Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants

par
Emile Cotton (Grenoble)

Le théorème de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet sur la stabilité de l'équilibre est démontré pour les systèmes matériels dépendant d'un nombre fini de paramètres. On *admet* souvent qu'il reste applicable aux systèmes continus, notamment aux fluides de l'Hydrodynamique classique. Mais si l'on cherche à *démontrer* que cette extension est légitime, on rencontre des difficultés signalées par Liapounoff et Duhem; ce dernier auteur a montré [1]) que les difficultés se rencontrent déjà dans l'énoncé du théorème et qu'il fallait définir avec grand soin les mots tels que voisinage, minimum, stabilité, etc.

On peut cependant parfois, sans avoir à prendre des précautions aussi minutieuses, arriver par une étude rapide à des conclusions rigoureuses (un peu plus restreintes naturellement). C'est le cas de la méthode élégante de Guyou dans la théorie des corps flottants: elle établit d'une façon satisfaisante une *stabilité partielle* [2]) concernant le flotteur. Quelques points de cette méthode sont présentés rapidement ici (n° 1) sous une forme qui en permet l'extension (n^{os} 2, 3) à des problèmes plus généraux où un champ conservatif quelconque de forces remplace celui de la pesanteur; il y a encore stabilité partielle pour le flotteur lorsqu'une certaine fonction est minimum. C'est l'étude d'une forme quadratique qui

---

[1]) *Traité d'Energétique*, tome II, ch. XVI (1911).

[2]) Voir le mémoire de M. Jouguet *Sur la stabilité séculaire*, Journal de l'Ecole Polytechnique, 2^e série, 27^e cahier, p. 205 et notamment le n° 25 où la locution est définie. Mais ici l'état du liquide ne peut être caractérisé par un nombre fini de variables q_2.

Voir aussi dans les *Lezioni di Meccanica razionale* de MM. Amaldi et Levi Civita, vol. II, I^{re} partie, chap. VI, le n° 15 (Stabilité réduite ou à la Routh).

met en général le minimum en évidence; en nous limitant au cas des liquides de densité constante, nous reprenons, en le simplifiant, le calcul de Duhem [1]) pour la détermination de cette forme (nº 4).

Nous montrons enfin que la méthode de Duhem s'applique encore quand la liberté du flotteur est restreinte par des liaisons supplémentaires et donnons deux exemples (nº 5).

Nous ne parlons ici que de conditions suffisantes de stabilité; la recherche de conditions nécessaires ferait intervenir la réciproque du théorème de Dirichlet. Mais les démonstrations de cette réciproque ne concernent que les systèmes matériels dépendant d'un nombre fini de paramètres; son utilisation dans les cas où un liquide intervient repose ainsi sur un postulat.

1. Cas du liquide pesant

Le liquide est contenu dans un vase fixe et supporte un flotteur solide; nous supposerons que la surface libre du liquide et la partie non mouillée de la surface du flotteur séparent ces corps du vide — (ou encore que la poussée d'Archimède due à l'air est négligeable). Admettons d'abord qu'aucune résistance passive n'intervient; on établit facilement, en utilisant les équations classiques de l'Hydrodynamique [2]), que l'énergie mécanique totale du système flotteur liquide reste constante.

Cette énergie totale est la somme de l'énergie cinétique T du système liquide flotteur, de l'énergie poids E_l du liquide et de l'énergie poids E_s du flotteur. (Ces énergies poids sont, par définition, les produits respectifs des masses par les cotes des centres de gravité, l'axe Oz des cotes étant vertical ascendant). On a donc:

(1) $$E_s + E_l + T = k$$

k est une constante (par rapport au temps t).

---

[1]) *Journal de Mathématiques*, 5e série, tomes 1 et 2, 1895—1896.

[2]) On peut calculer pour cela la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique du liquide (Voir *Bulletin de la Société Mathématique de France*, tome 50, p. 134) et celle de l'énergie cinétique du solide. En ajoutant ces deux dérivées, les termes correspondant à la puissance des efforts superficiels s'exerçant à la surface de contact du liquide et du flotteur disparaissent. L'équation ainsi obtenue exprime que la dérivée de l'énergie mécanique totale est nulle.

