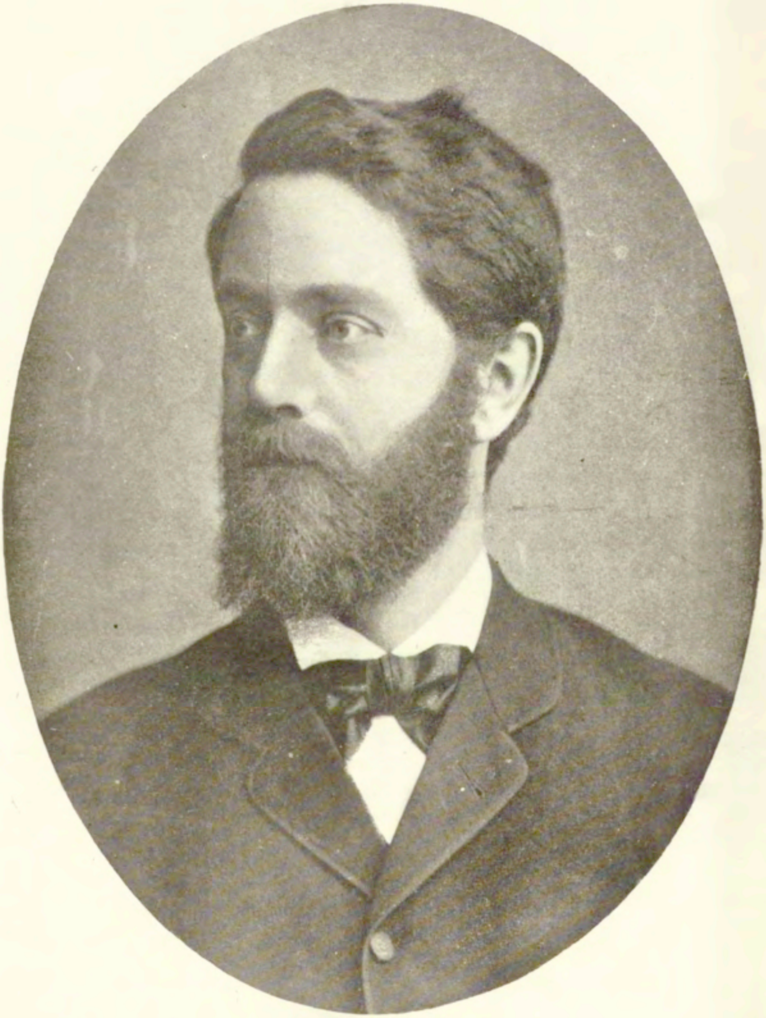
ODCZYTY O MATEMATYCE.



Felix Klein.

Jun

Kat

F. KLEIN.

ODCZYTY O MATEMATYCE

miane w Evanston od 28 sierpnia do 9 września 1893 r. dla członków kongresu matematycznego, odbytego w czasie wystawy wszechświatowej w Chicago.

SPISANE PRZEZ

A. ZIWETA.

PRZEŁOŻYŁ ZA UPOWAŻNIENIEM AUTORA

S. DICKSTEIN.

Z portretem F. Kleina.

WARSZAWA.
Wydawnictwo Redakcyi „Wiadomości matematycznych".

1899.

Дозволено Цензурою
Варшава, 4 Марта 1899 г.

TREŚĆ.

OD TŁÓMACZA.

W ostatnich dniach sierpnia 1893 r., wielu uczestników kongresu matematycznego, odbytego w czasie wystawy wszechświatowej w Chicago, zgromadziło się w uniwersytecie w Evanston dla wysłuchania odczytów przybyłego z Europy prof. K l e i n a o stanie współczesnej nauki matematycznej w Niemczech. W jedenastu odczytach rozwinął prof. K l e i n przed swymi słuchaczami wielce zajmujący obraz kierunków, któremi podąża rozwój wiedzy dzisiejszej, omawiając przytem szerzej i prace własne, które wywarły wpływ tak poważny w wielu dziedzinach badań matematycznych. W ostatnim, dwunastym odczycie przedstawił prelegent w krótkim zarysie organizacyę studyów matematycznych w uniwersytecie getyngeńskim, z którego wyszło wielu dzisiejszych pracowników nauki.

Odczyty te, miane w języku angielskim, spisał jeden ze słuchaczów, prof. A. Z i w e t i, po przejrzeniu ich przez Autora, wydał w r. 1894 w New-Yorku (Macmillan and Co). Znane są one pod nazwą skróconą „The Evanston Colloquium“; w roku zeszłym wyszły w przekładzie francuskim L. L a u g e l a (Paryż, Hermann).

Odczyty znakomitego profesora getyngeńskiego tak treścią niezmiernie ciekawą, jak i sposobem przedstawienia, pozyskały sobie tak powszechne uznanie w świecie matematycznym, że postanowiliśmy wydać je w przekładzie polskim, w przekonaniu, iż znajdą one i u nas chętnych czytelników wśród miłośników matematyki. Mniej wtajemniczonym w zadania i cele nauki czystej odczyty te odsłonić mogą piękny a tak mało znany świat badań, będących nietylko rozkoszą umysłów ale i potężną dźwignią rozwoju społeczeństw.

Odczyty te, za upoważnieniem Autora, wydajemy według oryginału angielskiego. Dołączyliśmy też przekład umieszczonego w oryginale dodatku: „O rozwoju matematyki w uniwersytetach niemieckich", który w pierwotnym tekście niemieckim prof. Kleina stanowi jednę z sekcyj dzieła prof. Lexisa p. t. „Die deutschen Universitäten" (Berlin, Asher. 1893). W przypiskach staraliśmy się uzupełnić wskazówki bibliograficzne przez wymienienie odnośnych prac, wydanych już po roku 1893.

S. D.

ODCZYT I *).

CLEBSCH.

Przedmiotem naszych odczytów ma być przegląd niektórych faz głównych nowszego rozwoju myśli matematycznej w Niemczech.

Krótki rys rozwoju matematyki w uniwersytetach niemieckich w ciągu bieżącego stulecia umieściłem w dziele „Die deutschen Universitäten“, ułożonem i wydanem przez profesora Lexisa (Berlin, Asher, 1893) z okoliczności udziału uniwersytetów niemieckich na wystawie powszechnej w Chicago [1]). Z powodu ściśle przedmiotowego punktu widzenia, przyjętego przezemnie w owym szkicu, musiałem ograniczyć moje przedstawienie na roku 1870. W odczytach niniejszych natury bardziej poufnej te ograniczenia co do czasu i punktu widzenia są zbyteczne. Mam zamiar zająć się tu właśnie okresem, rozpoczynającym się od roku 1870, i będę mówił w sposób bardziej podmiotowy, zwracając szczególną uwagę na rozwój matematyki w tych działach, w których badaniu sam udział brałem, już to pracą osobistą, już to przez obserwacyę bezpośrednią.

Pierwszy tydzień poświęcę przeważnie geometryi, biorąc ten wyraz w znaczeniu najobszerniejszem. W tym pierwszym odczycie najwłaściwiej będzie, jak sądzę, wybrać za osobę centralną sławnego geometrę Clebscha, po części dla tego, iż był on

*) Dnia 28 sierpnia 1893 r.

jednym z moich głównych nauczycieli, i dla tego też, że prace jego są znane w tym kraju.

Pomiędzy matematykami w ogólności możemy rozróżnić trzy kategorye, którym można nadać miana: logików, formalistów, intuicyonistów.

Wyraz „logik“, tu użyty, nie ma związku z logiką matematyczną Boole'a, Peirce'a i t. d.; chcemy przezeń tylko wskazać, że siła główna ludzi, należących do tej klasy, polega na zdolności logicznej i krytycznej, na zdolności tworzenia ścisłych określeń i wyprowadzania z nich dokładnych dedukcyj. Znanym jest wpływ wielki i dobroczynny, jaki w Niemczech w tym kierunku wywarł Weierstrass.

Matematycy-formaliści celują zwłaszcza w zręcznem traktowaniu formalnem danej kwestyi, którą sprowadzają do algorytmu. Gordan, Sylvester i Cayley zaliczeni być mogą do tej grupy.

Intuicyoniści wreszcie kładą szczególny nacisk na intuicyę geometryczną (Anschauung) nie tylko w geometryi czystej, lecz i we wszystkich gałęziach matematyki. To, co Benjamin Peirce nazwał „geometryzowaniem kwestyi matematycznej“ zdaje się wyrażać tę samą myśl. Lord Kelvin i von Staudt mogą być wymienieni jako należący do tej kategoryi.

Clebscha zaliczyć można do kategoryj drugiej i trzeciej; ja sam umieściłbym siebie w trzeciej i w pierwszej. Z tego powodu mój rozbiór prac Clebscha będzie niezupełny; lecz nie będzie to miało poważnych niedogodności, gdyż część jego dzieł, którą cechuje druga kategorya, jest już doskonale oceniona w Ameryce. W ogóle zadaniem mojem jest nie tyle zupełny wykład przedmiotu, ile raczej dopełnienie poglądów, jakie, zdaje mi się, panują w tym kraju.

Jako pierwszą zdobycz Clebscha należy poczytać wprowadzenie do Niemiec rezultatów, osiągniętych przez Cayleya i Sylvestera w Anglii. Nie tylko przeniósł on na grunt niemiecki teoryę niezmienników i interpretacyę geometryczną za pomocą tej teoryi, lecz ustanowił nadto związek żywy i owocny pomiędzy nią a ideami zasadniczemi Riemannowskiej teoryi funkcyj. Co do pierwszego dość wymienić: dzieło „Vorlesungen über Geometrie“, wydane i rozwinięte przez Lindemanna, dzieło „Binäre algebraische Formen" i w ogóle wszystko to, co wydał przy spółudziale Gordana. Dobry rozbiór historyczny tych prac znajduje się w biografii Clebscha, ogłoszonej w t. 7 dziennika „Mathematische Annalen".

Sławna rozprawa Riemanna z r. 1857 [2]) podawała nowe pomysły w teoryi funkcyj sposobem poniekąd niespodziewanym, który na razie stanął na przeszkodzie jej ogólnemu przyjęciu. Riemann ustanowił teoryę całek abelowych i ich odwrotności na pomyśle powierzchni, dziś tak sławnej i jego miano noszącej, oraz na odpowiednich „twierdzeniach o istnieniu" (Existenztheoreme). Clebsch, biorąc za punkt wyjścia krzywą algebraiczną, określoną przez jej równanie, uprzystępnił tę teoryę matematykom swego czasu i nadał jej interes bardziej konkretny przez twierdzenia geometryczne, które wyprowadził z teoryi funkcyj abelowych. Rozprawa Clebscha „Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie" [3]) i dzieło Clebscha i Gordana o funkcyach abelowych [4]) są dobrze znane matematykom amerykańskim i dlatego zgodnie z moim planem uczynię o nich tylko kilka uwag.

Jakkolwiek wielką była zasługa Clebscha w uprzystępnieniu dzieła Riemanna spółczesnym, mniemam wszakże, iż obecnie książka Clebscha nie może być uważana za dzieło klasyczne, wprowadzające w badania funkcyj abelowych. Przedstawieniu Clebscha można uczynić głównie dwa zarzuty, dające się wyrazić krótko w ten sposób: brak ścisłości matematycznej z jednej strony, z drugiej zaś brak intuicyjności i pogłębienia geometrycznego. Kilka przykładów myśl moję wyjaśni.

a) Clebsch opiera całe swoje badanie na rozważaniu tego, co jest dla niego najogólniejszym typem krzywej algebraicznej i przyjmuje, że ta krzywa ogólna ma tylko punkty podwójne i nie posiada innych osobliwości. Aby otrzymać pewną podstawę dla teoryi, trzeba wykazać, że każda krzywa może być przekształcona wymiernie na krzywą, mającą tylko punkty podwójne. Dowodu na to Clebsch nie dał; dali go jego uczniowie i następcy, lecz dowodzenie ich jest długie i skomplikowane. Patrz rozprawy: Brilla i Nöthera w t. 7 dziennika „Mathematische Annalen" [5]), Nöthera tamże t. 23 (1884) [6]).

Inny brak tego samego rodzaju odnosi się do wyznacznika peryodów całki abelowej. Wyznacznik ten nie znika, dopóki krzywa jest nieprzywiedlna; lecz Clebsch i Gordan nie dali na to dowodu, i jakkolwiek dowód tego twierdzenia jest prosty, pominięcie go musimy wszakże poczytać za niedokładność.

Brak ducha krytycznego, jaki znajdujemy w dziełach Clebscha, charakteryzuje epokę geometryczną, w której on żył, epokę Steinera pomiędzy innymi. Nie zmniejsza to bynajmniej zasługi jego dzieł; lecz wpływ teoryi funkcyj uczynił dzisiejsze pokolenie bardziej wymagającem.

b) Drugi zarzut przeciw przyjęciu przedstawienia Clebscha polega na tem, że z punktu widzenia Riemanna niektóre punkty teoryi stają się prostszemi i prawie widocznemi, tymczasem w teoryi Clebscha nie występują one w całej swej piękności. Przykładem tego jest pojęcie rodzaju. W teoryi Riemanna, gdzie p jest rzędem spójności powierzchni, niezmienność tej liczby jest oczywista, gdy tymczasem z punktu widzenia Clebscha musi być ona uzasadniona przy pomocy długiej eliminacyi, która nie daje prawdziwie geometrycznego pojęcia tej sprawy.

Z tych względów wydaje mi się najwłaściwszem rozpoczynać teoryę funkcyj abelowych od pomysłów Riemanna, nie zaniedbując zresztą później i czysto algebraicznego rozwinięcia. Metodę tę przyjąłem w mojej rozprawie o funkcyach abelowych [7]), a także w dziele „Die elliptischen Modulfunctionen", t. 1 i 2 w wydaniu D-ra Frickego. Ogólny zarys rozwoju historycznego tej teoryi krzywych algebraicznych w związku z ideami Riemanna podałem w moich lekcyach litografowanych o powierzchniach Riemanna, mianych w r. 1891—92 [8]).

Przy stosowaniu tej drogi jest rzeczą interesującą zbadać istotny związek pomiędzy rozwinięciami algebraicznemi a teoryą Riemanna. I tak w teoryi Brilla i Nöthera znaczenie pierwszorzędne ma tak zw. twierdzenie zasadnicze. Daje ono prawidło na określenie warunków, przy jakich funkcya całkowita f zmiennych x i y może być przedstawiona w postaci $f = A\varphi + B\psi$, gdzie φ i ψ są również funkcyami algebraicznemi wymiernemi. Każdy punkt przecięcia krzywych $\varphi=0$ i $\psi=0$ musi być punktem krzywej $f=0$. Lecz pozostaje kwestya punktów wielokrotnych i osobliwych; tę rozwiązuje twierdzenie Nöthera. I znowu jest rzeczą wielce interesującą zbadać te związki, jeżeli za punkt wyjścia wziąć pomysły Riemanna.

Najlepszym przykładem pożytku, płynącego z przyjęcia zasad Riemanna, jest wielce godny uwagi postęp, który zawdzięczamy Hurwitzowi w teoryi krzywych algebraicznych, a zwłaszcza w rozwinięciu teoryi odpowiedniości algebraicznych (porówn. t. 2-gi dzieła „Elliptische Modulfunctionen"). Cayley podał jako twierdzenie zasadnicze w tej teoryi prawidło na określenie liczby punktów, odpowiadających samym sobie w odpowiedniościach algebraicznych prostego gatunku. Cały szereg rozpraw prawdziwie cennych Brilla, ogłoszonych w dzienniku „Mathematische Annalen" [9]), jest poświęcony dalszemu badaniu oraz uzasadnieniu tego twierdzenia.

Niedawno Hurwitz [10]), podjąwszy to zadanie ze stanowiska pomysłów Riemanna, doszedł nietylko do prostszego i ogólniejszego dowodzenia prawidła Cayleya, lecz i do zupełnego zbadania wszystkich możliwych odpowiedniości algebraicznych. Znalazł on, że gdy dla ogólnych krzywych odpowiedniości, uważane przez Cayleya i Brilla, są jedynemi istniejącemi, to w przypadku krzywych osobliwych istnieją jeszcze inne odpowiedniości, które można też badać w sposób zupełny. Te krzywe osobliwe charakteryzuje pewna liczba związków liniowych o spółczynnikach całkowitych pomiędzy peryodami ich całek abelowych.

Lecz przejdźmy do tej strony metody Clebscha, która wydaje mi się najważniejszą i którą uważa się zwykle jako mającą wielką i trwałą wartość. Jest nią uogólnienie całej teoryi całek abelowych przez rozciągnięcie jej na teoryę funkcyj wielu zmiennych. Stosując metodę, jaką rozwinął dla funkcyj postaci $f(x, y)=0$ lub w spółrzędnych jednorodnych $f(x_1, x_2, x_3)=0$, do funkcyj o czterech zmiennych jednorodnych $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$, Clebsch odkrył w r. 1868, że istnieje wtedy liczba p, która pozostaje niezmienną przy wszystkich przekształceniach wymiernych powierzchni $f=0$.

Doszedł on do tego rezultatu, rozważając całki podwójne, należące do powierzchni.

Jest widocznem, że teoryi tej nie można było odkryć ze stanowiska Riemanna. Niema wprawdzie trudności w pomyśleniu czterowymiarowej przestrzeni Riemanna, lecz trudno uzasadnić dla takiej przestrzeni „twierdzenia o istnieniu" i jest nawet wątpliwem, czy twierdzenia analogiczne stosują się do niej.

Idea podstawowa tego wielkiego uogólnienia jest dziełem Clebscha, a jej opracowanie dziełem jego uczniów i następców. Pracę tę wykonał przeważnie Nöther, który dla powierzchni algebraicznych odkrył istnienie więcej niż jednego niezmiennika liczbowego p i odpowiednich modułów, t. j. stałych, nie zmieniających się przy przekształceniach jednoznacznych. Matematycy włoscy i francuscy, zwłaszcza Picard i Poincaré znacznie rozwinęli tę teoryę [11]).

Jeżeli zasługa badacza mierzy się nie jego działalnością ogólną we wszystkich kierunkach, lecz jedynie płodnością nowych idej, które pierwszy do nauki wprowadził, to słusznie teoryę tę należy uważać za największe dzieło Clebscha.

W ścisłym związku z powyższem są myśli ogólne, wyłożone przez Clebscha w ostatniej jego pracy [12]), myśli, którym sam przyznawał wielką wagę. Ta rozprawa zawiera, że tak powiemy, zastosowania teoryi całek abelowych do teoryi równań różniczkowych. Wiadomo, że problematem centralnym całej nowoczesnej matematyki jest badanie funkcyj przestępnych, określonych przez równania różniczkowe. Otóż Clebsch, wiedziony analogią z teoryą całek abelowych, postępuje w ten sposób. Niechaj będzie np. równanie różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego $f(x, y, y') = 0$, gdzie f przedstawia funkcyę algebraiczną. Uważając y' za trzecią zmienną z, mamy równanie powierzchni algebraicznej. Jak całki abelowe można klasyfikować według własności krzywej zasadniczej, pozostających bez zmiany przy przekształceniach wymiernych, podobnie Clebsch proponuje klasyfikacyę funkcyj przestępnych, określonych przez równania różniczkowe, opartą na własnościach niezmienniczych odpowiednich powierzchni $f = 0$ przy przekształceniach wymiernych jedno-jednoznacznych.

Teoryę równań różniczkowych uprawiają obecnie szeroko matematycy francuscy i niektórzy z nich obierają za punkt wyjścia poglądy Clebscha.

---

[1]) Przekład tego szkicu znajduje się na końcu niniejszego dziełka.

[2]) B. Riemann. „Theorie der Abel'schen Functionen". Journal fur die reine und angewandte Mathematik **54** (1817), p. 115—155. Riemann's Werke. 1876, p. 81—135.

[3]) A. Clebsch. Journ. f. d. reine und ang. Math. **63** (1864), p. 189—243.

[4]) A. Clebsch u. P. Gordan. „Theorie der Abel'schen Functionen". Leipzig, Teubner, 1866.

[5]) A. Brill u. M. Nöther. „Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie", p. 269—310.

[6]) M. Nöther. „Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen", p. 311—358.

[7]) F. Klein. „Zur Theorie der Abel'schen Functionen". Math. Annalen **36** (1890), p. 1—83.

[8]) Moje kursy litografowane dają często tylko zarys przedmiotu, pomijając szczegóły i długie dowodzenia, które uczący się powinien sam dopełniać przez pracę osobistą i czytanie rozpraw oryginalnych.

[9]) A. Brill. „Ueber zwei Berührungsprobleme" **4** (1871), p. 527—549; „Ueber Enstprechen von Punktsystemen auf einer Curve" **6** (1873), p. 33—65; „Ueber die Correspondenzformel" **7** (1874), p. 607—622; „Ueber algebraische Correspondenzen" **31** (1888), p. 374—400; „Ueber algebraische Correspondenzen Zweite Abhandlung. Specialgruppen von Punkten einer algebraischen Curve" **36** (1870), p. 321—360.

[10]) A. Hurwitz. „Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip" Math. Ann. **28** (1887), p. 561—580.

[11]) Porówn. Picard et Simart „Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes". Patrz Gauthier-Villars, 1897 (dotąd tom pierwszy).

Z matematyków włoskich ogłosili w tym przedmiocie ważne prace: Segre, Bertini, Castelnuovo i Enriques. Patrz Segre: „Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito" (Annali di Matematica (2), **22**, 1894, p. 41—142; Castelnuovo et Enriques: „Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques", Math. Ann. **48** (1896), p. 242—316.

Do historyi badań, o których mowa w końcu tego odczytu, ważnym jest referat Brilla i Nöthera „Die Entwickelung der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit". Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, **3**, 1892—1893. Berlin 1894.

[13]) A. Clebsch. „Ueber ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene. Math. Ann. **6** (1873), p. 203—215.

ODCZYT II *).

SOPHUS LIE**).

Aby zrozumieć geniusz matematyczny Liego, nie dość zwrócić się do dzieł świeżo przez niego przy spółudziale D-r Engela ogłoszonych [1]), lecz należy czytać rozprawy, napisane w pierwszych latach jego karyery naukowej. W nich to właśnie odsłania się wielki geometra, który widząc, że niezupełnie jest zrozumiany przez matematyków, jako przywykłych do analitycznego punktu widzenia, opracował ostatnie swoje dzieła w ogólnej formie analitycznej, nie zawsze zresztą łatwej w studyowaniu.

Na szczęście mogłem obznajmić się bezpośrednio z pomysłami Liego w epoce ówczesnej, kiedy one były jeszcze, jak mówią chemicy „in statu nascenti", a przez to zdolne do wywołania silnej „reakcyi". Dzisiejszy mój odczyt będzie głównie poświęcony rozprawie: „Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugel Complexe, mit Anwendungen auf die Theorie partieller Differentialgleichungen" [2]).

Aby określić miejsce tej rozprawy w historycznym rozwoju geometryi, należy wspomnieć o dwóch znakomitych geometrach epoki poprzedniej: o Plückerze (1801—1868) i o Monge'u (1746—1818). Nazwisko Plückera jest znane każdemu matematykowi z wzorów, odnoszących się do krzywych algebraicznych.

---

*) Dnia 29 sierpnia 1893 r.

**) W chwili oddania arkusza pod prasę, dowiadujemy się, że wielki geometra zmarł dnia 18 lutego 1899 r. w Chrystyanii. *S. D.*

Dla naszego przedmiotu ważnem jest zwłaszcza jego uogólnione pojęcie elementu przestrzennego. Geometrya zwykła z punktem, jako elementem, uważa przestrzeń za trójwymiarową, odpowiednio do trzech stałych, określających położenie punktu w przestrzeni. Przekształcenie dualistyczne daje płaszczyznę jako element; przestrzeń ma wtedy również trzy wymiary, ponieważ są trzy stałe niezależne w równaniu płaszczyzny. Lecz gdy obierzemy prostą za element przestrzeni, wtedy przestrzeń musi być uważana za czterowymiarową, gdyż cztery stałe niezależne określają linię prostą. Jeżeli znów za element przestrzeni obierzemy powierzchnię stopnia 2-go F_2, przestrzeń mieć będzie dziewięć wymiarów, gdyż do określenia każdego takiego elementu potrzeba dziewięciu ilości, t. j. dziewięciu stałych niezależnych powierzchni F_2; innemi słowy, przestrzeń zawiera ∞^9 powierzchni stopnia 2-go. To pojęcie nadprzestrzeni należy ściśle odróżnić od takiegoż pojęcia u Grassmanna i innych. Istotnie Plücker odrzucał wszelkie inne pojęcie przestrzeni więcej niż o trzech wymiarach, jako zbyt abstrakcyjne.

Dzieło Monge'a, mające tu ważność, nosi tytuł „Applications de l'analyse à la géométrie“ (1809, wydanie nowe 1850); przedmiotem jego są równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe rzędu pierwszego i drugiego oraz ich zastosowania do kwestyj geometrycznych, mianowicie do krzywizny powierzchni, do linij krzywiznowych, geodezyjnych i t. d. Traktowanie zagadnień geometrycznych za pomocą rachunku różniczkowego i całkowego jest cechą tego dzieła; lecz drugą jego cechą ważniejszą jest stosowanie odwrotne intuicyi geometrycznej do pytań analizy.

Ono to stanowi właśnie cechę górującą prac Liego; a potęgę jego zwiększa on jeszcze przez przyjęcie pomysłu Plückera o uogólnionym elemencie przestrzennym i rozszerzenie tego pojęcia zasadniczego. Kilka przykładów posłuży do wyjaśnienia charakteru prac Liego. Jako przykład wybieram, o czem już poprzednio wspomniałem, jego geometryę kul (Kugel-Geometrie).

Jeżeli napiszemy równanie kuli w postaci:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Bx - 2Cy - 2Dz + E = 0\,,$$

to spółczynniki B, C, D, E można uważać za spółrzędne kuli, a przestrzeń zwykła będzie rozmaitością o czterech wymiarach. Dla promienia kuli R będzie:

$$R^2 = B^2 + C^2 + D^2 - E;$$

związek ten łączy piątą wielkość R z czterema spółrzędnemi B, C, D, E.

Dla wprowadzenia spółrzędnych jednorodnych połóżmy:

$$B = \frac{b}{a}, \; C = \frac{c}{a}, \; D = \frac{d}{a}, \; E = \frac{e}{a}, \; R = \frac{r}{a},$$

to $a:b:c:d:e$ będą pięcioma spółrzędnemi jednorodnemi kuli, a szósta wielkość r będzie z niemi związana równaniem jednorodnem stopnia drugiego

(1) $$r^2 = b^2 + c^2 + d^2 - ae.$$

Geometryę kul można badać dwiema metodami, które należy starannie odróżniać. W metodzie pierwszej, którą możemy nazwać elementarną geometryą kul, używamy tylko pięciu spółrzędnych a, b, c, d, e, gdy w drugiej, którą nazwijmy wyższą lub Liego geometryą kul, wprowadzamy nadto wielkość r. W tym ostatnim systemie kula ma sześć spółrzędnych jednorodnych a, b, c, d, e, r, związanych równaniem (1).

Z wyższego stanowiska różnica dwu tych geometryj oraz ich charakter indywidualny występują wyraźniej przez rozważanie należącej do nich grupy. Istotnie każdy system geometryi charakteryzuje jego grupa, jak to wyłożyłem w moim „Programie erlangeńskim“ [3]), t. j. każdy system geometryi dopuszcza tylko takie związki przestrzeni, które pozostają niezmiennemi przy przekształceniach grupy.

W elementarnej geometryi kul grupę stanowią podstawienia liniowe pięciu ilości a, b, c, d, e, pozostawiające bez zmiany równanie jednorodne stopnia 2-go.

(2) $$b^2 + c^2 + d^2 - ae = 0.$$

To daje $\infty^{25-15} = \infty^{10}$ podstawień. Stosując tę definicyę, otrzymujemy przekształcenia punktowe o charakterze prostym.

Geometryczne znaczenie równania jest to, że promień jest zerem. Każda kula o promieniu zero, to jest każdy punkt, przekształca się tedy na punkt. Nadto biegunowa

$$2\,bb' + 2\,cc' + 2\,dd' - ae' - a'e = 0\,,$$

pozostaje również bez zmiany przy przekształceniu, skąd wynika, że kule ortogonalne przechodzą na kule ortogonalne. Taka grupa geometryi elementarnej kul charakteryzuje się jako grupa podobna, dobrze znana jako grupa przekształceń za pomocą promieni odwrotnych (inwersyi) oraz z zastosowań w fizyce matematycznej.

Darboux rozwinął znacznie geometryę elementarną kul. Każde równanie stopnia 2-go

$$F(a, b, c, d, e) = 0\,,$$

w połączeniu ze związkiem (2) przedstawia powierzchnię punktową, którą Darboux nazywa cyklidą. Z punktu widzenia zwykłej geometryi rzutowej, cyklida jest powierzchnią czwartego rzędu, zawierającą koło urojone wspólne wszystkim kulom w przestrzeni, jako krzywą podwójną. Piękne badanie tych cyklid znajdujemy w dziele Darboux'a: „Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal“ oraz w innych tegoż rozprawach. Ponieważ zwyczajne powierzchnie stopnia 2-go mogą być uważane za przypadek szczególny cyklid, mamy stąd metodę uogólnienia znanych własności powierzchni stopnia 2-go przez rozciągnięcie ich na cyklidy. M. Bôcher (z Uniwersytetu w Harvard) w rozprawie swej [4]) zajmuje się rozciągnięciem zagadnienia teoryi potencyału z dobrze znanego przypadku ciała, ograniczonego powierzchniami stopnia 2-go na ciała, ograniczone cyklidami. P. Bôcher w ciągu kilku miesięcy ma ogłosić obszerną pracę o tym przedmiocie [5]).

