TRAITÉ

D'ALGÈBRE.

OUVRAGES DE M. H. LAURENT.

THÉORIE DES SERIES, contenant : 1° les Règles de convergence et les Propriétés fondamentales des Séries ; 2° l'Étude et la Sommation de quelques Séries ; 3° quelques applications de la Théorie des Séries au calcul des expressions transcendantes. Ouvrage destiné aux Candidats des Écoles Polytechnique et Normale, et aux personnes qui désirent suivre les Cours des Facultés des Sciences. In-8 ; 1862 .... 4 fr.

THÉORIE DES RÉSIDUS. In-8 ; 1865 .... 4 fr.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

TRAITÉ

D'ALGÈBRE,

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT,

PAR H. LAURENT,

Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique et ancien Élève de cette École.

.... Prouver toutes les propositions un peu obscures, et n'employer à leur preuve que des axiomes très-évidents ou des propositions déjà accordées ou démontrées.

(PASCAL, *De l'esprit géométrique*.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1867

A

MONSIEUR J.-A. SERRET,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

TÉMOIGNAGE DE RECONNAISSANCE ET D'AFFECTION.

TABLE DES MATIÈRES

SECONDE PARTIE.

NOTES.

PRÉFACE.

Je me suis proposé, dans cet Ouvrage, de développer le Programme des connaissances exigées pour l'entrée aux Écoles du Gouvernement. Toutefois je ne me suis point astreint à suivre ce Programme à la lettre, et j'ai donné un peu d'extension aux théories les plus intéressantes.

Je me suis attaché dès le début à montrer le rôle et l'importance du signe qui précède un nombre; la quantité négative et la quantité positive ne sont d'abord pour moi que les termes d'un polynôme, et en les présentant ainsi je crois être arrivé à donner une théorie entièrement rigoureuse du calcul algébrique. L'interprétation des signes ne vient que beaucoup plus loin. La méthode que j'ai employée dans l'exposition de ces principes fondamentaux n'est pas adoptée par tous les Professeurs; quoi qu'il en soit, je la soumets à leur approbation, et j'espère qu'ils ne trouveront rien à objecter du côté de la rigueur.

J'ai cru qu'il était utile, sinon indispensable, de développer les propriétés élémentaires des polynômes entiers. L'identification des polynômes joue en effet un rôle si important dans l'Analyse, que c'est vraiment attendre trop longtemps que de remettre cette théorie à la fin de l'Algèbre, dans la partie consacrée aux équations de degré supérieur.

En adoptant cette marche nouvelle, il m'a été possible de définir d'une manière précise ce que l'on entendait par le reste d'une division ; j'ai pu donner immédiatement une démonstration élémentaire de la formule du binôme, et enfin terminer ce qui avait rapport aux six opérations fondamentales avant d'aborder un sujet nouveau.

Lorsque j'ai eu à traiter des équations du premier degré, j'ai cru répondre au désir d'un bon nombre de Professeurs et d'Élèves, en entrant dans quelques détails au sujet des déterminants, dont l'usage tend à s'introduire systématiquement dans l'enseignement supérieur de nos Lycées.

J'ai cru faire une chose utile en donnant un peu d'extension au Chapitre relatif à l'analyse combinatoire, et en sortant un peu des limites imposées par le Programme. J'ai été ainsi conduit à parler des factorielles, des nombres figurés et de leurs applications à l'analyse numérique.

La théorie des imaginaires a été exposée d'une manière qui paraîtra peut-être singulière, en ce sens qu'elle surprend pour ainsi dire l'Élève qui ne voit pas très-bien où l'on veut d'abord le conduire; mais ce sentiment de surprise, auquel on doit chercher à soustraire généralement les Élèves, j'ai fait tous mes efforts pour le produire. Les préjugés que l'on a contre le symbole $\sqrt{-1}$ disparaissent, comme j'en ai fait l'expérience, en employant la méthode que je viens d'indiquer. Du reste, on remarquera que j'ai évité avec le plus grand soin de parler des racines carrées des quantités négatives dans le Chapitre relatif aux équations du second degré.

Dans le Chapitre consacré aux séries, je n'ai pas cru devoir donner ce que l'on appelle *la condition de convergence nécessaire et suffisante.* J'ai hésité bien longtemps à ce sujet, mais il m'a toujours semblé que l'on ne s'entendait pas parfaitement sur le sens de l'énoncé de cette règle. Cet énoncé, entendu convenablement, est juste, mais sa démonstration est extrêmement délicate; je n'ai pas encore rencontré un seul Élève capable de la reproduire d'une façon convenable, et il est très-aisé de se passer de la règle en question.

Il y a plus : les démonstrations directes des règles de convergence sont plus nettes, éclairent mieux l'esprit, et ont le grand avantage de fournir une limite de l'erreur commise en bornant les séries à leurs premiers termes.

J'ai signalé sur la théorie délicate des séries quelques fautes dans lesquelles tombent encore aujourd'hui d'excellents esprits; j'ai fait connaître le développement de $(1+x)^m$, de $\sin x$, de $\cos x$, de e^x, de $l(1+x)$ et de $\operatorname{arc\,tang} x$; enfin, j'ai cru faire une chose utile en généralisant la notion de l'exposant et en présentant la théorie des fractions continues considérées au point de vue algébrique.

La théorie des séries, celle des fractions continues, celle des produits infinis donnent de la rectitude à l'esprit et préparent admirablement les

Élèves à suivre avec fruit les cours d'analyse infinitésimale.

Je n'ai rien de particulier à dire sur la théorie des équations, sinon que j'ai cru devoir y introduire une démonstration simple et très-ingénieuse du théorème de Bezout sur l'élimination, démonstration extraite d'un beau Mémoire de M. Liouville. J'ai rejeté à la fin la théorie des dérivées comme ne faisant pas partie de l'Algèbre proprement dite; j'ai même hésité longtemps avant de savoir si je consacrerais un Chapitre à cette théorie; mais réfléchissant qu'elle faisait partie du Programme officiel, je me suis cru obligé de la dérober au Cours de calcul différentiel.

En terminant, j'adresse mes remercîments à M. Suchet, mon ancien Professeur, qui a bien voulu m'éclairer de ses lumières et m'indiquer d'utiles corrections.

TRAITÉ D'ALGÈBRE.

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.
NOTIONS FONDAMENTALES.

I. — Définitions.

« ... L'*Algèbre* plane pour ainsi dire également sur l'Arithmétique et sur la Géométrie; son objet n'est pas de trouver les valeurs mêmes des quantités cherchées, mais le système d'opérations à faire sur des quantités données pour en déduire les valeurs des quantités que l'on cherche, d'après les conditions du problème. Le tableau de ces opérations, représentées par les caractères algébriques, est ce que l'on nomme en Algèbre une *formule.* » (Lagrange, *Résolution des équations numériques*, Introduction.)

En Algèbre, « les grandeurs, considérées en général, s'expriment communément par les lettres de l'alphabet, et c'est à Viète qu'est due la notation commode qui transporte à la langue analytique les alphabets des langues connues. L'application que Viète fit de cette notation à la Géométrie, à la théorie des équations et aux sections angulaires forme une des époques remarquables de l'histoire des Mathématiques. » (LAPLACE, *Théorie analytique des probabilités*, liv. I, 1^re partie.)

II. — DES QUANTITÉS NÉGATIVES.

En Algèbre comme en Arithmétique, nous ferons usage des signes + et — pour exprimer que les quantités séparées par ces signes doivent être ajoutées ou retranchées l'une de l'autre. Les quantités qui dans une formule ne sont précédées d'aucun signe, ou qui sont précédées du signe +, sont appelées quantités *positives*; celles qui sont précédées du signe — sont appelées *négatives*.

On considère souvent les quantités négatives indépendamment des formules dans lesquelles elles doivent entrer; mais quand nous parlerons dorénavant d'une quantité négative, il faudra toujours sous-entendre qu'elle fait partie d'une formule sans laquelle cette quantité n'offrirait aucun sens net à l'esprit. Ainsi, par exemple, quand nous parlerons de la quantité -4, nous devrons toujours supposer une formule, par exemple

$$5-4=1, \quad 2+7-4=5, \ldots,$$

dont -4 fasse partie, sans qu'il soit cependant nécessaire de préciser la formule en question. On conçoit, en effet, que le signe — placé devant le chiffre 4 donne à ce chiffre certaines propriétés dont il jouira, quelle que soit la formule dans laquelle il se trouve écrit. Ce que nous venons de dire du symbole -4 pourrait se répéter de cet autre $+4$, que l'on ne saurait concevoir que comme faisant partie d'une formule existante.

On appelle *valeur absolue* et quelquefois aussi *module* d'une quantité positive ou négative le nombre précédé du signe + ou — qui entre dans cette quantité.

On dit que deux quantités sont *égales*, lorsque leurs valeurs absolues sont égales et que leurs signes sont les mêmes; cette égalité algébrique s'exprime à l'aide du signe $=$, qui n'amène aucune confusion si nous convenons de regarder comme précédées du signe $+$ les quantités arithmétiques qui n'ont pas de signe.

On convient de regarder les quantités négatives comme plus petites que zéro, et d'autant plus petites que leur valeur absolue est plus grande, et on conserve les signes $<$, $>$ de l'Arithmétique pour exprimer qu'une quantité positive ou négative est plus petite ou plus grande qu'une autre.

Ces conventions n'ont d'autre but que de simplifier le langage et d'éviter de longues périphrases; on finit par s'y accoutumer, et l'on y trouve souvent le grand avantage de comprendre dans un seul énoncé plusieurs propositions qui sans cela nécessiteraient autant d'énoncés distincts.

III. — Des quatre opérations fondamentales.

Addition. — L'*addition algébrique* est une opération qui a pour but de faire la *somme algébrique* de deux ou plusieurs quantités.

On appelle *somme algébrique* de deux quantités de même signe la somme de leurs valeurs absolues précédée du signe commun; la *somme algébrique* de deux quantités de signe contraire est la différence de leurs valeurs absolues précédée du signe de la plus grande.

