Sur les fonctions satisfaisant à la condition de Lipschitz généralisée.

Par

Stanisław Ruziewicz (Lwów).

Le but de cette note est de donner pour tout α positif < 1 un exemple d'une fonction satisfaisant à la condition de Lipschitz généralisée, c'est-à-dire à l'inégalité:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|^{\alpha},$$

et ne possédant de dérivée pour aucune valeur de l'intervalle (0, 1).

Soit α un nombre positif < 1. Choissons un nombre naturel $g > 2$ suffisament grand pour qu'on ait

$$(3g - 2)^{\alpha} < g; \tag{1}$$

on vérifie sans peine que de tels nombres g existent pour tout $\alpha < 1$.

Posons pour tout nombre entier γ, où $0 \leqslant \gamma \leqslant 3g - 3$:

$$\begin{aligned} a_\gamma &= \frac{\gamma}{3g}, \; b_\gamma = \frac{1}{g} && \text{pour } \gamma \equiv 0 \pmod 3 \\ a_\gamma &= \frac{\gamma + 2}{3g}, \; b_\gamma = -\frac{1}{g} && \quad \text{"} \quad \gamma \equiv 1 \quad \text{"} \\ a_\gamma &= \frac{\gamma - 2}{3g}, \; b_\gamma = \frac{1}{g} && \quad \text{"} \quad \gamma \equiv 2 \quad \text{"} \end{aligned} \tag{2}$$

On a

$$0 \leqslant a_\gamma \leqslant \frac{g-1}{g}, \tag{3}$$

et

$$a_\gamma + b_\gamma = a_{\gamma+1}. \tag{4}$$

Soit x un nombre réel de l'intervalle $(0,1)$, défini par le développement

$$(5)\qquad x = \sum_{\nu-1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{(3g-2)^\nu};$$

posons

$$(6)\qquad f(x) = a_{\gamma_1} + b_{\gamma_1} a_{\gamma_2} + b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} a_{\gamma_3} + b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} b_{\gamma_3} a_{\gamma_4} + \dots$$

La fonction $f(x)$ ainsi définie est univoque pour tout nombre x de l'intervalle $(0,1)$; en effet, si x a deux développements différent

$$x = \frac{\gamma_1}{3g-2} + \frac{\gamma_2}{(3g-2)^2} + \dots + \frac{\gamma_n}{(3g-2)^n} \qquad (\gamma_n > 0)$$

et

$$x = \frac{\gamma_1}{3g-2} + \frac{\gamma_2}{(3g-2)^2} + \dots + \frac{\gamma_n - 1}{(3g-2)^n} + \frac{3g-3}{(3g-3)^{n+1}} + \dots,$$

et si $f(x)$ est définie pour le premier de ces développements:

$$f(x) = a_{\gamma_1} + b_{\gamma_1} a_{\gamma_2} + \dots + b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \dots b_{\gamma_{n-1}} a_{\gamma_n},$$

en désignant par $\bar{f}(x)$ le côté droit de (6) pour le second développement, nous aurons

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= a_{\gamma_1} + b_{\gamma_1} a_{\gamma_1} + \dots + b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \dots b_{\gamma_{n-1}} a_{\gamma_{n-1}} + \\ &+ b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \dots b_{\gamma_{n-1}} b_{\gamma_n - 1} \frac{3g-3}{3g} + b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \dots b_{\gamma_{n-1}} b_{\gamma_n - 1} \frac{3g-3}{3g} + \dots \\ &= a_{\gamma_1} + b_{\gamma_1} a_{\gamma_2} + \dots + b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \dots b_{\gamma_{n-1}} a_{\gamma_n - 1} + \\ &\quad + b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \dots b_{\gamma_{n-1}} [a_{\gamma_n - 1} + b_{\gamma_n - 1}], \end{aligned}$$

donc, d'après (4):

$$\bar{f}(x) = f(x).$$

Soit maintenant

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{(3g-2)^\nu}$$

et

$$h = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\eta_\nu}{(3g-2)^\nu},$$

où

$$\eta_{n-1} \geqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 < x + h \leqslant 1.$$