Soit E_n l'*énergie poids du liquide nivelé* correspondant à l'instant t, c'est-à-dire l'énergie poids qu'aurait le liquide ramené à l'état d'équilibre, le solide gardant la position qu'il a à cet instant. Guyou a montré que

$$E_n \leqq E_l. \tag{2}$$

Par suite, comme $T \geqq 0$

$$E = E_n + E_s < k. \tag{3}$$

Le premier nombre de (3) dépend uniquement de la position du solide (puisque le volume du liquide est connu); *c'est une fonction d'un nombre fini de variables*, plus exactement c'est une fonction de trois au plus des paramètres de position du solide q_1, q_2, q_3. Nous pouvons prendre par exemple les trois coordonnées polaires, par rapport à des axes liés au flotteur passant par son centre de gravité G, de la projection G' de ce point sur le plan de flottaison Π relatif au liquide nivelé. En effet, connaissant G' et par suite Π, on a l'orientation du solide par rapport au vase (à une rotation près autour de la verticale), on a aussi le volume de la carène. Ajoutons ce volume à celui du liquide; le volume total obtenu est aussi le volume compris entre les parois du vase et le plan horizontal H, surface libre du liquide nivelé; H est donc connu, l'axe d'orientation $G'G$ étant placé verticalement, de façon que G' soit dans le plan H, on a la position du flotteur avec l'indétermination suivante: des translations horizontales, des rotations autour d'un axe vertical restent possibles.

Supposons que pour certains valeurs q_1^m, q_2^m, q_3^m des paramètres, la somme

$$E(q_1, q_2, q_3,) = E_n + E_s$$

présente un minimum strict E_m, et observons que l'énergie totale du système liquide flotteur qui constitue le premier membre de l'équation (1) s'obtient en ajoutant à E deux termes $E_l - E_n$, T positifs ou nuls; alors, en remplaçant dans la démonstration classique de Lejeune-Dirichlet [1]) l'énergie potentielle par

---

[1]) Voir, soit le Mémoire de Dirichlet, *Journal de Crelle* t. 32 ou *Journal de Liouville* série 1, t. 4, soit le *Traité de Mécanique rationnelle* d'Appell (t. 2).

$E(q_1, q_2, q_3)$ l'énergie cinétique par $T + E_l - E_n$ (expression qui ne peut être négative), on arrive au résultat suivant.

Pour que les différences $q_1 - q_1^m$, $q_2 - q_2^m$, $q_3 - q_3^m$ *et les expressions* T, $E_l - E_n$ *soient constamment aussi voisines de zéro que l'on veut, il suffit qu'à un même instant* t_0 *ces différences et ces expressions soient suffisamment voisines de zéro.*

Dans ces conditions, la flottaison F (correspondant au liquide nivelé) reste, par rapport au flotteur, très voisine de la position qu'elle occupe pour le minimum considéré de E; elle reste aussi très voisine d'un plan horizontal fixe.

Guyou admet que des *forces dissipatives* (c'est-à-dire des forces dont la puissance est négative) *s'ajoutent à celles que nous avons considérées.* Il n'y a plus alors conservation de l'énergie totale $E_s + E_l + T$, mais cette énergie est une fonction décroissante du temps; les conclusions précédentes subsistent pour les instants postérieurs à l'instant t_0; *il y a stabilité future* (*ou stabilité séculaire*). Les expressions positives $E - E_m$, T, $E_l - E_n$ sont inférieures (pour $t > t_0$) à cette fonction décroissante du temps; on ne saurait dire cependant qu'elles tendent vers zéro, sans avoir préalablement démontré que l'énergie totale (supposée nulle pour l'équilibre) s'annule pour une valeur (finie ou infinie) de t supérieure à t_0

2. Extension à d'autres champs de force

Mentionnons maintenant que la méthode de Guyou s'étend quand les forces de profondeur correspondent à un champ conservatif autre que celui de la pesanteur. La force rapportée à l'unité de masse, agissant au point $M(x, y, z)$, sur le liquide incompressible, de densité constante ϱ, dérive d'une fonction de forces que nous désignons par $-W(x, y, z)$; autrement dit, la force est le gradient du potentiel W.

Le liquide est contenu dans un vase fixe; considérons les surfaces de niveau $W(x, y, z) = c$; *nous admettons que lorsque* c *croît de* c_0 *à* c_1 *la surface de niveau correspondante limite avec les parois du vase un volume dont la mesure* V *croît avec* c, en variant de zéro (pour $c = c_0$) à un maximum V_M (correspondant à c_1). Nous supposons, pour simplifier, la somme des volumes du liquide donné et du flotteur solide Σ qu'il porte inférieure à V_M. Comme précédemment, nous admettrons que sur la surface libre du liquide et la partie de la surface du solide non en contact avec le liquide agit une pression atmosphérique constante, qu'on peut supposer nulle, les équations locales de l'Hydrodynamique ne contanant que les dérivées de la pression.