Ainsi la somme de -4 et -5 est -9, la somme de -4 et $+5$ est $+1$, celle de $+4$ et -6 est -2.

La somme de plusieurs quantités telles que -1, $+2$, -4, $+7$ est le résultat obtenu en ajoutant la première et la seconde, puis la troisième à la somme des deux premières, puis la quatrième à la somme des trois premières, etc.

Pour indiquer que plusieurs quantités doivent être ajoutées, on fait usage du signe $+$; ainsi

$$(-2)+(-4)+(+5)$$

représente le résultat obtenu en ajoutant -2 à -4 et $+5$ à la somme ainsi obtenue. Le plus souvent, on se contente d'écrire les quantités les unes à la suite des autres sans changer les signes ; ainsi

$$-2+4-5$$

est équivalent à

$$(-2)+(+4)+(-5).$$

Le symbole $3+6-4+1-2$, qui en Arithmétique représente une suite de sommes et de différences, et en Algèbre une somme, conduit dans les deux sciences au même résultat lorsqu'il est arithmétiquement possible, ce qui est très-avantageux au point de vue des applications.

Quelquefois on désigne une quantité positive ou négative telle que -4 par une seule lettre a. Pour exprimer que plusieurs quantités a, b, c,..., doivent être ajoutées, on les sépare les unes des autres par le signe $+$, ainsi : $a+b+c+\ldots$.

Lemme. — *On a pour toutes les valeurs de a et de b*

$$a+b-b=a.$$

En effet, désignons par α et β les valeurs absolues de a et de b ; le premier membre de la formule précédente peut prendre six formes différentes comprises dans le tableau suivant :

1° $\alpha + \beta - \beta$,

2° $\alpha - \beta + \beta$, β étant $< \alpha$,

3° $\alpha - \beta + \beta$, β » $> \alpha$,

4° $-\alpha + \beta - \beta$, β » $< \alpha$,

5° $-\alpha + \beta - \beta$, β » $> \alpha$,

6° $-\alpha - \beta + \beta$.

Pour obtenir la valeur de la quatrième forme $-\alpha+\beta-\beta$, il faut retrancher β de α et donner au résultat le signe $-$: on obtient ainsi $-(\alpha-\beta)$; puis il faut ajouter β à $\alpha-\beta$ et donner au résultat le signe $-$; on reproduit ainsi $-\alpha$ ou a. En interprétant de la même façon chacune des cinq autres formes, on arrive toujours au même résultat a; ce qui démontre le lemme énoncé.

Soustraction. — La *soustraction* est une opération qui a pour but, étant donnée une somme de deux parties et l'une d'elles, de trouver l'autre.

Cette définition renferme comme on voit celle qui a été donnée en Arithmétique pour les quantités positives.

Proposons-nous de soustraire -4 de $+3$: le résultat doit être tel, que si on lui ajoute -4 on trouve $+3$; le nombre $+3+4$ jouit de cette propriété. En effet, si on lui ajoute -4, on retrouve $3+4-4$ ou 3, et il est bien évident que si l'on ajoute -4 à un nombre plus grand ou plus petit que $+3+4$, on trouve un nombre plus grand ou plus petit que $+3$. Nous voyons donc que pour soustraire une quantité d'une autre, il faut changer le signe de la quantité à soustraire et l'ajouter à l'autre. Lorsqu'une seule lettre désigne une quantité avec son signe, le signe $-$ placé devant cette lettre indique que la quantité en question doit être retranchée de celle qu'elle suit.

Multiplication. — Multiplier algébriquement une quantité par une autre, c'est faire le produit de leurs valeurs absolues et donner au résultat le signe + si elles ont le même signe et le signe — si elles sont de signe contraire. Les dénominations de *multiplicande, multiplicateur, facteurs, produit* s'appliquent à la multiplication algébrique comme à la multiplication arithmétique.

On donne quelquefois la définition de la multiplication sous forme de règle, en disant d'une manière abrégée que

+	multiplié par	+	donne	+,
+	»	—	»	—,
—	»	+	»	—,
—	»	—	»	+.

C'est en cela que consiste ce que l'on appelle souvent la *règle des signes*; d'après cette règle, on voit, par exemple, que -7 multiplié par $+4$ donne -28, que -5 multiplié par -6 donne $+30$, etc. Lorsqu'une seule lettre désigne une quantité avec son signe, on exprime que plusieurs quantités doivent être multipliées entre elles en les séparant par le signe $\times$, par un point, ou encore en les écrivant sans aucun signe les unes à la suite des autres; ainsi

$$a\times b\times c,\quad a.b.c,\quad abc$$

sont trois notations qui indiquent que l'on doit multiplier la quantité a par b et le résultat par c. Quand un des facteurs est un nombre positif et l'autre une lettre, on ne met ordinairement pas de signe entre le multiplicande et le multiplicateur. On conçoit que cette convention ne saurait s'appliquer à plusieurs facteurs numériques d'un même produit; en effet, 23, par exemple, offrirait un sens ambigu et représenterait également les deux nombres 6 et $(20+3)$.

Division. — La *division algébrique* est une opération qui a pour but, étant donné un produit de deux facteurs appelé *dividende* et l'un de ses facteurs appelé *diviseur*, de trouver l'autre appelé *quotient*.

Pour diviser une quantité par une autre, il est facile de démontrer qu'il suffit de diviser la valeur absolue du dividende par la valeur absolue du diviseur, en ayant soin de donner au quotient le signe + si le dividende et le diviseur sont de même signe, et le signe — dans le sens contraire. En d'autres termes, et d'une manière abrégée,

+	divisé par	+	donne	+,
+	»	—	»	—,
—	»	+	»	—,
—	»	—	»	+.

En effet, soit à diviser -7 par $+5$, le résultat doit être tel, que multiplié par $+5$ il donne -7; donc la valeur absolue du résultat multipliée par 5 donne 7; donc la valeur absolue du résultat est bien $\frac{7}{5}$: il reste à trouver son signe. Dans l'exemple que nous avons choisi, il est bien évident que le quotient a le signe —, car toute quantité positive multipliée par $+5$ reproduit une quantité positive. En supposant le dividende négatif et le diviseur négatif, il faut que le quotient soit positif; car s'il était négatif, en le multipliant par le diviseur qui est négatif, on trouverait un résultat positif différant par conséquent du diviseur. En répétant le même raisonnement sur un dividende positif et un diviseur successivement positif et négatif, on arrive ainsi à vérifier dans tous les cas la règle que nous avons donnée relativement au signe du quotient.

En Algèbre comme en Arithmétique, le quotient de deux quantités s'indique en écrivant le dividende au-dessus du diviseur et en les séparant par une ligne horizontale, ou encore en écrivant le diviseur à la suite du dividende et en les séparant par deux points.

IV. — Des limites et des incommensurables.

On appelle *limite* d'une quantité variable une quantité fixe dont la quantité variable s'approche indéfiniment, de manière que leur différence ait une valeur absolue susceptible de devenir aussi petite que l'on veut.

Ainsi, par exemple, 1 est la limite des fractions proprement dites constamment croissantes; $\frac{1}{3}$ est la limite vers laquelle tendent les fractions 0,3, 0,33, 0,333, etc., lorsque le nombre de leurs chiffres 3 augmente indéfiniment, etc.

Théorème I. — *Lorsqu'une quantité algébrique croît constamment sans devenir plus grande qu'une quantité fixe, elle a une limite.*

En effet, en attachant aux mots *plus grand que, plus petit que* le sens que nous avons expliqué plus haut (II), on voit qu'il existera une quantité fixe que la quantité variable ne pourra pas surpasser, mais telle, que toute quantité fixe inférieure pourra être égalée par la variable : cette quantité est évidemment la limite de la quantité variable en question.

Théorème II. — *Lorsqu'une quantité décroît sans cesse sans pouvoir devenir moindre qu'une quantité fixe donnée, cette quantité variable a une limite.*

En effet, cette limite est évidemment la plus petite des quantités à laquelle la variable ne peut devenir inférieure.

Théorème III. — *Si deux quantités sont constamment égales, si l'une d'elles admet une limite, l'autre en admet une aussi, et ces deux limites sont égales.*

En effet, soient a et b les quantités variables et A la limite de a, $A - a$ peut devenir moindre en valeur absolue que toute quantité donnée. Il en sera de même de $A - b$ qui lui est égal; donc par définition A est la limite de b. C. Q. F. D.

On appelle *commune mesure* entre deux quantités A et B de même espèce une quantité C qui soit contenue un nombre exact de fois dans A et dans B.

Pour trouver une commune mesure entre A et B, on peut d'abord chercher si la plus petite B de ces quantités est contenue un nombre exact de fois dans A; s'il en était ainsi, B serait la commune mesure cherchée; sinon on peut diviser B successivement en deux, trois, quatre, etc., parties égales, et chercher si l'une de ces parties est contenue un nombre exact de fois dans A. Mais il peut arriver que, quelque grand que soit le nombre entier n, la $n^{ième}$ partie de B ne soit jamais contenue un nombre exact de fois dans A; on dit alors que A et B *n'ont pas de commune mesure* ou sont incommensurables.

Pour trouver une commune mesure entre A et B, on peut suivre un procédé analogue à celui qui fournit en Arithmétique le plus grand commun diviseur. A cet effet, on retranche de A la plus petite B des deux quantités en question autant de fois qu'on le peut; on trouve alors que

(1) $A = q$ fois $B +$ un reste R moindre que B,

q désignant un certain nombre entier. On retranche ensuite R de B autant de fois que l'on peut, et l'on trouve alors, par exemple,

(2) $B = q'$ fois $R +$ un reste R' moindre que R.