W wyższej geometryi kul Liego sześć spółrzędnych jednorodnych $a : b : c : d : e : r$ pozostaje, jak już powiedzieliśmy, w związku, wyrażonym przez równanie jednorodne stopnia 2-go:

$$b^2 + c^2 + d^2 - r^2 - ae = 0\,.$$

Odpowiadająca grupa jest wybrana jako grupa podstawień liniowych, przekształcających to równanie na samo siebie; mamy w ten sposób grupę $\infty^{36-21}=\infty^{15}$ podstawień. Lecz nie jest to grupa przekształceń punktowych; istotnie, kula o promieniu zero przechodzi na kulę o promieniu w ogóle różnym od zera. Tak np. kładąc naprzykład

$$B'=B,\ C'=C,\ D'=D,\ E'=E,\ R'=R+\text{const}$$

widzimy, że przekształcenie polega na prostem rozszerzeniu każdej kuli, przyczem punkt staje się kulą o danym promieniu.

Znaczenie faktu, że równanie biegunowe

$$2\,bb'+2\,cc'+2\,dd'-2\,rr'-ae'-a'e=0\,,$$

pozostaje niezmiennem dla każdego przekształcenia grupy, jest widocznie takie, iż kule pierwotnie styczne pozostają stycznemi. Grupa należy tedy do tej ważnej klasy przekształceń styczności owych, które zaraz rozpatrzymy szczegółowiej.

Przy studyowaniu geometryi szczególnej, jaką jest np. geometrya kul Liego, przedstawiają się dwie metody:

1) Możemy rozważać równania różnych stopni i pytać, co one przedstawiają. Nadając nazwy różnym w ten sposób otrzymanym konfiguracyom, Lie korzystał z nazw, wprowadzonych przez Plückera do geometryi liniowej. Tak, o równaniu pojedyńczem

$$F(a,b,c,d,e,r)=0\,,$$

mówimy, że przedstawia ono kompleks stopnia 1-go, 2-go i t. d., stosownie do stopnia równania; kompleks zawiera tedy ∞^3 kul. Dwa takie równania

$$F_1=0\,,\quad F_2=0\,,$$

przedstawiają kongruencyę, zawierającą ∞^2 kul. Trzy równania $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$ przedstawiają system ∞^1 kul. Należy przytem pamiętać, że w każdym przypadku spełnia się równanie stopnia drugiego:

$$b^2+c^2+d^2+r^2-ae=0\,,$$

w połączeniu z równaniem $F=0$.

Zwracam uwagę na to, że te same nazwy są używane przez innych autorów w elementarnej geometryi kul, gdzie ich znaczenie jest oczywiście odmienne.

2) Druga metoda badania nowej geometryi polega na szukaniu, czy zwykłe konfiguracye geometryi punktowej można traktować przy pomocy nowego systemu. Ten kierunek badań doprowadził L i e g o do wyników wielce interesujących.

W geometryi zwykłej powierzchnia jest uważana jako miejsce punktów; w geometryi L i e g o przedstawiamy ją sobie jako ogół wszystkich kul, stycznych z powierzchnią. Daje to trójkrotną nieskończoność kul lub kompleks kul

$$F(a, b, c, d, e, r) = 0 .$$

Nie jest to naturalnie kompleks o g ó l n y, gdyż nie każdy kompleks musi być koniecznie stycznym do powierzchni. Dowiedziono, że warunek, któremu winien zadość czynić kompleks, by jego kule były stycznemi do powierzchni, jest następujący:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial c}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial d}\right)^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 - \frac{\partial F}{\partial a}\,\frac{\partial F}{\partial e} = 0 .$$

Aby dać przynajmniej jeden przykład rozwinięcia dalszego tej interesującej teoryi, wspomnę, że pomiędzy nieskończenie wielu kulami, dotykającemi powierzchni w jednym punkcie, są dwie mające z nią styczność stateczną: nazywają się one k u l a m i g ł ó w n e m i. Linie krzywiznowe powierzchni mogą być określone, jako krzywe, wzdłuż których kule główne dotykają powierzchni w dwu punktach kolejnych.

Geometryę liniową P l ü c k e r a według tychże dwu metod traktować można. Niechaj $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23}$ oznaczają sześć zwykłych spółrzędnych w tej geometryi, przyczem $p_{ik} = -p_{ki}$. Mamy wtedy tożsamość:

$$p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} + p_{14}\,p_{23} = 0 ,$$

gdzie jako grupę bierzemy grupę ∞^{15} podstawień liniowych, przekształcających równanie to na samo siebie. Grupa ta odpowiada ogółowi kolineacyj i inwersyj, t. j. grupie rzutowej. Powód leży w tem, że równanie biegunowe

$$p_{12}p'_{34}+p_{13}p'_{42}+p_{14}p'_{23}+p_{34}p'_{12}+p_{42}p'_{13}+p_{23}p'_{14}=0$$

wyraża przecięcie dwu prostych p, p'.

Następnie Lie ustanowił porównanie niezmiernie interesujące pomiędzy plückerowską geometryą liniową a własną geometryą kul.

W każdej z tych geometryj mamy sześć spółrzędnych jednorodnych, związanych równaniem stopnia drugiego. Wyróżnik każdego równania jest różny od zera; możemy przeto przejść od jednej z tych geometryj do drugiej za pomocą podstawienia liniowego. I tak, aby przekształcić

$$p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23}=0 \quad \text{na} \quad b^2+c^2+d^2-r^2-ae=0\,,$$

dość przyjąć, np.

$$p_{12}=b+ic,\ p_{13}=d+r,\ p_{14}=-a,\ p_{34}=b-ic,\ p_{42}=d-r,\ p_{23}=e\,.$$

Z charakteru liniowego podstawień wynika, że równania biegunowe również przekształcają się jedno na drugie; mamy więc godny uwagi rezultat, że dwie kule styczne odpowiadają dwóm przecinającym się prostym.

Warto zwrócić uwagę na to, że równania przekształcenia zawierają jednostkę urojoną, a prawo bezwładności form kwadratowych wskazuje, że to wprowadzenie urojoności jest nietylko nieuniknione, ale nawet istotne.

Aby pokazać doniosłość tego przekształcenia geometryi liniowej na geometryę kul i odwrotnie, rozważmy trzy równania liniowe

$$F_1=0\,,\ F_2=0\,,\ F_3=0\,,$$

gdzie zmienne są spółrzędnemi prostej albo spółrzędnemi kul. W pierwszym przypadku trzy równania przedstawiają system prostych, t. j. dwa układy prostych, tworzących hyperboloidy jednopowłokowej. Wiadomo, że każda prosta jednego lub drugiego układu przecina wszystkie proste drugiego. Przechodząc do geometryi kul, otrzymujemy układ kul, odpowiadających każdemu układowi prostych, i każda kula jednego układu musi dotykać każdej kuli drugiego. Daje to konfiguracyę, dobrze znaną w geometryi z innych badań: wszystkie te kule obwodzą powierzchnię, znaną pod nazwą cyklidy Dupina. Znaleźliśmy tedy godny uwagi związek pomiędzy hyperboloidą jednopowłokową a cyklidą Dupina.

Najbardziej może uderzającym przykładem płodności badań Liego jest jego odkrycie, że za pomocą tego przekształcenia linie krzywiznowe powierzchni przechodzą na linie asymptotyczne powierzchni przekształconej i odwrotnie. Widać to bezpośrednio, gdy przyjmiemy powyższą definicyę linij krzywiznowych i przełożymy ją słowo w słowo na język geometryi liniowej. Dwa zagadnienia geometryi nieskończonostkowej, które długo poczytywano za zupełnie różne, okazały się tym sposobem w istocie tożsamemi. Jest to bezwątpienia jeden z najpiękniejszych w naszych czasach przyczynków do geometryi różniczkowej.

---

[1]) Theorie der Transformationsgruppen. Unter Mitwirkung von D-r Fr. Engel, bearbeitet von Sophus Lie, Erster Abschnitt. Lipsk. 1888; Zweiter Abschnitt, tamże 1890; Dritter und letzter Abschnitt, tamże 1893; Geometrie der Berührungstransformationen, bearbeitet von Sophus Lie und Georg Scheffers. Erster Band. Lipsk. 1896 (por. streszczenie E. Wierzbickiego w Tomie 9 „Prac matematyczno-fizycznych"). Wymienić tu jeszcze należy: Sophus Lie, Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, bearbeitet und herausgegeben von D-r Georg Scheffers. Lipsk. 1891 (porówn. streszczenie J. Paczowskiego w Tomie 7 „Prac matematyczno-fizycznych"); Sophus Lie, Vorlesungen über contuirliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen, bearbeitet und herausgegeben von D-r Georg Scheffers. Lipsk. 1893.

[2]) S. Lie. Mathem. Ann. 5 (1872), p. 145—256.

[4]) F. Klein. „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen". Programm zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat der K. Friedrich Alexanders-Universität zu Erlangen. 1872. Przedruk w „Math. Ann." 43; przekład polski S. Dicksteina w Tomie 6 „Prac matematyczno-fizycznych".

[4]) M Bôcher. Ueber die Reihentwickelung der Potentialthorie, gekrönte Preisschrift. Getynga. 1892.

[5]) Dzieło pod tytułem takim, jak praca poprzedzająca, wydane zostało w r. 1894 (8 więk., VIII i 258) w Lipsku u Teubnera.

ODCZYT III *).

SOPHUS LIE
(ciąg dalszy).

Różnica pomiędzy funkcyami analitycznemi a algebraicznemi, tak ważna w analizie czystej, występuje także w badaniach geometrycznych.

Funkcyami analitycznemi są te, które przedstawić się dają za pomocą szeregów potęgowych, zbieżnych w pewnym obszarze, ograniczonym tak zw. kołem zbieżności. Poza tym obszarem funkcya analityczna nie jest uważana jako dana a priori; przeprowadzenie jej w obszary rozleglejsze jest przedmiotem badania specyalnego i może prowadzić do rozmaitych rezultatów, stosownie do rozważanego przypadku szczególnego.

Z drugiej strony, funkcya algebraiczna $w = \text{Alg}(z)$ przyjmuje się jako znana w całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej, gdzie posiada skończoną liczbę wartości dla każdej wartości z.

Podobnie, w geometryi możemy rozważać tylko ograniczony kawałek krzywej lub powierzchni analitycznej, kreśląc np. styczną, badając krzywiznę i t. d., albo też możemy rozpatrywać rozciągłość całkowitą krzywych i powierzchni algebraicznych w przestrzeni.

Prawie wszystkie zastosowania rachunku różniczkowego i całkowego do geometryi należą do pierwszej z tych gałęzi geometryi; a ponieważ tem właśnie mam zająć się w wykładzie dzisiejszym, nie mamy przeto potrzeby ograniczać się do samych funkcyj alge-

*) Dnia 30 sierpnia 1893 r.

braicznych, i dla tego rozpatrywać będę ogólniejsze funkcye analityczne w ograniczonych częściach przestrzeni. Uważałem za właściwe uczynić tę uwagę raz na zawsze, gdyż, zdaje mi się, iż w Ameryce przeważało dotąd rozważanie krzywych algebraicznych.

W poprzedzającym wykładzie zaznaczyliśmy możliwość wprowadzenia nowych elementów przestrzeni. Dziś zrobimy użytek z nowego jeszcze elementu, składającego się z nieskończonostkowej części powierzchni (lub raczej jej płaszczyzny stycznej) wraz z określonym jej punktem. Nazywa się on niezupełnie właściwie elementem powierzchniowym (Flächenelement) i można go porównać do nieskończenie małej łuski rybiej. Z bardziej abstrakcyjnego punktu widzenia, można go określić jako kombinacyę płaszczyzny z punktem.

Ponieważ równanie płaszczyzny, przechodzącej przez punkt (x, y, z), można napisać w postaci:

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y),$$

gdzie x', y', z' oznaczają spółrzędne bieżące, to x, y, z, p, q będą spółrzędnemi naszego elementu powierzchniowego, tak że przestrzeń staje się rozmaitością pięciowymiarową. Jeżeli użyjemy spółrzędnych jednorodnych, to punkt (x_1, x_2, x_3, x_4) i płaszczyzna (u_1, u_2, u_3, u_4), przezeń przechodząca, będą połączone związkiem

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 = 0,$$

wyrażającym ich położenie zjednoczone; liczba stałych niezależnych będzie $3 + 3 - 1 = 5$, jak przedtem.

Zobaczmy, jaką będzie geometrya zwykła w tem przedstawieniu. Ponieważ punkt jest miejscem elementów powierzchniowych przezeń przechodzących, przeto przedstawia się jako rozmaitość dwuwymiarowa lub, mówiąc krótko, jako M_2. Krzywa przedstawia się jako ogół wszystkich takich elementów powierzchniowych, mających swoje punkty na krzywej i których płaszczyzny zawierają styczne do krzywej w tych punktach; i te elementy tworzą M_2. Nakoniec powierzchnia jest dana przez te elementy powierzchniowe, które mają swe punkty na powierzchni i których płaszczyzna styczna zlewa się z płaszczyzną styczną powierzchni; i one więc tworzą M_2.

Wreszcie wszystkie te rozmaitości M_2 mają ważną własność wspólną: dwa kolejne elementy powierzchniowe, należące do tego samego punktu, do tej samej krzywej lub powierzchni, czynią zadość warunkowi

$$dz - pdx - qdy = 0 ,$$

który jest prostym przypadkiem równania Pfaffa. I odwrotnie, jeżeli dwa elementy powierzchniowe czynią zadość temu warunkowi, wtedy należą do tego samego punktu, tej samej krzywej lub powierzchni, stosownie do przypadku.

Mamy tu rezultat wysokiego znaczenia, że w geometryi elementów powierzchniowych punkty, krzywe i powierzchnie podprowadzają się pod jednę kategoryę, gdyż wszystkie przedstawić się dają jako rozmaitości dwuwymiarowe, mające własność powyższą. Definicya ta jest tem ważniejsza, że nie istnieją inne rozmaitości M_2, mające takąż własność.

Przejdźmy teraz do bardzo ogólnego typu przekształceń, nazwanych przez Liego przekształceniami stycznościowemi. Są to przekształcenia, zmieniające element (x, y, z, p, q) na element (x', y', z', p', q') za pomocą podstawień:

$$x' = \varphi(x, y, z, p, q),\ y' = \psi(x, y, z, p, q),\ z' = \ldots,\ p' = \ldots,\ q' = \ldots,$$

które przekształcają równanie różniczkowe $dz - pdx - qdy = 0$, na samo siebie.

Znaczenie geometryczne tego przekształcenia jest widocznie takie, że każda rozmaitość M_2, mająca własność daną, przechodzi na inną rozmaitość M_2, mającą takąż samą własność. Tak np., powierzchnia przekształca się w ogóle na powierzchnię lub w szczególnych przypadkach na punkt lub krzywą. Jeżeli nadto rozważamy dwie rozmaitości styczne wzajemnie, t. j. mające element powierzchniowy wspólny, to przez przekształcenie przechodzą one na inne rozmaitości M_2, również styczne wzajemnie. Z powodu tej własności charakterystycznej, Lie nadał powyższą nazwę temu przekształceniu.

Przekształcenia stycznościowe są tak ważne i spotykają się tak często, że ich przypadki szczególne oddawna już, jakkolwiek pod inną nazwą i z innego punktu widzenia, zwracały na się uwagę geometrów; lecz ich istota i wysoka doniosłość były nieznane.

Liczne przykłady przekształceń stycznościowych podałem w swoich wykładach „Geometryi wyższej", mianych w semestrze zimowym (1892—1893). Przykład w dziedzinie dwuwymiarowej daje zagadnienie o zaczepianiu kół zębatych. Mamy dany profil zęba jednego koła, a szukamy profilu drugiego. Mówiłem o tem zagadnieniu na odczycie na wystawie w Chicago, wyjaśniając je na modelach, nadesłanych przez uniwersytety niemieckie.

Inny przykład znajdujemy w teoryi perturbacyj w astronomii: metoda Lagrange'a waryacyi parametrów w zagadnieniu trzech ciał jest równoważna z przekształceniem stycznościowem w przestrzeni wyższej.

Grupa ∞^{15} podstawień, rozważana wczoraj w geometryi liniowej, jest też grupą przekształceń stycznościowych, gdyż kolineacye i inwersye mają ten charakter. Ostatnie dają pierwszy dobrze znany przykład przekształcenia punktu na płaszczyznę (t. j. na powierzchnię) oraz krzywej na rozwijalną (t. j. także na powierzchnię). Te przekształcenia krzywych należy uważać jako przekształcające elementy punktów lub krzywych na elementy powierzchni.

Wreszcie istnieją przykłady przekształceń stycznościowych nie tylko w przekształceniach kul, które rozważaliśmy w poprzednim wykładzie, lecz i w przejściu ogólnem od geometryi liniowej Plückera do geometryi kul Liego. Rozpatrzmy to nieco szczegółowiej.

Przedewszystkiem dwie linie przecinające się mają oczywiście element powierzchniowy wspólny; a ponieważ dwie odpowiadające kule powinny mieć też element powierzchniowy wspólny, więc będą stycznemi; jest to właśnie przypadek naszego przekształcenia. Jest interesującem rozpatrzeć bliżej związek pomiędzy elementami powierzchniowemi linii i takiemiż kuli, lubo dany on jest przez wzory urojone. Weźmy np. ogół elementów powierzchniowych, należących do koła na jednej z kul; możemy go nazwać układem kołowym elementów. W geometryi liniowej odpowiada mu układ elementów powierzchniowych wzdłuż tworzącej powierzchni skośnej i t. d.

Twierdzenie o przekształceniu krzywych krzywiznowych na linie asymptotyczne staje się teraz widocznem samo przez się. Zamiast krzywej krzywiznowej na powierzchni mamy do rozważania odpowiadające im elementy powierzchniowe, które możemy nazwać układem krzywiznowym. Podobnież linie asymptotyczne możemy zastąpić elementami powierzchni wzdłuż linii; można je nazwać układem ściśle stycznym. Odpowiedniość tych dwóch układów staje się bezpośrednio widoczną przez rozważanie dwu kolejnych elementów układu krzywiznowego, należącego do tej samej kuli, gdy dwa elementy kolejne układu ściśle stycznego należą do tej samej prostej.

Najważniejsze zastosowania przekształceń stycznościowych, napotykamy w teoryi równań różniczkowych cząstkowych. Rozpatrzę tu równania różniczkowe cząstkowe rzędu 1-go. Z naszego nowego punktu widzenia teorya pozyskuje nieznane poprzednio pogłębienie, a prawdziwe znaczenie pojęć: „rozwiązanie“, „rozwiązanie zupełne“, „rozwiązanie ogólne“, wprowadzonych przez Lagrange'a i Monge'a, występuje z całą jasnością. Rozpatrzmy równanie różniczkowe cząstkowe rzędu 1-go:

$$f(x, y, z, p, q) = 0 .$$

W teoryi dawniejszej robimy rozróżnienie stosownie do tego, w jaki sposób p i q zachodzą w równaniu. Jeżeli p i q zachodzą tylko w stopniu pierwszym, równanie nazywa się liniowem. Jeżeli brak p i q, wtedy równanie wcale nie uważa się za różniczkowe. Z wyższego punktu widzenia nowej geometryi Liego, rozróżnienie to znika zupełnie, jak to zaraz zobaczymy.

Liczba elementów powierzchniowych w całej przestrzeni jest oczywiście ∞^5. Napisać nasze równanie jest to wybrać pomiędzy elementami rozmaitość czterowymiarową M_4 o ∞^4 elementach. Znaleść „rozwiązanie“, znaczy, według Liego, wyosobnić w tej rozmaitości M_4 rozmaitość dwuwymiarową, mającą własność charakterystyczną; czy ta rozmaitość jest punktem, czy krzywą, czy powierzchnią, jest rzeczą obojętną. To, co Lagrange nazywa „rozwiązaniem zupełnem“, polega na podzieleniu rozmaitości M_4 na ∞^2 rozmaitości M_2. Można to uskutecznić oczywiście nieskończenie wielu sposobami. Nakoniec, jeżeli pomiędzy temi ∞^2 rozmaitościami M_2 wybierzemy jakiś układ pojedyńczo nieskończony, to powłócząca tego układu przedstawia to, co Lagrange nazywa „rozwiązaniem ogólnem". Te określenia stosują się ogólnie do wszystkich równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego, nawet do ich postaci najbardziej specyalnych.

Objaśnimy na przykładzie, w jakiem znaczeniu równanie postaci $f(x, y, z) = 0$ może być uważane za równanie różniczkowe cząstkowe, i co rozumieć należy wówczas przez rozmaite jego rozwiązania; rozpatrzymy przypadek szczególny $z = 0$. Podczas gdy w spółrzędnych zwykłych równanie to przedstawia wszystkie punkty płaszczyzny xy, to w systemie Liego przedstawia ono oczywiście wszystkie elementy powierzchniowe, których punkty znajdują się na płaszczyźnie. Nic prostszego nad określenie w tym razie „rozwiązania zupełnego"; dość wziąć ∞^2 punktów płaszczyzny, gdyż każdy z nich jest rozmaitością M_2 odnośnie do równania. Aby stąd otrzymać „rozwiązanie ogólne", musimy wziąć wszystkie możliwe pojedyńczo-nieskończone układy punktów płaszczyzny, t. j. jakąkolwiek krzywą i utworzyć powłóczącą elementów powierzchniowych, należących do punktów; innemi słowy musimy wziąć elementy, dotykające krzywej. Wreszcie sama płaszczyzna przedstawia rozwiązanie osobliwe.

Otóż wysoki interes i ważność tego prostego przykładu leży w tem, że za pomocą przekształcenia stycznościowego każde równanie różniczkowe cząstkowe rzędu pierwszego może przybrać postać szczególną $z = 0$. Stąd cały wyżej nakreślony rozkład rozwiązań pozostaje ogólnym.

Dzięki teoryi Liego pozyskaliśmy nietylko nowy i głębszy pogląd na znaczenie zagadnień, oddawna za klasyczne uważanych, lecz powstało nadto wiele nowych zagadnień, które znalazły w niej zarazem swoje rozwiązanie.

Mogę tylko nadmienić o tem, że Lie zastosował podobne zasady do teoryi równań różniczkowych cząstkowych rzędu drugiego.

Lie najwięcej jest znany obecnie przez swoją teoryę ciągłych grup przekształceń. Na pierwszy rzut oka zdawać by się mogło, że zachodzi słaby tylko związek pomiędzy tą teoryą a rozważaniami geometrycznemi, które rozwinąłem w dwóch ostatnich odczytach. Jest więc pożądanem zaznaczyć ich związek. Od samego początku ostatecznym celem badań Liego było udoskonalenie teoryi równań różniczkowych, i jako pomocnicze w tym kierunku możemy uważać tak poprzednie rozważania geometryczne, jak i teoryę grup ciągłych.

Po dalsze szczegóły w przedmiotach, poruszonych w niniejszym i w dwóch poprzedzających odczytach, odsyłam do moich wykładów litografowanych o „Geometryi wyższej", mianych w Getyndze w r. 1893—1894. Teorya elementów powierzchniowych jest całkowicie rozwinięta w drugim tomie dzieła Liego i Engela „Theorie der Transformationsgruppen". (Lipsk. Teubner, 1890).

ODCZYT IV *).

O POSTACI RZECZYWISTEJ KRZYWYCH I POWIERZCHNI ALGEBRAICZNYCH.

Zwróćmy się znów do funkcyj algebraicznych, a w szczególności do pytania, związanego z formami geometrycznemi, tym funkcyom odpowiadającemi. Pytanie o rzeczywistości form geometrycznych i o istotnej postaci krzywych i powierzchni algebraicznych długo było zaniedbywanem. Inaczej trudno byłoby wytłómaczyć, dlaczego np. nie dostrzeżono zrazu związku pomiędzy teoryą metryki rzutowej Cayley'a a geometryą nieeuklidesową. Ponieważ pytania te są mniej znane, niż na to zasługują, przeto podam tu zarys historyczny przedmiotu, nie kusząc się bynajmniej o zupełność.

Do zasług Izaaka Newtona winniśmy zaliczyć pierwsze w tym rodzaju badania jego nad postacią krzywych płaskich rzędu trzeciego. Jego praca: „Enumeratio linearum tertii ordinis“ [1]) pokazuje, że miał on bardzo jasne pojęcie o geometryi rzutowej, gdyż mówi, że wszystkie krzywe rzędu trzeciego wyprowadzić można za pomocą rzutu centralnego z pięciu typów zasadniczych (Fig. 1). Lecz pragnę zwrócić szczególną waszą uwagę na rozprawę Möbiusa „Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung“ [2]), gdzie postaci krzywych sześciennych są wyprowadzone z rozważań czysto-geometrycznych. Nadzwyczajna piękność tej metody dała pobudkę w tym kierunku do badań następnych, o których teraz wspomnę.

---

*) Dnia 31 sierpnia 1893 r.

W roku 1872 w Getyndze rozważaliśmy to pytanie o postaci powierzchni rzędu trzeciego. Clebsch zbudował wtedy piękny model przypadku szczególnego powierzchni przekątnej z 27 prostemi rzeczywistemi, który przedstawiłem na wystawie. Równanie tej powierzchni można napisać w prostej postaci

$$\sum_1^5 x_i = 0\,, \quad \sum_1^5 x_i^2 = 0\,,$$

która pokazuje, że powierzchnia ta może być przekształcona na samą siebie przez 120 przekształceń ilości x.

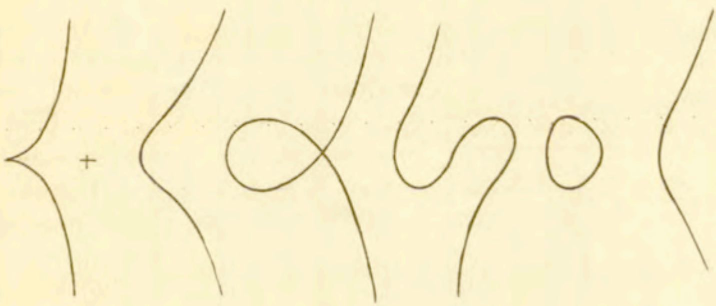


Fig. 1.

Możemy wypowiedzieć tu prawidło ogólne, że wybierając przypadek szczególny dla konstrukcyi modelu, zwracamy przedewszystkiem uwagę na foremność. Przy wyborze formy symetrycznej na model, nietylko upraszczamy wykonanie, lecz nadto, co ważniejsza, nadajemy mu cechy, bardziej wdrażające się w umysł.

Pod wpływem tego badania Clebscha, podjąłem ogólne zagadnienie wyznaczenia wszystkich możliwych postaci powierzchni sześciennych [3]). Przy pomocy zasady ciągłości stwierdziłem, że wszystkie postaci powierzchni rzeczywistych rzędu trzeciego, dają się wyprowadzić z powierzchni szczególnej, mającej cztery rzeczywiste punkty stożkowe. Powierzchnię tę przedstawiłem wam na wystawie i pokazałem, w jaki sposób powstaje z niej powierzchnia przekątna. Lecz najważniejszem jest to, że z mojego punktu widzenia wynika wyliczenie zupełne. Istotnie, byłoby rzeczą względnie niewielkiego znaczenia wyprowadzić pewną liczbę postaci specyalnych, a nie módz sprawdzić, czy metoda użyta wyczerpuje przedmiot. Później typowe przypadki głównych postaci powierzchni sześciennych zbudował Rodenberg dla kolekcyi Brilla.

W tomie 7 dziennika „Mathematische Annalen" (1874), Zeuthen[4]) rozpatrzył rozmaite postaci krzywych rzędu czwartego C_4. W szczególności zaś rozważył on rzeczywistość stycznych podwójnych do tych krzywych.

Tych stycznych jest 28; są one wszystkie rzeczywistemi, jeśli krzywa składa się z czterech oddzielnych części zamkniętych (Fig. 2). Szczególny interes, wiążący badania Zeuthena nad krzywemi płaskiemi C_4 z mojemi własnemi badaniami nad powierzchniami sześciennemi, wyjaśnił sam Zeuthen[5]). Geiser zauważył już dawniej, że gdy powierzchnię sześcienną rzucamy z punktu powierzchni na płaszczyznę, to konturem rzutu jest krzywa rzędu czwartego i że każdą krzywą rzędu czwartego można w ten sposób utworzyć. Jeżeli wybierzemy powierzchnię, mającą cztery punkty stożkowe, to krzywa C_4 będzie miała cztery punkty podwójne, t. j. że rozdzieli się na dwie stożkowe (Fig. 3). Rozważanie części zacienionych figury pokazuje, jak przy pomocy zasady ciągłości otrzymać można łatwo cztery owale krzywej rzędu czwartego (na fig. 2).

