssystemen mit konstanten Koefizienten:

$$\eta_i = \sum_{l=1}^{3} c_l \eta_{li} \qquad (i=1,2,3), \tag{4}$$

wo c_l drei Konstante bedeuten; η_{li} bei fixem l und für $i=1,2,3$ ergiebt ein Lösungssystem von (3) d. h. es ist [1]):

$$\frac{d\eta_{li}}{ds} = \sum_{k=1}^{3} \lambda_{ik} \eta_{lk} \qquad (i, l=1,2,3). \tag{5}$$

Auf Grund von (2) und (4) erhalten wir sogleich:

$$a_i \times e_j = \sum_{l=1}^{3} c_{lj} \eta_{li} \qquad (i, j=1,2,3),$$

wo c_{lj} beliebige Konstante bedeuten. Es folgt also:

$$a_i = \sum_{j=1}^{3} a_i \times e_j e_j = \sum_{l,j} c_{lj} e_j \eta_{li} \qquad (i=1,2,3). \tag{6}$$

Wir definieren noch folgende Vektoren

$$\mathring{a}_i = \sum_{l=1}^{3} \eta_{li} e_l, \quad c_j = \sum_{l=1}^{3} c_{lj} e_l. \tag{7}$$

Hieraus und aus (6) erhält man sofort:

$$a_i = \sum e_j c_j \times \mathring{a}_i$$

oder auch

$$a_i = \Phi \times \mathring{a}_i \qquad (i=1,2,3), \tag{8}$$

wenn Φ eine konstante (vollständige) Dyadensumme [2]) bedeutet. Aus (5) und (7) folgt noch:

$$\frac{d\mathring{a}_i}{ds} = \sum_l \frac{d\eta_{li}}{ds} e_l = \sum_{l,k} \lambda_{ik} \eta_{lk} e_l = \sum_k \lambda_{ik} \mathring{a}_k \qquad (i=1,2,3),$$

---

[1]) Die Determinante $|\eta_{li}| \neq 0$.

[2]) Siehe J. W. Gibbs u. E. B. Wilson: Vector-Analysis (1931).

woraus zu ersehen ist, dass $\mathring{a}_i$ ein partikulares Lösungssystem von (1) bildet; ausserdem ist $|\mathring{a}_1, \mathring{a}_2, \mathring{a}_3| \not\equiv 0$.

Damit haben wir in (8) alle Lösungen des Differentialgleichungsystem (1) bestimmt. Φ ist dabei eine beliebige konstante Dyadensumme.

Die schönste Anwendung einer zu (8) analogen Formel bildet der vektorielle Beweis des bekannten Satzes von O. Bonnet, dass die Fläche bis auf euklidische Bewegungen durch die Grössen E, F, G, L, M, N bei Berücksichtigung der Bedingungen von Gauss und Mainardi-Codazzi bestimmt ist.

26 V 1936