On retranche ensuite R' de R autant de fois qu'on le peut, et l'on trouve ainsi

(3) $R = q''$ fois $R' +$ un reste R'' moindre que R';

et ainsi de suite. Il peut se faire que l'un des restes R, R', R'',..., soit nul, et alors le reste précédent est la commune mesure. En effet, supposons R''' nul, R' sera alors égal à un nombre exact q''' de fois R'', et l'égalité (3) nous montre que R est égal à q'' fois R', c'est-à-dire $q'' \times q'''$ fois R'' plus une fois R'', c'est-à-dire $q''q''' + 1$ fois R''. L'égalité (2) montre ensuite que B est égal à $q'(q''q'''+1)+1$ fois R''; enfin l'égalité (1) montre que A est égal à $q[q'(q''q'''+1)+1]$ fois R''; R'' est donc une commune mesure entre A et B.

Ajoutons que le procédé que nous venons d'indiquer a l'avantage de faire connaître la plus grande commune mesure entre A et B; il est facile de le prouver en suivant le même mode de démonstration qu'en Arithmétique, lorsqu'il s'agit de trouver le plus grand commun diviseur entre deux nombres.

Lorsque les quantités A et B n'ont pas de commune mesure, le procédé que nous venons de suivre, pris à la lettre, ne permet pas d'affirmer qu'il en est ainsi; les opérations, à la vérité, ne se terminent pas, mais rien ne prouve qu'elles ne se termineront pas après un temps plus ou moins long.

En Arithmétique, on a donné les définitions suivantes :

Mesurer une quantité A c'est chercher combien de fois elle contient une quantité de même espèce B prise pour unité, ou combien de fois elle contient une certaine partie de B divisé en parties égales; le résultat de cette opération est ce que l'on appelle un *nombre* entier ou fractionnaire. Le *nombre* qui mesure une quantité A est donc ce qui nous indique la relation de grandeur entre la quantité en question A et son unité B, ou si l'on veut ce qui exprime le *rapport* de A à B.

D'après la définition donnée en Arithmétique, il n'existe pas de nombre mesurant une quantité A incommensurable avec son unité, car s'il existait une fraction $\frac{p}{q}$ mesurant le nombre A, A contenant p fois la $q^{ième}$ partie de l'unité, cette $q^{ième}$ partie de l'unité serait une commune mesure entre A et l'unité.

Cependant il existe certainement une relation de grandeur entre A et l'unité : voici comment on peut la définir.

Partageons l'unité en n parties égales, A contiendra, par exemple, m de ces parties, mais n'en contiendra pas $m+1$; $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$ mesurent donc deux quantités commensurables P et Q telles, que

$$P < A < Q,$$

et différant de A d'une quantité moindre que la $n^{ième}$ partie de l'unité, c'est-à-dire différant de A d'aussi peu que l'on veut, puisque l'on peut choisir n aussi grand que l'on veut. Soit $n' > n$, et supposons que A contienne m' fois la $n'^{ième}$ partie de l'unité et ne la contienne pas $m'+1$ fois; $\frac{m'}{n'}$ et $\frac{m'+1}{n'}$ mesureront des quantités commensurables P′ et Q′ telles, que

$$P' < A < Q'.$$

La différence entre P′ et A pourra être prise moindre que la $n'^{ième}$ partie de l'unité, et, par conséquent, en prenant n' assez grand, P′ pourra être compris entre P et A, et, par conséquent, le nombre $\frac{m'}{n'}$ sera plus grand que $\frac{m}{n}$. On déterminerait de la même façon un nombre $\frac{m''}{n''}$ plus grand que $\frac{m'}{n'}$ et mesurant une quantité P″ comprise entre P′ et A, etc. Les nombres $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}, \ldots$, sont ce que l'on peut appeler les *mesures approchées de* A. Ils ont une limite; cette limite est ce que l'on appelle le nombre *incommensurable qui mesure* A. En effet, ces nombres vont en croissant et restent toujours inférieurs à $\frac{m+1}{n}$ qui mesure Q plus grand que A.

Soit $\frac{\mu}{\nu}$ une fraction définie par la condition que A soit compris entre μ fois et $\mu+1$ fois la $\nu^{ième}$ partie de l'unité; il est facile de prouver que la limite vers laquelle tend $\frac{\mu}{\nu}$ est le nombre a qui mesure A lorsque ν croît indéfiniment. En effet, soient R la grandeur mesurée par $\frac{\mu}{\nu}$ et S celle qui est mesurée par $\frac{\mu+1}{\nu}$; on a

$$R < A < S.$$

La différence entre R et A est moindre que la $\nu^{ième}$ partie de l'unité; la différence entre P et A est moindre que la $n^{ième}$ partie de l'unité; donc entre P et R la différence est moindre que la $n^{ième}$ partie de l'unité, en supposant, par exemple, ν plus grand que n. Mais quand on fait croître n et ν indéfiniment, ν suivant une loi quelconque et n en le faisant passer par les valeurs n', n'',..., définies tout à l'heure, les nombres $\frac{m}{n}$ et $\frac{\mu}{\nu}$ qui mesurent P et R diffèrent de moins de $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire que leur différence peut être prise aussi petite que l'on veut. Or $\frac{m}{n}$ a pour limite a, c'est-à-dire peut en différer d'aussi peu que l'on veut. $\frac{\mu}{\nu}$ peut différer de $\frac{m}{n}$ d'aussi peu que l'on veut; donc il peut aussi différer de a d'aussi peu que l'on veut; en d'autres termes, $\frac{\mu}{\nu}$ a pour limite a.

$\frac{\mu+1}{\nu}$ a aussi pour limite a; car $\frac{\mu+1}{\nu}$ diffère de $\frac{\mu}{\nu}$, de $\frac{1}{\nu}$, que l'on peut prendre aussi petit que l'on veut.

Il résulte de là que pour définir le nombre incommensurable qui mesure une quantité A incommensurable avec son unité, il suffit d'indiquer quelles sont les fractions mesurant les quantités inférieures à A et commensurables avec l'unité, ou supérieures à A et commensurables avec l'unité.

Les définitions des mots *somme, différence,* adoptées pour les nombres commensurables, s'appliquent avec lucidité aux nombres incommensurables : il n'en est pas de même du mot *produit*.

Nous définirons le produit de deux incommensurables A et B en désignant les nombres commensurables inférieurs et supérieurs à ce produit. En désignant par a et b les nombres commensurables inférieurs à A et B ayant pour limite A et B, par a' et b' des nombres commensurables supérieurs à A et B ayant pour limite A et B, il est clair que $a'b'$ sera plus grand que ab; or a et b croissant et tendant vers leurs limites, ab croît. Comme il ne peut jamais surpasser $a'b'$, il a une limite; de même $a'b'$ a une limite : il est facile de voir que ces limites sont égales. En effet, soient α la différence entre a et a', β celle entre b et b', on a

$$(1) \qquad a'b' - ab = (a+\alpha)\,b' - (b'-\beta)\,a.$$

Mais b' est une fraction; supposons-la égale à $\frac{2}{3}$. Multiplier $a+\alpha$ par $\frac{2}{3}$, c'est en prendre les $\frac{2}{3}$; Or $\frac{a}{3}+\frac{\alpha}{3}$ représente le tiers de $a+\alpha$, car en ajoutant $\frac{a}{3}+\frac{\alpha}{3}$ trois fois à lui-même, on reproduit $a+\alpha$. En ajoutant deux fois $\frac{a}{3}+\frac{\alpha}{3}$ à lui même, on a les $\frac{2}{3}$ de $a+\alpha$, et l'on trouve

$$\frac{2a}{3}+\frac{2\alpha}{3} \quad \text{ou} \quad b'a+b'\alpha.$$

On prouverait d'une manière semblable que $(b'-\beta)\,a$ est égal à $b'a-\beta a$; la formule (1) donne alors

$$a'b'-ab=\alpha b'+a\beta.$$

Or α et β peuvent être pris aussi petits que l'on veut; le second membre de la formule précédente peut donc être rendu aussi petit que l'on veut, et par suite $a'b'$ et ab peuvent être pris aussi peu différents l'un de l'autre que l'on veut, ce qui revient à dire que leurs limites sont égales.

La limite commune de ab et de $a'b'$ est ce que l'on appelle le produit de A par B; on le désigne toujours par la notation $A\times B$ ou AB, et comme ab est toujours égal à ba, leurs limites AB et BA sont égales.

Théorème. — *Un produit de plusieurs facteurs incommensurables ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs.*

En effet, soient $a, b, c, d,\ldots$, des quantités inférieures à A, B, C, D,..., respectivement; le produit ABCD est la limite vers laquelle tend le produit $ab\times c$ ou abc; de même ABCD est la limite vers laquelle tend $abc\times d$ ou $abcd$.... Or, par exemple, $abcd$ est égal à $acdb$; donc leurs limites ABCD, ACDB sont égales. C. Q. F. D.

Le *quotient* de deux incommensurables appelées *dividende* et *diviseur* est un nombre qui, multiplié par le diviseur, reproduit le dividende.

Soient D le dividende, d le diviseur; je dis que le quotient existe toujours. En effet, soient Δ, Δ', δ, δ' des quantités commensurables satisfaisant aux relations

$$\Delta > D > \Delta', \quad \delta > d > \delta';$$

on trouvera toujours deux nombres q et q' satisfaisant aux relations

$$(1) \qquad \Delta = \delta' q, \quad \Delta' = \delta q'.$$

Si l'on fait tendre Δ et Δ' vers D, δ et δ' vers d, q diminue, q' augmente, mais on a toujours $q > q'$; donc q et q' ont chacun une limite. Je dis que ces limites sont égales; en effet, en appelant r la différence entre Δ et Δ', et s la différence entre δ et δ', on a, au lieu des formules (1),

$$\Delta = (\delta - s)\, q, \quad \Delta + r = \delta q',$$

et, en retranchant membre à membre,

$$r = \delta q' - (\delta - s)\, q.$$

En faisant usage d'un raisonnement déjà fait à propos de la multiplication des incommensurables, on a

$$r = \delta q' - (\delta q - sq),$$

ou bien

$$r = \delta q' - \delta q + sq.$$

Mais s et r pouvant être pris aussi petits que l'on veut, $\delta q'$ et δq peuvent être pris aussi voisins l'un de l'autre que l'on veut, et par suite q et q' aussi; ce qui prouve bien l'existence d'un quotient unique.