Si le système liquide flotteur est en mouvement, la surface libre S_l du liquide n'est pas, comme dans le cas de l'équilibre, une surface de niveau $W = c$. Mais à la position occupée par le solide à l'instant t correspond une surface de niveau fictive, S_n, que nous appellerons ***surface libre du liquide nivelé***, $W = h$ qui, par définition, est celle qui constituerait avec une partie de la paroi du vase et une partie de la surface du flotteur supposé immobilisé dans la position qu'il occupe à l'instant t, la frontière d'un domaine D_n où la masse liquide donnée pourrait se trouver à l'état d'équilibre.

Ce domaine D_n est différent du domaine D_l occupé par le liquide à l'instant t dans l'état de mouvement considéré, l'énergie potentielle E_l de la masse liquide en mouvement est différente de celle E_n qu'aurait le liquide nivelé,

$$E_l = \varrho \int_{D_l} W d\tau \qquad E_n = \varrho \int_{D_n} W d\tau. \tag{4}$$

Soit D_c la partie commune aux domaines D_l, D_n, D' le domaine qu'il faut ajouter à D_c pour avoir D_l, D'' celui qu'il faut enlever de D_n pour avoir D_c, de sorte que $D_l = D_n + D' - D''$; on a

$$E_l - E_n = \varrho \left\{ \int_{D'} W d\tau - \int_{D''} W d\tau \right\}.$$

Mais D' et D'' ont même volume

$$\int_{D'} d\tau - \int_{D''} d\tau = 0$$

on peut donc écrire

$$E_l - E_n = \varrho \left\{ \int_{D'} (W - h) d\tau - \int_{D''} (W - h) d\tau \right\}. \tag{5}$$

Mais, dans D', $W > h$ et, dans D', $W < h$, cette différence est donc positive, ou nulle (l'égalité n'ayant lieu que si D_l et D_n

coïncident). *On retrouve l'inégalité* (2) *antérieurement considérée; les mêmes conséquences que plus haut s'en déduisent de la même manière:*

Supposons que les forces (autres que les actions du liquide) agissant sur le flotteur admettent un potentiel; la somme

$$E = E_n + E_s$$

est une fonction d'un nombre fini de variables (six au plus) $q_1, \ldots, q_p$ paramètres de position du flotteur.

Si E admet pour les valeurs numériques $q_1^m, \ldots, q_p^m$ des paramètres un minimum strict, il y a stabilité par rapport à ces paramètres.

En d'autres termes: pour que $q_1 - q_1^m, \ldots, q_p - q_p^m$ restent arbitrairement voisins de zéro, il suffit qu'à l'instant initial t_0 ces différences soient assez petites, que E_n soit assez voisin de E_l et que l'énergie cinétique soit assez petite.

3. Equations d'équilibre

Lorsqu'il y a équilibre pour le système liquide flotteur, la surface libre du liquide S_n est une surface de niveau $W = h$, h est une fonction des paramètres de position du solide. Ces paramètres doivent vérifier aussi les équations d'équilibre du solide soumis aux forces correspondant au potentiel E_s et aux poussées hydrostatiques du liquide.

En écrivant que la différentielle

$$\delta E = \delta E_s + \delta E_n = 0 \tag{6}$$

on arrive, comme nous allons le voir, aux mêmes équations [1]).

Pour avoir δE_n, on applique à l'intégrale triple (4) qui donne E_n la formule de différentiation classique [2]). Mais W ne dépend pas des paramètres, $\delta W = 0$, et l'on a

$$\delta E_n = \varrho \int W \delta n \, d\sigma$$

---

[1]) La relation (6) peut d'ailleurs être rattachée au principe du travail virtuel. Duhem l'a montré dans des cas plus généraux encore que ceux considérés ici. Voir notamment son Mémoire inséré au tome 1 de la 5e série du *Journal de Mathématiques.*

[2]) Goursat, *Cours d'Analyse,* tome 1.