Fig. 2.

Usiłowania rozciągnięcia tego stosowania zasady ciągłości w celu otrzymania przeglądu krzywych rzędu n-tego pozostały dotąd bezpłodnemi, przynajmniej w tem, co dotyczy klasyfikacyi ogólnej i wyliczenia wszystkich postaci zasadniczych. Mimo to otrzymano pewne ważne rezultaty. Wymieniamy w tym względzie rozprawę Harnacka[6]) i nowszą rozprawę Hilberta[7]). Pierwszy z nich znalazł, że jeżeli p oznacza rodzaj krzywej, to największa liczba oddzielnych gałęzi, jakie może mieć ta krzywa, wynosi $p + 1$, i że istnieje istotnie krzywa, mająca tyle gałęzi. Praca Hilberta zawiera wiele interesujących przypadków specyalnych, których nie możemy wszakże wymienić w niniejszym zarysie.

Ja sam odkryłem [8]) ciekawy związek pomiędzy liczbami osobliwości rzeczywistych. Oznaczmy przez n rząd krzywej, przez k jej klasę, i rozważajmy tylko osobliwości rzeczywiste. Mamy wtedy trzy rodzaje punktów podwójnych: dajmy na to d' zwyczajnych, d'' odosobnionych rzeczywistych, obok urojonych podwójnych; może być r' ostrzy rzeczywistych, obok ostrzy urojonych. Analogicznie, według zasady dwoistości, mamy t' stycznych zwyczajnych, t'' odosobnionych rzeczywistych podwójnych, obok stycznych podwójnych urojonych; nakoniec w' przegięć rzeczywistych, obok takichże urojonych. Można wtedy udowodnić za pomocą zasady ciągłości, iż winien zachodzić związek następujący:

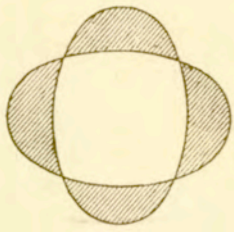


Fig. 3.

$$n + w' + 2t'' = k + r' + 2d''.$$

To prawo ogólne obejmuje wszystko, co wiemy o krzywych trzeciego i czwartego rzędu. Rozmaici autorowie uogólnili je w znaczeniu bardziej algebraicznem. Nadto Brill pokazał w tomie 16 dziennika „Mathematische Annalen" (1880) [9]) jak należy zmienić wzór, jeżeli zachodzą osobliwości wyższe.

Co się tyczy powierzchni rzędu czwartego, to Rohn zbadał wielką liczbę przypadków szczególnych, lecz wyliczenia zupełnego nie mamy dotąd. Pomiędzy przypadkami szczególnemi powierzchni rzędu czwartego, najważniejszą jest powierzchnia Kummera o 16 punktach stożkowych. Modele, zbudowane przez Plückera w związku z jego teoryą kompleksów linij prostych, przedstawiają wszystkie przypadki szczególne powierzchni Kummera. Niektóre z tych typów obejmuje kolekcya Brilla. Lecz wszystkie te modele są dziś mniejszego znaczenia, od chwili, gdy Rohn odkrył następującą godną uwagi własność ogólniejszą. Wyobraźmy sobie powierzchnię rzędu czwartego z czterema tworzącemi obu układów (Fig. 4). Odpowiednio do charakteru powierzchni, do rzeczywistości, nierzeczywistości lub zlewania się tych prostych, możliwa jest znaczna liczba przypadków szczególnych; wszystkie te przypadki powinny być traktowane jednakowo. Weźmy przypadek hyperboloidy jednopowłokowej o czterech różnych tworzących każdego układu. Te proste dzielą powierzchnię na 16 obszarów. Cieniując naprzemian obszary, jak pokazuje figura, uważajmy obszary cieniowane za podwójne i odwróćmy uwagę od obszarów niecieniowanych; otrzymamy w ten sposób powierzchnię, składającą się z 8 oddzielnych części zamkniętych, łączących się tylko w punktach przecięcia tworzących; jest to powierzchnia Kummera o 16 rzeczywistych punktach podwójnych. Badania Rohna nad powierzchnią Kummera znajdują się w t. 18 dziennika „Mathematische Annalen“ (1881) [10]); jego badania ogólniejsze nad powierzchniami rzędu czwartego w t. 29 (1887) [11]) tegoż czasopisma.

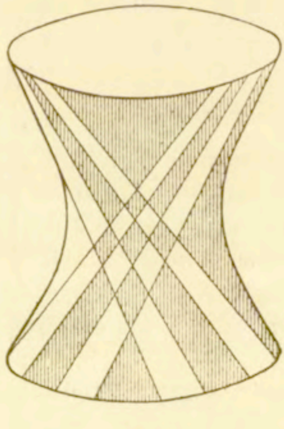


Fig. 4.

Istnieje jeszcze inna metoda badania postaci krzywych (nie powierzchni), t. j. przy pomocy teoryi Riemanna. Pierwsze zagadnienie, jakie się tu nasuwa, odnosi się do związku między krzywą płaską a powierzchnią Riemanna, jak to pokazałem w t. 7 dziennika „Mathematische Annalen“ (1874) [12]). Rozpatrzmy krzywą sześcienną; jej rodzaj $p = 1$. Wiadomo, że w teoryi Riemanna rodzaj jest miarą spójności odpowiedniej powierzchni Riemanna, która w tym razie jest spójnością kręgu pierścieniowego. Stąd powstaje pytanie, co ma do czynienia pierścień z krzywą sześcienną? Zrozumiemy ich związek, jeżeli rozważymy krzywą klasy trzeciej, której postać jest przedstawiona na figurze 5. Łatwo widzieć, że trzy styczne, które możemy poprowadzić do tej krzywej z punktu jej płaszczyzny, jeżeli punkt jest wybrany zewnątrz owalu lub wewnątrz gałęzi trójkątnej, wszystkie będą rzeczywiste; lecz gdy punkt jest położony w części zacieniowanej, wtedy jedna tylko ze stycznych jest rzeczywista, dwie zaś pozostałe są urojone. Ponieważ są dwie styczne urojone, odpowiadające każdemu punktowi tego obszaru, wyobraźmy sobie, że jest on pokryty liściem podwójnym; należy oczywiście wyobrazić sobie, że te

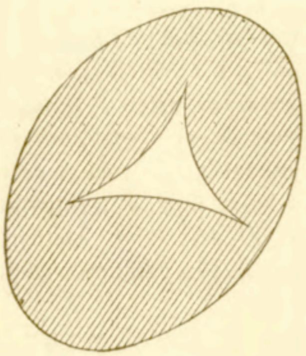


Fig. 5.

dwa liście są złączone wzdłuż krzywej. Otrzymujemy wtedy powierzchnię, która może być uważana za powierzchnię Riemanna, należącą do krzywej, tak, że każdy punkt powierzchni odpowiada pojedyńczej stycznej do linii krzywej. Mamy więc nasz krąg pierścieniowy. Badanie całek na takich powierzchniach pokazuje, że one mają dwa peryody i w ten sposób wyjaśnia się prawdziwy związek całek eliptycznych z krzywemi klasy trzeciej, a — na zasadzie dwoistości — z krzywemi trzeciego rzędu.

By uczynić dalszy postęp, przeszedłem do teoryi ogólnej powierzchni Riemanna. Krzywym rzeczywistym odpowiadają oczywiście powierzchnie Riemanna symetryczne, t. j. powierzchnie, które się odtwarzają przez przekształcenie podobne drugiego gatunku (odwracające zwrot kątów). Otóż łatwo wyliczyć różne typy symetryczne, należące do danego rodzaju p. Jako rezultat znajdujemy, że istnieje $p+1$ przypadków „diasymetrycznych“ i $\left[\frac{p+1}{2}\right]$ przypadków „ortosymetrycznych“. Jeżeli nazwiemy linią symetryi każdą linię, której punkty pozostają bez zmiany przy przekształceniu podobnem, to przypadki diasymetryczne zawierać będą odpowiednio $p, p-1, \ldots 2, 1$ linij symetryi, przypadki ortosymetryczne $p+1, p-1, p-3, \ldots$ takich linij. Powierzchnia nazywa się diasymetryczną lub ortosymetryczną, stosownie do tego, czy nie rozpada się lub rozpada na dwie części przez cięcia, wykonane wzdłuż linij symetryi. To wyliczenie zawiera klasyfikacyę ogólną krzywych rzeczywistych, jak to wskazałem w mojem pierwszem dziełku o teoryi Riemanna [13]). W lecie 1892 roku, powróciłem do tej teoryi i rozwinąłem szereg twierdzeń dotyczących rzeczywistości pierwiastków równań należących do krzywych, które można traktować przy pomocy całek abelowych. Por. tom 43 dziennika „Mathematische Annalen“ [14]) i mój kurs (litografowany) wykładów „o powierzchniach Riemanna“, część II.

Byłoby interesującem zbadać wszystkie konfiguracye algebraiczne w tenże sam sposób, w jaki rozpatrzyliśmy dziś krzywe i powierzchnie algebraiczne zwyczajne, by dojść do prawdziwego poglądu geometrycznego na te utwory.

Kończąc, pragnę zwrócić szczególną waszą uwagę na to, co uważam za specyalną charakterystykę rozpatrywanych dziś metod geometrycznych; metody te dają istotny obraz myślowy badanych konfiguracyj, co, mojem zdaniem, jest rzeczą najbardziej zasadniczą w prawdziwej geometryi. Z tego powodu tak nazwane metody syntetyczne, jak się je zwykle rozwija, nie wydają mi się zadawalającemi. Dając wypracowane konstrukcye we wszystkich szczegółach dla przypadków specyalnych, nie wystarczają atoli zupełnie, gdy idzie o wytworzenie ogólnego widoku konfiguracyj w całości.

[1]) Ogłoszona poraz pierwszy w dodatku do „Optyki“ Newtona 1704.

[2]) Abhandlungen der königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften **1**. 1852, p. 1—82 lub Möbius Gesammelte Werke 3. 1886, p. 89 - 176.

[3]) F. Klein. Ueber Flächen dritter Ordnung. Math. Ann. **6**. 1875, p. 551—581.

[4]) Zeuthen. Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre. Tamże **7**, p. 410—432.

[5]) Zeuthen. Études des propriétés de situation des surfaces cubiques. Tamże **8** (1875), p. 1—30.

[6]) Harnack. Ueber die Vieltheilsgkeit der ebenen algebraischen Curven. Math. Ann. **10** (1876), p. 189—198.

[7]) Hilbert. Ueber die reellen Züge algebraischer Curven. Math. Ann. **38** (1891), p. 115—138.

[8]) F. Klein. Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve. Math. Ann. **10** (1876), p. 199—209.

[9]) Brill. Ueber Singularitäten ebener algebraischer Curven und eine neue Correspondenz. Tamże **16**, p. 348—408.

[10]) Rohn. Die verschiedenen Gestalten der Kummer'schen Fläche. Tamże **18** (1881), p. 99—159.

[11]) Rohn. Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung. Tamże **29** (1887), p 81—96.

[12]) F. Klein. Ueber eine neue Art. der Riemann'schen Flächen. Tamże **7**, p. 556—558.

[13]) F. Klein. Uebor Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. Lipsk. Teubner 1882. Przekład angielski Fr. Hardcastle (Londyn, Macmillan).

[14]) F. Klein. Ueber Realitätsverhältnisse bei der einen beliebigen Geschlechte angehörigen Normalcurve. Math. Ann. **42** (1893), p. 1—29.

ODCZYT V *).

TEORYA FUNKCYJ I GEOMETRYA.

Przedstawienie geometryczne funkcyi zmiennej zespolonej $w = f(z)$, gdzie $w = u + iv$, $z = x + iy$, otrzymać można, budując modele dwu powierzchni $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$. Pomysł ten urzeczywistniają modele Dycka, które pokazałem na wystawie [1]). Inna metoda, dobrze znana samego Riemanna, polega na przedstawieniu każdej z dwu zmiennych zespolonych sposobem zwykłym na płaszczyznie. Każdemu punktowi płaszczyzny z odpowiada jeden lub więcej punktów płaszczyzny w. Mogę w tym względzie odesłać do książki Holzmüllera [2]), stanowiącej dobre wprowadzenie elementarne do tego przedmiotu, ze względu zwłaszcza na wielką liczbę przypadków szczególnych, które tu są traktowane i objaśnione przy pomocy rysunków.

W badaniach wyższych bardziej interesującemi są nie tyle krzywe odpowiednie, ile odpowiednie pola lub obszary na dwóch płaszczyznach. Według zasadniczego twierdzenia Riemanna o przedstawieniu podobnem można sprawić, by dwa jednospójne obszary odpowiadały sobie w ten sposób, że każdy z nich będzie odwzorowaniem podobnem (Abbildung) drugiego. Trzy stałe, któremi rozporządzamy w tej odpowiedniości, można wybrać w ten sposób, by trzem punktom dowolnym na obwodzie jednego obszaru odpowiadały punkty dowolne na obwodzie drugiego. Teorya

*) Dnia 1 września 1893 r.

Riemanna daje w ten sposób definicyę geometryczną dla każdej funkcyi za pomocą jej odwzorowania podobnego.

Prowadzi nas to do szukania wniosków, jakie można wyprowadzić z tej metody o naturze funkcyj przestępnych. Po funkcyach przestępnych elementarnych, funkcye eliptyczne uważają się zwykle za najważniejsze. Istnieje wszakże inna klasa funkcyj, którym można przyznać co najmniej równe znaczenie ze względu na liczne zastosowania w astronomii i fizyce matematycznej; są to funkcye hypergeometryczne, nazwane tak z powodu ich związku z szeregami hypergeometrycznemi Gaussa.

Funkcye hypergeometryczne można określić jako całki równania różniczkowego liniowego rzędu drugiego:

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\left[\frac{1-\lambda'-\lambda''}{z-a}(a-b)(a-c)+\frac{1-\mu'-\mu''}{z-b}(b-c)(b-a)\right.$$

$$\left.+\frac{1-\nu'-\nu''}{z-c}(c-a)(c-b)\right]\frac{dw}{dz}+\left[\frac{\lambda'\lambda''(a-b)(a-c)}{z-a}\right.$$

$$\left.+\frac{\mu'\mu''(b-c)(b-a)}{z-b}+\frac{\nu'\nu''(c-a)(c-b)}{z-c}\right]\frac{w}{(z-a)(z-b)(z-c)}=0,$$

gdzie $z=a, b, c$ są trzema punktami osobliwemi, zaś λ', λ''; μ', μ''; ν', ν'' są wykładnikami, „należącemi odpowiednio do punktów a, b, c".

Jeżeli w_1 jest rozwiązaniem szczególnem, w_2 innem takiem rozwiązaniem, to rozwiązanie ogólne można przedstawić w postaci $\alpha w_1+\beta w_2$, gdzie α i β są stałemi dowolnemi, tak że wyrażenia $\alpha\omega_1+\beta\omega_2$ i $\gamma\omega_1+\delta\omega_2$ przedstawiają parę rozwiązań ogólnych.

Jeżeli wprowadzimy teraz iloraz $\frac{w_1}{w_2}=\eta(z)$ jako nową zmienną, to jej wartość najogólniejsza będzie:

$$\frac{\alpha\omega_1+\beta\omega_2}{\gamma\omega_1+\delta\omega_2}=\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$$

i zawierać będzie trzy stałe dowolne; η przeto czyni zadość równaniu różniczkowemu rzędu trzeciego, które łatwo znajdujemy w postaci:

$$\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}\left[\frac{\frac{1-\lambda^2}{2}}{z-a}(a-b)(a-c) + \frac{\frac{1-\mu^2}{2}}{z-b}(b-c)(b-a)\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1-\nu^2}{2}}{z-c}(c-a)(c-b)\right].$$

Strona lewa tego równania posiada własność taką, że pozostaje bez zmiany przy przekształceniu liniowem, i dla tego nazywa się niezmiennikiem różniczkowym. Cayley nazwał ją funkcyą pochodną Schwarza (schwarcyanem); stanowiła ona punkt wyjścia w badaniach Sylvestera nad recyprokantami (wzajemnikami).

Mamy nadto po stronie prawej:

$$\pm\lambda = \lambda' - \lambda'', \quad \pm\mu = \mu' - \mu'', \quad \pm\nu = \nu' - \nu''.$$

Co się tyczy odwzorowania podobnego (Fig. 6), to można okazać, że górna połowa płaszczyzny z, gdy punkty a, b, c znajdują się na osi rzeczywistej, λ, μ, ν zaś są rzeczywistemi, przekształca się dla każdej gałęzi funkcyi η na pole trójkątne abc, ograniczone trzema łukami kołowemi. Nazywamy pole takie **trójkątem łukowym**; kąty w wierzchołkach tego trójkąta są $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$.

To właśnie przedstawienie geometryczne weźmiemy za podstawę rozważania. Aby wyprowadzić z niego wnioski o naturze funkcyj przestępnych, określonych przez równanie różniczkowe, trzeba będzie, oczywiście, szukać postaci takich trójkątów łukowych w przypadku najogólniejszym. Należy zauważyć, iż nie czynimy żadnych ograniczeń co do wartości stałych λ, μ, ν, tak że kąty naszego trójkąta nie są koniecznie ostremi ani nawet wypukłemi, innemi słowy, w przypadku ogólnym wierzchołki będą punktami rozgałęzienia. Trójkąt sam powinien być tu uważany za błonę rozciągliwą i giętką, rozciągniętą między kołami, stanowiącemi obwód.

Badałem to pytanie w rozprawie ogłoszonej w tomie 37 dziennika „Math. Annalen“ [3]). Będzie dogodnem rzucić na kulę stereograficznie płaszczyznę, zawierającą trójkąt łukowy. Powstaje wtedy pytanie, jaka jest postać najogólniejsza trójkątów kulistych, rozumiejąc to pojęcie w znaczeniu uogólnionem, t. j. rozważając trójkąty na kuli, których obwód jest utworzony przez przecięcia trzech płaszczyzn z kulą bez względu na to, czy te płaszczyzny przecinają się lub nie w środku kuli.

Jest to właściwie pytanie geometryi elementarnej; i godnem jest uwagi, jak często w ostatnich czasach badania wyższe prowadzą nas do zagadnień elementarnych, jeszcze niezupełnie wyczerpanych.

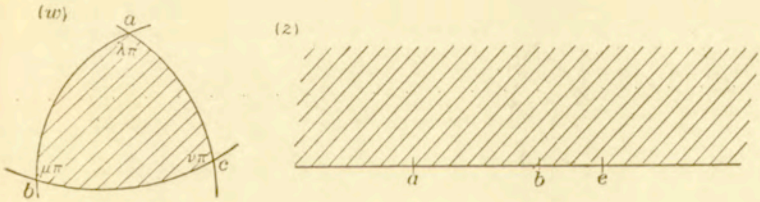


Fig. 6.

W przypadku obecnym przychodzimy do tego, że istnieją dwa i tylko dwa gatunki tak uogólnionych trójkątów. Otrzymujemy je z trójkąta, zwanego elementarnym, za pomocą dwu różnych działań: *a*) przez przystawienie b o c z n e, *b*) przez przystawienie b i e g u n o w e koła.

Niechaj *abc* (Fig. 7) będzie trójkątem kulistym elementarnym. Działanie przystawienia bocznego polega na przyłożeniu do pola *abc* pola, zamkniętego przez jeden z boków, np. *bc*, gdy go się przedłuży tak, aby utworzył koło całkowite. Ten proces może być powtórzony oczywiście wielokrotnie i zastosowany do każdego z boków. Jeżeli przyłożymy pole kołowe do boku *bc*, to kąty *b* i *c* powiększą się o π; jeżeli przyłożymy całą powierzchnię kuli, powiększą się o 2π i t. d.; wierzchołki stają się tym sposobem punktami rozgałęzienia. Trójkąt, w ten sposób otrzymany, nazywam t r ó j k ą t e m g a t u n k u p i e r w s z e g o.

T r ó j k ą t g a t u n k u d r u g i e g o tworzy się za pomocą procesu przystawienia biegunowego, jak np. przy *bc*; całe pole ograniczone kołem *bc* łączy się wtedy z trójkątem pierwotnym wzdłuż cięcia, wychodzącego z wierzchołka *a* do punktu na boku *bc*. Punkt *a* staje się punktem rozgałęzienia, kąt przy nim rośnie o 2π. Można nadto wykonać przystawienie boczne przy bokach *ab* i *ac*.

Te dwa gatunki trójkątów można scharakteryzować w ten sposób:

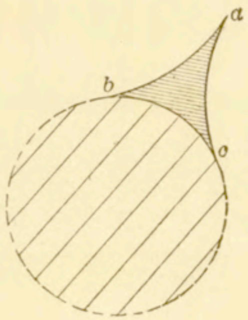


Fig. 7.

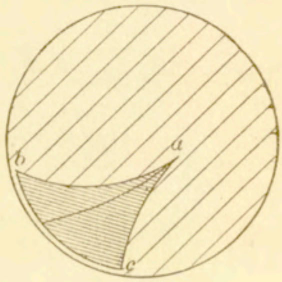


Fig. 8.

G a t u n e k p i e r w s z y p o z w a l a n a w y k o n a n i e d o w o l n e j l i c z b y p r z y s t a w i e ń b o c z n y c h p r z y j e d n y m l u b p r z y w s z y s t k i c h t r z e c h b o k a c h; g a t u n e k d r u g i p o z w a l a n a w y k o n a n i e p r z y s t a w i e n i a b i e g u n o w e g o p r z y j e d n y m b o k u i p r z e c i w l e g ł y m w i e r z c h o ł k u, a t a k ż e p r z y s t a w i e ń b o c z n y c h p r z y i n n y c h b o k a c h.

Analitycznie te dwa gatunki różnią się pewnemi nierównościami, zachodzącemi pomiędzy wartościami bezwzględnemi stałych λ, μ, ν. Dla gatunku pierwszego żadna z trzech stałych nie jest większa od sumy pozostałych, t. j.

$$|\lambda| \leqq |\mu| + |\nu|, \quad |\mu| \leqq |\nu| + |\lambda|, \quad |\nu| \leqq |\lambda| + |\mu|;$$

dla gatunku drugiego mamy:

$$|\lambda| \geqq |\mu| + |\nu| ,$$

gdzie λ odnosi się do bieguna.

W zastosowaniach do teoryi funkcyj jest rzeczą ważną w przypadku gatunku drugiego określić, ile razy opisano koło, utworzone przez bok przeciwległy wierzchołkowi. Znalazłem, że ta liczba wynosi $E\left(\frac{|\lambda| - |\mu| - |\nu| + 1}{2}\right)$, gdzie E oznacza największą liczbę całkowitą dodatnią, zawartą w argumencie; liczba ta tedy jest zawsze zerem, gdy argument jest ujemny lub ułamkowy [4]).

Zastosujmy teraz te pojęcia geometryczne do teoryi funkcyj hypergeometrycznych. Mogę tu tylko wskazać otrzymane rezultaty. Rozważmy jedynie wartości rzeczywiste, które przyjmuje $\eta = {}^{w_1}/_{w_2}$ pomiędzy a i b: pytanie sprowadza się wtedy do zbadania postaci krzywej η pomiędzy temi granicami. Rozważmy na chwilę krzywe w_1 i w_2. Wiadomo, że gdy w_1 oscyluje między a i b z jednej strony osi na drugą, to oscyluje również i w_2. Niechaj iloraz $\eta = {}^{w_1}/_{w_2}$ przedstawia krzywa, składająca się z oddzielnych gałęzi, rozciągających się od $-\infty$ do $+\infty$ i podobna do krzywej $y = \operatorname{tg} x$. Wynik badania jest następujący: liczbę tych gałęzi, a więc i liczbę oscylacyj funkcyj w_1 i w_2 daje nam ściśle liczba obiegów punktu c t. j. liczba $E\left(\frac{|\nu| - |\lambda| - |\mu| + 1}{2}\right)$. Jest to rezultat ważny dla wszystkich zastosowań funkcyj hypergeometrycznych; wyprowadzono go później za pomocą metod Sturma (Hurwitz).

Pragnę zwrócić uwagę waszą nie tyle na ten wynik interesujący, ile na stosowaną metodę geometryczną. Bardziej posunięte badania w tym kierunku poczyniliśmy ja i inni w Getyndze.

Jeżeli przedmiotem badania jest równanie różniczkowe o większej liczbie punktów osobliwych, wtedy trójkąty należy zastąpić czworokątami lub innemi wielokątami. W kursie litografowanym „O równaniach różniczkowych" z roku 1890—91 podałem rozmaite myśli, odnoszące się do podobnych przypadków.

Trudność, jaką napotykamy w tych uogólnieniach, jest — co dziwna — natury czysto geometrycznej: stanowi ją pozyskanie ogólnego przeglądu możliwych postaci wielokątów.

D-r Schoenflies[5]) ogłosił niedawno rozprawę o wielokątach prostoliniowych o jakiejkolwiek liczbie boków. D-r zaś Van Vleck[6]) rozważał takie wielokąty prostoliniowe i funkcye przez nie określone; wielokąty są określone w sposób najogólniejszy, z punktami rozgałęzienia w ich wnętrzu. D-r Schoenflies[7]) rozważał też przypadek czworokątów krzywoliniowych; rezultat, do którego dochodzi, jest dość skomplikowany.

We wszystkich tych badaniach punkty osobliwe płaszczyzny, odpowiadające wierzchołkom wielokątów, przyjmujemy oczywiście za rzeczywiste oraz ich wykładniki. Pozostaje tedy jeszcze pytanie ogólniejsze o odwzorowaniu podobnem funkcyj w przypadkach, gdy pewne ich elementy są zespolone. W tym kierunku D-r Schilling[8]) badał przypadek zwykłej funkcyi hypergeometrycznej, przy przyjęciu wykładników zespolonych.

Badanie funkcyj, określonych przez równania różniczkowe liniowe rzędu drugiego, stanowi oczywiście tylko przykład ogólnego rozważania funkcyj zespolonych przy pomocy geometryi. Mam nadzieję, że w przyszłości przy pomocy takich metod geometrycznych otrzymamy inne jeszcze interesujące rezultaty.

---

[1]) Modele te są opisane w książce: „Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente. Unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen herausgegeben... von Walther Dyck. Monachium. 1892, str. 176—178.

[2]) Holzmüller. Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandschaften und der conformen Abbildungen, verbunden mit Anwendungen auf mathematische Physik. Lipsk. Teubner. 1882.

[3]) F. Klein. Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihen. Math. Ann. **37**, p. 573—590.

[4]) Nowe badania nad trygonometryą kulistą, rozszerzające dotychczasowy zakres tej nauki, ogłosił E. Study w pracy p. t. „Sphärische Trigonometrie. Orthogonale Substitutionen und elliptische Functionen. Eine analytisch-geometrische Untersuchung“. Lipsk. Hirzel. 1893.

[5]) A. Schönflies. Ueber Kreisbogenpolygone. Math. Ann. **42**, p. 377—408.

[6]) Conf. E. B. Van Vleck. Zur Kettenbruchentwickelung hyperelliptischer und ähnlicher Integrale. American Journal of Mathematics **15**. 1893.

[7]) Conf. A. Schoenflies. Ueber Kreisbogendreiecke und Kreisbogenvierecke. Math. Ann. **44**, p. 105—124 1894.

[8]) Wymieniamy następujące prace Schillinga: „Ueber die geometrische Bedeutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie". Math. Ann. **39**, p. 598—600. „Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarz'schen s-Function", tamże **44**, p. 162—260. „Die geometrische Theorie der Schwarz'schen s-Function für complexe Exponenten", tamże **46**, p. 62—76, 529—538.

ODCZYT VI *).

O CHARAKTERZE MATEMATYCZNYM INTUICYI PRZESTRZENNEJ I O ZWIĄZKU MATEMATYKI CZYSTEJ Z NAUKAMI STOSOWANEMI.

W odczytach poprzedzających kładłem taki nacisk na ważność metod geometrycznych, że teraz wypływa naturalnie pytanie o istotnej naturze i granicach intuicyi geometrycznej.

W przemówieniu mojem na kongresie matematyków w Chicago wspomniałem już o tem, co rozumiem przez intuicyę naiwną i intuicyę wykształconą. Tę ostatnią znajdujemy u Euklidesa, który rozwija starannie swój system na podstawie ściśle sformułowanych pewników, zdaje sobie doskonale sprawę z konieczności ścisłych dowodów, rozróżnia jasno wymierność od niewymierności i t. d.

Intuicya naiwna odegrała znowu rolę wielce czynną w okresie powstania rachunku różniczkowego i całkowego. Tak np. widzimy, że Newton przyjmuje bez wahania istnienie we wszystkich przypadkach prędkości punktu ruchomego, nie troszcząc się o zbadanie, czy nie mogą być funkcye ciągłe, nie mające pochodnej.