Il va sans dire que l'on peut considérer des quantités négatives incommensurables, et que les théories développées plus haut leur sont applicables.

V. — Principes fondamentaux.

Lemme Ier. — *Si deux quantités ajoutées algébriquement à une troisième donnent des résultats égaux, elles sont égales.*

En effet, elles représentent la différence algébrique entre les deux mêmes quantités, différence dont la valeur est unique d'après la définition donnée (III).

Lemme II. — *Si* N *représente un nombre positif supérieur à la somme des valeurs absolues de a et b, on a*

$$N + (a + b) = N + a + b.$$

Nous distinguerons plusieurs cas :

1° $a > 0$, $b > 0$; dans ce cas, qui est celui de l'Arithmétique, le théorème est évident.

2° $a > 0$, $b < 0$ et $a + b > 0$. Posons $b = -\beta$, l'opération représentée par $N + (a + b)$ ou $N + (a - \beta)$ revient à ajouter à N a diminué de β, ce qui peut se faire en ajoutant d'abord a, ce qui fournit un résultat trop fort de β, puis en retranchant β; on a ainsi finalement

$$N + a - \beta \quad \text{ou} \quad N + a + b.$$

3° $a > 0$, $b < 0$ et $a + b < 0$. Posons $b = -\beta$; ajouter $a + b$ à N revient à ajouter $a - \beta$ ou à retrancher $a - \beta$ changé de signe, c'est-à-dire $\beta - a$. Pour faire cette opération, retranchons β, nous aurons trop retranché, et le résultat sera trop petit de a; il faut donc l'augmenter de a pour obtenir la somme demandée, et l'on obtient alors $N - \beta + a$. Mais il est bien clair qu'au lieu de diminuer N de β et de l'augmenter ensuite de a, on peut immédiatement l'augmenter de a et le diminuer de β, ce qui donne

$$N + a - \beta \quad \text{ou} \quad N + a + b.$$

4° $a < 0$, $b < 0$. Posons $a = -\alpha$, $b = -\beta$, on a

$$N + (a + b) = N + (-\alpha - \beta) = N - (\alpha + \beta).$$

La question est ramenée à retrancher $\alpha + \beta$ de N, ce qui peut évidemment se faire en retranchant successivement α et β; on obtient alors

$$N - \alpha - \beta \quad \text{ou} \quad N + a + b.$$

5° $a < 0$, $b > 0$. On aura

$$N + (a + b) = N + (b + a),$$

c'est-à-dire, en vertu des cas (2) et (3),

$$N + (a + b) = N + b + a.$$

Mais a étant une quantité négative, il est clair que l'on peut d'abord retrancher $(-a)$, puis ajouter b, et l'on a

$$N + (a + b) = N + a + b.$$

Premier principe. — *Une somme algébrique ne change pas de valeur quand on intervertit l'ordre de ses parties.*

Le cas de deux parties n'a pas besoin d'être examiné puisque, d'après la définition donnée (III), l'ordre n'intervient pas dans la formation d'une somme de deux parties.

Considérons une somme $a + b + c$ composée de trois parties; désignons par N un nombre plus grand que la somme des valeurs absolues de a, b, c. On aura, en vertu du lemme II,

$$\begin{aligned} N + (a + b + c) &= N + [(a + b) + c] \\ &= N + (a + b) + c \\ &= N + a + b + c. \end{aligned}$$

Or il est clair que la dernière de ces quantités égales peut s'écrire

$$N + a + b + c, \quad N + a + c + b, \quad N + c + b + a \ldots.$$

En effet, par exemple, si $a = -2$, $b = 3$, $c = -5$, peu importe que l'on retranche d'abord 2 de N pour lui ajouter ensuite 3 et lui en retrancher enfin 5, ou que l'on effectue ces opérations dans un autre ordre. En définitive, on aura toujours diminué N d'autant d'unités et de parties d'unités qu'il y en a dans les termes soustractifs, et on l'aura augmenté d'autant d'unités et de parties d'unité qu'il y en a dans les termes additifs.

Or on a

$$N + (a + b + c) = N + a + b + c,$$
$$N + (a + c + b) = N + a + c + b.$$

Mais les seconds membres de ces égalités sont égaux; donc les premiers le sont aussi; donc, en vertu de notre lemme Ier,

$$a + b + c = a + c + b.$$

Donc, 1° *dans une somme composée de trois parties, on peut intervertir l'ordre des deux dernières parties.*

2° Considérons une somme composée d'un nombre quelconque de parties $a + b + c + \ldots + e + f + g$; on peut considérer $a + b + \ldots + e$ comme effectué puisque le symbole $a + b + c + \ldots + e + f + g$ signifie que l'on doit d'abord ajouter a et b, puis le résultat avec c, etc. Mais alors on voit que l'on est ramené à une somme de trois parties $a + b + \ldots + e$, f et g; donc on a

$$a + b + c + \ldots + e + f + g = a + b + \ldots + e + g + f.$$

Donc, *dans une somme composée d'un nombre quelconque de parties, on peut intervertir l'ordre des deux dernières.*

3° On conclut de la formule précédente

$$a+b+\ldots+e+f+g+m+n+\ldots+p$$
$$=a+b+\ldots+e+g+f+m+n+\ldots+p.$$

Donc, *dans une somme, on peut intervertir l'ordre de deux parties consécutives.*

4° De là on conclut que *dans une somme on peut intervertir l'ordre des parties d'une façon tout à fait arbitraire.* En effet, en alternant une des parties successivement avec celles qui la précèdent ou la suivent, on pourra lui faire occuper telle place que l'on voudra.

C. Q. F. D.

Deuxième principe. — *Pour ajouter une somme à une quantité, il suffit de lui ajouter successivement chacune de ses parties.*

En effet, proposons-nous d'ajouter $a+b+c$ à P, le résultat sera

$$P+(a+b+c) \quad \text{ou} \quad (a+b+c)+P.$$

Mais on peut supprimer la parenthèse dans cette dernière formule, car elle exprime qu'au résultat obtenu en ajoutant b à a, et c à la somme ainsi obtenue, il faut encore ajouter P; ce qu'exprime également le symbole

$$a+b+c+P,$$

que l'on peut aussi écrire

$$P+a+b+c,$$

en vertu du principe précédent; donc, etc. C. Q. F. D.

Troisième principe. — *Une somme algébrique peut s'obtenir en ajoutant séparément les quantités de même signe, en faisant la différence des résultats obtenus, et en donnant à cette différence le signe du plus grand.*

2.

En effet,

$$a + b - c + d - f = a + b + d - c - f,$$

et en vertu du principe précédent

$$\begin{aligned} a + b - c + d - f &= (a + b + d) + (-c - f) \\ &= (a + b + d) - (c + f); \end{aligned}$$

ce qui démontre le principe en question.

Quatrième principe. — *Pour changer le signe d'une somme algébrique, il suffit de changer le signe de chacune de ses parties.*

En effet, pour faire la somme de plusieurs quantités, on ajoute les quantités de même signe, on fait la différence des résultats A et B, on donne à cette différence le signe du plus grand de ces deux résultats. Or, en changeant les signes de tous les termes de la somme, on change les signes de A et de B, et par suite le signe que l'on doit donner à leur différence qui est la somme algébrique en question.

Cinquième principe. — *Un produit ne change pas de valeur quand on intervertit l'ordre de ses facteurs.*

Ce théorème a été démontré pour les nombres positifs. Pour l'étendre au cas où quelques facteurs seraient négatifs, il suffit d'observer que la valeur absolue du produit ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs. Quant au signe du résultat, il est — si le nombre des facteurs négatifs est impair, + dans le cas contraire; il est donc aussi indépendant de l'ordre des facteurs.

Sixième principe. — *Pour multiplier une quantité par un produit, il suffit de la multiplier successivement par chacun des facteurs du produit.*

La démonstration de ce principe se fait en Algèbre comme en Arithmétique.

Septième principe. — *Lorsque l'on multiplie le dividende d'une division par une certaine quantité, le quotient est multiplié par cette quantité.*

En effet, soient D le dividende, d le diviseur et q le quotient, on a

$$D = dq;$$

en multipliant par m les deux membres de cette égalité, on trouve

$$Dm = dqm.$$

Cette égalité montre que d multiplié par qm reproduit Dm; donc qm est le quotient de Dm par d; donc, etc.

C. Q. F. D.

Huitième principe. — *Lorsque l'on multiplie le diviseur par un certain nombre, le quotient est divisé par ce nombre.*

En effet, en conservant la même notation que tout à l'heure, l'égalité

$$D = dq$$

peut s'écrire

$$D = dm \times \frac{q}{m}.$$

En effet, $\frac{q}{m}$ est une quantité qui multipliée par m reproduit q; donc, multipliée par dm, elle reproduira dq; donc enfin D est le produit de deux facteurs dm et $\frac{q}{m}$; ce qui revient à dire que $\frac{q}{m}$ est le quotient de D divisé par dm.

Neuvième principe. — *Lorsque l'on multiplie le di-*

vidende et le diviseur par une même quantité, le quotient ne change pas.

En effet, en conservant toujours les mêmes notations, on a

$$D = dq \quad \text{et} \quad Dm = dm \,.\, q,$$

ce qui démontre que q est aussi bien le quotient de D divisé par d que le quotient de Dm divisé par dm.

C. Q. F. D.

Dixième principe. — *Pour diviser un produit par l'un de ses facteurs, il suffit de supprimer ce facteur.*

En effet, le résultat ainsi obtenu est tel, que, multiplié par le facteur en question, il redevient égal au produit proposé.