l'intégrale du second membre est étendue à la frontière de D_n: δn désigne le déplacement infiniment petit de la frontière suivant la normale. Cette frontière se compose de trois parties:

la première est la surface de contact du liquide et du vase, δn y est nul;

la seconde, que nous appellerons ***surface mouillée de la carène***, et que nous désignons par S_c est la surface de contact du liquide et du flotteur. Le calcul de δn pour cette partie est facile: Soient $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ les expressions de Pfaff construites avec les paramètres de position du solide et leurs différentielles, qui constituent les coordonnées pluckériennes du torseur infiniment petit dont le moment par rapport à un point P du solide donne le déplacement infiniment petit de ce point. P étant pris sur S_c, il suffit de projeter ce moment sur la normale à S_c pour avoir δn. Désignons par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale extérieure au flotteur; ceux de la normale extérieure au liquide sont $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ et

$$\delta n = -[\alpha(\xi + qz - ry) + \beta(\eta + rx - pz) = \gamma(\zeta + py - qx)]. \tag{7}$$

Enfin, la troisième partie S_n de la frontière Dn est la ***surface libre***, partie d'une surface de niveau $W = h$; ici δn désigne la distance de cette surface à la surface infiniment voisine (correspondant à la variation infiniment petite de position du solide); δn est nulle lorsque le volume de la carène n'a pas changé.

On a donc:

$$\frac{1}{\varrho}\,\delta E_n = \int_{S_n} W \delta n\, d\sigma + \int_{S_c} W \delta n\, d\sigma. \tag{8}$$

Le volume du liquide est constant, la différentielle de l'intégrale qui le donne est nulle:

$$\int_{S_n} \delta n\, d\sigma + \int_{S_c} \delta n\, d\sigma = 0.$$

Retranchons de (8) cette dernière égalité multipliée par h et tenons compte de ce que $W = h$ sur S_n, il vient

$$\frac{1}{\varrho}\,\delta E_n = \int_{S_c} (W - h)\,\delta n\, d\sigma. \quad [1] \tag{9}$$

[1]) La formule (9) est applicable encore quand, au lieu d'un flotteur solide, on a un corps déformable Σ plongé (en totalité ou en partie) dans

Nous allons ajouter à S_c la partie F de la surface $W = h$ intérieure au flotteur (partie que nous appellerons encore *flottaison*): en effet, tous les éléments de l'intégrale ainsi ajoutés sont nuls.

Cette addition permet d'appliquer le théorème flux-divergence après remplacement de δn par son expression (7); on a ainsi δE_n par une intégrale triple:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varrho}\delta E_n = -\int_\Gamma \Big[(\xi + qz - ry)\frac{\partial W}{\partial x} + (\eta + rx - pz)\frac{\partial W}{\partial y} + \\ + (\zeta + py - qx)\frac{\partial W}{\partial z}\Big] d\tau,\end{aligned} \tag{10}$$

Γ étant la *carène*, domaine limité par la flottaison F et la frontière extérieure S_c du flotteur, située du côté où $W < h$.

La différentielle δE_s du potentiel des forces (autres que les pressions hydrostatiques) appliquées au solide est une forme linéaire en $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ que nous écrivons

$$\delta E_s = -(X\xi + Y\eta + Z\zeta + Lp + Mq + Nr);$$

X, Y, Z, L, M, N sont d'ailleurs les coordonnées pluckériennes du dyname constitué par les forces en question. Ecrivons de même

$$\delta E_n = -(X'\xi + Y'\eta + Z'\zeta + L'p + M'q + N'r).$$

Les coefficients de $\xi, \eta, \ldots, r$ sont donnés par les intégrales telles que

---

un liquide dont la surface libre reste surface de niveau; S_c désigne alors la surface de contact du fluide et de Σ. Le second membre de (9) peut être interprété comme donnant le travail élémentaire des poussées hydrostatiques exercées par le liquide lorsque Σ subit une modification infiniment petite, à laquelle correspond le déplacement normal δn. Le travail total des mêmes poussées lorsque le système (liquide et corps Σ) passe, par une variation continue, d'une configuration C_0 à une configuration C_1 ne dépend que des configurations extrêmes: c'est évidemment la différence des valeurs de $\frac{1}{\varrho}E_n$ pour C_0 et pour C_1. On a ainsi un exemple de système conservatif de forces réparties d'une façon continue sur une surface.