Obecnie skłonni jesteśmy do budowania rachunku nieskończonostkowego na podstawie czysto analitycznej, i zdaje się, że weszliśmy w okres krytyczny, podobny do wieku Euklidesa. Co do mnie, jestem przekonany, jakkolwiek nie potrafiłbym tego

*) Dnia 2 września 1893 r.

uzasadnić za pomocą dowodów zupełnych, że okres Euklidesa poprzedziło „naiwne“ stadyum rozwoju. Niektóre fakty, zbadane dopiero niedawno, popierają ten pogląd. I tak wiadomo, że księgi, które nas doszły z epoki Euklidesa, stanowią tylko małą część tego, co wówczas istniało; nadto nauczanie odbywało się wtedy w znacznej części przez tradycyę ustną. Mało ksiąg z owego czasu miało te cechy artystyczne, które podziwiamy w „Elementach“ Euklidesa; większość stanowiły wykłady, improwizowane na użytek słuchaczy. Badania Zeuthena[1]) i Allmana[2]) rzuciły wiele światła na te warunki historyczne.

Na pytanie, na czem polega różnica pomiędzy intuicyą naiwną i wykształconą, odpowiedzieć można, jak mniemam, w ten sposób, że jądro kwestyi tkwi w tem, iż intuicya naiwna nie jest ścisłą, intuicya zaś wykształcona nie jest, właściwie mówiąc, intuicyą, i wypływa raczej z rozwinięcia logicznego pewników, uważanych za ściśle dokładne.

Aby wyjaśnić znaczenie pierwszej połowy tego twierdzenia, powiem, że, według mego zdania, w naszej intuicyi naiwnej, gdy myślimy o punkcie, umysł nasz nie przedstawia sobie abstrakcyjnego punktu matematycznego, lecz podstawia zamiast niego coś konkretnego. Jeżeli wyobrażamy sobie linię, to nie jest nią „linia bez szerokości“ lecz wstęga, mająca pewną szerokość. Otóż, taka wstęga ma oczywiście zawsze styczną; innemi słowy, możemy zawsze wyobrazić sobie wstęgę prostoliniową, mającą mały kawałek (element) wspólny z ze wstęgą krzywoliniową;

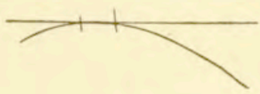


Fig. 9.

można podobnie uważać i koło ściśle styczne. Określenia w tym przypadku są uważane za ścisłe jedynie przybliżenie i o tyle tylko, o ile to jest koniecznem.

Matematycy „ściśli“ mówią naturalnie, że takie definicye definicyami nie są; ja wszakże utrzymuję, że w życiu codziennem operujemy przy pomocy takich niedokładnych definicyj: mówimy np. bez wahania o kierunku i krzywiznie rzeki lub drogi, jakkolwiek w tym przypadku „linia“ ma z pewnością szerokość znaczną.

Co się tyczy drugiej części twierdzenia, to istnieje bez wątpienia wiele przypadków, w których wnioski, wyprowadzone z definicyj ścisłych za pomocą rozumowań czysto-logicznych, nie dają się sprawdzić przez intuicyę. Aby to pokazać, wybieram przykład z teoryi funkcyj automorficznych, gdyż przy pospolitych wyjaśnieniach geometrycznych sąd nasz jest spaczony z powodu obycia się z pojęciami, o których mowa.

Niechaj będzie pewna liczba kół, nie przecinających się 1, 2, 3, 4 . . . (Fig. 10); odbijmy każde koło w każdem (za pomocą

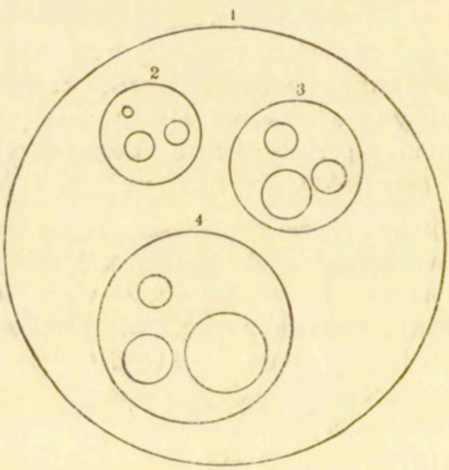


Fig. 10.

przekształcenia przez inwersyę lub promienie odwrotne) i powtarzajmy wciąż to działanie aż do nieskończoności. Powstaje wtedy pytanie, jaką konfiguracyę tworzy ogół tych kół, a w szczególności, jakie będzie położenie punktów granicznych? Otóż nie trudno odpowiedzieć na te pytania za pomocą rozumowania czysto-logicznego, lecz wyobraźnia zdaje się być zupełnie bezsilną, gdy chcemy utworzyć sobie obraz tego rezultatu.

Niechaj dalej będzie szereg kół, z których każde jest styczne do następującego, ostatnie do pierwszego (Fig. 11). Wykonajmy, podobnie jak w poprzednim przykładzie, przekształcenie za pomocą inwersyi i powtarzajmy je nieograniczoną liczbę razy. Jeżeli wyłączymy przypadek szczególny, w którym pierwotne punkty styczności leżą na okręgu, to można dowieść analitycznie, źe krzywa ciągła, która jest miejscem wszystkich punktów styczności, nie jest krzywą analityczną. Punkty styczności tworzą mnogość wszędzie gęstą na krzywej (w rozumieniu teoryi G. Cantora), lecz są pomiędzy niemi punkty pośrednie. W każdym z punktów pierwszych istnieje styczna określona, gdy tymczasem nie ma jej w punktach pośrednich. Pochodne drugie nie istnieją wcale. Łatwo wyobrazić sobie wstęgę, pokrywającą wszystkie te punkty; lecz

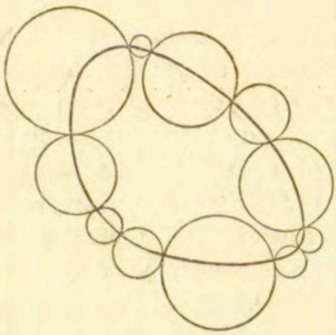


Fig. 11.

gdy szerokość wstęgi spada niżej pewnej granicy, znajdujemy falowania i niepodobna wyobrazić sobie rezultatu ostatecznego. Należy zauważyć, iż mamy tu przykład krzywej o pochodnych nieoznaczonych, wypływający z rozważań czysto-geometrycznych, gdy przy zwykłem traktowaniu można by przyjąć, że takie krzywe mogą być tylko określone za pomocą szeregów analitycznych sztucznych.

Nie jestem na nieszczęście w stanie dać wam tu zupełnego zarysu poglądów filozofów na tę sprawę. Co się zaś tyczy najnowszej literatury matematycznej tego przedmiotu, to rozwinąłem moje poglądy w rozprawie ogłoszonej w r. 1873 i przedrukowanej następnie w dzienniku „Mathem. Annalen" [3]). Pasch z Giessen wypowiedział poglądy w ogóle zgodne z mojemi w dwóch dziełach, jednem o podstawach geometryi [4]), drugiem o zasadach rachunku nieskończonostkowego [5]). Inny autor Köpcke w Hamburgu wypowiedział myśl, że nasza intuicya przestrzenna jest dokładna tak długo, póki jest; lecz jest zarazem tak ograniczona, że nie możemy wyobrazić sobie krzywych bez stycznych [6]).

W jednym punkcie Pasch nie zgadza się ze mną, mianowicie w tem, co dotyczy ścisłej wartości pewników. Mniema on — i jest to punkt widzenia tradycyjny—że można ostatecznie odrzucić całkowicie intuicye i zbudować całą wiedzę jedynie na pewnikach. Co do mnie, jestem zdania, że w badaniach jest konieczne kombinowanie intuicyi z pewnikami. Tak np. wątpię, czy bez ciągłego stosowania intuicyi geometrycznej można byłoby dojść do rozpatrzonych w poprzednich odczytach rezultatów, odnoszących się do wspaniałych badań Liego, do ciągłości postaci krzywych i powierzchni algebraicznych i do najogólniejszych postaci trójkątów.

Pomysł Pascha zbudowania nauki jedynie na podstawie pewników rozwinął dalej Peano w swym rachunku logicznym [7]).

Zresztą dodać należy, iż stopień dokładności intuicyi przestrzeni jest różnym u różnych indywiduów i—być może—w różnych rasach. Zdaje się, że intuicya naiwna przestrzeni jest górującym atrybutem rasy teutońskiej, gdy tymczasem zmysł czysto-logiczny jest bardziej rozwinięty w rasach łacińskiej i hebrajskiej. Szczegółowe zbadanie tego przedmiotu, podobne do badań Francisa Galtona nad dziedzicznością, byłoby interesującem.

To, co mówiliśmy dotąd o geometryi, stawia tę naukę w rzędzie nauk stosowanych. Pewne ogólne uwagi o tych naukach i ich związku z matematyką czystą nie będą tu zbytecznemi [8]). Z punktu widzenia matematyki czystej, położę tu szczególny nacisk na wartość heurystyczną nauk stosowanych, jako ułatwiających odkrycia nowych prawd w matematyce. Pokazałem (w mojem dziełku o teoryach Riemanna), że całki abelowe najlepiej wyjaśnić za pomocą prądów elektrycznych na powierzchniach zamkniętych. W sposób podobny można wyprowadzić twierdzenia o równaniach różniczkowych rzędu drugiego z rozważania drgań dźwiękowych i t. p.

Lecz teraz chcę mówić o rzeczach bardziej praktycznych, odpowiadających, że tak powiem, temu, com powiedział poprzednio o nieścisłości intuicyi geometrycznej. Mniemam, że związek mniej więcej ścisły każdej nauki stosowanej z matematyką cechuje się stopniem osiągniętej lub osiągnąć się w niej dającej dokładności rezultatów liczbowych. Możnaby nawet ustanowić zgruba klasyfikacyę tych nauk, opartą na liczbie cyfr dziesiętnych, w każdej z nich używanych. Astronomia i pewne działy fizyki zajmują pierwsze miejsce; liczba cyfr dziesiętnych może tu dochodzić do siedmiu, i można stosować z pożytkiem funkcye wyższe niż elementarne przestępne. Chemia znalazłaby się prawdopodobnie na drugim końcu skali, gdyż w tej nauce rzadko kiedy możemy liczyć na dokładność dwu lub trzech cyfr dziesiętnych. Rysunek geometryczny z trzema lub czterema cyframi dziesiętnemi byłby zajmował miejsce pośrednie między temi krańcami i t. d.

Zwykłe traktowanie matematyczne w każdej nauce stosowanej polega na podstawieniu pewników ścisłych zamiast przybliżonych rezultatów doświadczenia i na wyprowadzaniu z tych ścisłych pewników wniosków matematycznych. Stosując tę metodę, nie należy zapominać, że rozwinięcia matematyczne, przekraczające granice dokładności nauki stosowanej, nie mają wartości praktycznej. Stąd wynika, że wielka część matematyki abstrakcyjnej nie znajduje zastosowania praktycznego, gdyż zasób matematyki, dającej się z korzyścią stosować w danej nauce, jest w proporcyi do stopnia osiąganej w niej dokładności. I tak, gdy astronom może ciągnąć dobry użytek z szerokich dziedzin teoryj matematycznych, chemik zaczyna dopiero używać pochodnej pierwszej, t. j. miary zmiany, z jaką odbywają się pewne procesy, i — zdaje się — że do tej pory nie znaleziono tu użytku pochodnej drugiej.

Jako przykłady rozległych teoryj matematycznych, które nie mają zastosowania w naukach stosowanych, wspomnę o różnicy pomiędzy wymiernością i niewymiernością, o badaniach zbieżności szeregów F o u r i e r a, o teoryi funkcyj nieanalitycznych i t. d. Zdaje mi się tedy, że K i r c h h o f f myli się, gdy w swej „Analizie spektralnej" powiada, że absorbcya zachodzi jedynie wtedy, gdy długości fal ściśle się zlewają Podzielam pogląd S t o k e s a, który mówi, że absorbcya ma miejsce w s ą s i e d z t w i e takiego zlewania się. Podobnie, gdy astronom mówi, że peryody dwóch planet muszą być dokładnie spółmierne, jeżeli ma być dopuszczalną możliwość ich wzajemnego uderzenia, to twierdzenie takie pojmować należy jedynie abstrakcyjnie, w odniesieniu do środków matematycznych dwu planet. Należy też zwrócić uwagę na to, że to, co nazywamy peryodem, masą i t. p. planety, nie może być ściśle określone i zmienia się w każdej chwili. Zresztą nie posiadamy żadnej drogi do przekonania się, czy dwie wielkości astronomiczne są spółmierne czy nie; możemy tylko pytać, czy ich stosunek daje się wyrazić przybliżenie przy pomocy dwu niewielkich liczb całkowitych. Pogląd kiedyś wypowiedziany, że w naturze istnieją tylko funkcye analityczne, jest, zdaniem mojem, niedorzeczny. Tyle tylko powiedzieć wolno, że ograniczamy się do funkcyj analitycznych, a nawet do funkcyj analitycznych prostych, gdyż funkcye te dają nam dostateczny stopień przybliżenia. Zresztą mamy twierdzenie Weierstrassa, że każdą funkcyę ciągłą można wyrazić przybliżenie z przepisanym stopniem dokładności za pomocą funkcyi analitycznej. I tak, jeżeli przez $\varphi(x)$ oznaczymy naszą funkcyę ciągłą, przez δ małą wielkość, przedstawiającą granicę dokładności (t. j. szerokość wstęgi, którą podstawiamy za krzywą) to będzie można zawsze wyznaczyć funkcyę analityczną $f(x)$ taką, aby było $\varphi(x) = f(x) + \varepsilon$, gdzie $|\varepsilon| < |\delta|$ pomiędzy granicami danemi.

Podsuwa nam to pytanie, czy nie byłoby możliwe utworzenie systemu — który nazwałby skróconym systemem matematyki — przystosowanego do potrzeb nauk stosowanych, bez potrzeby przechodzenia całej dziedziny matematyki abstrakcyjnej? System taki powinienby obejmować badania Gaussa nad dokładnością rachunkow astronomicznych lub nowsze i wysoce interesujące badania Czebyszewa nad interpolacyą. Problemat ten, jakkolwiek nie możliwy, zdaje się trudnym do rozwiązania z powodu charakteru dość niejasnego i nieokreślonego nasuwających się tu pytań.

Spodziewam się, że to, co powiedziałem o użytku matematyki w naukach stosowanych nie będzie rozumiane, jako prejudykat przeciw uprawie matematyki abstrakcyjnej, jako nauki czystej. Pomijam już fakt, że nic nie może zastąpić matematyki czystej w sprawie rozwoju czystej zdolności logicznej umysłu, i zwracam tylko uwagę na konieczność, by w każdym kraju była pewna liczba jednostek, rozwiniętych w wyższym stopniu od innych, i pracujących nad podtrzymaniem oraz stopniowem podnoszeniem poziomu ogólnego. Podniesienie zaś, choćby drobne, tego ogólnego poziomu może mieć miejsce tylko wtedy, gdy pewne umysły wzniosły się ponad umysły przeciętne.

Zresztą ten system „skrócony“ matematyki, o którym mówiłem, nie istnieje dotąd, to też w chwili obecnej powinniśmy starać się korzystać i ciągnąć największy pożytek z tego, co mamy pod ręką.

Otóż, już w samem nauczaniu matematyki, np. elementów rachunku różniczkowego i całkowego napotykamy trudności praktyczne. Wykładający staje tu wobec zadania pogodzenia dwu żądań przeciwnych i prawie sprzecznych. Z jednej strony, musi liczyć się ze zdolnościami umysłowemi swych słuchaczy, dotąd ograniczonemi i jeszcze nierozwiniętemi, oraz z faktem, że większość z nich studyuje matematykę głównie w widoku jej zastosowań praktycznych. Z drugiej strony, sumienie wykładającego i męża nauki, nie pozwalając odstępować od ścisłości matematycznej, poleca mu wprowadzenie do wykładu odrazu wszystkich subtelności nowoczesnej matematyki abstrakcyjnej. W ostatnich czasach wykład uniwersytecki, w Europie zwłaszcza, rozszerza się coraz bardziej w tym kierunku; też same dążenia ujawnią się z konieczności i w tym kraju. Drugie wydanie dzieła „Cours d'analyse“ C. Jordana może być uważane za przykład tej nadzwyczajnej subtelności w traktowaniu podstaw rachunku nieskończonostkowego. Danie takiego dzieła w ręce początkującego miałoby ten skutek, że na początek większa część przedmiotu byłaby dlań niezrozumiałą, a później nie mógłby on nabyć już zdolności korzystania z zasad w przypadkach prostych, nastręczających się w naukach stosowanych.

Według mojego zdania, w nauczaniu nietylko jest dopuszczalna ale i bezwzględnie konieczna mniejsza abstrakcyjność na początku; należy ciągle mieć na oku zastosowania, a subtelności wprowadzać tylko stopniowo, gdy słuchacz potrafi je rozumieć.

Jest to tylko oczywiście ogólna zasada pedagogiczna, którą należy uwzględniać w nauczaniu matematyki.

Pomiędzy nowszemi działami niemieckiemi, polecić mogę początkującym nowe wydanie dzieła Stegemanna w opracowaniu Kieperta [9]), które łączy w sobie prostotę i jasność z dostateczną ścisłością matematyczną. Z drugiej strony dla słuchaczy bardziej posuniętych, a zwłaszcza poświęcających się specyalnie matematyce, studyowanie takiego dzieła, jakiem jest dzieło Jordana, jest niezbędne.

Uwagi niniejsze nasunęła mi świadomość rosnącego niebezpieczeństwa, grożącego systemowi nauczania w Niemczech, niebezpieczeństwa rozdziału pomiędzy abstrakcyjną nauką matematyczną a jej zastosowaniami naukowemi i technicznemi. Taki rozdział byłby godnym pożałowania, gdyż z konieczności pociągnąłby za sobą osłabienie podstaw nauk stosowanych i zupełne odosobnienie uczonych, zajmujących się matematyką czystą.

---

[1]) Zeuthen. Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, übersetzt von R. v. Fischer-Benzon. Kopenhaga. Höst. 1886.

[2]) Allman. Greek geometry from Thales to Euclid. Dublin. Hodges. 1889.

[3]) F. Klein. Ueber den allgemeinen Functionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Curve. Math. Ann. **22** (1883), p. 249—259.

[4]) Pasch. Vorlesungen über neuere Geometrie. Lipsk. Teubner. 1882.

[5]) Pasch. Einleitung in der Differential — und Integralrechnung. Lipsk. Teubner. 1882.

[6]) Köpcke. Ueber Differentiirbarkeit und Anschaulichkeit der stetigen Functionen. Math. Ann. **29** (1887), p. 123—140.

[7]) G. Peano. Arithmetices principia novo methodo exposita. Turyn. Fratelli Bocca. 1889. I principii di geometria logicamente esposti. Tamże 1889. Notations de logique mathématique, Introduction au Formulaire des mathématiques. Tamże 1894. „Formulaire de mathématiques, publié par la Rivista di Matematica". Tom I, tamże 1895. Tom II, § 1, tamże 1897, § 2. Arithmétique, tamże 1898.

[8]) Porówn. F. Klein. Ueber die Arithmetisierung der Mathematik. Göttinger Nachrichten. 1895. W. Dyck. O związkach wzajemnych pomiędzy matematyką czystą a stosowaną. 1896. Przekład w „Wiadomościach matema-

tycznych" 1, p. 165 i dalsze. 1897. H. Poincaré. Związki pomiędzy analizą i fizyką matematyczną. 1897. Przekład w „Wiadomościach matematycznych" 2, str. 10—20. 1898.

[9]) Stegemann-Kiepert. Grundriss der Differential und Integralrechnung, tom I, wyd. 8-e. 1897, tom II, wyd. 6-te Hanower.

W ostatnim czasie wydano wiele podręczników rachuuku nieskończonostkowego, uwzględniających potrzeby młodzieży, tak poświęcającej się nauce czystej, jak i studyującej matematykę dla jej zastosowań. Porówn. „Przegląd niektórych nowszych podręczników rachunku nieskończonostkowego" w „Wiadomościach matematycznych" 3, p. 60—76. 1899.

ODCZYT VII *).

PRZESTĘPNOŚĆ LICZB e i π.

Ostatniej soboty mówiłem o matematyce „nieścisłej"; dziś z kolei mówić wypada o bardziej ścisłych gałęziach wiedzy matematycznej.

G. Cantor pokazał, że istnieją dwa rodzaje mnogości nieskończonych: *a*) odliczalne, których elementy można liczyć tak, że każdy element zajmuje miejsce określone w układzie i *b*) nieodliczalne, w których to nie jest możliwem. Do grupy pierwszej należą nietylko liczby wymierne ale i liczby, zwane algebraicznemi, t. j. liczby, określone przez równanie algebraiczne:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0 ,$$

ze spółczynnikami całkowitemi (n jest oczywiście liczbą całkowitą dodatnią). Jako przykład mnogości nieodliczalnej przytoczyć mogę ogół liczb zawartych w continuum, t. j. w obszarze nieprzerwanym takim, jaki tworzą np. punkty odcinka linii prostej. Continuum takie zawiera nie tylko liczby niewymierne i algebraiczne, ale i liczby zwane przestępnemi. Faktyczne istnienie liczb przestępnych, które wypływa zupełnie naturalnie z teoryi mnogości Cantora, okazał już dawniej Liouville za pomocą rozważań innej natury. Zresztą stwierdzenie istnienia tego nie daje jeszcze sposobu

*) Dnia 4 września 1893 r.

rozstrzygnięcia, czy dana liczba szczególna jest przestępną czy nie. Lecz w ostatnich dwudziestu latach udowodniono, że dwie liczby zasadnicze w matematyce, t. j. liczby e i π, są przestępnemi. Zadaniem mojem dziś jest rozbiór jasny dowodu przestępności tych liczb, podanego przez Hilberta.

Historya tego zagadnienia jest krótka. Przed dwudziestu laty Hermite [1]) wykazał pierwszy przestępność liczby e, t. j. dowiódł za pomocą metod dość skomplikowanych, że liczba e nie może być pierwiastkiem równania algebraicznego o spółczynnikach całkowitych. W dziewięć lat później Lindemann [2]), wychodząc z rozważań Hermite'a, wykazał przestępność liczby π. Pracę jego sprawdził później Weierstrass.

Dowód przestępności liczby π stanowi epokę w nauce matematycznej. Daje on ostateczną odpowiedź na zagadnienie o kwadraturze koła i rozstrzyga tę kwestyę raz na zawsze. Zagadnienie to bowiem wymaga, by można było otrzymać liczbę π za pomocą skończonej liczby elementarnych procesów geometrycznych, t. j. przy użyciu tylko liniału i cyrkla. Ponieważ prosta i koło albo dwa koła mają tylko dwa przecięcia, przeto działania te lub wszelka kombinacya skończonej liczby takich działań dają się wyrazić algebraicznie w formie względnie prostej, tak że rozwiązanie zagadnienia o kwadraturze koła sprowadza się do tego, by liczbę π można było wyrazić, jako pierwiastek równania względnie prostego, t. j. rozwiązalnego za pomocą pierwiastków kwadratowych. Lindemanna dowód stwierdza, że π nie jest pierwiastkiem żadnego równania algebraicznego.

Ten dowód przestępności liczby π nie zmniejszy prawdopodobnie liczby poszukiwaczy kwadratury koła, gdyż ta klasa ludzi żywi do matematyków bezwzględną niewiarę, do matematyki zaś pogardę, której żaden dowód usunąć nie jest w stanie. Lecz prosty dowód Hilberta ocenią bez wątpienia wszyscy, których interesuje wywód prawd matematycznych, mających znaczenie podstawowe. Dowód ten, obejmujący zarówno przypadek liczby e jak i liczby π, ogłoszono świeżo w „Göttinger Nachrichten" [3]). Zaraz potem Hurwitz [4]) ogłosił dowód przestępności liczby e, oparty na zasadach jeszcze elementarniejszych; wreszcie Gordan [5]) wprowadził dalsze uproszczenie. Wszystkie te trzy prace będą wkrótce ogłoszone w dzienniku „Mathematische Annalen“ [6]). Zagadnienie sprowadziło się tym sposobem do rzeczy tak prostych, że dowody przestępności liczb e i π będą mogły być wszędzie wprowadzone do wykładu uniwersyteckiego [7]).

Dowodzenie Hilberta opiera się na dwóch twierdzeniach. Jedno z nich orzeka wprost przestępność liczby e, t. j. niemożliwość równania postaci:

$$(1) \qquad a + a_1 e + a_2 e^2 + \ldots + a_n e^n = 0\,,$$

gdzie $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ są liczbami całkowitemi. Jest to twierdzenie pierwotne Hermite'a. Dla stwierdzenia przestępności liczby π stosuje Hilbert drugie twierdzenie (które zawdzięczamy Lindemannowi) o niemożliwości równania postaci:

$$(2) \qquad a + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \ldots + e^{\beta_n} = 0\,,$$

gdzie a jest liczbą całkowitą, a wykładniki są liczbami algebraicznemi, t. j. pierwiastkami równania algebraicznego:

$$b\beta^m + b_1\beta^{m-1} + b_2\beta^{m-2} + \ldots + b_m = 0\,,$$

w którem $b, b_1, b_2 \ldots b_m$ są liczbami całkowitemi.

Zauważmy, że to ostatnie twierdzenie obejmuje właściwie w sobie pierwsze, jako przypadek szczególny, gdyż jest oczywiście możliwe, że ilości β są liczbami wymiernemi całkowitemi, i ile razy niektóre z pierwiastków równania na β stają się równemi, odpowiednie wyrazy w równaniu (2) łączą się w pojedyńczy wyraz postaci $a_k\, e^{\beta_k}$. Twierdzenie pierwsze zostało wprowadzone jedynie dla prostoty.

Idea centralna dowodu niemożliwości równania (1) polega na wprowadzeniu ilości $1 : e : e^2 : \ldots e^n$, względem których równanie jest jednorodne, proporcyonalnych im ilości

$$I_0 + \varepsilon_0 : I_1 + \varepsilon_1 : I_2 + \varepsilon_2 : \ldots : I_m + \varepsilon_m\,,$$

wybranych tak, aby każda składała się z liczby całkowitej I i bardzo małego ułamka ε. Równanie przyjmuje wtedy postać:

$$(3) \qquad (aI_0 + a_1 I_1 + \ldots + a_n I_n) + (a\varepsilon_0 + a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n) = 0$$

i można pokazać, że ilości I dają się wybrać zawsze w ten sposób, że wielkość w nawiasie pierwszym, oczywiście całkowita, będzie różna od zera, gdy wielkość w nawiasie drugim będzie ułamkiem właściwym. A ponieważ suma liczby całkowitej i ułamka właściwego nie może być zerem, przeto równanie (1) jest niemożliwe.

Oto jest podstawa dowodu Hilberta. Widzimy, że trudność polega na odpowiednim doborze liczb całkowitych I i ułamków ε. W tym celu korzysta Hilbert z całki określonej, którą nasunęły mu badania Hermite'a, mianowicie z całki

$$J = \int_0^\infty z^\rho [(z-1)\dots(z-n)]^{\rho+1} e^{-z}\, dz ,$$

gdzie ρ jest liczbą całkowitą, którą się później wyznacza. Pomnóżmy każdy wyraz równania (1) przez tę całkę i podzielmy przez $\rho!$; równaniu będzie można oczywiście nadać postać:

$$\left(a \frac{\int_0^\infty}{\rho!} + a_1 e \frac{\int_1^\infty}{\rho!} + a_2 e^2 \frac{\int_2^\infty}{\rho!} + \dots + a_n e^n \frac{\int_n^\infty}{\rho!} \right)$$

$$+ \left(a_1 e \frac{\int_0^1}{\rho!} + a_2 e^2 \frac{\int_0^2}{\rho!} + \dots + a_n e^n \frac{\int_0^n}{\rho!} \right) = 0 ,$$

lub, gdy dla skrócenia oznaczymy wielkości w nawiasach odpowiednio przez P_1 i P_2:

$$P_1 + P_2 = 0 .$$

Otóż można wykazać, że spółczynniki przy $a, a_1, a_2 \dots, a_n$ w P_1 są wszystkie całkowitemi i że ρ można wybrać tak, aby P_1 było różne od zera, gdy równocześnie ρ może być dostatecznie wielkie, aby P_2 było tak małe, jak chcemy. Stąd jest jasnem, że równanie (1) sprowadza się do postaci niemożliwej (3).

Udowodnimy teraz te własności wyrażeń P_1 i P_2. Widać najprzód, że całka J jest liczbą całkowitą podzielną przez $\rho!$, a to na zasadzie znanego związku

$$\int_0^\infty z^\varrho e^{-z}\, dz = \varrho!$$

Podobnie, podstawiając za z kolejno $z' + 1, z' + 2, \ldots, z' + n$, spostrzegamy, że wielkości

$$e\int_1^\infty,\ e^2\int_2^\infty, \ldots,\ e^n\int_n^\infty$$

są liczbami całkowitemi podzielnemi przez $(\varrho + 1)!$ Stąd wypływa, że P_1 jest liczbą całkowitą, a mianowicie

$$P_1 \equiv a\,(n!)^{\varrho+1}\ [\mathrm{mod}\ (\varrho + 1)]\,.$$

Jeżeli więc wybierzemy ϱ tak, aby druga strona tej kongruencyj nie była podzielna przez $\varrho + 1$, to całe wyrażenie P_1 będzie różne od zera.