Onzième principe. — 1° *Quand on divise le dividende par une certaine quantité, le quotient est divisé par cette quantité; 2° quand on divise le diviseur par une certaine quantité, le quotient est multiplié par cette quantité; 3° enfin, quand on divise le dividende et le diviseur par une même quantité, le quotient ne change pas.*

Ces principes deviennent évidents si l'on observe que diviser par m une quantité, c'est la multiplier par $\frac{1}{m}$. En effet, en désignant par A une quantité quelconque, si l'on multiplie le produit $A \times \frac{1}{m}$ par m, on a

$$A \times \frac{1}{m} \times m = \frac{1}{m} \times m \times A.$$

Or $\frac{1}{m} \times m$ est évidemment égal à 1, car, par définition même, $\frac{1}{m}$ est un nombre qui multiplié par m donne 1; on a donc

$$A \times \frac{1}{m} \times m = A.$$

Ainsi le produit de A par $\frac{1}{m}$, multiplié par m, donne A ; donc $A \times \frac{1}{m}$ est le quotient de A divisé par m. C. Q. F. D.

Douzième principe. — *Pour diviser une quantité par un produit, il suffit de la diviser successivement par chacun des facteurs du produit.*

En effet, proposons-nous de diviser A par $abcd$. Divisons A par a, soit q le quotient; divisons q par b, soit q' le quotient; divisons q' par c, soit q'' le nouveau quotient; enfin soit q''' le quotient de la division de q'' par d, on aura

$$A = aq, \quad q = bq', \quad q' = cq'', \quad q'' = dq'''.$$

En multipliant membre à membre ces égalités, on a

$$Aqq'q'' = abcdqq'q''q''';$$

et en divisant par q, par q' et par q'' les deux membres de cette égalité, on a

$$A = abcdq''',$$

ce qui prouve que q''' est le quotient de la division de A par $abcd$.

CHAPITRE II.

DES POLYNOMES.

I. — Préliminaires.

On appelle *monôme* ou *terme* une quantité prise isolément ou un ensemble de quantités qui, dans une formule, ne sont liées entre elles par aucun des signes $+$ ou $-$; ainsi $2\frac{ab}{c}$ est un monôme.

On appelle *polynôme* une quantité composée de plusieurs termes séparés par les signes $+$ ou $-$; ainsi $ab - c + de$ est un polynôme. Les polynômes se divisent en *binômes*, *trinômes*, etc., selon qu'ils ont deux, trois, etc., termes.

On a déjà défini en Arithmétique ce que l'on appelait puissance d'un nombre; en Algèbre on appelle, comme en Arithmétique, *puissance* $n^{\text{ième}}$ d'une quantité le produit de n quantités égales à celle-ci; la deuxième puissance d'une quantité s'appelle aussi *carré* de cette quantité; la troisième *cube*.

Pour indiquer d'une manière abrégée la puissance $n^{\text{ième}}$ de la quantité a, on écrit le nombre n au-dessus de a, ainsi : a^n; le nombre n ainsi placé porte le nom d'*exposant*.

On appelle *coefficient* d'une quantité dans un terme l'ensemble des facteurs de ce terme qui n'entrent pas dans la quantité en question; ainsi, dans le terme $3ab$, $3a$ est le coefficient de b, 3 est le coefficient de ab. Dans $2\frac{b}{a}$, 2 est le coefficient de $\frac{b}{a}$, $\frac{2}{a}$ est le coefficient de b, etc.

On appelle *termes semblables* ceux qui ne diffèrent que par leurs coefficients. On voit par là que la similitude de deux termes est une chose tout à fait relative et dépend des quantités que l'on considère comme coefficients; ainsi $2ab$ et $3ab$ sont termes semblables si l'on considère 2 et 3 comme coefficients. $2a^2b$ et $4ab$ ne sont plus semblables, si l'on ne considère comme coefficients que les facteurs numériques; mais ils le sont encore si l'on considère $2a$ comme coefficient du premier terme et 4 comme coefficient du second.

Nous verrons plus loin que la considération des termes semblables permet de simplifier considérablement le calcul algébrique.

II. — Addition et soustraction des polynômes.

Proposons-nous d'additionner les deux polynômes

$$P = a + b - c + d$$

et

$$Q = g - h + k - i;$$

le résultat cherché est

$$a + b - c + d + Q.$$

Mais pour ajouter la somme Q à $a + b - c + d$, il suffit d'ajouter à cette quantité successivement chacune des parties de Q (Chapitre Ier, V, deuxième principe); on a donc

$$P + Q = a + b - c + d + g - h + k - i.$$

C. Q. F. D.

D'où l'on voit que *pour ajouter ensemble deux poly-*

nômes, il suffit de les écrire l'un à la suite de l'autre sans changer les signes de leurs termes.

Cette règle s'applique évidemment à plus de deux polynômes.

Proposons-nous maintenant de retrancher le polynôme Q du polynôme P.

Retrancher Q de P revient à ajouter à P le polynôme Q changé de signe; la question est donc ramenée à celle-ci : *changer le signe du polynôme* Q. Pour y parvenir, je dis qu'il suffit de changer les signes de chacun de ses termes. En effet, pour trouver la valeur d'un polynôme, il faut ajouter les termes de même signe, retrancher la plus petite des sommes ainsi obtenues de la plus grande, et donner au résultat le signe de la plus grande. Si l'on change alors les signes des termes du polynôme, les sommes qu'il faut retrancher l'une de l'autre pour obtenir la valeur du polynôme changent de signe; la plus grande de ces deux sommes en particulier change de signe, et par suite le polynôme lui-même qui est de même signe que cette dernière somme.

Ceci posé, on voit que *pour retrancher* Q *de* P, *il suffira d'ajouter à* P *le polynôme* Q, *dans lequel on aura eu soin de changer les signes de tous les termes;* ou, ce qui revient au même :

Pour retrancher un polynôme d'un autre, il suffit d'écrire à la suite de celui-ci chacun des termes du polynôme à soustraire changés de signe.

Il est inutile d'ajouter que ces règles bien simples s'appliquent encore au cas où l'un des polynômes considérés se réduirait à un monôme.

III. — Multiplication des polynômes.

Proposons-nous d'abord de multiplier un polynôme

$$P = a - b + c - d$$

par un monôme m.

1° Supposons d'abord P et m positifs, a, b, c, d et m commensurables, m sera une fraction que nous pouvons supposer égale à $\frac{3}{4}$; alors la question est ramenée à prendre les $\frac{3}{4}$ de P. Or, si l'on ajoute quatre polynômes égaux au suivant

$$Q = \frac{a}{4} - \frac{b}{4} + \frac{c}{4} - \frac{d}{4},$$

on retrouve P, en vertu des règles de l'addition des polynômes; donc le polynôme Q est égal à $\frac{P}{4}$. Ajoutons maintenant trois polynômes égaux à Q, le résultat sera égal à trois fois $\frac{P}{4}$, et l'on aura, en vertu des règles de l'addition,

$$\frac{3P}{4} = \frac{3a}{4} - \frac{3b}{4} + \frac{3c}{4} - \frac{3d}{4},$$

ou bien

$$mP = ma - mb + mc - md;$$

d'où l'on voit que pour multiplier P par m, il suffit de multiplier par m chacun de ses termes.

2° Supposons actuellement que P et m restant toujours positifs, a, b, c, d, m puissent prendre des valeurs incommensurables. Désignons par a', b', c', d', m' les nombres commensurables supérieurs à a, b, c, d, m ayant ces nombres pour limites, et par a'', b'', c'', d'', m''

les nombres commensurables inférieurs à a, b, c, d, m ayant ces quantités pour limites. (Si quelqu'un des nombres a, b, c, d, m était commensurable, a par exemple, il faudrait remplacer dans la démonstration a' et a'' par a.) On a évidemment

$$m'(a' - b'' + c' - d'') > m\mathrm{P} > m''(a'' - b' + c'' - d'),$$

ou, en vertu de la règle trouvée tout à l'heure,

$$\begin{aligned} &m'a' - m'b'' + m'c' - m'd'' \\ &\quad > m\mathrm{P} > m'a'' - m''b' + m''c'' - m''d', \end{aligned}$$

et *à fortiori*

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &m'a' - m''b'' + m'c' - m''d'' \\ &\quad > m\mathrm{P} > m''a'' - m'b' + m''c'' - m'd'. \end{aligned} \right.$$

Or les membres extrêmes de cette inégalité diffèrent tous deux de $ma - mb + mc - md$ d'aussi peu que l'on veut. En effet, posons

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A} &= m'a' - m''b'' + m'c' - m''d'', \\ \mathrm{B} &= m''a'' - m'b' + m''c'' - m'd', \\ \mathrm{C} &= ma - mb + mc - md, \end{aligned} \right.$$

on aura

$$\begin{aligned} \mathrm{A} - \mathrm{C} = &(m'a' - ma) + (mb - m''b'') \\ &+ (m'c' - mc) + (m''d'' - md). \end{aligned}$$

Mais $m'a'$ a pour limite ma, $m''b''$ a pour limite mb, etc.; donc les différences entre parenthèses peuvent être rendues aussi petites que l'on veut, et la différence $\mathrm{A} - \mathrm{C}$ par suite aussi. On verrait de même que $\mathrm{C} - \mathrm{B}$ peut être pris moindre que toute quantité donnée; mais, en vertu de la formule (1), $m\mathrm{P}$ reste compris entre A et B qui diffèrent de C d'aussi peu que l'on veut; donc, *à fortiori*, les quantités fixes $m\mathrm{P}$ et C diffèrent l'une de l'autre d'aussi peu que l'on veut. Elles sont donc rigoureusement égales, et l'on a

$$mP = C,$$

ou bien, d'après la formule (2),

$$mP = ma - mb + mc - md.$$

3° Supposons maintenant P négatif et m positif; si nous changeons le signe de P, nous changerons évidemment le signe du produit sans changer sa valeur absolue. Or on change le signe de P en changeant les signes de chacun de ses termes, et l'on a (Chapitre Ier, V, quatrième principe)

$$-P = -a + b - c + d.$$

$-P$ étant positif, on aura, d'après ce qui vient d'être démontré,

$$m(-P) = -ma + mb - mc + md;$$

et, par conséquent, nous trouvons, comme dans le cas où P est positif,

$$mP = ma - mb + mc - md.$$

Il resterait à examiner le cas où P serait positif et m négatif, et celui où m et P seraient négatifs tous deux; le lecteur complétera facilement lui-même la démonstration que nous venons de commencer.