Dans les systèmes formés de points et de solides indéformables, le travail élémentaire est donné par une forme linéaire de différentielles; ici c'est une intégrale qui remplace cette expression de Pfaff.

$$X' = \varrho \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial W}{\partial x} d\tau = \varrho \int\limits_{S_c} \alpha(W-h)\,d\sigma, \ldots,$$

$$L' = \varrho \int\limits_{\Gamma} \left(y \frac{\partial W}{\partial z} - z \frac{\partial W}{\partial y} \right) d\tau = \varrho \int\limits_{S_c} (y\gamma - z\beta)(W-h)\,d\sigma$$

et sont les coordonnées pluckériennes du dyname constitué par les poussées exercées par le liquide sur le flotteur.

Si l'on a $\delta E = 0$ quels que soient $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ les équations classiques d'équilibre

$$(11) \qquad \begin{gathered} X + X' = 0, \quad Y + Y' = 0, \quad Z + Z' = 0, \quad L + L' = 0, \\ M + M' = 0, \quad N + N' = 0 \end{gathered}$$

sont bien vérifiées.

4. Etude de la stabilité

Admettons que les paramètres de position du solide vérifient ces équations; cherchons si la stabilité partielle du n° 2 se présente pour cet équilibre, c'est-à-dire cherchons s'il correspond à un minimum de E.

Le cas le plus simple où cette circonstance se présente est celui où un minimum de E est mis en évidence par les termes du second ordre de la formule de Taylor. Autrement dit, la différentielle seconde $\delta^2 E$ est alors une forme quadratique définie positive des différentielles premières des paramètres dont E est fonction. Les coefficients de leurs différentielles secondes sont nuls en vertu des conditions d'équilibre; il en est de même des coefficients de $\delta\xi, \ldots, \delta r$ quand on calcule $\delta^2 E$ en différentiant l'expression (6) de δE; nous aurons donc, pour une position d'équilibre

$$(12) \qquad -\delta^2 E = \xi(\delta X + \delta X') + \ldots \quad \ldots + r(\delta N + \delta N').$$

Le calcul de $\delta X, \ldots, \delta N$ qui concernent le dyname des forces appliquées au flotteur est facile; les autres différentielles $\delta X', \ldots, \delta N'$ portent sur des intégrales étendues à la carène Γ. Soit

$$I = \int\limits_{\Gamma} F(x, y, z)\,d\tau$$

une telle intégrale, sa différentielle est

$$\delta I = \int_{S_c} F\,\delta n\,d\sigma + \int_F F\,\delta n\,d\sigma. \tag{13}$$

Pour la surface mouillée de la carène, S_c, on a:

$$\delta n = \alpha(\xi + qz - ry) + \beta(\eta + rx - pz) + \gamma(\zeta + py - qx). \tag{14}$$

Mais cette relation n'est plus valable pour la flottaison F. Nous pouvons écrire

$$\delta I = \int_{S_c+F} [\alpha(\xi + qz - ry) + \beta(\eta + rx - pz) + \gamma(\zeta + py - qx)]\,F\,d\sigma$$

$$+ \int_F [\delta n - \alpha(\xi + qz - ry) - \beta(\eta + rx - pz) - \gamma(\zeta + py - qx)]\,F\,d\sigma$$

et transformer la première intégrale, étendue ainsi à la frontière totale de la carène par application du théorème flux divergence, ce qui donne la formule cherchée

$$\delta I = \int_\Gamma \left[(\xi + qz - ry)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta + rx - pz)\frac{\partial F}{\partial y} + \right.$$
$$\left. + (\zeta + py - qx)\frac{\partial F}{\partial z}\right] d\tau + \int_F F\,\delta_r n\,d\sigma \tag{15}$$

où

$$\delta_r n = \delta n - \alpha(\xi + qz - ry) - \beta(\eta + rx - pz) - \gamma(\zeta + py - qx) \tag{16}$$

(qui peut être appelé le déplacement relatif normal de la flottaison) est la différence entre le déplacement normal absolu de la flottaison et le déplacement normal d'entraînement de cette surface.