Le développement de $x+h$ est

$$(\alpha)\qquad x+h=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{(3g-2)^\nu}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\gamma_\nu}{(3g-2)^\nu},$$

ou bien

$$(\beta)\qquad x+h=\sum_{\nu=1}^{p}\frac{\gamma_\nu}{(3g-2)^\nu}+\frac{\gamma_p+1}{(3g-2)^p}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\gamma'_\nu}{(3g-2)^\nu}$$

$$\begin{pmatrix}1\leqslant p\leqslant n\\ \gamma_p<3g-3\end{pmatrix}.$$

Dans le cas (α) nous aurons

$$f(x+h)-f(x)=b_{\gamma_1}b_{\gamma_2}\dots b_{\gamma_n}[(a_{\gamma'_{n+1}}-a_{\gamma_{n+1}})+$$
$$+(b_{\gamma'_{n+1}}a_{\gamma'_{n+2}}-b_{\gamma_{n+1}}a_{\gamma_{n+2}})+\dots],$$

donc, d'après (2) et (3):

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant\frac{1}{g^n}\left[2\frac{g-1}{g}+2\frac{g-1}{g^2}+\dots\right]=\frac{2}{g^n}.$$

Dans le cas (β), en posant

$$\xi=\frac{\gamma_1}{3g-2}+\frac{\gamma_2}{(3g-2)^2}+\dots+\frac{\gamma_p+1}{(3g-2)^p}$$

$$=\frac{\gamma_1}{3g-2}+\frac{\gamma_2}{(3g-2)^2}+\dots+\frac{\gamma_p}{(3g-2)^p}+\frac{3g-3}{(3g-2)^n}+\frac{3g-3}{(3g-2)^{n+1}}+\dots$$

nous obtenons (x et le second développement de ξ, et de même $x+h$ et le premier développement de ξ coïncidant resp. dans ses n premiers chiffres et se différant dans le $n+1$ chiffre), en utilisant l'inégalité obtenue dans le cas α:

$$|f(x+h)-f(x)|\leq|f(x+h)-f(\xi)|+|f(\xi)-f(x)|\leqslant\frac{4}{g^n}.$$

Dans les deux cas (α) et (β) nous obtenous donc pour $h>0$, $0\leqslant x<1$, $0<x+h\leqslant 1$:

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant 4g\frac{1}{g^{n+1}},$$

ce qui donne, d'après (1):

$$|f(x+h)-f(x)|<\frac{4g}{[(3g-2)^{n+1}]^\alpha},$$

donc

$$|f(x+h)-f(x)|<3g\,h^\alpha.$$

Pour $h < 0$ on obtient l'inégalité

$$|f(x+h) - f(x)| < 3g\,|h|^{\alpha}.$$

La fonction $f(x)$ satisfait donc à la condition de Lipschitz généralisée.

Soit maintenant (5) le développement d'un nombre x, ou $0 \leqslant x < 1$, ayant une infinité de chiffres γ_n différents de $3g-3$.

Supposons que pour une infinité de $n_\varkappa$, tels que $\gamma_{n_\varkappa} \neq 3g-3$, on a

$$\gamma_{n_\varkappa} \equiv 0 \pmod 3$$

(nous avons donc $\gamma_{n_\varkappa} \leqslant 3g-6$).

En remplaçant $\gamma_{n_\varkappa}$ par $\gamma_{n_\varkappa}+2$, nous trouvons pour

$$x_{n_\varkappa} = \sum_{\nu=1}^{n_\varkappa-1} \frac{\gamma_\nu}{(3g-2)^\nu} + \frac{\gamma_{n_\varkappa}+2}{(3g-2)^{n_\varkappa}} + \sum_{\nu=n_\varkappa+1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{(3g-2)^\nu},$$

d'après (1):

$$f(x_{n_\varkappa}) = a_{\gamma_1} + b_{\gamma_1} a_{\gamma_2} + \ldots + b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-2}} a_{\gamma_{n_\varkappa-1}} +$$
$$+ b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-2}} b_{\gamma_{n_\varkappa-1}} \frac{(\gamma_{n_\varkappa}+2)-2}{3g} +$$
$$+ b_{\gamma_1} b_{\gamma_1} \ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-1}} \frac{1}{g} a_{\gamma_{n_\varkappa+1}} + \ldots = f(x),$$

d'où

$$\lim_{\varkappa\to\infty} \frac{f(x_{n_\varkappa}) - f(x)}{x_{n_\varkappa} - x} = 0.$$