En résumé, *pour multiplier un polynôme par un monôme, il suffit de multiplier chaque terme du polynôme par le monôme, en considérant chaque terme du polynôme comme affecté du signe qui le précède, et en ayant soin d'appliquer la règle des signes.*

Proposons-nous maintenant de faire le produit des deux polynômes

$$P = a - b - c + d,$$
$$Q = m + n - p,$$

le résultat cherché sera

$$aQ - bQ - cQ - dQ;$$

ou, en remplaçant aQ, bQ, cQ,..., par leurs valeurs obtenues en appliquant la règle donnée précédemment,

$$am + an - ap - (bm + bn - bp)$$
$$- (cm + cn - cp) + (dm + dn - dp).$$

Lorsque l'on aura effectué les additions et soustractions indiquées, on voit que le produit se composera : 1° du produit de chacun des termes de Q par le premier terme de P; 2° du produit changé de signe de chacun des termes de Q par le second terme de P, abstraction faite de son signe, ou, ce qui revient au même, du produit de chacun des termes de Q par le second terme de P, en tenant compte de la règle des signes; 3° etc.

Ainsi donc, *pour multiplier entre eux deux polynômes, il suffit de multiplier chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, en tenant compte de la règle des signes, et d'ajouter les résultats ainsi obtenus.*

Considérons maintenant plusieurs polynômes P, Q, R, S,...; si nous voulons en faire le produit, il faudra d'abord multiplier P par Q, le résultat par R, et ainsi de suite. Or PQ est la somme algébrique des termes obtenus en prenant un terme dans P et dans Q de toutes les manières possibles, et en faisant leur produit; PQR sera la somme des termes obtenus en multipliant de toutes les manières possibles un terme de PQ par un terme de R, ou, ce qui revient au même, PQR sera la somme des produits obtenus en prenant pour facteurs un terme dans chacun des polynômes PQR de toutes les manières possibles. En continuant ce raisonnement sur un plus grand nombre de polynômes, on arrive à cette conclusion qui nous sera très-utile :

Le produit de plusieurs polynômes est la somme des produits obtenus en prenant de toutes les manières possibles pour facteurs un terme de chacun des polynômes en question.

IV. — Sur quelques simplifications qui se présentent dans le calcul algébrique.

Il peut arriver, en faisant une addition, une soustraction ou une multiplication, que certains termes du résultat soient semblables; dans ce cas, le résultat se simplifie. En effet, considérons des termes tels que

$$2a^3b, \quad -3a^3b, \quad +5a^3b;$$

si ces termes entrent dans un même polynôme, on peut les écrire l'un à côté de l'autre, et l'on aura évidemment

$$2a^3b - 3a^3b + 5a^3b = (2-3+5)a^3b.$$

Car, en vertu de la règle donnée pour la multiplication des polynômes, le second membre de l'égalité précédente est identique au premier; en sorte que les trois termes considérés se réduisent simplement à $4a^3b$. On conclut de là que :

Règle. — *Pour réduire des termes semblables en un seul, il suffit d'ajouter leurs coefficients en tenant compte des signes, le terme réduit demeurant semblable à ceux dont il dérive.*

Lorsque l'on multiplie entre eux deux monômes, il peut arriver que ces monômes renferment une même lettre;

dans ce cas le résultat se simplifie. En effet, considérons le produit

$$2a^4bc^2 \times 4a^2b^3c^3d;$$

si l'on observe que pour multiplier une quantité par un produit il suffit de la multiplier successivement par chacun des facteurs de ce produit, le résultat cherché devient

$$2a^4 \times b \times c^2 \times 4 \times a^2 \times b^3 \times c^3 \times d,$$

ou, en intervertissant l'ordre des facteurs,

$$2 \times 4 \times a^4a^2bb^3c^2c^3d.$$

Mais ce produit ne changera pas si l'on remplace quelques facteurs par leur produit; si l'on remplace, par exemple, les coefficients 2 et 4 par leur produit 8; si l'on remplace enfin les facteurs, tels que a^4, a^2, par leur produit a^{4+2} ou a^6, qui indique que la lettre a a été prise quatre fois plus deux fois comme facteur; en sorte que le résultat final sera

$$8a^6b^4c^5d.$$

De là on déduit cette règle appelée *règle de la multiplication des monômes*.

Règle. — *Lorsque deux monômes renferment certaines lettres en commun, pour les multiplier entre eux il suffit de faire le produit de leurs coefficients et d'écrire à la suite de ce produit les lettres communes affectées chacune d'un exposant égal à la somme des exposants dont cette lettre est affectée dans les deux facteurs, et les lettres non communes.*

Il va sans dire qu'une lettre qui n'a pas d'exposant est censée porter l'exposant 1; car l'exposant est le nombre qui indique combien de fois cette lettre est prise comme facteur. On pourrait même ajouter déjà qu'une lettre portant l'exposant zéro est égale à 1; car l'exposant zéro indique que cette lettre n'entre pas comme facteur; en sorte qu'écrire a^0 à la suite d'un produit, c'est n'y ajouter aucun facteur ou le facteur 1. Mais nous reviendrons plus loin sur l'exposant zéro.

En s'appuyant sur les règles que nous venons de démontrer, on arrive facilement aux formules suivantes :

$$(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2,$$

ou

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab-b^2,$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

L'usage des parenthèses et des exposants placés en haut de ces parenthèses a déjà été enseigné en Arithmétique; il est donc inutile de l'expliquer ici. Les formules que nous venons d'écrire correspondent à des théorèmes qu'il faut se rappeler, et qui sont d'un usage continuel en analyse :

Le carré de la somme ou de la différence de deux quantités est égal à la somme des carrés de ces quantités, plus ou moins leur double produit.

Le produit d'une somme par une différence de deux termes est égal à la différence des carrés de ces termes.

Voici encore quelques formules à retenir :

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b^2+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$

et que l'on vérifiera sans peine.

V. — Division et fractions algébriques.

La plupart du temps, en Algèbre, la division ne peut que s'indiquer; ainsi il n'existe pas toujours un polynôme quotient de deux autres dans lesquels les lettres conservent des valeurs indéterminées. Nous verrons plus loin à quels symptômes on reconnaît l'existence d'un polynôme quotient.

Quoi qu'il en soit, une division n'étant qu'indiquée, on pourra simplifier les écritures en supprimant des facteurs communs au dividende et au diviseur lorsqu'il y en aura (p. 22).

On appelle *fraction algébrique* le quotient non effectué de deux quantités algébriques; le dividende porte alors le nom de *numérateur*, le diviseur le nom de *dénominateur* de la fraction.

THÉORÈME I. — *Étant données plusieurs fractions, on peut toujours les réduire au même dénominateur, c'est-à-dire trouver des fractions égales aux fractions données et ayant toutes le même dénominateur.*

En effet, il suffit pour cela de multiplier les deux termes de chaque fraction par le produit des dénominateurs des autres; quelquefois l'opération est moins compliquée, ainsi les fractions

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{c}{bd}, \quad \frac{f}{dh}$$

se réduisent au même dénominateur en multipliant les deux termes de la première par dh, ceux de la seconde par h, ceux de la troisième par b.

THÉORÈME II. — *Pour ajouter ou retrancher des fractions, il suffit de les réduire au même dénominateur et d'effectuer, comme en Arithmétique, les opérations sur les numérateurs.*

Considérons les fractions $\frac{a}{m}, \frac{b}{m}, \frac{c}{m}, \ldots$, ayant toutes le dénominateur m; nous avons déjà vu que $\frac{a}{m}$ était égal à $a \times \frac{1}{m}$. On le vérifie du reste aisément en remarquant que $\frac{a}{m}$ et $a \times \frac{1}{m}$ multipliés par m donnent tous deux a; on a donc

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m} \ldots = a \times \frac{1}{m} + b \times \frac{1}{m} - c \times \frac{1}{m} \ldots,$$

ou bien, en considérant a, b, c,..., comme coefficients de termes semblables relativement au terme $\frac{1}{m}$,

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m} \ldots = (a + b - c \ldots) \times \frac{1}{m} = \frac{a + b - c \ldots}{m}.$$

Cette égalité renferme le théorème qu'il s'agissait de démontrer.

Théorème III. — *Le produit de deux fractions est une fraction qui a pour numérateur le produit des numérateurs et pour dénominateur le produit des dénominateurs des fractions proposées.*

En effet, soit à multiplier $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$; une fraction ou quotient, comme on a vu (p. 22), est multiplié par un nombre quand on multiplie le dividende par ce nombre, de sorte que l'on a

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times \frac{c}{d}}{b},$$

et pour la même raison

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{\left(\frac{ac}{d}\right)}{b};$$

mais, pour diviser la fraction $\frac{ac}{d}$ par b, il suffit de multiplier par b son dénominateur; de sorte qu'on a finalement (p. 22)

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — S'il s'agissait de plusieurs facteurs, on aurait

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\times\frac{g}{h}=\frac{ac}{bd}\times\frac{e}{f}\times\frac{g}{h}=\frac{ace}{bdf}\times\frac{g}{h}=\frac{aceg}{bdfh},$$

ce qui généralise le théorème.

Théorème IV. — *Le quotient de deux fractions s'obtient en multipliant la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.*

En effet, soit à diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, le quotient est évidemment

$$\frac{ad}{bc};$$

car, si l'on multiplie cette fraction par $\frac{c}{d}$, on a

$$\frac{adc}{bcd},$$

qui se réduit à $\frac{a}{b}$, en divisant ses deux termes par c et par d. C. Q. F. D.

On donne quelquefois aux fractions le nom de *rapports* et à l'égalité de fractions le nom de *proportion;* les numérateurs portent alors le nom d'*antécédents;* les dénominateurs sont les *conséquents* de la proportion; enfin le premier numérateur et le dernier dénominateur portent le nom d'*extrêmes*, les deux autres termes portent le nom de *moyens*.