Co się tyczy warunku, by P_2 można było uczynić tak małem, jak się podoba, to stanie mu się zadość, gdy przyjmiemy dostatecznie wielką wartość na ϱ, to zaś zgadza się w zupełności z warunkiem niepodzielności całki J przez $\varrho + 1$. Istotnie, na podstawie twierdzenia o wartościach średnich, można zastąpić całki potęgami ilości stałych z ϱ w wykładniku, a miara zmiany potęgi dla dostatecznie wielkich wartości ϱ jest zawsze mniejsza niż zmiana czynnikowej (faktoryalnej), znajdującej się w mianowniku.

Dowód niemożliwości równania (2) jest zupełnie analogiczny. Zamiast całki J należy tu użyć całki

$$J' = b^{m(\varrho+1)}\int_0^\infty z^\varrho\,[(z-\beta_1)(z-\beta_2)\ldots(z-\beta_m]^{\varrho+1}\,e^{-z}\,dz\,,$$

gdzie ilości β są pierwiastkami równania algebraicznego:

$$b\beta^m + b_1\beta^m + \ldots + b_m = 0\,.$$

Całka ta rozkłada się w ten sposób:

$$\int_0^\infty = \int_0^\beta + \int_\beta^\infty,$$

gdzie drogę całkowania należy oczywiście wyznaczyć odpowiednio do wartości zespolonych ilości β. Po szczegóły odsyłamy do oryginalnej pracy Hilberta.

Przyjąwszy niemożliwość równania (2), łatwo już wywnioskować przestępność liczby π na podstawie rozważań, podanych dawniej przez Lindemanna.

Wymieńmy przedewszystkiem pierwszy wniosek z naszego twierdzenia, że prócz punktu $x=0$, $y=1$ krzywa wykładnicza $y=e^x$ nie posiada punktów algebraicznych, t. j. żadnego punktu, którego spółrzędne są liczbami algebraicznemi. Innemi słowy, bez względu na gęstość pokrycia płaszczyzny punktami algebraicznemi, krzywa wykładnicza (Fig. 12) przebiega po płaszczyźnie, pomijając je z wyjątkiem punktu (0, 1). Można ten ciekawy wynik wyprowadzić wprost z niemożliwości równania (2).

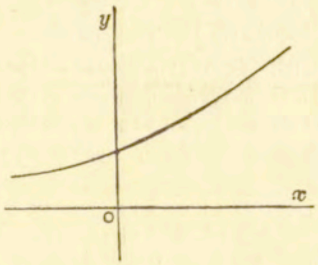


Fig. 12.

Niechaj y będzie liczbą algebraiczną, t. j. pierwiastkiem równania algebraicznego i niechaj $y_1, y_2, \ldots$ będą innemi pierwiastkami tegoż równania. Użyjmy podobnego znakowania dla ilości x.

Otóż, gdyby krzywa wykładnicza posiadała punkt algebraiczny (x, y) (prócz $x=0$, $y=1$), wtedy musiałoby oczywiście zachodzić równanie:

$$\left.\begin{array}{l} (y - e^{x})\,(y_1 - e^{x})\,(y_2 - e^{x})\ldots \\ (y - e^{x_1})\,(y_1 - e^{x_1})\,(y_2 - e^{x_2})\ldots \\ (y - e^{x_2})\,(y_2 - e^{x_2})\,(y_2 - e^{x_2})\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Lecz równanie to, po wykonaniu mnożeń, przyjmuje postać równania (2), które, jak okazano, jest niemożliwe.

Po drugie, dość zastosować znaną tożsamość $1 = e^{i\pi}$, która jest szczególnym przypadkiem wzoru $y = e^x$. Ponieważ w tej tożsamości $y = 1$ jest liczbą algebraiczną, przeto $x = i\pi$ musi być liczbą przestępną.

---

[1]) Hermite. Comptes rendus. **77** (1873), p. 18 i dalsze.

[2]) Lindemann. Mathematische Annalen. **20** (1882), p. 213.

[3]) Hilbert. Göttinger Nachrichten. 1893. № 2, p. 113.

[4]) Hurwitz. Tamże. 1893. № 4.

[5]) Gordan. Comptes rendus. 1893, p. 1040.

[6]) Mathem. Annalen. **43** (1894), p. 216–224. Dowody te przedrukowano w Tomie V „Prac matematyczno-fizycznych" (1895), str. 1–12. Pytanie o przestępności liczb e i π rozwija Klein w dziełku: „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie ausgearbeitet von Tägert" (Lipsk Teubner. 1890).

Inny dowód przestępności liczb e i π, oparty na rozważaniach czysto-algebraicznych, podał Fr. Mertens (Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften in Wien. 1896 oraz „Prace matematyczno-fizyczne". **9**, 1898, str. 28—45).

[7]) Dowód przestępności liczb e i π według Hurwitza oraz dowód niewymierności liczby π pomieścił Jordan w tomie 2-gim swego „Cours d'analyse" (1894), p. 99—104. Dowód Hurwitza znajduje się także w przekładzie polskim „Rachunku nieskończonościowego" Pascala (Część I, 1896, str. 186—188). Dowody przestępności liczb e i π oraz twierdzenia Lindemanna pomieścił H. Weber w drugim tomie swego dzieła: „Lehrbuch der Algebra". 1896, p. 751—767.

ODCZYT VIII *).

LICZBY IDEALNE.

Teorya liczb jest poczytywana zwykle za niezmiernie trudną, oderwaną i nie mającą prawie żadnego związku z innemi gałęziami wiedzy matematycznej. Pogląd taki powstał bez wątpienia w znacznej mierze, dzięki metodom traktowania, przyjętym w takich pracach, jakiemi są prace Kummera, Kroneckera, Dedekinda i innych, którzy dawniej najwięcej zdziałali dla postępu tej nauki. Powiadają, że Kummer miał się wyrazić, że teorya liczb jest jedyną czystą gałęzią matematyki, nie zarażoną przez zetknięcie z zastosowaniami.

Tymczasem nowe badania wykazały jasno, iż istnieje ścisła spółzależność pomiędzy teoryą liczb a innemi działami matematyki, nie wyłączając geometryi

Jako przykład, przytoczę teoryę redukcyi form dwójkowych kwadratowych, przedstawioną w książce „Elliptische Modulfunctionen". Rozciągnięcie tej metody na wymiary wyższe daje się osiągnąć bez poważnych trudności. Inny przykład, który pamiętacie zapewne, znajduje się w pracy Minkowskiego „Ueber Eigenschaften von ganzen Zahlen, die durch räumliche Anschauung erschlossen sind" [1]), którą miałem przyjemność przedstawić w streszczeniu na kongresie matematycznym w Chicago. W pracy tej geometrya wprost stosuje się do rozwinięcia nowych pomysłów arytmetycznych.

---

*) Dnia 5 września 1893 r.

Dziś mówić będę o składaniu (kompozycyi) form dwójkowych algebraicznych, badanem po raz pierwszy przez Gaussa w dziele: „Disquisitiones arithmeticae“ [2]) i o odpowiadającej mu teoryi liczb idealnych Kummera. Te dwa przedmioty poczytywano dawniej za bardzo oderwane, jakkolwiek już Dirichlet uprościł był w pewnej mierze badania Gaussa. Spodziewam się wszakże, iż przyznacie, że rozważania geometryczne, przy pomocy których traktuję te pytania, wprowadzają do nich tak wielką prostotę i jasność, że ci, co nie znają dawniejszego sposobu przedstawienia, z trudnością tylko zrozumieją, iż pytania te mogły by kiedyś uchodzić za nieprzystępne. Rozważania te wskazałem w r. 1893 w „Göttinger Nachrichten“ i począwszy od semestru letniego w roku bieżącym, traktowałem je obszerniej w moich wykładach [3]). Dowiedziałem się potem, że podobne pomysły wypowiedział już był Poincaré w r. 1881 [4]), lecz nie miałem dość czasu na porównanie jego badań z mojemi.

Piszę formę dwójkową kwadratową w postaci $f = ax^2 + bxy + cy^2$, t. j. bez czynnika 2 w wyrazie drugim; niektóre korzyści, z takiego przedstawienia płynące, wyłożył niedawno H. Weber w „Göttinger Nachrichten“ 1893—93 [5]). Ilości a, b, c, x, y uważamy oczywiście za liczby całkowite.

Należy zauważyć, że w teoryi liczb czynnika wspólnego spółczynników a, b, c nie można ani wprowadzać ani opuszczać dowolnie, jak w geometryi rzutowej; innemi słowy mamy tu do czynienia z formą, nie zaś z równaniem. Przyjmujemy tedy, że spółczynniki a, b, c nie mają wspólnego czynnika; formę taką nazywamy pierwotną.

Co się tyczy wyróżnika $D = b^2 - 4ac$, to przyjmujemy, że nie ma on dzielnika kwadratowego (stąd i sam nie może być kwadratem) i że jest różny od zera. Mamy tedy $D \equiv 0$ albo $\equiv 1$ (mod 4). Z dwu przypadków $D < 0$ i $D > 0$, które należy rozważać osobno, wybieram przypadek pierwszy, jako prostszy. Oba przypadki traktowałem zarówno w wspomnianych wyżej wykładach.

Gauss, który we wszystkich gałęziach matematyki stosował chętnie rozważania geometryczne, podał następującą interpretacyę geometryczną elementarną form dwójkowych kwadratowych. Nakreślmy (Fig. 13) równoległobok o bokach przyległych równych odpowiednio $\sqrt{a}$, $\sqrt{c}$, tworzących kąt φ, tak że $\cos\varphi = \frac{b}{2\sqrt{ac}}$. Ponieważ $b^2 - 4ac < 0$, więc a i c są koniecznie tego samego znaku; możemy więc przyjąć, że a i c są dodatnie. Przypadek, w którym a i c są ujemne, łatwo sprowadzić do poprzedniego, zmieniając wszystkie znaki. Przedłużmy nieograniczenie boki równoległoboku i poprowadźmy linie równoległe tak, aby całą płaszczyznę pokryć siecią równych równoległoboków. Otrzymujemy tym sposobem tak nazwaną k r a t ę p r o s t y c h r ó w n o l e g ł y c h (line lattice, Parallelgitter).

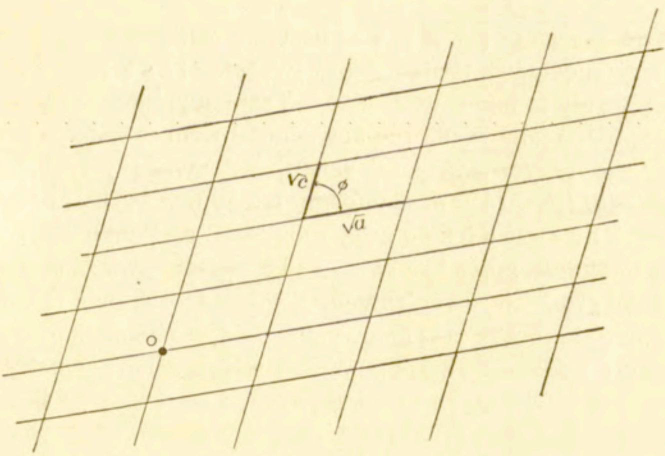


Fig. 13.

Obierzmy teraz jeden z punktów przecięcia, t. j. jeden z w i e r z c h o ł k ó w za początek O i oznaczmy każdy inny wierzchołek za pomocą symbolu (x, y), gdzie x jest liczbą boków $\sqrt{a}$, y zaś liczbą boków $\sqrt{c}$, które należy przebiedz, aby z punktu O dojść do punktu (x, y). Wtedy każda wartość, jaką przyjmuje forma f dla wartości całkowitych x, y, przedstawia oczywiście kwadrat odległości punktu (x, y) od początku O. Tym sposobem krata daje nam przedstawienie geometryczne zupełne formy dwójkowej kwadratowej. Wyróżnik D ma wtedy bardzo proste znaczenie geometryczne, gdyż pole każdego z równoległoboków równa się $\frac{1}{2}\sqrt{-D}$.

Otóż, w teoryi liczb dwie formy

$$f = ax^2 + bxy + cy^2 \quad , \quad f' = a_{,}x'^2 + b'x'y' + c'y'^2 ,$$

uważają się za równoważne, jeżeli jedna z nich może być wyprowadzona z drugiej przy pomocy podstawienia liniowego o wyznaczniku 1, t. j. przy pomocy podstawienia

$$x' = \alpha x + \beta y \quad , \quad y' = \gamma x + \delta y ,$$

gdzie $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ są liczbami całkowitemi. Wszystkie formy równoważne formie danej tworzą klasę form kwadratowych; formy te mają wszystkie ten sam wyróżnik. Odrazu spostrzeżemy, co odpowiada równoważności form w naszem przedstawieniu geometrycznem, jeżeli skierujemy uwagę jedynie na same wierzchołki (Fig. 14); otrzymujemy wtedy utwór, któremu nadają nazwę kraty punktowej (point-lattice, Punktgitter). Taka siatka punktów może być w rozmaity sposób związana z dwoma układami prostych równoległych, t. j. krata punktowa przedstawia nieskończoną liczbę krat liniowych. Badanie elementarne doprowadza do wniosku, że krata punktowa jest obrazem geometrycznym klasy form dwójkowych kwadratowych, a nieskończona liczba krat liniowych, zawartych w kracie punktowej odpowiada dokładnie nieskończonej liczbie form, które ta klasa obejmuje.

Wiemy dalej z teoryi liczb, że każda wartość wyróżnika D należy tylko do skończonej liczby klas; stąd każdej wartości D odpowiada skończona liczba krat punktowych, które poniżej rozpatrzymy.

Z pomiędzy różnych klas, należących do tej samej wartości wyróżnika D, jedna jest szczególnie ważna. Nazywam ją klasą główną i określam jako klasę zawierającą formę

$$x^2 - \frac{1}{4} Dy^2 \quad , \quad \text{gdy } D \equiv 0 \ (\text{mod } 4) ,$$

lub formę $x^2 + xy + \frac{1}{4}(1-D)y^2$ „ $D \equiv 1 \ (\text{mod } 4)$.

Łatwo widzieć, że odpowiadające kraty są bardzo proste. Jeżeli $D \equiv 0 \pmod 4$, to krata główna jest prostokątna, a boki równoległoboku elementarnego są 1 i $\sqrt{-\frac{1}{4}D}$. W przypadku $D \equiv 1 \pmod 4$ równoległobok jest rombem. Dla prostoty rozważać będę tylko przypadek pierwszy.

Fig. 14

Określimy teraz liczby zespolone w związku z kratą główną typu prostokątnego (Fig. 15). Punkt (x, y) kraty przedstawia wprost liczbę zespoloną $x + \sqrt{-\frac{1}{4}D} \,.\, y$; te liczby nazwiemy l i c z b a m i g ł ó w n e m i.

W każdym układzie liczb pierwszorzędne znaczenie mają prawa mnożenia. Dla naszych liczb głównych łatwo sprawdzić, że iloczyn dwu jakichkolwiek takich liczb daje zawsze liczbę główną; innemi słowy: u k ł a d l i c z b g ł ó w n y c h j e s t o d n o ś n i e d o m n o ż e n i a u k ł a d e m z u p e ł n y m w s o b i e.

Przejdźmy teraz do rozważania krat o wyznaczniku D, nie należących do klasy głównej; kraty te nazwiemy d r u g o r z ę d n e m i lub p o b o c z n e m i (secondary lattices, Nebengittar). Zanim zbadam prawa mnożenia liczb odpowiednich, muszę zwrócić uwagę na fakt, że w naszem przedstawieniu geometrycznem istnieje pewna dowolność, na którą dotąd nie kładliśmy nacisku; tkwi ona w oryentacyi kraty, którą można uważać jako daną przez kąty ψ i χ, utworzone przez boki $\sqrt{a}$, $\sqrt{c}$ z pewną linią początkową (Fig. 16). Kąt φ równoległoboku równa się oczywiście $\chi - \psi$. Punkt (x, y) kraty da nam liczbę zespoloną

$$e^{i\psi}\left[\sqrt{a}\,.\,x + \frac{-b+\sqrt{D}}{2\sqrt{a}}\,y\right] = e^{i\psi}\,.\,\sqrt{a}\,.\,x + e^{i\chi}\,.\,\sqrt{c}\,.\,y\,,$$

którą nazwiemy liczbą drugorzędną lub poboczną. Definicya liczby drugorzędnej jest przeto nieoznaczoną, dopóki nie ustalimy wielkości kątów ψ lub χ.

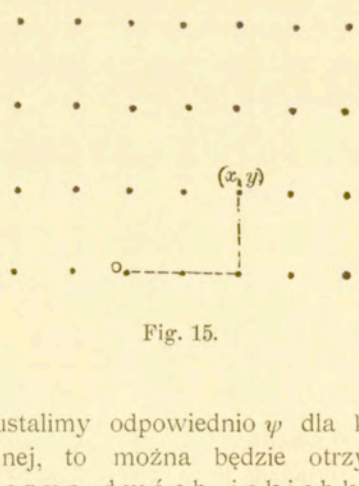


Fig. 15.

Otóż, gdy ustalimy odpowiednio ψ dla każdej kraty punktowej drugorzędnej, to można będzie otrzymać ten ważny rezultat, że iloczyn dwóch jakichkolwiek liczb zespolonych, wziętych z ogółu krat naszych, jest liczbą zespoloną układu, tak że ogół tych liczb zespolonych tworzy również odnośnie do mnożenia układ zupełny.

Nadto mnożenie kombinuje kraty w sposób określony, tak że, gdy liczbę, należącą do kraty L_1 mnożymy przez liczbę, należącą do kraty L_2, otrzymujemy zawsze liczbę, należącą do określonej kraty L_3.

Własności te odpowiadają najściślej własnościom charakterystycznym składania (kompozycyi) form algebraicznych w teoryi Gaussa. Prawo Gaussa orzeka, że iloczyn dwu liczb zwykłych, dających się przedstawić przez dwie formy pierwotne f_1, f_2 o wyróżniku D, zawsze przedstawić można za pomocą określonej formy pierwotnej f_3 o tymże wyróżniku. Prawo to jest zawarte w twierdzeniu dopiero co wyjaśnionem, gdyż wartości $\sqrt{f_1}$, $\sqrt{f_2}$, $\sqrt{f_3}$ są odległościami punktów krat od początku. Zauważmy zarazem,

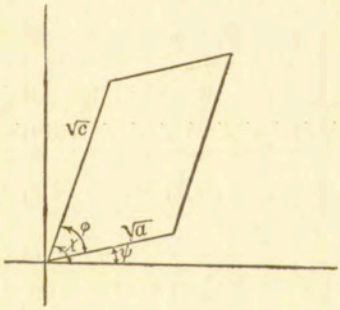


Fig. 16.

że prawo Gaussa nie jest dokładnym równoważnikiem naszego twierdzenia, gdyż w mnożeniu naszych liczb zespolonych nie tylko mnożymy odległości lecz i dodajemy kąty φ.

Nie jest niemożliwem, że Gauss sam stosował podobne rozważania przy odkryciu swego prawa, które bez tej geometrycznej ilustracyi ma charakter zupełnie oderwany.

Pozostaje nam jeszcze wyjaśnić związek tych badań z liczbami idealnemi Kummera. Obejmuje to już pytanie o dzieleniu dla naszych liczb zespolonych i o ich rozkładzie na czynniki pierwsze.

W zwykłej teoryi liczb rzeczywistych, każda liczba może być rozłożona na czynniki pierwsze w sposób jedyny. Czy to prawo zasadnicze utrzymuje się dla liczb zespolonych? W odpowiedzi na to pytanie należy rozważać osobno układ, utworzony przez ogół wszystkich naszych liczb zespolonych i osobno układ samych liczb głównych. Dla pierwszego układu odpowiedź jest twierdząca, t. j. każda liczba zespolona może być rozłożona na czynniki pierwsze zespolone w sposób jedyny. Nie zatrzymujemy się tu nad dowodzeniem tego twierdzenia, które jest wprost zawarte w zwykłej teoryi form dwójkowych kwadratowych. Inaczej wszakże rzecz się przedstawia, gdy rozważamy jedynie układ liczb głównych. Wtedy bowiem zachodzą przypadki, w których liczba główna może być rozłożona więcej niż jednym sposobem na czynniki pierwsze, t. j. na liczby główne, nie dające się już rozłożyć na czynniki główne. Możemy tu mieć $m_1 m_2 = n_1 n_2$, gdzie m_1, m_2, n_1, n_2 są liczbami pierwszemi głównemi. Pochodzi to stąd, że te liczby pierwsze przestają być pierwszemi, gdy dołączymy liczby drugorzędne, t. j. rozkładają się w sposób następujący:

$$m_1 = \alpha . \beta , \; m_2 = \gamma . \delta , \; n_1 = \alpha . \gamma , \; n_2 = \beta . \delta ,$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ są liczbami pierwszemi w układzie rozszerzonym. W badaniu praw dzielenia nie jest przeto dogodnem rozważanie samego układu głównego; lepiej wprowadzić układy drugorzędne. Kummer badając tę kwestyę, miał początkowo w rozporządzeniu swem jedynie układ główny, a zauważywszy niedoskonałość zachodzących w nim praw dzielenia, wprowadził za pomocą określenia liczby idealne, aby przywrócić zwykłe prawa dzielenia.

Widzimy, że te liczby idealne Kummera są tylko przedstawicielkami abstrakcyjnemi naszych liczb drugorzędnych. Cała trudność, jaką napotyka się przy pierwszem studyum liczb idealnych Kummera, wynika tedy ze sposobu przedstawienia tego autora. Przez wprowadzenie na samym początku liczb drugorzędnych obok liczb głównych, trudność ta znika.

Prawda, że mówiliśmy jedynie o liczbach zespolonych, zawierających pierwiastki kwadratowe, gdy tymczasem badania Kummera i jego następców Kroneckera i Dedekinda, obejmują wszystkie możliwe liczby algebraiczne. Lecz metody nasze dają się stosować ogólnie, trzeba tylko budować kraty w przestrzeniach o wyższej liczbie wymiarów. Lecz przedmiot ten wymagałby już szczegółowego rozpatrzenia, które tu pomijamy.

---

[1]) W „Mathematical Papers read at the International Mathematical Congress“ 1893 etc. New-York 1896, p. 201—207, przekład w „Nouvelles Annales de Mathématiques“ (3) **15**, wrzesień 1896. Porówn. dzieło tegoż autora p. t.: „Geometrie der Zahlen“. Lipsk. Teubner 1896.

[2]) W Sekcyi 5-ej; p. Gauss, Werke. **1**, p. 239.

[3]) Wykłady Kleina wyszły w kursie litografowanym p. t.. „Vorlesungen über ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie“ I, II. 1897. Porów. artykuł Kleina w Math. Ann. **48**, p. 562—568 (1897).

[4]) Poincaré. Sur un mode nouveau de représentation des formes quadratiques définies ou indéfinies“ (Journal de l'École polytechnique **27**, p. 177—240).

[5]) H. Weber. Zahlentheoretische Untersuchungen aus dem Gebiete der elliptischen Functionen, Gött. Nachr. 1893. Pórówn. dzieło tegoż autora „Elliptische Functionen und algebraische Zahlen“. Brunświk 1891.

ODCZYT IX *).

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH STOPNI WYŻSZYCH.

Dawniej przez „rozwiązanie równania algebraicznego“ rozumiano rozwiązanie za pomocą pierwiastników. Wszystkie równania, których rozwiązania nie można było wyrazić za pomocą pierwiastników, zaliczano wprost do nierozwiązalnych, jakkolwiek wiadomo, że grupy Galois'a, należące do takich równań, mogą być bardzo różnego charakteru. Nawet i dziś jeszcze spotykamy się często z podobnym poglądem, lubo od roku 1858 przeważa zupełnie inny punkt widzenia. W tym to roku Hermite[1]) i Kronecker[2]) wraz z Brioschim[3]) znaleźli rozwiązanie równania stopnia 5-go, a przynajmniej zasady podstawowe tego rozwiązania.

Mówi się często, że rozwiązanie równania stopnia 5-go jest „rozwiązaniem za pomocą funkcyj eliptycznych“; lecz wyrażenie to nie jest dokładnem, przynajmniej w przeciwstawieniu do „rozwiązania za pomocą pierwiastników“. W samej rzeczy, funkcye eliptyczne występują w rozwiązaniu równania stopnia 5-go w sposób podobny, w jaki logarytmy występować mogą w rozwiązaniu równania za pomocą pierwiastników, mianowicie gdy pierwiastniki obliczamy za pomocą logarytmów. Przez rozwiązanie równania rozumieć będziemy w tym odczycie

*) Dnia 6 września 1893 r.

sprowadzenie równania do pewnego równania algebraicznego normalnego. Okoliczność, że niewymierności, zawarte w tem ostatniem, można w przypadku równania stopnia 5-go obliczać przy pomocy tablic funkcyj eliptycznych (o ile posiadamy tablice odpowiedniej klasy funkcyj eliptycznych) jest rzeczą dodatkową, interesującą wprawdzie, lecz której dziś nie mamy zamiaru rozważać.

Uprościłem rozwiązanie równania stopnia 5-go, sprowadziwszy je, jak mniemam, do postaci najprostszej przez wprowadzenie tak nazwanego równania dwudziestościanu (ikozaedru), jako odpowiedniej postaci normalnej [4]). Innemi słowy, równanie dwudziestościanu określa niewymierność typową, do której sprowadzić można rozwiązanie równania stopnia 5-go. Metoda ta daje się uogólnić tak, aby objęła całkowitą teoryę rozwiązywania wyższych równań algebraicznych; temu to właśnie przedmiotowi poświęcę odczyt dzisiejszy.

Zwracam uwagę na to, że mówię tu o równaniach, których spółczynniki nie są danemi liczebnie: rozważamy tu równania z punktu widzenia teoryi funkcyj, według którego spółczynniki odpowiadają zmiennym niezależnym.

Mówiąc, że równanie jest rozwiązalne przy pomocy pierwiastników, rozumiemy przez to, że za pomocą procesów algebraicznych daje się ono sprowadzić do równania postaci $\eta^n = z$, gdzie z jest ilością znaną; jedynie nowem zadaniem do rozstrzygnięcia jest wtedy obliczenie ilości $\eta = \sqrt[n]{z}$. Porównajmy z tego punktu widzenia równanie dwudziestościanu z równaniem dwumiennem.

Równaniem dwudziestościanu jest następujące równanie stopnia 60-go:

$$\frac{H^3(\eta)}{1728\, f^5(\eta)} = z\,,$$

gdzie H jest wyrażeniem liczbowem stopnia 20-go, f — stopnia 12-go, z zaś jest ilością znaną. Co się tyczy postaci tych form H i f oraz innych szczegółów, to odsyłam do mojego dzieła: „Vorlesungen über das Ikosaeder". Tu przedstawię tylko charakterystyczne własności powyższego równania.

1) Niechaj η będzie jednym z pierwiastków równania; wtedy 60 pierwiastków tegoż można wyrazić, jako funkcye liniowe ilości η ze znanemi spółczynnikami, tak np. jako funkcye

$$\eta\,,\ \frac{1}{\eta}\,,\ \varepsilon\eta\,,\ \frac{(\varepsilon-\varepsilon^4)\,\eta-(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\,\eta-(\varepsilon-\varepsilon^4)}\,,\ \text{i t. d.}$$

gdzie $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Te 60 ilości tworzy tedy grupę podstawień liniowych.

2) Przedstawmy geometrycznie zależność ilości η od z, ustanawiając odwzorowanie podobne płaszczyzny z na płaszczyźnie η albo raczej (za pomocą rzutu stereograficznego) na kuli (Fig. 17).

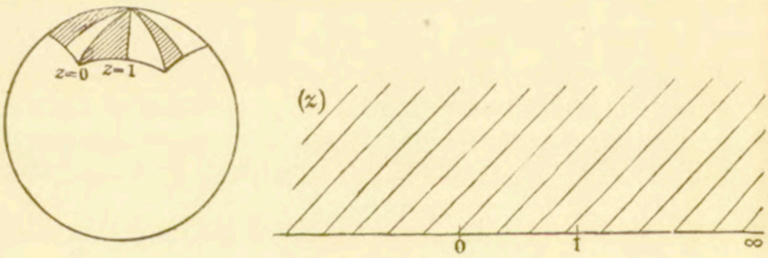


Fig. 17.

Trójkąty, odpowiadające górnej (zacieniowanej) połowie płaszczyzny z, są trójkątami naprzemiennemi (zacieniowanemi) na kuli, na której otrzymujemy je, wpisując w kulę dwudziestościan foremny i każdy z 20 pozyskanych w ten sposób trójkątów dzieląc za pomocą wysokości na sześć trójkątów równych i symetrycznych (Fig. 18). To odwzorowanie podobne na kuli wyznacza każdemu pierwiastkowi obszar określony, jest zatem równoważne oddzieleniu zupełnemu 60 pierwiastków. Z drugiej strony ta figura odpowiada wspomnianym wyżej 60 podstawieniom liniowym.