Or, en remplaçant $\gamma_{n_\varkappa}$ par $\gamma_{n_\varkappa}+3$, nous trouvons, pour

$$\bar{x}_{n_\varkappa} = \sum_{\nu=1}^{n_\varkappa-1} \frac{\gamma_\nu}{(3g-2)^\nu} + \frac{\gamma_{n_\varkappa}+3}{(3g-2)^{\nu_\varkappa}} + \sum_{\nu=n_\varkappa+1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{(3g-2)^\nu},$$

$$f(\bar{x}_{n_\varkappa}) = a_{\gamma_1} + b_{\gamma_1} a_{\gamma_2} + \ldots + b_{\gamma_1} q_{\gamma_2} \ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-2}} a_{\gamma_{n_\varkappa-1}} +$$
$$+ b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-1}} \frac{\gamma_{n_\varkappa}+3}{3g} + b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-1}} \frac{1}{g} a_{\gamma_{n_\varkappa+1}} + \ldots =$$
$$= f(x) + b_{\gamma_1} b_{\gamma} \ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-1}} \frac{1}{g},$$

d'où, d'après (2):

$$\lim_{\varkappa\to\infty}\left|\frac{f(\bar{x}_{n_\varkappa})-f(x)}{\bar{x}_{n_\varkappa}-x}\right|=\lim_{\varkappa\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{3g-2}{g}\right)^{n_\varkappa}=\infty.$$

La fonction $f(x)$ est donc dépourvue de dérivée pour toute valeur x de l'intervalle $(0,1)$, dont le développement à base $3g-2$ a une infinité de chiffres $\gamma_n\equiv 0 \pmod 3$, $\gamma_n\leqslant 3g-6$.

Supposons maintenant, qu'on a pour une infinité des indices $n_\varkappa$:

$$\gamma_{n_\varkappa}\equiv 1 \pmod 3.$$

En remplaçant $\gamma_{n_\varkappa}$ par $\gamma_{n_\varkappa}+1$, nous avons

$$f(x_{n_\varkappa})=a_{\gamma_1}+b_{\gamma_1}a_{\gamma_2}+\ldots+b_{\gamma_1}b_{\gamma_2}\ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-2}}a_{\gamma_{n_\varkappa-1}}+$$

$$+b_{\gamma_1}b_{\gamma_2}\ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-1}}\frac{(\gamma_{n_\varkappa}+1)-2}{3g}+b_{\gamma_1}b_{\gamma_2}\ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-1}}\frac{1}{g}a_{\gamma_{n_\varkappa+2}}+\ldots=$$

$$=f(x)-b_{\gamma_1}b_{\gamma_2}\ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-1}}\frac{1}{g}+2\,b_{\gamma_1}b_{\gamma_2}\ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-1}}\frac{1}{g}a_{\gamma_{n_\varkappa+2}}+\ldots,$$

donc

$$\frac{f(x_{n_\varkappa})-f(x)}{x_{n_\varkappa}-x}=-\frac{(2g-3)^{n_\varkappa}b_{\gamma_1}b_{\gamma_2}\ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-1}}}{g}\cdot$$

$$\cdot\left[1-2a_{\gamma_{n_\varkappa+1}}-2b_{\gamma_{n_\varkappa+1}}a_{\gamma_{n_\varkappa+2}}-\ldots\right].$$

En emplaçant $\gamma_{n_\varkappa}$ par $\gamma_{n_\varkappa}-1$, nous avons:

$$f(\bar{x}_{n_\varkappa})=f(x)-b_{\gamma_1}b_{\gamma_2}\ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-1}}\frac{1}{g}+2b_{\gamma_1}b_{\gamma_2}\ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-1}}\frac{1}{g}a_{\gamma_{n_\varkappa+1}}+\ldots,$$

d'où

$$\frac{f(\bar{x}_{n_\varkappa})-f(x)}{\bar{x}_{n_\varkappa}-x}=\frac{(2g-3)^{n_\varkappa}b_{\gamma_1}b_{\gamma_2}\ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-1}}}{g}\cdot$$