On appelle *quatrième proportionnelle* à trois quantités a, b, c une quantité d qui fasse avec celles-ci la proportion

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

On appelle *moyenne proportionnelle* entre deux quantités a et b (ou encore *moyenne géométrique*) une quantité c telle, que l'on ait

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{b};$$

en multipliant par b et par c les deux membres de cette égalité, on trouve

$$ab=c^2.$$

On a généralisé la définition précédente et l'on a appelé *moyenne géométrique* entre a, b, c, d, ... une quantité x telle, que

$$x^n=abcd\ldots,$$

n étant le nombre des facteurs a, b, c, ..., et l'on a réservé le nom de *moyenne arithmétique* à la quantité définie par l'égalité

$$nx=a+b+c\ldots.$$

Lorsque l'on a

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{b},$$

on dit quelquefois que b est une *troisième proportionnelle* à a et c.

THÉORÈME I. — *Dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens; en d'autres termes, de l'égalité*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

on tire

$$ad = bc.$$

Pour cela, il suffit de multiplier par b et d les deux membres de l'égalité donnée.

Théorème II. — *L'égalité*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

entraîne les suivantes :

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}.$$

En effet, la première se déduit de la proposée en divisant l'unité par les deux membres de la proposée; la seconde s'obtient en multipliant les deux membres de la proposée par b, et en les divisant par c; enfin, la dernière s'obtient en multipliant les deux termes de la proposée par d, et en les divisant par a.

Ces résultats peuvent s'énoncer ainsi : *Dans toute proportion,* 1° *on peut remplacer les antécédents par les conséquents, et* vice versâ; 2° *on peut alterner les moyens;* 3° *on peut alterner les extrêmes.*

Théorème III. — *Les égalités*

$$(1) \qquad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots$$

entraînent la suivante :

$$\frac{a}{b} = \frac{ap + a'p' + a''p''\ldots}{bp + b'p' + b''p''\ldots},$$

p, p', p'', ... *désignant des quantités quelconques différentes de zéro.*

En effet, les égalités (1) peuvent s'écrire :

$$\frac{ap}{bp} = \frac{a'p'}{b'p'} = \frac{a''p''}{b''p''} = \ldots;$$

en désignant par q la valeur commune de toutes ces fractions égales, on a

$$ap = bp \times q, \quad a'p' = b'p' \times q, \quad a''p'' = b''p'' \times q, \ldots;$$

d'où l'on déduit, en ajoutant membre à membre ces égalités,

$$ap + a'p' + a''p'' \ldots = (bp + b'p' + b''p'' \ldots)q,$$

et, en divisant par $bp + b'p' + \ldots$ les deux membres de cette dernière formule,

$$q, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{a}{b} = \frac{ap + a'p' + a''p'' \ldots}{bp + b'p' + b''p'' \ldots}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — De l'égalité

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

on déduit en particulier

$$\frac{a}{b} = \frac{a \pm a'}{b \pm b'} \quad \text{ou} \quad \frac{a \pm a'}{a} = \frac{b \pm b'}{b};$$

on en déduit aussi, en alternant d'abord les moyens,

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{a' \pm b'}{a'}, \quad \text{puis} \quad \frac{a \pm b}{a \mp b} = \frac{a' \pm b'}{a' \mp b'}, \ldots$$

Ces formules sont très-utiles et permettent souvent de simplifier considérablement les calculs.

CHAPITRE III.

DES POLYNOMES ORDONNÉS.

I. — Définitions.

On dit qu'un polynôme est *ordonné* par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes d'une même lettre, lorsque les exposants de cette lettre y vont en croissant ou en décroissant depuis le premier terme jusqu'au dernier.

On appelle *degré* d'un terme par rapport à des lettres déterminées la somme des exposants dont ces lettres sont affectées dans ce terme; ainsi $3a^2b$ est du troisième degré par rapport à a et b, du deuxième degré par rapport à a seul, et du premier par rapport à b seul.

On appelle *degré* d'un polynôme le degré de celui de ses termes dans lequel la somme des exposants des lettres par rapport auxquelles on compte le degré est la plus grande.

Un polynôme est dit *homogène* par rapport à plusieurs lettres lorsque tous ses termes sont de même degré.

Il est clair que la somme et la différence de deux polynômes homogènes de même degré sont des polynômes homogènes.

Le produit de deux polynômes homogènes est encore un polynôme homogène dont le degré est égal à la somme des degrés des facteurs.

Cette remarque est d'une grande utilité dans le calcul et permet de vérifier à chaque instant les fautes que l'on peut faire en omettant des lettres ou des exposants : on a très-souvent l'occasion de calculer sur des polynômes homogènes; il faut profiter de cette circonstance toutes les fois qu'on le peut et vérifier que les formules que l'on obtient par multiplication de polynômes homogènes restent homogènes.

Un polynôme du premier degré s'appelle aussi *fonction linéaire*.

II. — Multiplication des polynômes ordonnés.

Toutes les fois que l'on peut ordonner un polynôme, il faut le faire; la symétrie qui en résulte guide beaucoup dans les calculs, et surtout lorsqu'il s'agit de faire le produit de deux polynômes.

Considérons par exemple les deux polynômes ordonnés

$$P = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4,$$
$$Q = 2 - 3x + 4x^2 - 5x^3,$$

et cherchons leur produit; nous suivrons la règle générale, mais nous écrirons sur une première ligne horizontale le produit du polynôme P par le premier terme 2 de Q; nous obtiendrons ainsi un premier produit partiel ordonné; multiplions ensuite le polynôme P par le second terme $-3x$ de Q, nous obtiendrons un second produit partiel ordonné; nous l'écrirons au-dessous du premier, de telle sorte que les termes de même degré se correspondent dans une même colonne verticale, et ainsi de suite : la réduction des termes semblables porte alors sur les termes inscrits dans une même colonne verticale.

On dispose le calcul ainsi qu'il suit :

$$
\begin{array}{l}
1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 \\
\quad 2 - 3x + 4x^2 - 5x^3 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl|rl|rl|rl|rl|rl|rl}
2 + 4 & x & + 6 & x^2 & + 8 & x^3 & + 10 & x^4 & & & & & & \\
- 3 & & - 6 & & - 9 & & - 12 & & - 15 & x^5 & & & & \\
 & & + 4 & & + 8 & & + 12 & & + 16 & & + 20 & x^6 & & \\
 & & & & - 5 & & - 10 & & - 15 & & - 20 & & - 25x^7 & \\
\hline
2 + x & & + 4 & x^2 & + 2 & x^3 & & & - 14 & x^5 & & & - 25x^7, &
\end{array}
$$

en évitant de répéter la partie commune aux divers termes semblables.

La disposition de calcul que nous avons adoptée est surtout avantageuse lorsque les coefficients de la lettre ordonnatrice sont eux-mêmes des polynômes.

Remarque. — *Lorsque le multiplicande, le multiplicateur et le produit sont ordonnés de la même manière par rapport à la même lettre, le premier et le dernier terme du produit sont égaux respectivement aux produits des premiers et des derniers termes des polynômes facteurs.*

En effet, supposons les polynômes ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x; les premiers termes des facteurs sont les termes de degré le plus élevé, leur produit est un terme du produit total, et il est bien évident qu'il est de degré plus élevé que tout autre terme du produit total; par conséquent il ne se réduira avec aucun d'eux et sera le premier terme du produit total. On verrait de même que le produit des derniers termes des facteurs est le dernier terme du produit total.

III. — Division des polynômes ordonnés.

On appelle *polynôme entier en* x ou *fonction en-*

tière de x un polynôme de la forme

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots A_n x^n,$$

dans lequel A_0, A_1, ..., A_n ne contiennent pas x.

On dit qu'un polynôme entier en x est *divisible* par un autre entier en x également, lorsque leur quotient est un polynôme entier en x, quelle que soit la valeur attribuée à x.

Pour $x = 2$, on a

$$\frac{x^2 + x^2 - 1}{x - 1} = x^2 + 2x - 3.$$

Cependant on ne peut pas dire que $x^2 + x - 1$ soit divisible par $x - 1$, parce que cette égalité n'a lieu que pour des valeurs particulières de x; il est facile de voir, en effet, que pour $x = 0$ elle n'a plus lieu, tandis que l'on a, quel que soit x, $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ ou

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1;$$

aussi dirons-nous que $x^2 - 1$ est divisible par $x - 1$....

Si deux monômes renferment les mêmes lettres, leur quotient se simplifie en supprimant des facteurs communs au dividende et au diviseur; ainsi, par exemple, proposons-nous de diviser $8a^5 b^4 c^2 d$ par $-3a^4 b^3 c^5 d^2$; le quotient

$$-\frac{8a^5 b^4 c^2 d f^2}{3a^4 b^5 c^5 d^2 f^2}$$

peut s'écrire en supprimant au dividende et au diviseur quatre fois le facteur a, trois fois le facteur b, deux fois le facteur c, une fois le facteur d, etc.,

$$-\frac{8ab}{3c^3 d}.$$

D'une manière générale, *pour diviser un monôme par un monôme, il faut indiquer la division et supprimer tous les facteurs communs apparents; si, par exemple, une même lettre entre au dividende et au diviseur, elle doit disparaître dans celui de ces deux termes où elle entre avec le moindre exposant, et dans l'autre terme son exposant doit diminuer d'autant d'unités qu'il y en avait dans l'exposant correspondant au premier terme.*

Ceci posé, proposons-nous de diviser le polynôme

$$P = x^5 - 5ax^4 + 10a^2x^3 - 10a^3x^2 + 5a^4x - a^5$$

par le polynôme

$$Q = x^3 - 3ax^2 + 3ax - a^3.$$

Ces deux polynômes sont entiers en x; nous supposerons P divisible par Q, nous appellerons V le quotient, et nous supposerons ce quotient entier et ordonné comme P et Q; P sera le produit de V par Q; donc, en vertu d'une remarque faite au paragraphe précédent, le premier terme de P sera le produit du premier terme de V par le premier terme de Q, donc le premier terme de V sera le quotient du premier terme de P par le premier de Q ou $x^5 : x^3$, c'est-à-dire x^2 :

$$\begin{array}{l|l}
P = x^5 - 5ax^4 + 10a^2x^3 - 10a^3x^2 + 5a^4x - a^5 & x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = Q, \\
\quad - x^5 + 3ax^4 - 3a^2x^3 + a^3x^2 & x^2 - 2ax + a^2 = V, \\
\hline
\qquad - 2ax^4 + 7a^2x^3 - 9a^3x^2 + 5a^4x - a^5 & \\
\qquad + 2ax^4 - 6a^2x^3 + 6a^3x^2 - 2a^4x & \\
\hline
\qquad\qquad + a^2x^3 - 3a^3x^2 + 3a^4x - a^5 & \\
\qquad\qquad - a^2x^3 + 3a^3x^2 - 3a^4x + a^5 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0 \qquad 0 \qquad 0. &
\end{array}$$