3) Jeżeli, kładąc $\eta = \frac{y_1}{y_2}$, uczynimy wszystkie wyrażenia 60 pierwiastków jednorodnemi, wtedy różne wartości ilości y będą

postaci $\alpha y_1 + \beta y_2$, $\gamma y_1 + \delta y_2$, a więc czynić będą zadość równaniu różniczkowemu liniowemu rzędu drugiego

$$y'' + py' + q = 0,$$

gdzie p i q są funkcyami wymiernemi ilości z. Jest oczywiście zawsze możliwem wyrazić każdy pierwiastek za pomocą szeregu potęgowego. W naszym przypadku sprowadzamy obliczenie ilości η do obliczenia ilości η_1 i η_2 i staramy się znaleść rozwinięcie szeregowe dla tych ostatnich. Ponieważ te szeregi muszą czynić zadość naszemu równaniu różniczkowemu rzędu drugiego, przeto prawo szeregów jest względnie proste, gdyż każdy wyraz może być wyrażony przy pomocy dwóch poprzedzających go wyrazów.

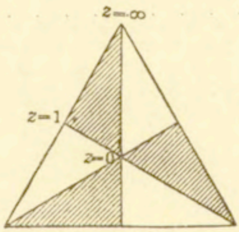


Fig. 18.

4) Wreszcie, jak już wyżej wspomniano, obliczenie pierwiastków daje się skrócić przez użycie funkcyj eliptycznych, skoro tablice tych funkcyj dla tego przypadku są poprzednio obliczone.

Zobaczmy teraz, co odpowiada powyższym czterem punktom w przypadku równania dwumiennego $\eta^n = z$. Rezultaty są dobrze znane:

1) Wszystkie n pierwiastków można wyrazić jako funkcye liniowe jednego z nich η:

$$\eta\,,\ \varepsilon\eta\,,\ \varepsilon^2\eta\,,\ldots \varepsilon^{n-1}\eta\,,$$

gdzie ε jest pierwiastkiem pierwotnym stopnia n-tego z jedności.

2) Odwzorowanie podobne dzieli kulę na $2n$ równych taśm (Fig. 19), ograniczonych kołami wielkiemi, przechodzącemi przez te same dwa punkty.

3) Istnieje równanie różniczkowe rzędu pierwszego, któremu czyni zadość η, a mianowicie:

$$nz \, . \, \eta' - \eta = 0$$

i z tego równania można wyprowadzić szeregi, służące do istotnego obliczania pierwiastków.

4) Jeżeli szeregi są niedogodnemi, to do obliczania użyć można logarytmów.

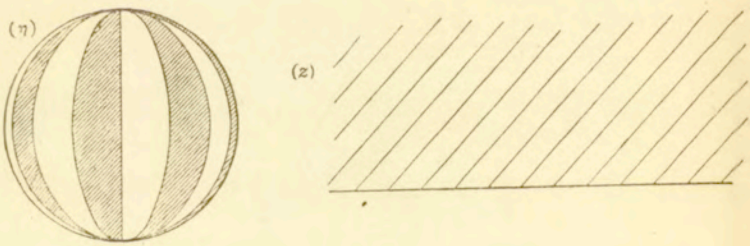


Fig. 19.

Analogia, jak widzicie, jest zupełna. Główna różnica, zachodząca pomiędzy temi dwoma przypadkami, polega na tem, że dla równania dwumiennego podstawienia liniowe obejmują w sobie tylko jednę ilość, gdy dla równania stopnia 5-go mamy grupę podstawień liniowych d w ó j k o w y c h. Podobna różnica zachodzi co do równań różniczkowych: dla równania dwumiennego mamy równanie różniczkowe rzędu 1-go, dla równania zaś stopnia 5-go równanie różniczkowe rzędu 2-go.

Dodamy jeszcze niektóre uwagi, dotyczące redukcyi ogólnego równania stopnia 5-go $f_5(x) = 0$ do równania dwudziestościanu. Redukcya ta jest możliwa dla tego, że grupa G a l o i s'a dla naszego równania stopnia 5-go (po dołączeniu do niego pierwiastka kwadratowego z wyróżnika) jest izomorficzna z grupą 60 podstawień liniowych równania dwudziestościanu. Możliwość tej redukcyi nie daje jeszcze oczywiście odpowiedzi na pytanie, jakiemi środkami można redukcyę przeprowadzić. Druga część mojego dzieła: „Vorlesungen über das Ikosaeder" jest poświęcona temu pytaniu. Znalazłem, że ta redukcya nie może być wykonana wymiernie, lecz wymaga wprowadzenia pierwiastka kwadratowego. Wprowadzona w ten sposób niewymierność jest wszakże niewymiernością szczególnego gatunku (nazwałem ją niewymiernością akcesoryjną); nie powinna ona być taką, aby czyniła przywiedlną grupę Galois'a, należącą do równania.

Przechodzę teraz do rozważania zagadnienia ogólnego o analogicznem badaniu równań wyższych, które przedstawiłem po raz pierwszy w tomie 15 dziennika Math. Ann. (1879) [5]. Muszę zauważyć raz na zawsze, że w dokładniejszym wykładzie należałoby koniecznie rozróżnić pomiędzy formułowaniem jednorodnem i rzutowem (w tym ostatnim przypadku rozważamy tylko stosunki zmiennych jednorodnych); lecz tu rozróżnienie to pomijam.

Rozważmy zadanie bardzo ogólne: Dana jest grupa skończona podstawień jednorodnych liniowych n zmiennych; obliczyć wartości tych n zmiennych z niezmienników grupy.

Zadanie to obejmuje w sobie oczywiście zadanie o rozwiązaniu równania algebraicznego za pomocą grupy Galois'a. Gdyż w tym przypadku wszystkie funkcye wymierne pierwiastków pozostają, jak wiadomo, niezmiennemi przy pewnych przemianach pierwiastków; przemiany zaś są najprostszym przypadkiem przekształceń liniowych jednorodnych.

Teraz chcę sformułować sposób, w jaki należy traktować te wszystkie zagadnienia: pomiędzy zagadnieniami, mającemi grupy izomorficzne, uważamy za najprostsze to, w którem zachodzi najmniejsza liczba zmiennych, i nazywamy je zagadnieniem normalnem. Zagadnienie to należy uważać za rozwiązalne za pomocą szeregów. Pytanie sprowadza się do redukcyi innych zagadnień izomorficznych do zagadnienia normalnego.

Sformułowanie, które proponuję, zawiera w sobie i zagadnienie o ogólnem rozwiązywaniu równań algebraicznych, t. j. o sprowadzaniu równań do zagadnienia izomorficznego o najmniejszej liczbie zmiennych.

Redukcya równania stopnia 5-go do równania dwudziestościanu zawiera się oczywiście w zagadnieniu poprzedzającem jako przypadek szczególny, w którym najmniejsza liczba zmiennych wynosi 2.

Na zakończenie podam krótką wiadomość o tem, co osiągnięto za pomocą tej metody dla równań stopni wyższych. Przedewszystkiem wspomnieć muszę o rozbiorze moim [6]) i Gordana [7]), odnoszącym się do takich równań stopnia 7-go, których grupa Galois'a składa się z 168 podstawień. Najmniejsza liczba zmiennych jest tu równa 3, a grupa trójkowa jest tą samą grupą 168 podstawień liniowych, którą później rozważyłem szczegółowo w tomie I dzieła: „Elliptische Modulfunctionen". Gdy ja zająłem się wykładem pomysłu ogólnego, Gordan faktycznie wykonał redukcyę równania stopnia 7-go do zagadnienia trójkowego. Praca to bezwątpienia świetna, lecz należy żałować, że Gordan tu, jak i gdzieindziej, po za skomplikowanym rzędem wzorów, nie wskazał nam idej kierowniczych swego badania.

Winienem wspomnieć jeszcze o pracy, ogłoszonej w t. 28 (1887) dziennika „Mathematische Annal." [8]), w której udowodniłem, że dla równań ogólnych stopni 6-go i 7-go najmniejsza liczba zmiennych w równaniu normalnem jest cztery, i wskazałem w jaki sposób redukcyę tę można wykonać.

Wreszcie w liście do C. Jordana [9]) wskazałem możliwość redukcyi równania stopnia 27-go, występującego w teoryi powierzchni stopnia 3-go, do zagadnienia normalnego, zawierającego również cztery zmienne. Redukcyę tę wykonał później w sposób bardzo prosty Burkhardt [10]), Maschke [11]) zaś zbadał szczegółowo rozważane tu grupy czwórkowe.

Oto zarys całkowity tego, co spełniono dotychczas; jest jasnem, że dalszy postęp w tym kierunku odbywać się już może bez wielkich trudności.

Jako pierwsze zagadnienie zaproponowałbym następujące. W ostatnich latach poznano wiele grup przemian 6, 7, 8, 9 .... liter;

określić w każdym przypadku najmniejszą liczbę zmiennych, za pomocą których można utworzyć grupy izomorficzne podstawień liniowych.

Następnie, pragnąłbym zwrócić uwagę waszą na przypadek ogólnego równania stopnia 8-go. Nie mogłem znaleść w tym przypadku materyalnego uproszczenia, tak iż może się zdawać, że równanie stopnia 8-go jest samo dla siebie zagadnieniem normalnem. Byłoby bezwątpienia interesującem pozyskać pewność w tym punkcie [12].

---

[1]) Hermite. Sur la théorie des équations modulaires et la résolution de l'équation du cinquieme dégré. Paris. Mallet-Bachelier. 1859.

[2]) Kronecker. Comptes rendus de l'Académie des sciences, t 46 (1858). Monatsberichte der Berliner Akademie 27 Juni. 1861.

[3]) Brioschi. Annali di Matematica. 1858; Comptes rendus de l'Académie des sciences. 1858. Porówn. tegoż autora: „Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade". Mathem. Annalen. **13** (1878).

[4]) F. Klein. Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Lipsk. Teubner. 1884.

[5]) F. Klein. Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade. Math. Ann. **15** (1879), p. 251—282.

[6]) F. Klein. Tamże (1879).

[7]) P. Gordan. Ueber Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen. Math. Annalen. **20** (1882), p. 515—530; **25** (1885), p. 459—521.

[8]) F. Klein. Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades. Math. Annalen. **28** (1887), p. 499—532.

[9]) C. Jordan. Journal de mathématiques. 1888, p. 169.

[10]) Burkhardt. Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen. Dritter Theil. Math. Annalen. **41** (1893), p 313—343.

[11]) Maschke. Ueber die quaternäre endliche lineare Gruppe der Borchardt'schen Moduln. Math. Annalen. **30** (1887), p. 496—515; Aufstellung des vollen Invariantensystems einer quaternären Gruppe von 51840 linearen Substitutionen. Tamże **33** (1889), p. 317—344; Ueber eine merkwürdige Configuration gerader Linien im Raume. Tamże **36** (1890), p. 190—215.

[12]) Nad programem, postawionym przez Kleina, pracował w dalszym ciągu A. Wiman. W rozprawie p. t.: „Note über Vertauschungsgruppen

von acht Dingen" (Göttinger Nachrichten. 1897, p. 55—62) stwierdził on słuszność przypuszczenia Kleina, iż równania ogólne stopnia 8-go są same dla siebie normalnemi. W rozprawie p. t.: „Note über die symmetrischen und alternirenden Vertauschungsgruppen von *n* Dingen" (1897, p. 190—197) uzasadnia twierdzenie, że równania ogólne stopnia wyższego nie dają się sprowadzić do „problematu o formach" wymiaru niższego niż $n-2$.

ODCZYT X *).

O NIEKTÓRYCH NAJNOWSZYCH POSTĘPACH W TEORYI FUNKCYJ HYPERELIPTYCZNYCH I ABELOWYCH.

Przedmiot funkcyj hypereliptycznych i abelowych jest tak rozległy, że niepodobna objąć go w jednym odczycie. I dlatego mówić będę tylko o związku, ustanowionym pomiędzy tym przedmiotem z jednej, a teoryą niezmienników, geometryą rzutową i teoryą grup z drugiej strony. Będę w szczególności musiał pominąć najnowsze próby wprowadzenia arytmetyki do tych pytań. Co się tyczy teoryi niezmienników i geometryi rzutowej, to wprowadzenie ich do tej dziedziny należy uważać za urzeczywistnienie i rozwinięcie programu Clebscha; dodatkowe zaś uwzględnienie pojęcia grupy było koniecznem do uzupełnienia tego rozwinięcia. To, co rozumiem przez związek wzajemny pomiędzy temi różnemi gałęziami, najlepiej da się zrozumieć, gdy rzecz wyjaśnię na bardziej dostępnym przykładzie funkcyj eliptycznych.

Rozpoczynając od metody dawniejszej, mamy zasadnicze funkcye eliptyczne w formie Jacobi'ego:

$$\sin \operatorname{am}\left(v, \frac{K'}{K}\right), \quad \cos \operatorname{am}\left(v, \frac{K'}{K}\right), \quad \Delta \operatorname{am}\left(v, \frac{K'}{K}\right).$$

*) Dnia 7 września 1893 r.

jako zależne od dwóch argumentów. Badano je w wielu pracach już to z geometrycznego punktu widzenia Riemanna, już to z bardziej analitycznego stanowiska Weierstrassa. Przypominam tu pierwsze wydanie dzieła Briota i Bouqueta[1]) oraz dzieła niemieckie Königsbergera[2]) i Thomae'go[3]).

Pobudkę do nowego sposobu traktowania zawdzięczamy Weierstrassowi. Wprowadził on, jak wiadomo, zamiast dwu argumentów Jacobi'ego, trzy argumenty jednorodne u, ω_1, ω_2. Był to krok pierwszy, konieczny do ustanowienia związku z teoryą podstawień liniowych. Rozważmy grupę nieciągłą trójkową podstawień liniowych:

$$u' = u + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 ; \quad \omega'_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 ; \quad \omega'_2 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 ,$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ są liczbami całkowitemi, których wyznacznik $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, liczby zaś m_1, m_2 są jakiemikolwiek liczbami całkowitemi. Funkcye zasadnicze teoryi Weierstrassa

$$p(u, \omega_1, \omega_2), \quad p'(u, \omega_1, \omega_2), \quad g_2(\omega_1, \omega_2), \quad g_3(\omega_1, \omega_2),$$

stanowią właśnie układ zupełny niezmienników rzeczonej grupy. Nadto g_2, g_3 są niezmiennikami zwykłemi (cayleyanami) formy dwójkowej kwadratowej $f_4(x_1, x_2)$ od której zależy całka pierwszego gatunku

$$\int \frac{x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1}{\sqrt{f_4(x_1, x_2)}} .$$

Fakt znamienny, że niezmienniki przestępne są równocześnie niezmiennikami niewymierności algebraicznej, która odpowiada teoryi przestępnej, utrzymuje się we wszystkich przypadkach wyższych.

Jako krok dalszy w teoryi funkcyj eliptycznych, wymieniam systematyczne rozważanie krzywych algebraicznych rodzaju 1, wprowadzone przez Clebscha. Rozważał on w szczególności krzywą płaską rzędu 3-go (C_3) oraz pierwszy gatunek krzywych rzędu 4-go w przestrzeni (C^1_4) i pokazał, jak dogodnem jest przy wyprowadzaniu licznych twierdzeń geometrycznych rozważanie całek eliptycznych wzdłuż tych krzywych. Teorya funkcyj eliptycznych rozszerza się przez wprowadzenie pojęć nowoczesnej geometryi rzutowej.

Kombinując i uogólniając te rozważania, doszedłem do sformułowania bardzo rozległego programu badań, który daje się wypowiedzieć w ten sposób (patrz „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen", t. II).

Biorąc za punkt wyjścia wspomnianą wyżej grupę

$$u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2\,;\quad \omega'_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2\,;\quad \omega'_2 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2\,,$$

staramy się przedewszystkiem zbudować wszystkie jej podgrupy. Pomiędzy niemi najprostszemi i najużyteczniejszemi są te, które nazwałem podgrupami kongruencyjnemi; otrzymujemy je, kładąc

$$\left.\begin{array}{ll} m_1 \equiv 0\,, & m_2 \equiv 0 \\ \alpha \equiv 1\,, & \beta \equiv 0 \\ \gamma \equiv 0\,, & \delta \equiv 1 \end{array}\right\} \pmod{n}.$$

Drugie zagadnienie polega na zbudowaniu niezmienników tych grup i wykryciu zachodzących pomiędzy niemi związków. Rozważając nawet nie wszystkie podgrupy, wyjąwszy powyższe grupy kongruencyjne, doszliśmy do bardzo poważnego rozszerzenia teoryi funkcyj eliptycznych. Stosownie do wartości, jakie nadajemy liczbie n, rozróżniam rozmaite szczeble (stages) zagadnienia. Zauważmy, że teorya Weierstrassa odpowiada szczeblowi pierwszemu ($n = 1$), gdy teorya Jacobi'ego — mówiąc w ogólności — odpowiada szczeblowi drugiemu ($n = 2$); szczebli wyższych nie badano dotąd w sposób systematyczny.

Po trzecie, by dać zarazem ilustracyę geometryczną, stosuję pomysł Clebscha, wprowadzając krzywą algebraiczną. Wprowadzam najprzód zwykły pierwiastek kwadratowy formy dwójkowej, co wymaga tylko podwójnego pokrycia osi x, t. j., uważamy tylko C_2 w S_1. Dalej stosujemy ogólną krzywę sześcienną w płaszczyźnie (C_3 w S_2), krzywą rzędu czwartego w przestrzeni trójwymiarowej (C_4 w S_3), i w ogólności krzywą eliptyczną C_{n+1} w S_n. Są to wszystko krzywe, które nazwałem krzywemi eliptycznemi normalnemi: one to najlepiej nadają się do wyjaśnienia związków algebraicznych pomiędzy funkcyami eliptycznemi.

Zauważę mimochodem, że metoda ta jest ściśle stosowaną w dziele „Elliptische Modulfunctionen" z tym wyjątkiem, że przyjęto tam naturalnie u jako równe zeru, gdyż to właśnie charakteryzuje funkcye modułowe. Spodziewam się, że z czasem całą teoryę funkcyj eliptycznych będę mógł traktować według tego programu, t. j. przy założeniu, że u jest różnem od zera.

Uwieńczone powodzeniem rozszerzenie tego programu na teoryę funkcyj hypereliptycznych i abelowych najlepiej stwierdza, że prowadzi on do rzeczywistego postępu. Poświęciłem kilka lat pracy usiłowaniom w tym kierunku, i przedstawiając wam zarys tego, co zdziałano w tej specyalnej dziedzinie, mam nadzieję, że potrafię zwrócić uwagę waszą na rozmaite strony tych poszukiwań, w których praca może przynieść owoce.

Co się tyczy funkcyj hypereliptycznych, przyjmujemy jako definicyę ogólną, że są to funkcye dwu zmiennych u_1, u_2 z czterema peryodami (gdy funkcye eliptyczne mają jednę zmienną i dwa peryody). Nie mogąc tu dać historycznego zarysu rozwoju teoryi funkcyj hypereliptycznych, zatrzymam się tylko nad badaniami, które cechują postęp w powyżej wskazanych kierunkach, i rozpoczynam od zastosowania geometrycznego tych funkcyj do powierzchni w przestrzeni o jakiejkolwiek liczbie wymiarów.

Mamy tu najprzód badania Rohna nad powierzchnią Kummera, tą dobrze znaną powierzchnią rzędu czwartego z 16 punktami stożkowemi. Zdałem sprawę o tej pracy w tomie 27 dziennika „Math. Annalen" (1886) [4]). Jeżeli każdego matematyka uderza piękność i prostota związków, zachodzących w odpowiednich przypadkach dla funkcyj eliptycznych (C_3 na płaszczyźnie), to i wielce godne uwagi figury, wpisane i opisane na powierzchni Kummera, podane przez Rohna i przezemnie, budzić muszą żywe zainteresowanie.

Dalej wspomnieć winienem o obszernej rozprawie Reichardta, ogłoszonej w „Acta Leopoldina" (1886), w której związek pomiędzy funkcyami hypereliptycznemi i powierzchnią Kummera, jest streszczony w formie dogodnej i jasnej, jako wprowadzenie do tej gałęzi. Punkt wyjścia w tem badaniu wzięto w teoryi kompleksów liniowych stopnia drugiego.

W ostatnim czasie matematycy francuscy zwrócili uwagę na zagadnienie ogólne o przedstawieniu powierzchni przy pomocy funkcyj hypereliptycznych; obszerną rozprawę o tym przedmiocie ogłosił H u m b e r t w t. 9 (1893) czasopisma „Journal de Mathématiques“ [5]).

Przechodzę do teoryi abstrakcyjnej funkcyj hypereliptycznych. Jak wiadomo, G ö p e l i R o s e n h a i n utworzyli w r. 1847 teoryę tych funkcyj na sposób, prawie odpowiadający teoryi funkcyj eliptycznych J a c o b i'ego; miejsce prostej całki eliptycznej u zastępują tu dwie całki:

$$u_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{f_6(x)}}, \quad u_2 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{f_6(x)}}.$$

Wypływa tedy pytanie: jaki zachodzi związek pomiędzy funkcyami hypereliptycznemi a niezmiennikami formy dwójkowej rzędu szóstego $f_6(x_1, x_2)$? Ja i B u r k h a r d t, badając to pytanie w rozprawach, ogłoszonych w t. 27-ym (1886) [6]) i 32-gim (1888) [7]) dziennika „Mathem. Annalen“, znaleźliśmy, że należy rozważać rozkłady formy f_6 na dwa czynniki rzędu niższego $f_6 = \varphi_1\psi_5 = \varphi_3\psi_3$. Ponieważ rozkłady te są oczywiście niewymierne, więc i odpowiednie niezmienniki są niewymierne i badanie teoryi takich niezmienników staje się koniecznem.

Lecz należało uczynić jeszcze krok dalszy. Całki hypereliptyczne zawierają formę f_6 pod znakiem pierwiastka kwadratowego, t. j. $\sqrt{f_6(x_1, x_2)}$. Odpowiadająca im powierzchnia R i e m a n n a ma przeto dwa liście spojone w sześciu punktach, a stąd wypływa zagadnienie o dwójkowych formach zmiennych x_1, x_2 na takiej powierzchni R i e m a n n a, takież same jak rozważane zwykle zagadnienie o funkcyach jednej zmiennej x. Otóż, można wykazać, że istnieje gatunek szczególny form, zwanych p i e r w o t n e m i (primeforms), zupełnie analogiczny z wyznacznikiem $x_1 y_2 - x_2 y_1$ na zwyczajnej płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Forma pierwotna na dwuliściowej powierzchni R i e m a n n a, podobnie jak tamten wyznacznik w teoryi zwykłej, ma tę własność, iż znika tylko wtedy, gdy punkty $(x_1\, x_2)$ i $(y_1\, y_2)$ schodzą się (na tym samym liściu). Nadto forma pierwotna nigdzie nie staje się nieskończoną. Analogia z wyznacznikiem $x_1 y_2 - x_2 y_1$ ustaje tylko wtedy, kiedy forma pierwotna nie jest już algebraiczną lecz jest przestępną. Wszystkie formy algebraiczne powierzchni można rozłożyć na czynniki pierwotne. Nadto te formy pierwotne dają środek naturalny konstrukcyi funkcyj θ. Jako krok pośredni mamy tu funkcye, które nazwałem funkcyami σ, przez analogię do funkcyj σ w teoryi funkcyj eliptycznych Weierstrassa. We wspomnianych wyżej rozprawach wszystkie rozważania te odnoszą się oczywiście do przypadku ogólnego funkcyj hypereliptycznych, w którym niewymiernością jest $\sqrt{f_{2p+2}(x_1, x_2)}$, gdzie f_{2p+2} jest formą dwójkową rzędu $2p+2$.

Ustanowiwszy związek pomiędzy teoryą zwykłą funkcyj hypereliptycznych przy $p=2$ a niezmiennikami formy dwójkowej rzędu szóstego, podjąłem pracę nad rozwinięciem tego, co w przypadku funkcyj eliptycznych nazwałem teoryą szczebli (Stufentheorie). Wykłady moje o tym przedmiocie, miane w r. 1887—88, rozwinął Burkhardt w t. 35 dziennika „Mathem. Annalen" (1890) [8]).

Co się tyczy szczebla pierwszego, który z powodu związku z teoryą niezmienników i spółzmienników wymiernych wymaga rachunków bardzo skomplikowanych, to prace matematyka włoskiego Pascala stanowią tu postęp znaczny (Annali di matem.). W tymże przedmiocie ogłosił Bolza [9]) w t. 30 dziennika „Mathem. Annalen" (1887) pracę, w której badane jest pytanie, jak dalece możliwem jest przedstawianie niezmienników wymiernych formy rzędu szóstego za pomocą zerowych wartości funkcyj θ.

Dla szczebli wyższych, a zwłaszcza dla trzeciego, podał Burkhardt bardzo cenne rozwinięcia w dzienniku „Mathem. Annalen" t. 36 (1890), 38 (1891), 41 (1893) [10]). Rozważa on tu zresztą tylko funkcye modułowe hypereliptyczne (gdy u_1, u_2 są zerami). Cel ostateczny, do którego Burkhardt, zdaje się, doszedł, mimo, że wypada wykonać jeszcze wiele rachunków liczebnych, polega na ustanowieniu twierdzenia, zwanego twierdzeniem mnożnikowem (multiplier-equation, Multiplicator-Gleichung) dla przekształceń rzędu czwartego. Równanie jest stopnia 40-go i Burkhardt podał prawo ogólne dla utworzenia jego spółczynników.

Zachciejcie porównać badanie Burkhardta ze sposobem traktowania tej rzeczy w dziele Krausego: „Die Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung" (Lipsk, Teubner. 1886). Sposób ten, oparty na związkach ogólnych pomiędzy funkcyami θ, wiedzie — być może — dalej; lecz badania w nim są prowadzone ze stanowiska czysto-formalnego, bez uwzględnienia związku z teoryą niezmienników, grup i innych zagadnień.

Tyle o funkcyach hypereliptycznych. Teraz podam krótkie sprawozdanie o odpowiednich postępach w teoryi funkcyj abelowych: przytoczę mianowicie listę prac, które podzielić można na trzy kategorye:

1) Pytanie wstępne odnosi się do przedstawienia niezmienniczego całki trzeciego gatunku na krzywych algebraicznych rodzaju wyższego. Pick [11]) rozważał to zagadnienie dla krzywych płaskich bez punktów osobliwych. Z drugiej strony White w rozprawie [12]), streszczonej w „Math. Ann." t. 36 (1890) a ogłoszonej całkowicie w „Acta Leopoldina", traktował takie krzywe w przestrzeni, jako przecięcie zupełne dwu powierzchni bez punktu osobliwego. Należy też wymienić badania Picka i Osgooda [13]) o tak zwanych całkach dwumiennych.

2) Wykład teoryi ogólnej form na powierzchni Riemanna jakiegokolwiek gatunku, a w szczególności definicyę form pierwotnych, należących do takiej powierzchni, podałem w t. 36 dziennika „Mathem. Annalen" (1890) [14]). Można dodać, że przedmiot ten badał na nowo i rozwinął w ostatnim roku D-r Ritter; patrz „Göttinger Nachrichten" 1893 i „Mathematische Annalen" t. 43 [15]). D-r Ritter uważa formy algebraiczne za przypadek szczególny form ogólniejszych, t. zw. form mnożnikowych (multiplicative forms), co stanowi znów istotny krok naprzód.

3) Wreszcie, przypadek specyalny $p = 3$ badano na podstawie naszego programu w różnych kierunkach. Krzywą normalną dla tego przypadku jest, jak dobrze wiadomo, krzywa płaska rzędu czwartego C_4, której własności geometryczne zbadali byli Hesse i inni. Znalazłem (Math. Annal. t. 36) [16]), że te rezultaty geometryczne, jakkolwiek pozyskane z innego zupełnie punktu widzenia, odpowiadają ściśle wymaganiom zagadnienia abelowego;

pozwoliły mi one określić jasno 64 funkcyj θ przy pomocy krzywych C_4. Tu, jak i gdzieindziej, zdaje się panować pewna harmonia przedustawna w rozwoju matematyki: to, czego szukamy w jednej dziedzinie badań, przynosi nam inna dziedzina, tak że zdaje się zachodzić tu konieczność logiczna, niezawisła od naszych usposobień indywidualnych.

W tym przypadku zamiast funkcyi θ wprowadziłem funkcye σ. Spółczynniki są niezmiennikami niewymiennemi, jak w przypadku $p=2$. Te szeregi σ badał szczegółowo Pascal w „Annali di Matematica“ [17]). Badania te mają oczywiście ścisły związek z analogicznem badaniem Frobeniusa [18]) i Schottky'ego [19]), których dla braku czasu nie mogę wymienić szczegółowiej.

Wreszcie należy wspomnieć o najnowszych pracach matematyka austryackiego Wirtingera. Najprzód utworzył on dla $p=3$ analog do powierzchni Kummera; jest nim rozmaitość trójwymiarowa rzędu 24-go w S_7, (patrz „Göttinger Nachrichten“ 1889 i „Wiener Monatshefte“ 1890 [20]). Pozornie dość skomplikowana rozmaitość ta ma własności bardzo interesujące; przekształca się ona na samą siebie za pomocą 64 kolineacyj i 64 inwersyj. Następnie w tomie 40 dziennika „Math. Annal.“ (1892) Wirtinger [21]) rozważa funkcye abelowe przy przyjęciu, że mają być tylko wzięte pod uwagę niezmienniki i spółzmienniki wymierne na krzywej rzędu czwartego; odpowiada to „pierwszemu szczeblowi“ oraz $p=3$. Badanie to jest pełne nowych i płodnych pomysłów.