$$\cdot\left[1-2a_{\gamma_{n_\varkappa+1}}-2b_{\gamma_{n_\varkappa+1}}a_{\gamma_{n_\varkappa+2}}-\ldots\right]$$

$$=-\frac{f(x_{n_\varkappa})-f(x)}{x_{n_\varkappa}-x}.$$

Si pour ces valeurs la dérivée existait, elle serait nécessairement nulle, et nous aurions l'égalité

$$(*)\qquad \lim_{\varkappa\to\infty}\left[a_{\gamma_{n_\varkappa+1}}+b_{\gamma_{n_\varkappa+1}}a_{\gamma_{n_\varkappa+2}}+\ldots\right]=\tfrac{1}{2}.$$

D'autre part, en remplaçant $\gamma_{n_\varkappa}$ par $\gamma_{n_\varkappa}+2$, nous avons:

$$\bar{\bar{f}}(x_{n_\varkappa}) = f(x) + 2b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \dots b_{\gamma_{n_\varkappa}-1} \frac{1}{g} a_{\gamma_{n_\varkappa}+1} + 2b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \dots b_{\gamma_{n_\varkappa}-1} \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{g} b_{\gamma_{n_\varkappa}+1} a_{\gamma_{n_\varkappa}+2} + \dots,$$

d'où

$$\frac{f(\bar{\bar{x}}_{n_\varkappa}) - f(x)}{\bar{\bar{x}}_{n_\varkappa} - x} = \frac{(2g-3)^{n_\varkappa} b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \dots b_{\gamma_{n_\varkappa}-1}}{2g} [2a_{\gamma_{n_\varkappa}+1} + 2b_{\gamma_{n_\varkappa}+1} a_{\gamma_{n_\varkappa}+2} + \dots],$$

donc, la supposition que pour ces valeurs une dérivée existe, entraîne:

$$\lim_{\varkappa \to \infty} [a_{\gamma_{n_\varkappa}+1} + b_{\gamma_{n_\varkappa}+1} a_{\gamma_{n_\varkappa}+2} + \dots] = 0,$$

contrairement à (*).

La dérivée de la fonction $f(x)$ n'existe donc non plus pour ces valeurs de l'intervalle $(0, 1)$, dont les développements pour la base $3g-2$ ont une infinité des chiffres $\gamma_n \equiv 1 \pmod 3$.

Supposons enfin, qu'on a pour une infinité des indices $n_\varkappa$:

$$\gamma_{n_\varkappa} \equiv 2 \pmod 3.$$

En remplaçant $\gamma_{n_\varkappa}$ par $\gamma_{n_\varkappa} - 2$, nous avons:

$$f(x_{n_\varkappa}) = f(x),$$

d'où

$$\lim_{\varkappa \to \infty} \frac{f(x_{n_\varkappa}) - f(x)}{x_{n_\varkappa} - x} = 0;$$

en remplaçant $\gamma_{n_\varkappa}$ par $\gamma_{n_\varkappa} + 1$, nous obtenons:

$$f(x_{n_\varkappa}) = f(x) + b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \dots b_{\gamma_{n_\varkappa}-1} \frac{1}{g},$$

d'où

$$\lim_{\varkappa \to \infty} \left| \frac{f(x_{n_\varkappa}) - f(x)}{x_{n_\varkappa} - x} \right| = \lim_{\varkappa \to \infty} \left(\frac{3g-2}{g} \right)^{n_\varkappa} = \infty.$$

Donc, pour les valeurs x du dernier genre la dérivée de $f(x)$ n'existe pas.

Mais, évidemment, tout nombre de l'intérvalle $(0, 1)$ (à l'exception de 1) appartient à un de trois genres considérés (car si nous avions constantemment $\gamma_n = 3g - 3$ pour tout $n > N$, $\gamma_N < 3g - 3$, nous pouvions dans cet développemment remplaçer tous les γ_n par 0 et γ_N par $\gamma_N + 1$.

Donc pour aucune valeur x de l'intervalle $(0, 1)$ la fonction $f(x)$ n'a pas de dérivée (ni finie, ni infinie); pour $x = 0$, comme on voit aisément, il n'y a pas de dérivée à gauche, pour $x = 1$ il n'y a pas de dérivée à droite.