On peut calculer δn pour la surface libre, en se rappelant que cette surface se modifie tout en restant surface de niveau: soient $W = h$ et $W = h + \delta h$ ses équations avant et après la modification, on a (pour la surface libre et pour la flottaison)

$$\frac{dW}{dn}\delta n = \delta h.$$

La dérivée de W suivant la normale à la surface de niveau est

$$\frac{dW}{dn} = \epsilon \sqrt{\left(\frac{\partial W}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2} = \epsilon \sqrt{\Delta W}, \quad \epsilon = \pm 1.$$

Le signe doit être choisi de façon que la normale soit orientée vers l'extérieur du liquide, donc $\epsilon = 1$. Ecrivant alors que le volume du liquide reste constant, on a:

$$\delta h \int_{S_n} \frac{d\sigma}{\sqrt{\Delta W}} -$$

$$- \int_{S_c} [\alpha(\xi + qz - ry) + \beta(\eta + rx - pz) + \gamma(\zeta + py - qx)] d\sigma = 0$$

ce qui donne δh en fonction linéaire de $p, q, \ldots, \zeta$; les coefficients sont les quotients d'intégrales étendues à la surface mouillée S_c de la carène par une même intégrale étendue à la surface libre S_n.

Tous les éléments de cette dernière intégrale sont positifs. Elle croît si l'on modifie S_n par additions de nouvelles parties de la surface de niveau, en supposant le vase de plus en plus large; admettons qu'on passe ainsi à une surface illimitée et que $\int_{S_n} \frac{d\sigma}{\sqrt{\Delta W}}$ devienne infinie dans ces conditions (ainsi qu'il arrive dans les exemples suivants). Alors, *pour cette surface libre illimitée* $\delta h = 0$ *et par suite* $\delta n = 0$; nous nous limitons désormais à l'étude de ce cas simple.

5. Exemples

1° Cas classique. Les seules forces de profondeur proviennent de la pesanteur; prenons l'axe Oz vertical, le plan de la surface libre du liquide nivelé, qui reste fixe, comme plan xOy, appelons P le poids du flotteur, a, b, c les coordonnées de son centre de gravité; on a, pour l'énergie poids E_s du flotteur $E_s = Pc$ et, comme $\delta a = \xi + qc - rb$, $\delta b = \ldots$, $\delta c = \ldots$, on a, pour ses variations première et seconde:

$$\delta E_s = P\,\delta c = P[\zeta + pb - qa],$$

$$\delta^2 E_s = P[\delta\zeta + b\,\delta p - a\,\delta q + p(\eta + ra - pc) - q(\xi + qc - rb)].$$

Pour la variation de l'énergie poids du liquide nivelé, puisque $W = gz$ et que $z = 0$ est l'équation de la surface libre, la formule (15) donne

$$\delta E_n = - g\varrho V(\zeta + pb - qa).$$

V est le volume de la carène, a, b, c sont les coordonnées du centre de carène

$$V = \int_\Gamma d\tau, \quad Va = \int_\Gamma x d\tau, \quad Vb = \int_\Gamma y d\tau;$$

donnant successivement dans la formule (15) à F les valeurs $1, x, y$ observant que pour la flottaison $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$ et $\delta n = 0$ (surface libre illimitée) on trouve

$$\delta^2 E_n = -\varrho g V[\delta\zeta + b\delta p - a\delta q + p(\eta + ra - pc) - q(\xi + qc - rb)] + \varrho g \int_F (\zeta + py - qx)^2 d\sigma.$$

On a donc pour l'énergie totale, en désignant par P' le poids $\varrho g V$ du liquide déplacé,

$$\delta E = \zeta(P - P') + p(Pb - P'b) - q(Pa - P'a), \tag{17}$$

$$\delta^2 E = (P - P')\delta\zeta + (Pb - P'b)\delta p - (Pa - P'a)\delta q + (p\eta - q\xi)(P - P') + pr(Pa - P'a) + qr(Pb - P'b) - (p^2 + q^2)(Pc - P'c) + \varrho g \int_F (\zeta + py - qx)^2 d\sigma; \tag{18}$$

la formule (17) donne les conditions d'équilibre du flotteur

$$P = P' \quad a = a \quad b = b$$

(poids du liquide déplacé et poids du flotteur égaux, centre de gravité du flotteur et centre de carène sur une même verticale).