Kończąc, pragnę zwrócić uwagę na to, że w przypadkach $p=2$ i $p=3$, lubo wiele pozostaje jeszcze do zrobienia, trudności zasadnicze są już pokonane. Wielki problemat, do którego obecnie przystąpić należy, jest $p=4$, gdzie krzywa normalna jest krzywą rzędu 6-go w przestrzeni. Miejmy nadzieję, że, dzięki ponawianym wysiłkom, potrafimy pokonać pozostałe trudności. Inny problemat, obiecujący piękne rezultaty, mamy w dziedzinie funkcyj θ, gdy za punkt wyjścia przyjmiemy szeregi θ, a nie krzywą algebraiczną. Analiści rozwinęli niezmiernie wiele wzorów, a problemat polegałby na związaniu tych wzorów z jasnemi pojęciami geometrycznemi rozmaitych konfiguracyj algebraicznych. Jeżeli na te zagadnienia kładę tu nacisk szczególny, to dlatego, że funkcye abelowe uważano zawsze za najpiękniejszą zdobycz matematyki nowoczesnej, tak że każdy postęp w tej teoryi daje nam miarę oceny sił naszych [22]).

---

[1]) Briot et Bouquet. Théorie des fonctions doublement périodiques et en particulier des fonctions elliptiques. Paryż. 1859. Drugie wydanie p. t.: „Théorie des fonctions elliptiques", tamże 1875.

[2]) L. Königsberger. Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen. W dwu częściach. Lipsk, Teubner. 1874.

[3]) J. Thomae. Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen eine Variabeln, Halle 1870; drugie wydanie 1873. Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Variabeln, Halle. 1880.

[4]) F. Klein. Ueber Configurationen, welche der Kummer'schen Fläche zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sind. Mathem. Ann. **29**, p. 106—142.

[5]) G. Humbert. Théorie générale des surfaces hyperelliptiques. Journ. de Mathématiques (2), **9** (1893), p. 29—170.

[6]) F. Klein. Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen. Erste Abhandlung. Math. Ann. **27**, p. 431—464.

[7]) F. Klein. Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen. Zweite Abhandlnng. Math. Ann. **32**, p. 351—360. H. Burkhardt. Beiträge zur Theorie der hyperelliptischen Sigmafunctionen. Tamże, 381—442.

[8]) H. Burkhardt. Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Functionen 1-er Ordnung. Nach Vorlesungen von F. Klein. Math. Ann. **35**, p. 198—296.

[9]) O. Bolza. Darstellung der rationalen ganzen Invarianten der Binärformen sechsten Grades durch die Nullwerthe der zugehörigen ϑ-Functionen. Math. Ann. **30**, p. 478—495.

[10]) H. Burkhardt. Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen. Erster Theil. Math. Ann. **36**, p. 371—434. Zweiter Theil., tamże **38**, p. 161—224; Dritter Theil., tamże **41**, p. 313—343.

[11]) G. Pick. Zur Theorie der Abel'schen Functionen. Math. Ann. **29** (1887), p. 259—271.

[12]) H. S. White. Abel'sche Integrale auf singularitätenfreien, einfach überdeckten, vollständigen Schnittcurven eines beliebig ausgedehnten Raumes,

Halle. 1891, p. 43—128. Ueber zwei covariante Formen aus der Theorie der Abel'schen Integrale auf vollständigen singularitätenfreien Schnittcurven zweier Flächen. Math. Ann. **36**, p. 597—601.

[13]) Osgood. Zur Theorie der zum algebraischen Gebilde $y^m = R(x)$ gehörigen Abel'schen Functionen. Getynga. 1890. 8°, stron 61.

[14]) F. Klein. Zur Theorie der Abel'schen Functionen. Math. Ann. **36**. p. 1—83.

[15]) E. Ritter. Die automorphen Formen von beliebigen Geschlechte. Gött Nachr. 1893, p. 121—137. Die multiplicativen Formen auf algebraischen Gebilde beliebigen Geschlechtes, mit Anwendung auf die Theorie der automorphen Functionen. Math. Ann. **44** (1894), 261—374.

[16]) F. Klein. Zur Theorie der Abel'schen Function l. c. [14]).

[17]) E. Pascal. Sullo sviluppo delle funzioni σ abeliane dispari di genere 3. Annali di matem. (2), **17**, p. 81—111. Sulle formole di ricorrenza per lo sviluppo delle σ abeliane dispari a tre argomenti. Tamże, p. 197—224. Sulla teoria delle funzioni σ iperellitiche pari e dispari di genere 3. Tamże, p. 257—305. Sulla teoria delle funzioni σ abeliane pari a tre argomenti. Tamże **18**, p. 1—58. Sopra le funzioni iperellitiche di 1-a specie (1-er Stufe) per $p = 2$. Tamże **18**, p. 131—164. L'equazione razionale della superficie di Kummer. Tamże **18**, p. 227—263.

[18]) Frobenius. Ueber die Beziehungen zwischen den 28 Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung. Journ. f. reine u. angew. Mathematik **99** (1886), p. 275—314. Ueber die Jacobischen Covarianten der Systeme von Berührungskegelschnitten einer Curve vierter Ordnung; tamże **103** (1888), p. 139—183. Ueber die Jacobi'schen Functionen dreier Variabeln. Tamże **105** (1889), p. 35—100.

[19]) Schottky. Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen von drei Variablen. Lipsk, Teubner. 1290. Eine algebraische Untersuchung über Thetafunctionen von drei Argumenten. Journ. f. die reine u. ang. Mathematik **105** (1889), p. 233—249. Ueber die charakteristischen Gleichungen symmetrischer ebener Flächen und die zugehörigen Abel'schen Functionen. Tamże **106** (1890), p. 199—268. Zur Definition des Systems der vier geraden und ungeraden Thetafunctionen. Tamże **107** (1891), p. 117—134. Theorie der hyperelliptischen Functionen von vier Argumenten. Tamże **108** (1891), p. 147—178, 193—255.

[20]) Wirtinger. Ueber das Analogon der Kummer'schen Fläche für $p = 3$. Gött. Nachr., p. 474—480. Ueber eine Verallgemeinerung der Kummer'schen Fläche und ihrer Beziehungen zu den Thetafunctionen zweier Variabeln. Monatshefte für Math. **1**, p. 113—128.

[21]) Wirtinger. Untersuchungen über Abel'schen Functionen vom Geschlechte 3. Math. Ann. **40**, p. 265—312.

[22]) Z pomiędzy dzieł wydanych już po roku 1893, a mających związek z rozważanym przedmiotem, wymieniamy W. Wirtingera: „Untersuchungen über Thetafunctionen". Lipsk, Teubner. 1895; cytowany wyżej (str. 8) wielki referat Brilla i Nöthera o teoryi funkcyj algebraicznych; wreszcie najnowsze dzieło M. A. Bakera. „Abels theorem and the allied theories including the theory of the θ function, Cambridge. 1897.

ODCZYT XI *).

NAJNOWSZE BADANIA W GEOMETRYI NIEEUKLIDESOWEJ.

Odczyt dzisiejszy poświęcę uwagom nad postępem geometryi nieeuklidesowej w ciągu kilku lat ostatnich. Zanim zdam sprawę z najnowszego jej rozwoju, muszę w krótkich słowach przedstawić stan ogólny poglądów matematyków na ten przedmiot. Trzy są punkty widzenia, z jakich rozważano geometryę nieeuklidesową.

1) Najprzód mamy punkt widzenia geometryi elementarnej, którego przedstawicielami są: Łobaczewski i Bolayi. Obaj ci uczeni rozpoczynają od prostych konstrukcyj geometrycznych i postępują podobnie, jak Euklides, z tą tylko różnicą, że podstawiają inny pewnik zamiast pewnika o liniach równoległych. Budują oni w ten sposób system geometryi nieeuklidesowej, w której prosta ma długość nieskończoną, a „miara krzywizny" (stosujemy tu wyraz, jakiego oni nie używają) jest ujemna. Jest rzeczą oczywiście możliwą za pomocą podobnego postępowania zbudować geometryę z miarą krzywizny dodatnią, t. j. geometryę, pierwszy raz pomyślaną przez Riemanna; lecz koniecznem jest wtedy sformułowanie pewników w ten sposób, by długość prostej była skończona, a przeto istnienie linij równoległych niemożliwe.

2) Z punktu widzenia geometryi rzutowej rozpoczynamy od ustanowienia systemu geometryi rzutowej według pomysłu

*) Dnia 8 września 1893 r.

v. Staudta, wprowadzając spółrzędne rzutowe tak, że linie proste i płaszczyzny dane są przez równania liniowe. Teorya miary rzutowej, którą zawdzięczamy Cayley'owi, prowadzi wtedy wprost do trzech możliwych przypadków geometryi nieeuklidesowej: do geometryi hyperbolicznej, parabolicznej i eliptycznej, stosownie do tego, czy miara krzywizny jest ujemna, równa zeru lub dodatnia. Tu oczywiście jest rzeczą zasadniczą przyjęcie systemu v. Staudta, a nie Steinera, gdyż ten ostatni określa stosunek anharmoniczny przy pomocy odległości punktów, a nie przez konstrukcye czysto-rzutowe.

3) Wreszcie, mamy punkt widzenia Riemanna i Helmholtza. Riemann wychodzi z pojęcia elementu odległości ds, który przyjmuje jako wyrażalny w postaci:

$$ds = \sqrt{\sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k}\,,$$

Helmholtz, szukając uzasadnienia tego przyjęcia, rozważa ruch ciała stałego w przestrzeni i wyprowadza stąd konieczność nadania elementowi ds postaci powyższej. Z drugiej strony Riemann wprowadza pojęcie podstawowe miary krzywizny przestrzeni.

Pojęcie miary krzywizny w przypadku dwu zmiennych, t.j. dla powierzchni w przestrzeni trójwymiarowej, zawdzięczamy Gaussowi, ktory pokazał, że stanowi ono charakterystykę wewnętrzną powierzchni, zupełnie niezależną od przestrzeni, w której powierzchnia się znajduje. Tego to punktu nie zrozumieli niektórzy matematycy, piszący o geometryi nieeuklidesowej. Gdy Riemann przypisuje przestrzeni trójwymiarowej miarę krzywizny k, to chce przez to powiedzieć tylko tyle, że istnieje niezmiennik „formy" $\sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$, a nie myśli bynajmniej utrzymywać, że przestrzeń trójwymiarowa istnieje koniecznie jako przestrzeń krzywa w przestrzeni o czterech wymiarach. Podobnież i ilustracya przestrzeni o mierze krzywizny dodatniej za pomocą pospolitego przykładu kuli prowadzić może do nieporozumień. Ponieważ na kuli linie geodezyjne (koła wielkie), wychodzące z jednego punktu, przecinają się wszystkie w innym punkcie określonym, przeciwległym (antipodalnym) — że tak powiemy — względem punktu pierwotnego, przeto mniemano, iż istnienie tego punktu przeciwległego jest wynikiem koniecznym przyjęcia krzywizny stałej dodatniej. Teorya rzutowa geometryi nieeuklidesowej wykazuje wszakże bezpośrednio, że istnienie punktu przeciwległego, jakkolwiek zgodne jest z naturą przestrzeni eliptycznej, nie jest jednakże koniecznem, gdyż dwie linie geodezyjne w takiej przestrzeni mogą tylko w jednym przecinać się punkcie [1].

Zwracam uwagę na te szczegóły, by pokazać, że płynie pewna korzyść z przyjęcia drugiego z powyżej scharakteryzowanych trzech punktów widzenia, jakkolwiek trzeci nie mniejszego jest znaczenia. Istotnie nasze wyobrażenie przestrzeni urabia się przy pomocy zmysłów wzroku i ruchu; „własności optyczne“ przestrzeni stanowią jedno ich źródło, „własności mechaniczne“ — drugie; pierwsze z nich odpowiadają, ogólnie biorąc, własnościom rzutowym, drugie zaś własnościom, badanym przez Helmholtza.

Jak już wyżej wspomniano, z punktu widzenia geometryi rzutowej należy przyjąć za podstawę system v. Staudta. Możnaby postawić tu zarzut, że v. Staudt przyjmuje w swej teoryi pewnik o liniach równoległych (zakładając odpowiedniość jedno-jednoznaczną pomiędzy pękiem linij a szeregiem punktów). Lecz pokazałem w dzienniku „Math. Ann.“ [2], że tę pozorną trudność można ominąć, rozważając konstrukcye v. Staudta tylko w ograniczonej części przestrzeni.

Podam teraz krótki zarys najnowszych badań, jakie Lie i ja poczyniliśmy w geometryi nieeuklidesowej. Lie ogłosił krótką o tym przedmiocie notę w „Sprawozdaniach“ Akademii Saskiej (1886) [3], obszerniejszy zaś wykład swych poglądów podał w tychże „Sprawozdaniach“ za r. 1890 i 1891 [4]. Zawierają te prace zastosowanie teoryi Liego grup ciągłych do zagadnienia, postawionego przez Helmholtza. Streszczam wam rezultaty badań Liego z zadowoleniem tem większem, że dotąd nie mogłem należycie z nich korzystać ani w rozprawie mojej o podstawach w geometryi rzutowej, ogłoszonej w tomie 37 dziennika „Math. Annalen“ (1890) [5], ani w (litografowanych) wykładach moich o Geometryi nieeuklidesowej, mianych w Getyndze w r. 1889—90; gdyż druga z dwóch rozpraw Liego ukazała się nieco za późno, abym mógł ją wyzyskać; pierwsza zaś wyszła mi była jakoś z pamięci.

Muszę najprzód przedstawić problemat Helmholtza w terminologii nowoczesnej. Ruchów w przestrzeni trójwymiarowej jest ∞^6 i tworzą one grupę G_6. Wiadomo, że grupa ta posiada niezmiennik dla każdych dwu punktów p, p'; jest nim odległość $\Omega(p, p')$ tych punktów. Lecz postać tego niezmiennika (i w ogóle postać grupy), wyrażona w spółrzędnych $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ tych punktów nie jest znana a priori. Powstaje tedy pytanie, czy grupa ruchów jest scharakteryzowana zupełnie przez te dwie własności, tak, by jedynie możliwemi systemami geometryi był system euklidesowy i dwa systemy nieeuklidesowe.

Celem wyjaśnienia tego pytania, Helmholtz bierze przypadek analogiczny w odniesieniu do dwu wymiarów. Tu mamy grupę ∞^3 ruchów; odległość jest także niezmiennikiem; mimo to, można zbudować grupę, nie należącą do żadnego z powyższych systemów, a to w sposób następujący:

Niechaj z będzie zmienną zespoloną; podstawienie, charakteryzujące grupę geometryi euklidesowej, można napisać w postaci dobrze znanej

$$z' = e^{i\varphi} z + m + in = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\, z + m + in\,.$$

Zmieniając to wyrażenie przez wprowadzenie liczby zespolonej do wykładnika, mamy:

$$z' = e^{(a+i)\varphi} z + m + in = e^{a\varphi}(\cos\varphi + i\sin\varphi)\, z + m + in$$

i otrzymujemy grupę przekształceń, skutkiem których punkt (w przypadku prostym $m = 0$, $n = 0$) nie porusza się około początku spółrzędnych po kole, lecz po spiralnej logarytmowej; mimo to jest to grupa G_3 o trzech parametrach zmiennych m, n, φ, mająca niezmiennik dla każdych dwu punktów, podobnie jak grupa pierwotna. Helmholtz wyprowadza stąd nowy warunek jednobieżności (monodromii), który należy jeszcze dołączyć, by dojść do zupełnego określenia grupy.

Przejdźmy teraz do pracy Liego. Powiedzmy najprzód o wynikach. Lie stwierdza rezultaty Helmholtza z tym jedynym wyjątkiem, że w przestrzeni trójwymiarowej pewnik o jednobieżności nie jest konieczny; w tej bowiem przestrzeni pozostałe pewniki w zupełności charakteryzują rozważaną grupę.

Co się zaś tyczy dowodów, to Lie pokazał, że rozważania Helmholtza wymagają uzupełnienia. Rzecz się ma tak. Ustaliwszy jeden punkt w przestrzeni, sprowadzamy naszą grupę G_6 do grupy G_3. Otóż Helmholtz pyta, w jaki sposób ta grupa G_3 przekształca różniczki linij, wychodzących z punktu stałego. W tym celu pisze wzory:

$$dx'_1 = a_{11}\, dx_1 + a_{12}\, dx_2 + a_{13}\, dx_3\,,$$

$$dx'_2 = a_{22}\, dx_1 + a_{22}\, dx_2 + a_{23}\, dx_3\,,$$

$$dx'_3 = a_{31}\, dx_1 + a_{32}\, dx_2 + a_{33}\, dx_3\,,$$

i uważa spółczynniki $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$, jako zależne od trzech parametrów zmiennych. Lie czyni uwagę, że rozważanie to nie jest dostatecznie ogólnem. Równania liniowe dają tylko pierwsze wyrazy szeregów potęgowych; należy przeto uwzględnić możliwość, że trzy parametry grupy mogą nie zawierać się w wyrazach liniowych. Dla rozpatrzenia wszystkich przypadków możliwych, należy stosować rozwinięcia ogólne teoryi grup Liego. I to właśnie uczynił Lie.

Lecz niechaj mi będzie wolno dotknąć kilkoma słowami i moich własnych badań w geometryi nieeuklidesowej, które znaleść można w rozprawie, ogłoszonej w „Mathem. Annalen“ t. 37. Wynika z nich, że nasze wyobrażenia o geometryi nieeuklidesowej są jeszcze niezupełne. Istotnie, we wszystkich badaniach Riemanna, Helmholtza i Liego rozważano jedynie kawałek przestrzeni, otaczającej początek, i ustanawiano istnienie praw analitycznych w sąsiedztwie tego punktu. Lecz przestrzeń może oczywiście rozciągać się dalej, i dlatego powstaje pytanie, jaki rodzaj spójności otrzymujemy dla tego dalszego ciągu. Znalazłem, że istnieją różne możliwości i że każda z trzech geometryj daje szereg poddziałów.

Aby lepiej wyjaśnić, co rozumieć należy przez te odmiany spójności, porównajmy geometryę na kuli z geometryą pęku prostych, utworzonego ze średnic kuli. Uważając każdą średnicę za prostą nieskończoną lub za promień pęku, przechodzący przez środek (nie zaś półpromień, wychodzący ze środka), będziemy mieli dla każdej prostej pęku dwa punkty na kuli, t. j. dwa punkty przecięcia prostej z powierzchnią kuli. Mamy tu zatem jedno-dwuodpowiedniość pomiędzy prostemi pęku a punktami powierzchni kuli. Weźmy teraz małe pole na kuli; jest jasnem, że odległość dwu punktów pola równa się kątowi pomiędzy odpowiedniemi prostemi pęku. Tym sposobem geometrya punktów na kuli i geometrya prostych są identyczne; o ile ograniczamy się do niewielkich obszarów, obie odpowiadają przyjęciu stałej dodatniej miary krzywizny. Różnica ujawnia się dopiero od chwili, gdy z jednej strony rozważamy całą kulę zamkniętą, z drugiej zaś całkowity pęk prostych. Weźmy naprzykład dwie linie geodezyjne na kuli, t. j. dwa koła wielkie, przecinające się oczywiście w d w u punktach (przeciwległych); odpowiadające im pęki prostych mają tylko j e d n ę linię wspólną.

Fig. 20.

Drugi przykład tego rozróżnienia otrzymujemy, porównywając geometryę euklidesową płaską z geometryą na zamkniętej powierzchni walcowej. Powierzchnię tę można rozwinąć zwykłym sposobem na wstęgę płaską, ograniczoną dwiema prostemi równoległemi, jak to widać na Fig. 20, gdzie punkty przeciwległe brzegów schodzą się na powierzchni walcowej. Zachodzi tu wszakże różnica ta: na płaszczyźnie wszystkie linie geodezyjne są nieskończone, na walcu zaś istnieją linie geodezyjne długości skończonej; na płaszczyźnie dwie linie geodezyjne przecinają się zawsze w jednym punkcie, na walcu może istnieć nieskończona liczba punktów przecięcia.

Przykład ten uogólnił C l i f f o r d w wykładzie, mianym w Bradford (1873) na zgromadzeniu Towarzystwa brytańskiego postępu nauk. Według pomysłu Clifforda możemy określić powierzchnię zamkniętą, wycinając ze zwyczajnej płaszczyzny równoległobok i uważając boki przeciwległe za odpowiadające sobie punktami, jak to wskazano na Fig. 21. Nie należy tego rozumieć tak, że boki przeciwległe należy doprowadzić do zlania się, wyginając równoległobok (co oczywiście nie jest możliwem bez rozciągnięcia); lecz jedyną umową logiczną ma być to, że punkty przeciwległe mają być uważane za identyczne. Mamy wtedy rozmaitość zamkniętą o spójności takiej jak krąg pierścieniowy i każdy spostrzeże wielką różnicę pomiędzy tą rozmaitością a płaszczyzną euklidesową, mianowicie różnicę w tem, co dotyczy długości linij geodezyjnych, ich przecięć i t. p.

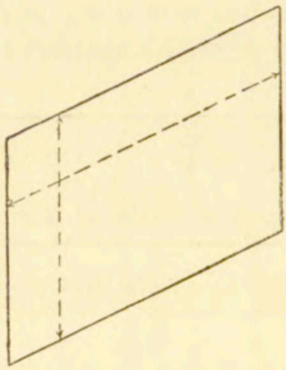


Fig. 21.

Jest interesującem zbadanie grupy G_3 ruchów euklidesowych na tej powierzchni. Nie można wcale przemieszczać powierzchni tej samej po sobie ∞^3 sposobami, gdy ją uważamy jako całość w sobie; natomiast nie ma żadnej trudności w przemieszczaniu małego pola ∞^3 sposobami na powierzchni zamkniętej.

Znaleźliśmy w ten sposób obok płaszczyzny euklidesowej jeszcze dwie formy powierzchni: wstęgę pomiędzy dwiema równoległemi i równoległobok Clifforda. Podobnież, obok zwykłej przestrzeni euklidesowej mamy trzy inne typy z elementem łuku euklidesowym; jeden z nich wynika z rozważania równoległościanu.

Wprowadzę teraz pierwiastek aksyomatyczny. Nie ma sposobu przekonania się, czy cała przestrzeń może poruszać się w sobie ∞^6 sposobami; lecz wiemy, że małe części przestrzeni mogą poruszać się w przestrzeni ∞^6 sposobami. Wynika stąd możliwość, że nasza przestrzeń, jeżeli za miarę jej krzywizny przyjąć zero, odpowiada jednemu z rozpatrzonych czterech przypadków.

Stosując te rozważania do przestrzeni o krzywiznie stałej dodatniej, dochodzimy do dwu wzmiankowanych wyżej przypadków geometryi eliptycznej i sferycznej. Jeżeli zaś przyjmiemy, że miara krzywizny jest stałą ujemną, to otrzymamy nieskończenie wiele przypadków, odpowiadających ściśle figurom, rozważanym przez Poincarégo i przezemnie w teoryi funkcyj automorficznych [6]). Tego przedmiotu rozwijać tu dalej nie będę.

Mogę dodać, że Killing sprawdził całą tę teoryę [7]). Jest widocznem, że z tego punktu widzenia niektóre twierdzenia, wypowiedziane o przestrzeni przez poprzednich autorów, przestają być prawdziwemi (tak np., że nieskończoność przestrzeni jest wynikiem równej zeru krzywizny). Jesteśmy tedy zmuszeni przyjąć, iż nasze dowodzenia geometryczne nie mają cechy prawdy bezwzględnej, lecz że są prawdziwemi jedynie w dzisiejszym stanie wiedzy naszej. Dowodzenia te są zawsze zawarte w obrębie pojęć przestrzennych, z któremi jesteśmy obyci, i nie możemy wiedzieć, czy pojęcia rozszerzone nie doprowadzą nas z czasem do nowych możliwości, które trzeba będzie uwzględnić. Z tego punktu widzenia geometrya uczy nas pewnej skromności, która zawsze jest na miejscu w naukach fizycznych.

---

[1]) Tę teoryę rozwinął Newcomb w rozprawie: „Elementary theorems relating to the geometry of a space of three dimensions and of uniform curvature in the fourth dimension". Journal f. die reine u. angew. Math. **83**, p. 293 - 300.

[2]) F. Klein. Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. Math. Annalen **6** (1875), p. 112—145.

[3]) S. Lie. Bemerkungen zu v. Helmholtz's Arbeit über die Thatsachen die der Geometrie zu Grunde liegen. Leipziger. Ber. 1886, p. 337—342.

[4]) S. Lie. Ueber die Grundlagen der Geometrie I. II Leipziger Ber. **42**, p. 284—321, 355—418. Theorie der Transformationsgruppen t. III. Lipsk, Teubner. 1893, str. 393—543. Porówn. F. Klein. Gutachten, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie anlässlich der ersten Vertheilung des Lobatschewsky-Preises. Math. Ann. **50**, p. 583—602.

[5]) F. Klein. Zur Nicht-Euklidischen Geometrie. Math. Ann. **37**, p. 544—572.

[6]) Porówn. R. Fricke und F. Klein. Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen. Lipsk, Teubner. 1897. Einleitung.

[7]) Killing. Ueber die Clifford-Klein'schen Raumformen. Math. An. **39** (1891), p. 257—278. Porówn. tegoż autora, Einführung in die Grundlagen der Geometrie Poderborn. I. 1893, II. 1898, t. I, str. 271—349.

ODCZYT XII *).

STUDYA MATEMATYCZNE W GETYNDZE.

W tym ostatnim odczycie pragnąłbym wypowiedzieć kilka uwag ogólnych o organizacyi studyów matematycznych w Getyndze, ze szczególnem uwzględnieniem tego, co może interesować słuchaczów amerykańskich. Jednocześnie chcę wam dać sposobność postawienia mi pytań, które mogą się wam nasunąć w szerszej sprawie studyów matematycznych w uniwersytetach niemieckich w ogólności. Będę szczęśliw, jeżeli wedle możności potrafię wam na te pytania odpowiedzieć.

Nie zupełnie to ściśle mówić o *organizacyi* nauczania matematyki w Getyndze. Wiecie o tem, że w uniwersytetach niemieckich panuje *wolność uczenia się i nauczania*, tak że organizacya, o której mowa, polega raczej na dobrowolnej zgodzie pomiędzy wykładającymi matematykę.

W Getyndze odróżniamy kurs ogólny i kurs wyższy matematyki. Kurs ogólny jest przeznaczony dla znakomitej większości studentów, mających zamiar poświęcić się nauczaniu matematyki i fizyki w gimnazyach, gimnazyach realnych, szkołach realnych, gdy tymczasem kurs wyższy przeznacza się specyalnie dla osób, przygotowujących się do badań samodzielnych.

*) Dnia 9 września 1893 r.

Co się tyczy kategoryi pierwszej, to w Niemczech (przypuszczam, że w Ameryce stosunki są odmienne) nauka teoretyczna udzielana jej idzie — zdaniem mojem — nieco za daleko. Nie ulega zaprzeczeniu, iż to, co uniwersytet powinien przedewszystkiem dawać studentowi, ma być ideałem naukowym. Z tego powodu ci właśnie studenci, którzy mają nauczać w przyszłości, powinni w swych studyach matematycznych posuwać się po za gałęzie elementarne. Lecz z drugiej strony ideał, jaki im stawiamy, nie powinien być tak dalekim i tak odległym od ich potrzeb bezpośrednich, by ocena jego doniosłości w ich w przyszłem życiu praktycznem była trudną lub wprost niemożliwą. Innemi słowy, ideał ten powinien być takim, aby mógł natchnąć przyszłego nauczyciela zapałem do jego zawodu, a nie kazał mu patrzeć z pogardą na przyszłą pracę, jako na niegodne ciężkie zajęcie.

Z tego powodu nastajemy na to z naciskiem, aby studenci tej kategoryi, prócz wykładów czystej matematyki, przechodzili zupełny kurs fizyki, t. j. przedmiotu, stanowiącego część integralną wykładów szkolnych. Poleca się i słuchanie astronomii, jako przedmiotu, pokazującego ważne zastosowania matematyki; sądzę też, że nauki techniczne, jak np. mechanika stosowana, nauka o wytrzymałości materyałów i t. p., są cennemi przedmiotami pomocniczemi, wykazującemi doniosłość nauki matematycznej. Rysunek geometryczny i geometrya wykreślna stanowią też część składową tego kursu. Osobne ćwiczenia w rozwiązywaniu zagadnień i w odczytach powinny iść obok słuchania kursów, gdyż one to wprowadzają studentów w zetknięcie osobiste z profesorami.