La formule (18) se simplifie pour une position d'équilibre; alors

$$\delta^2 E = -P(c - c)(p^2 + q^2) + \varrho g \int_F (\zeta + py - qx)^2 d\sigma.$$

Une nouvelle simplification s'obtient en prenant pour Ox et Oy les axes d'inertie de la flottaison, et désignant par I_x, I_y les moments d'inertie géométriques de la flottaison relativement à ces axes, et par F son aire,

$$\delta^2 E = -P(c - c)(p^2 + q^2) + \varrho g(F\zeta^2 + I_x p^2 + I_y q^2); \tag{19}$$

cette forme quadratique est définie positive si

$$\varrho g I_x > P(c - c), \quad \varrho g I_y > P(c - c).$$

Ce sont les conditions habituelles de stabilité (le centre de gravité du flotteur doit être au-dessous du petit métacentre).

L'étude précédente repose tout entière sur l'intégrale première des forces vives, ou de la conservation de l'énergie mécanique du système liquide flotteur; ***elle s'appliquera donc aussi lorsque le flotteur au lieu d'être libre est assujetti à des liaisons sans frottement, indépendantes du temps;*** les formules générales (17), (18), p. 51 restent valables.

2° Montrons, par exemple, comment elles s'adaptent à un ***flotteur mobile autour d'un axe horizontal fixe Δ***. Prenons pour axe Oy la projection de Δ sur la surface libre du liquide (nivelé); on a facilement ici:

$$\eta = \zeta = p = r = 0, \quad \xi + qh = 0. \tag{20}$$

(h cote de Δ). L'équation d'équilibre

$$Pa - P'a = 0$$

exprime évidemment que les moments relatifs à Δ de la poussée d'Archimède et du poids ont une somme nulle. Pour qu'il y ait stabilité, il suffit que $\delta^2 E$ soit positif, ce qui donne, en tenant compte de la condition d'équilibre et des relations (20)

$$\delta^2 E = [h(P - P') - (Pc - P'c) + \varrho g I_y] q^2 > 0. \tag{21}$$

3° Soit enfin le cas où les forces de profondeur rapportées à l'unité de masse admettent le potentiel

$$W = gz - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2);$$

elles agissent non seulement sur le liquide, mais encore sur le flotteur. Celui-ci est supposé sphérique, homogène, ou composé de couches sphériques concentriques homogènes.

Ce problème correspond à ***l'équilibre relatif d'un liquide et d'une bille-flotteur sphérique soumis à l'action de la pesanteur et contenus dans un vase tournant uniformément avec la vitesse ω, autour de la verticale Oz.***

L'énergie du flotteur s'exprime immédiatement avec la cote de son centre et son moment d'inertie relatif à Oz; par suite elle est (à une constante additive près)

$$E_s = M\left[gc - \frac{\omega^2}{2}(a^2 + b^2)\right],$$

M masse du flotteur, a, b, c coordonnées du centre.

A cause de la forme sphérique du flotteur, l'énergie cinétique du liquide nivelé E_n est aussi une fonction des seules variables a, b, c; la formule (10) donne:

$$\delta E_n = -\varrho \int_\Gamma [g\zeta - \omega^2(x\xi + y\eta)]\, d\tau.$$

ξ, η, ζ sont les variations infiniment petites de a, b, c, d'ailleurs

$$\delta E_s = Mg[\zeta - \omega^2(a\xi + b\eta)].$$

Pour l'équilibre, la masse du liquide déplacé doit être égale à celle du flotteur; le centre de carène doit être sur la même verticale que le centre du flotteur.

Une position d'équilibre peut être obtenue en prenant le centre du flotteur sur l'axe Oz; étudions la stabilité de cette position, en calculant $\delta^2 E$; on a facilement, pour une position d'équilibre

$$\delta^2 E = \delta^2(E_s + E_n) = \varrho \int_F [g\zeta - \omega^2(x\xi + y\eta)][\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta]\, d\sigma$$

où α, β, γ, cosinus directeurs de la normale à la flottaison, qui est une surface de niveau, sont donnés par

$$\frac{\alpha}{-\omega^2 x} = \frac{\beta}{-\omega^2 y} = \frac{\gamma}{g} = \frac{1}{\sqrt{\omega^4(x^2+y^2)+g^2}}.$$

On a donc

$$\delta^2 E = \varrho \int_F \frac{[g\zeta - \omega^2(x\xi + y\eta)]^2}{\sqrt{\omega^4(x^2+y^2)+g^2}}\, d\sigma.$$

Pour la position d'équilibre considérée, cette intégrale est, par raison de symétrie, évidemment une forme quadratique en ξ, η, ζ où manquent les produits des variables et où les carrés des variables ont des coefficients positifs: l'équilibre est stable.