Lecz mówić mam głównie o kursach wyższych, jako przedstawiających więcej interesu dla studentów amerykańskich. Tu, oczywiście, konieczną jest specyalizacya. Każdy profesor i docent przeznacza pewne lekcye specyalnie dla bardziej posuniętych studentów, a zwłaszcza dla przygotowujących się do egzaminu doktorskiego. Ze względu na wielką rozległość matematyki dzisiejszej, nie może być mowy o objęciu całej jej dziedziny. Wykłady też te nie powtarzają się regularnie co roku, a przedmiot ich zależy od specyalnej gałęzi badań, która w danym czasie może zajmować profesora. Prócz wykładów mamy jeszcze seminarya wyższe których głównem zadaniem jest wprowadzenie studenta w dziedzinę badań samodzielnych i danie mu sposobności do pracy indywidualnej.

Co się tyczy moich własnych wykładów wyższych, to trzymałem się w nich pewnego planu w wyborze przedmiotów na różne lata; celem moim głównym jest pozyskanie z biegiem czasu zupełnego przeglądu całej dziedziny matematyki nowoczesnej, ze szczególnem uwzględnieniem stanowiska intuicyjnego (w wyższem znaczeniu tego wyrazu) lub geometrycznego. Ogólne dążenie moje odnajdziecie, jak sądzę, i w tych odczytach, w których usiłowałem w pewnej mierze przedstawić program ogólny mojej pracy osobistej. W Getyndze, dla wykonania tego planu i uświadomienia go słuchaczom, przyjąłem przed kilkoma laty taką metodę, że moje wyższe wykłady starannie spisuję lub, jak w ostatnim czasie, litografuję, aby je łatwiej uczynić przystępnemi. Wykłady dawniejsze złożone są do użytku słuchaczy w czytelni matematycznej uniwersytetu; kursy zaś litografowane może nabyć każdy. Cieszę się bardzo z tego, że są one znane i w Ameryce.

Innym ważnym punktem, o którym pragnę was powiadomić, jest to, że studentów uważałem zawsze nie tylko za słuchaczów lub wychowańców, lecz za współpracowników. Życzę sobie, aby brali udział czynny w moich własnych badaniach; jestem zwłaszcza szczęśliwy, gdy przynoszą ze sobą wiedzę specyalną i nowe pomysły, oryginalne lub pochodzące z innego źródła, od wykładów innych matematyków. Tacy to słuchacze najwięcej odnoszą korzyści z pobytu w Getyndze.

Z przyjemnością widziałem pomiędzy mymi słuchaczami amerykanów i z zadowoleniem składam tu świadectwo ich wielkiego zapału i energii. Nie waham się nawet powiedzieć, że od kilku lat wykłady moje podtrzymywała młodzież z waszego kraju; lecz winienem zarazem wyłuszczyć wam pewne trudności, związane z przybywaniem studentów amerykańskich do Getyngi. Być może, że zdanie moje, wypowiedziane otwarcie, przyczyni się chociaż w części do usunięcia tych trudności. Oto na czem rzecz polega. Zdarza się często w Getyndze i prawdopodobnie w innych uniwersytetach niemieckich, że studenci amerykańscy pragną uczestniczyć w wykładach wyższych, nie będąc do nich należycie przygotowani. Student, posiadający tylko znajomość elementarną rachunku różniczkowego i całkowego, słabo z językiem niemieckim obyty, niedobrze czyni, zapisując się na moje wykłady. Z takiem przygotowaniem (albo raczej z brakiem przygotowania), może wprawdzie uczęszczać na kursy bardziej elementarne naszego uniwersytetu; lecz cel jego przyjazdu jest w ogóle inny. Czy nie lepiej byłoby w takim razie, aby przebył rok lub dwa w jednym z większych uniwersytetów w Ameryce? Z jednej strony, przejście do studyów specyalnych będzie wtedy dla niego łatwiejsze; z drugiej zaś strony, podczas pobytu na uniwersytecie amerykańskim będzie mógł dojść do zdania sobie sprawy ze swego uzdolnienia matematycznego. Uwolni go to od przykrego rozczarowania, jakiego może doznać z pobytu swego w Niemczech.

Mam nadzieję, że uwagi te nie będą źle zrozumiane. Obecność moja wśród was stwierdza wam dostatecznie, ile znaczenia przywiązuję do przybywania studentów amerykańskich do Getyngi. Mówię tylko w interesie osób, pragnących tam pojechać, i dla tego jestem rad, że mogę najjawniej wypowiedzieć wam zapatrywanie moje w tym względzie.

Inne trudności, związane z mojemi wyższemi wykładami, polegają na ich charakterze encyklopedycznym, zgodnym z ogólną tendencyą mego programu. To właśnie nie zawsze jest najbardziej potrzebnem studentowi amerykańskiemu, którego praca jest skierowana naturalnie ku osiągnięciu stopnia doktorskiego. Poza tem, co może znaleść w moich kursach, powinien on jeszcze oddać się jakiemu przedmiotowi specyalnemu, a do tego celu skuteczniej trafi, gdy słuchać będzie wykładów innych nauczycieli w Getyndze lub gdzieindziej. Chcę wyraźnie tu zaznaczyć, że nie uważam za pożądane, aby wszyscy studenci ograniczali się w swych studyach matematycznych jedynie na kursach u mnie lub tylko w Getyndze. Przeciwnie — zdaje mi się — jest pożądanem, aby większość studentów słuchała kursów innych profesorów w pewnych gałęziach specyalnych. Moje wykłady mogą wtedy stanowić jakoby rodzaj planu dalszego, na które rzucone są te badania specyalne. Oto droga, na której, jak mniemam, wykłady moje przynieść mogą największy pożytek.

Kończąc, pragnę wam podziękować za waszą życzliwą uwagę i wyrazić zadowolenie, jakiego doznałem, spotkawszy tu na zebraniu w Evanston, jak i poprzednio w Chicago, wielkiej stolicy tego Stanu, tak poważną liczbę żarliwych wielbicieli mojej ulubionej nauki.

DODATEK.

ROZWÓJ MATEMATYKI W UNIWERSYTETACH NIEMIECKICH.

Wiek ośmnasty stworzył trwałą podstawę rozwoju matematyki we wszystkich kierunkach. Uniwersytety wszakże nie miały w owym czasie znaczenia przeważającego w tej pracy; pierwszorzędną w niej doniosłość miały a k a d e m i e. Pod względem narodowości nie ma tu granic ścisłych. Na początku tego okresu ukazuje się w Niemczech mąż tej powagi, co L e i b n i z; po tem wśród pokrewnej rasy szwajcarskiej występują na widownię dynastya B e r n o u l l i c h i niezrównany E u l e r. Działalność tych mężów, nawet w jej przejawach zewnętrznych, nie była przywiązana do ciasnych granic geograficznych; aby ją objąć, należy do Niemiec i Szwajcaryi dołączyć Holandyę, a zwłaszcza Rosyę. Z drugiej strony, pod Fryderykiem Wielkim najznakomitsi matematycy francuscy, L a g r a n g e i d'A l e m b e r t, M a u p e r t u i s, obok E u l e r a i L a m b e r t a, byli sławą Akademii berlińskiej. Zupełną odmianę tych warunków sprawiła dopiero rewolucya francuska.

W dwu kierunkach ujawnił się wpływ tego wielkiego wypadku historycznego na rozwój wiedzy. Z jednej strony powstaje rozdział narodowości z wybitnym rozwojem ich charakterystycznych właściwości narodowych. Idee naukowe zachowują, oczywiście, swoją powszechność, a stosunki międzynarodowe pomiędzy uczonymi nie tracą swego znaczenia dla postępu wiedzy, lecz uprawa i rozwój myśli naukowej odbywa się już na podstawach narodowych. Z drugiej strony, wpływ rewolucyi francuskiej uwidocznia się w metodach nauczania. Wypadkiem znamiennym jest tu utworzenie Szkoły politechnicznej w Paryżu w r. 1794. Od tej to chwili pozyskują uznanie wielkie zasady: że badanie naukowe i działalność nauczycielska dają się wprost ze sobą łączyć; że same wykłady nie są już wystarczającemi bez bezpośredniego osobistego stosunku nauczycieli i uczniów; że przedewszystkiem rzeczą pierwszorzędnego znaczenia jest sprawa pobudzania osobistej działalności studentów. Przykład Paryża był jeszcze skuteczniejszym przez to, iż stało się zwyczajem ogłaszanie w formie systematycznej kursów wykładanych w tej Szkole; a tym sposobem powstał cały szereg pięknych dzieł szkolnych, które dziś jeszcze są podstawą nauczania matematyki w Niemczech. Idea wszakże zasadnicza założycieli Szkoły politechnicznej, a mianowicie połączenie nauczania technicznego z nauczaniem wyższem matematycznem, nie potrafiła zapuścić korzeni w uniwersytetach niemieckich. Prawda, że pierwotnie było to wielce korzystnem dla nieskrępowanego rozwoju badania teoretycznego. Profesorowie nasi, mając przed sobą niewielką liczbę studentów, którzy, jako przyszli nauczyciele i badacze, okazywali oczywiście najwięcej zainteresowania do przedmiotów czystej teoryi, mogli pójść za popędem własnych upodobań ze swobodą większa, niż to było możliwem gdzieindziej.

Lecz powróćmy do naszego zarysu historycznego. Przedewszystkiem scharakteryzujemy stanowisko G a u s s a w nauce owoczesnej. G a u s s stał na czele nowego rozwoju: po pierwsze, co do czasu, na który przypadła jego działalność, gdyż pierwsze jego publikacye sięgają roku 1799 i ciągną się przez całą pierwszą połowę dziewiętnastego stulecia; następnie przez bogactwo nowych wielce płodnych pomysłów i odkryć we wszystkich prawie gałęziach matematyki czystej i stosowanej; wreszcie przez swoje metody, gdyż on pierwszy przywrócił tę ś c i s ł o ś ć dowodów, którą podziwiamy u starożytnych, a którą usunęło na plan dalszy wyłączne prawie dążenie epoki poprzedzającej do nowych rozwinięć. Mimo to, postawiłbym G a u s s a w rzędzie wielkich badaczy wieku ośmnastego na równi z E u l e r e m, L a g r a n g e m i t. p. Należy on do nich przez uniwersalność swych prac, z których nie ma jeszcze tej specyalizacyi, stanowiącej cechę charakterystyczną naszych czasów. Należy on do nich przez swój interes naukowy, natury wyłącznie akademickiej, oraz przez brak w jego działalności nauczycielskiej opisanego wyżej charakteru nowoczesnego. Obraz rozwoju matematyki w tej epoce stanowi niejako łańcuch wysokich gór, zakończonych potężnym szczytem. Owe góry — to uczeni XVIII stulecia; szczytem ich — Gauss. Po za niemi ciągnie się kraina rozległa i bogata, mniej wzniesiona, lecz pełna nowych elementów życia. Bardziej związani z Gaussem byli w okresie następnym astronomowie i geodeci, pozostający pod przeważającym wpływem Bessela. Tymczasem w matematyce teoretycznej na początku tego stulecia rozpoczyna się rozwój niezależny w uniwersytetach naszych; a druga ćwiartka tego stulecia stanowi początek epoki, którą cechują wsławione imiona Jacobi'ego i Dirichleta.

Jacobi rozpoczął działalność swą od Berlina, do którego powrócił w ostatnich latach swego życia (umarł w r. 1851); okres kulminacyjny jego działalności przypada wszakże na czas od 1826 do 1843, kiedy wraz z Besselem i F. Neumannem działał w Królewcu. Tu ogłosił on w r. 1829 swoje „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum", w których podał w formie analitycznej wykład systematyczny odkryć swoich i Abela w dziedzinie funkcyj eliptycznych. Później, po dość długim pobycie w Paryżu, powróciwszy do Królewca, rozwinął tu znakomitą działalność, jako nauczyciel, któremu nikt dotąd nie dorównał tak co do potęgi pobudzania swych uczniów, jak i co do rezultatów bezpośrednich, osiągniętych na polu matematyki czystej. Wyobrażenie o jego pracy mogą nam dać „Wykłady dynamiki" („Vorlesungen über Dynamik"), wydane przez Clebscha w r. 1866 i zupełna lista jego wykładów w Królewcu, ogłoszona przez Kroneckera w tomie 7-ym „Dzieł zupełnych" Jacobi'ego. Nowym faktem jest to, że Jacobi czytał wyłącznie o tych przedmiotach, nad któremi sam pracował i że jedynym jego celem było wprowadzenie słuchaczy w koło własnych pomysłów. W tym to właśnie celu on pierwszy stworzył seminaryum matematyczne. A zapał jego był tak wielki, że nieraz na wykładach swoich podawał najważniejsze rezultaty swych badań, nie znajdując czasu na ogłoszenie ich drukiem.

D i r i c h l e t wykładał najprzód we Wrocławiu, a potem w ciągu długiego okresu (1831—1855) w Berlinie i wreszcie cztery lata w Getyndze. Idąc śladami G a u s s a, lecz pozostając zarazem w ścisłym związku ze współczesnymi uczonymi francuskimi, obrał on fizykę matematyczną i teoryę liczb za punkty środkowe swej działalności naukowej. Powiedzmy, że mniej interesowały go rozwinięcia, obejmujące szerokie dziedziny, niż prostota pojęć i kwestye zasad, i na te też rozważania kładł nacisk w swoich wykładach. Wykłady te charakteryzuje doskonała jasność i pewna subtelna objektywność; były one zwłaszcza przystępne dla początkujących i zarazem w wysokim stopniu pobudzające dla posuniętych słuchaczy lub czytelników. Dla przykładu dość tu wspomnieć o jego wykładach z teoryi liczb, wydanych przez D e d e k i n d a i stanowiących dotąd najlepsze dzieło wykładowe o tym przedmiocie.

G a u s s, J a c o b i, D i r i c h l e t — oto imiona, które nadały kierunek całemu późniejszemu rozwojowi.

Pójdziemy dalej w opowiadaniu naszem drogą odmienną, a mianowicie podług uniwersytetów, najbardziej odznaczających się uprawą nauk matematycznych. Odtąd bowiem, obok specyalnych rezultatów pracy indywidualnej, coraz ważniejszą rolę odgrywa zasada współdziałania wraz z jej zależnością od warunków miejscowych. Przyjmując za granicę wyższą naszego opowiadania rok 1870, wymienimy tu uniwersytety k r ó l e w i e c k i, b e r l i ń s k i, g e t y n g e ń s k i i h e i d e l b e r s k i.

O działalności J a c o b i'ego w Królewcu mówiliśmy już wyżej. Można tu dodać, że po wyjeździe jego uniwersytet pozostaje jeszcze środowiskiem nauczania matematyki: R i c h e l o t i H e s s e umieją utrzymać wysoką tradycyę J a c o b i'ego: pierwszy w dziedzinie analitycznej, drugi w geometrycznej. Równocześnie wykłady fizyki matematycznej Fr. N e u m a n n a poczynają przyciągać coraz więcej słuchaczy. Wspaniała procesya matematyków wychodzi z Królewca i nie ma, rzec można, prawie uniwersytetu w Niemczech, któremuby Królewiec nie dostarczył profesora.

O Berlinie mówiliśmy już nieco wyżej. Lata od 1845 do 1851, w ciągu których J a c o b i i D i r i c h l e t działali tam razem, były epoką kulminacyjną szkoły berlińskiej. Obok poprzednich najznakomitszą osobistością jest S t e i n e r (przebywający w tym uniwersytecie od 1835 do 1864), twórca geometryi syntetycznej w Niemczech. Był to umysł ze wszech miar oryginalny, profesor nadzwyczaj pobudzający, głównie dzięki jednostronności, z jaką rozwijał swe poglądy geometryczne. Wypadkiem niemałego znaczenia było tu założenie (w r. 1826) przez Crellego czasopisma „Journal für die reine und angewandte Mathematik“. W ciągu dziesiątków lat był to jedyny dziennik matematyczny niemiecki; na jego to stronicach ukazały się podstawowe rozprawy wszystkich prawie wybitnych przedstawicieli szybko rozwijającej się nauki niemieckiej. Pomiędzy przyczynkami obcemi w pierwszych tomach znajdują się epokowe badania Abela. Crelle sam prowadził ten dziennik przez lat trzydzieści; po nim nastąpił Borchardt (1856—1880); obecnie (1893) dziennik doszedł do tomu 110-go [1]). Musimy tu też wspomnieć o powstaniu (w roku 1844) berlińskiego Towarzystwa fizykalnego. Pomiędzy jego członkami wymieniamy Helmholtza, Kirchhoffa i Clausiusa, a lubo nie możemy uczonych tych zaliczyć do matematyków w ściślejszem znaczeniu tego wyrazu, to przecież dzieła ich wywarły wpływ wielki na rozwój nauki matematycznej w różnych kierunkach. W ciągu tego samego okresu Encke, jako dyrektor obserwatoryum astronomicznego w Berlinie (1825—1862), wywierał wpływ daleko sięgający, przez wypracowanie metod rachunku astronomicznego, według zasad przez Gaussa podanych.

Pozostawiamy na chwilę Berlin, do którego powrócimy jeszcze, gdy będzie mowa o obecnym rozwoju matematyki w tym uniwersytecie, a przechodzimy do szkoły getyngeńskiej.

Podstawę trwałą, na której opiera się znaczenie Getyngi, stanowi tradycya Gaussa. Znalazła ona ciąg dalszy ze strony fizykalnej wtedy, gdy Wilhelm Weber, wróciwszy z Lipska do Getyngi (1849), zaprowadził po raz pierwszy systematyczne ćwiczenia w metodach dokładnych pomiarów elektromagnetycznych, które obmyślił był wspólnie z Gaussem. W matematyce zaś szybko następują po sobie sławne imiona. Po śmierci Gaussa,

[1]) Obecnie (1899) pod redakcyą L. Fuchsa dziennik ten doszedł do tomu 120. S. D.

następcą jego został Dirichlet, który przeniósł tu swoją ożywioną działalność nauczycielską na krótki okres czasu (1855—1859). Obok niego wznosi się Riemann (1854—1866), po którym nieco później następuje Clebsch (1868—1872).

Riemann wiąże się zarówno z Gaussem jak i z Dirichletem: z drugiej strony przyswoił on sobie całkowicie pomysły Cauchy'ego, w stosowaniu zmiennych zespolonych. Stąd wypłynęła jego głęboka twórczość w teoryi funkcyj, która odtąd staje się źródłem płodnem i trwałem badań najbardziej pobudzających. Clebsch pozostaje, jeżeli tak wyrazić się można, w związku dopełniającym z Riemannem. Przybywszy z Królewca i zajęty początkowo fizyką matematyczną, znalazł on w czasie okresu swej pracy w Giessen (1863—1868) właściwy sobie kierunek badań, stosowany później z takiem powodzeniem w Getyndze. Oczytany w dziełach Jacobi'ego i obznajmiony z geometryą nowoczesną, wprowadził on do tej dziedziny rezultaty badań algebraicznych matematyków angielskich Cayley'a i Sylvestera, i na podwójnej, tak zbudowanej podstawie wytworzył nowe drogi, prowadzące do rozwiązania zagadnień z całej teoryi funkcyj, a w szczególności do rozwinięć Riemanna. Lecz to jedno nie wystarcza jeszcze do scharakteryzowania znaczenia Clebscha w dziejach rozwoju nauki naszej. Mąż żywej wyobraźni, wnikający łatwo w pomysły obce, wywierał on na studentów swych wpływ, sięgający daleko po za granice prostego wykładu. Obdarzony charakterem czynnym i przedsiębiorczym, stworzył on wraz z C. Neumannem w Lipsku nowe czasopismo peryodyczne, „Mathematische Annalen", które wychodząc odtąd bez przerwy, zamyka obecnie swój tom 41-y [1].

Przypomnijmy jeszcze lata pamiętne w Heidelbergu od 1855 prawie do 1870. Wtedy to Hesse miewał swoje piękne i sławne wykłady z geometryi analitycznej. Tu Kirchhoff nauczał fizyki matematycznej. Tu przedewszystkiem Helmholtz wypracowywał swoje wielkie badania z dziedziny fizyki matematy-

[1] Obecnie (1899) wyszło już tomów 51. *S. D.*

cznej, które znów posłużyły za podstawę pięknych prac Kirchhoffa.

Teraz wypada mi wspomnieć o drugiej szkole berlińskiej, rozpoczynającej się w połowie stulecia i trwającej do tej chwili. Kummer, Kronecker i Weierstrass stoją na jej czele; dwaj pierwsi są uczniami Dirichleta i zajmują się przeważnie teoryą liczb, ostatni zaś, opierający się przeważnie na Jacobim i Cauchym, jest równocześnie z Riemannem twórcą nowoczesnej teoryi funkcyj. Możemy tylko pobieżnie wspomnieć o wykładach Kummera, które swym jasnym układem i sposobem przedstawienia przynosiły wiele pożytku większości słuchaczy, jakkolwiek nie wyróżniały się wybitnie treścią oryginalną. Zupełnie inaczej rzecz się ma z Kroneckerem i Weierstrassem, których wykłady z biegiem czasu nabierały coraz więcej cech indywidualności naukowej. Obaj ci badacze odrzucają na plan dalszy metody intuicyjne; obaj unikają nadto długich wywodów formalnych naszej nauki, uprawiając za to tem ściślej krytykę podstawowych pojęć analizy. W tym kierunku Kronecker idzie nawet dalej niż Weierstrass, gdyż usiłuje usunąć zupełnie pojęcie liczby niewymiernej i sprowadzić wszystkie wywody jedynie do związków pomiędzy liczbami całkowitemi. Te dążenia wywarły wpływ rozległy i nadały wybitny charakter znacznej części dzisiejszych badań matematycznych.

Nakreśliliśmy szerokiemi rysami stan ogólny naszej nauki aż do roku 1870. Nie podobna pójść tą samą drogą w przedstawieniu rozwoju późniejszego. Rozwój ten nie jest ukończony; osoby, które w nim udział brały, są jeszcze w pełni swej twórczości. Możemy tylko podać kilka uwag bardziej ogólnych o dzisiejszym wyglądzie nauki matematycznej w Niemczech. Lecz zanim to uczynimy, musimy sprawozdanie poprzednie uzupełnić w dwu kierunkach.

Najprzód musimy wypowiedzieć z naciskiem, że nie wyczerpaliśmy przedmiotu naszego nawet w ciasnych zakreślonych mu granicach. Istotnie cechę charakterystyczną uniwersytetów niemieckich stanowi to, że życie ich nie jest zupełnie scentralizowanem: wszędzie gdzie pojawia się głowa szkoły, znajduje właściwą sferę działania. I tak, jako przykład z epoki dawniejszej, możemy wymienić bystrego analistę J. Fr. Pfaffa, który działał w Helmstädt i w Halli od 1788 do 1825 i w ciągu pewnego czasu miał Gaussa pomiędzy swymi uczniami. Pfaff był pierwszym przedstawicielem szkoły kombinatoryjnej, która przez czas pewien odgrywała wielką rolę w różnych uniwersytetach niemieckich, lecz ostatecznie musiała ustąpić, wobec nowych i licznych postępów wiedzy. Możemy wymienić jeszcze trzech wielkich geometrów: Möbiusa w Lipsku, Plückera w Bonn, v. Staudta w Erlangen. Möbius był równocześnie astronomem i kierownikiem obserwatoryum lipskiego od 1816 do 1868. Plücker poświęcił matematyce tylko pierwszą połowę swego okresu twórczego (1826—1846); później oddał się fizyce doświadczalnej (gdzie jego badania są dobrze znane), a potem pod koniec życia (1864—1868) powrócił znów do badań geometrycznych. Okoliczność przypadkowa, że każdy z tych trzech uczonych działał jako nauczyciel tylko w kole ciaśniejszem, sprawiła to, że rozwój geometryi nowoczesnej przesunął się w naszym zarysie na plan dalszy.

Po za kołami uniwersyteckiemi występuje nazwisko Grassmanna ze Szczecina, który w swojej „Ausdehnungslehre“ (1844 i 1862) utworzył system, obejmujący wyniki nowoczesnej spekulacyi geometrycznej, a na innem polu, nazwisko Hansena z Goty, sławnego przedstawiciela astronomii teoretycznej.

Musimy wspomnieć jeszcze krótko o rozwoju nauczania technicznego. Mniej więcej w połowie stulecia powstał zwyczaj powoływania wybitnych uczonych na katedry w szkołach politechnicznych. Na pierwszem miejscu postawić tu należy Zurych, który mimo granic politycznych, można uważać za należący do zakresu naszego opowiadania; znaczna liczba profesorów, którzy uczyli dawniej w szkole politechnicznej w Zurychu, stanowi dziś ozdobę uniwersytetów niemieckich. Ideał szkoły politechnicznej w Paryżu — połączenie nauczania matematycznego z technicznem — staje się obecnie coraz bardziej powszechnym. Wielki wpływ w tym kierunku wywarły w swoim czasie wykłady Redtenbachera z teoryi machin, które przyciągały do Carlsruhe coraz rosnące zastępy entuzyastycznych studentów. Opracowano naukowo geometryę wykreślną i cynematykę. Culmann w Zurychu, stworzywszy statykę graficzną, zastosował bardzo szczęśliwie zasady geometryi nowoczesnej do mechaniki. Wraz z tym postępem nauki, powstawały liczne szkoły politechniczne w Niemczech w r. 1870 i w latach następnych, a niektóre ze szkół dawniejszych zreformowano. W Monachium i w Dreznie zwłaszcza, za przykładem Zurychu, utworzono specyalne wydziały do kształcenia przyszłych nauczycieli i profesorów. Szkoły politechniczne pozyskały tym sposobem wielkie znaczenie dla sprawy nauczania i postępu wiedzy matematycznej. Lecz nie możemy tu już mówić więcej o interesujących pytaniach, będących w związku z tym przedmiotem.

Uczyniwszy przegląd całkowitego pola opisanego rozwoju, przychodzimy, bądź co bądź, do jasnego przekonania, że w Niemczech, jak i gdzieindziej, liczba ludzi interesujących się matematyką, szybko wzrosła i że skutkiem tego zasób produkcyi matematycznej przybrał olbrzymie rozmiary. Ohrtmann i Müller, stwarzając w Berlinie czasopismo poświęcone rocznym przeglądom bibliograficznym („Die Fortschritte de Mathematik“) uczynili przeto zadość pilnej i nieodzownej potrzebie. Dziś roczniki tego wydawnictwa doszły do tomu 21-go [1]).

Na zakończenie powiem jeszcze słów kilka o nowoczesnym rozwoju nauczania uniwersyteckiego. Główne usiłowania mają na celu zmniejszenie trudności studyów matematycznych przez udoskonalenie urządzeń seminaryjnych. Utworzono przy nich nietylko specyalne biblioteki, ale i sale do pracy dla studentów, pragnących bezpośrednio z biblioteki korzystać. Utworzono kolekcye modeli i kursy rysunku, aby zwalczyć wrogie usposobienie przeciwko zbytecznej abstrakcyjności nauczania uniwersyteckiego. Studenci znajdują wszędzie zachętę do studyów specyalnych, zachętę niezbędną dla postępu wiedzy. Z drugiej strony rośnie wciąż dążenie do pracy, opartej na wzajemnem oddziaływaniu na siebie różnych gałęzi specyalnych. Gdzie jednostka niewiele zdziałać może, koniecznem się staje odwołanie do współdziałania w jednym celu. Te

[1]) Obecnie (1899) mamy już tomów 27, a 28-y jest w przygotowaniu. Wydawnictwo pozostaje pod redakcyą główną E. Lampego. *S. D.*

to względy były w ostatnich czasach pobudką do utworzenia Niemieckiego stowarzyszenia matematycznego (Deutsche Mathematiker—Vereinigung). Pierwsze sprawozdanie roczne tego stowarzyszenia, obejmujące między innemi obszerny referat o rozwoju teoryi niezmienników [1]) i równocześnie ogłoszony katalog rozumowany modeli i narzędzi [2]) wskazują kierunek, w jakim postępować należy w przyszłości. Przy tych środkach publikacyi, jakiemi obecnie rozporządzamy, przy coraz rosnącej liczbie nowych rozpraw, stało się prawie niemożliwem śledzenie postępu we wszystkich działach matematyki. Zadaniem stowarzyszenia jest właśnie zbieranie, systematyzowanie, podtrzymywanie stosunków tak, aby pracy i postępu nie powstrzymywały trudności materyalne. Postęp zaś — w matematyce może bardziej, niż w każdej innej nauce — pozostanie zawsze prawem i nagrodą jednostki.

Getynga, w styczniu 1893 r.

[1]) Dotąd (1899) wyszło już tomów 6, a 7-y jest w druku. *S. D.*

[2]) Jest to cytowany wyżej (str. 38) katalog wydany przez W. Dycka *S. D.*

Sprostowania. Str. 9 wiersz10 tekstu od dołu zamiast nascenti powinno być nascendi; str. 31 w przypisku [13]) zam. Uebor w. b. Ueber; w przypisku [14]) po Normaleurve dodać: der φ; str. 48 w przypisku [7]) mathómatiques — mathématiques; str. 57 w. 10 od góry zam. zarażoną — skażoną; str. 58 w. 11 od góry wyraz by wykreślić; str. 82 w. 11 od góry analogicznem badaniem — analogicznemi badaniami; str. 85 w przypisku [22]) zam. M. A. Bakera powinno być H. J. Bakera; str. 94 w przypisku [7]) Poderborn — Paderborn.

T. N. W.

Klein * ODCZYTY O MATEMATYCE