Si alors du polynôme P on retranche le produit $x^2 \times Q$ (que nous avons écrit changé de signe immédiatement au-dessous du polynôme P), le reste (qui se trouve inscrit au-dessous du produit x^2Q changé de signe) ne contiendra plus que le produit des termes du premier degré et du terme indépendant de x dans V par le diviseur Q; en raisonnant sur ce reste comme sur le polynôme P, on est conduit à diviser son premier terme par x^3, et ainsi de suite. On déduit de là cette règle :

Règle. — *Pour diviser deux polynômes entiers et ordonnés de la même manière l'un par l'autre : 1° diviser le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur; le quotient ainsi trouvé est le premier terme du quotient total; 2° du dividende total retrancher le produit du diviseur par le premier terme du quotient; on obtient ainsi un premier reste sur lequel on opère comme sur le dividende total, on obtient alors le deuxième terme du quotient, et ainsi de suite.*

On abrége quelquefois les calculs. D'abord on peut remarquer qu'il est inutile d'écrire complétement les restes partiels; on peut se contenter d'abaisser le seul terme dont on va avoir besoin, enfin on peut éviter aussi d'écrire les produits du diviseur par chaque terme du quotient, et faire les soustractions de tête ainsi qu'il suit.

Je reprends l'exemple précédent; j'ai trouvé x^2 pour premier terme du quotient, je multiplie alors le diviseur par x^2, et je m'exprime ainsi : $+x^2$ par $+x^3$ donne $+x^5$, et, pour retrancher, $-x^5$; ce terme détruit le terme x^5 du dividende; $+x^2$ par $-3ax^2$ donne $-3ax^4$, et, pour retrancher, $+3ax^4$; ce terme se réduit avec le terme $-5ax^4$ du dividende et donne $-2ax^4$, et ainsi de suite.

Nous avons supposé que le quotient était un polynôme entier en x; s'il n'en était pas ainsi, en suivant le procédé que nous venons d'indiquer, l'opération ne se terminerait pas ; c'est-à-dire qu'en retranchant du dernier reste le produit du diviseur par le terme du quotient indépendant de x, au lieu de trouver zéro, on trouverait un polynôme de degré inférieur au diviseur. En désignant par R ce polynôme, on aurait évidemment

$$P = VQ + R;$$

car P se compose identiquement de la somme des produits de chacun des termes de V par Q, augmentée de R.

De là on conclut évidemment que si le polynôme P n'est pas divisible par Q, la suite des calculs le montrera, puisque l'on devra être conduit à l'opération, qui consisterait à diviser un terme du polynôme R par un terme de degré plus élevé que lui : le polynôme R auquel on est ainsi ramené porte le nom de *reste de la division de* P *par* Q.

Nous avons supposé les polynômes P, Q, V ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x ; on aurait pu les supposer ordonnés par rapport aux puissances croissantes, et on serait arrivé au même résultat en raisonnant d'une manière analogue ; seulement, le terme indépendant de x dans V aurait été obtenu en divisant le terme indépendant de P par le terme indépendant de Q, etc. Pour donner un exemple de cette manière de procéder, divisons $1 - x - 2x^2$ par $1 + x$, nous raisonnerons comme il suit :

1 divisé par 1 donne 1 ; 1 fois 1 donne 1, et, pour retran-

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -\,x & -\,2x^2 & 1 + x \\ \cline{4-4} & -\,2x & -\,2x^2 & 1 - 2x \\ & 0 & 0 & \end{array}$$

cher, -1 ; -1 et 1 font zéro ; 1 multiplié par x donne x, et, pour retrancher, $-x$; $-x$ et $-x$ font $-2x$. Ainsi le premier reste est $-2x$; abaissons le terme $-2x^2$; $-2x$ divisé par 1 donne $-2x$, second terme du quotient, etc.

Remarque. — Proposons-nous de diviser 1 par $1-x$.

$$
\begin{array}{l|l}
1. & 1-x \\
\hline
\quad x. & 1+x+x^2+\ldots+x^n \\
\qquad x^2 & \\
\qquad\ \cdot & \\
\qquad\quad \cdot & \\
\qquad\qquad \cdot & \\
\qquad\qquad\quad x^n & \\
\qquad\qquad\qquad x^{n+1} &
\end{array}
$$

Cette opération, d'après ce que nous avons dit, ne peut être qu'indiquée; cependant, si l'on applique la règle démontrée dans le cas où l'on a à diviser deux polynômes réellement divisibles l'un par l'autre, on trouve successivement les termes $1, x, x^2, x^3 \ldots$, au quotient, et il est facile de voir que l'opération ainsi prolongée ne se termine pas. Quoi qu'il en soit, si l'on arrête le quotient au terme x^n, on trouve pour reste x^{n+1}, et l'on a identiquement

$$1=(1+x+x^2+\ldots+x^n)(1-x)+x^{n+1}.$$

Ce résultat est une relation qui a lieu quelle que soit la valeur attribuée à x, et qu'il est bon de connaître. Toutes les divisions impossibles conduisent à des quotients qui ne se terminent jamais; car, s'ils se terminaient, on aurait un reste nul, et le dividende serait divisible par le diviseur.

Quand on ordonne par rapport aux puissances décroissantes de x, on trouve des résultats analogues, en continuant à ordonner par rapport aux puissances de $\frac{1}{x}$, le quotient et les restes successifs. L'exemple qui suit fera mieux comprendre ce fait. Divisons 1 par $x-1$.

Nous divisons 1, premier terme du dividende, par x pre-

$$\begin{array}{l|l}
1 & x-1 \\ \hline
\frac{1}{x} & \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3} \\
\quad\frac{1}{x^2} & \\
\quad\quad\cdot & \\
\quad\quad\quad\cdot & \\
\quad\quad\quad\quad\cdot &
\end{array}$$

mier terme du diviseur; nous trouvons $\frac{1}{x}$; de 1 nous retranchons le produit de $x-1$ par $\frac{1}{x}$, il reste $\frac{1}{x}$, etc. On trouve ainsi pour quotient $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots$, et, si l'on s'arrête au terme $\frac{1}{x^n}$, on a

$$1=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{1}{x^n}\right)(x-1)+\frac{1}{x^n}.$$

IV. — Propriétés des polynômes entiers.

Théorème I. — *x^m-a^m est divisible par $x-a$.*

En effet, si l'on divise $x-a$, x^2-a^2, x^3-a^3 par $x-a$, on trouve pour quotients 1, $x+a$, x^2+ax+a^2; on est tenté, par induction, d'admettre que x^m-a^m est divisible par $x-a$ et que le quotient est

$$x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}\ldots+a^m;$$

et, en effet, si l'on multiplie ce polynôme par $x-a$, on retrouve x^m-a^m, ce qui démontre le théorème et fait connaître en même temps le quotient. Voici, du reste, une manière directe de démontrer le théorème en question : si l'on commence la division, on trouve pour premier terme du quotient x^{m-1}, pour reste $ax^{m-1}-a^m$ ou

$a(x^{m-1}-a^{m-1})$. Si donc $x^{m-1}-a^{m-1}$ est divisible par $x-a$, x^m-a^m le sera; or $x-a$ est divisible par $x-a$, donc x^2-a^2 l'est; x^2-a^2 l'étant, x^3-a^3 le sera, et ainsi de suite. C. Q. F. D.

Veut-on avoir le quotient, il suffira de remarquer que

$$x^m-a^m=x^{m-1}(x-a)+a(x^{m-1}-a^{m-1}),$$

ou bien, en divisant par $x-a$ les deux membres de cette égalité,

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}=x^{m-1}+a\,\frac{x^{m-1}-a^{m-1}}{x-a}.$$

Cette formule montre que le quotient de x^m-a^m par $x-a$ s'obtient en multipliant par a le quotient de $x^{m-1}-a^{m-1}$ par $x-a$, et, en ajoutant x^{m-1}, on trouve alors :

Pour $m=2$.. $\dfrac{x^2-a^2}{x-a}=x+a,$

Pour $m=3$.. $\dfrac{x^3-a^3}{x-a}=x^2+ax+a^2,$

....

Pour $m=n$.. $\dfrac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}\ldots+a^{n-1}.$

THÉORÈME II. — *Si le polynôme* P *entier en* x *s'annule quand on y fait* $x=a$, *il est divisible par* $x-a$.

Voici la démonstration que Lagrange donne de ce théorème dans la Note II de son *Traité des équations numériques*.

Soit

$$P=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots A_mx^m;$$

désignons par P′ ce que devient P pour $x=a$, nous aurons

$$P'=A_0+A_1a+A_2a^2+\ldots A_ma^m;$$

en retranchant membre à membre ces égalités, on a

$$(1)\quad P - P' = A_1(x-a) + A_2(x^2-a^2) + \ldots + A_m(x^m-a^m).$$

Or, en vertu du théorème précédent, chacun des termes du second membre de cette égalité est divisible par $x-a$; ce second membre est donc évidemment divisible par $x-a$. Désignons par Q le quotient, on pourra écrire

$$P - P' = Q(x-a).$$

Si donc on suppose P' égal à zéro, ou, ce qui revient au même, si l'on suppose P égal à zéro pour $x=a$, il vient

$$P = Q(x-a),$$

ce qui prouve bien que P est divisible par $x-a$.

On donne ordinairement de ce théorème une autre démonstration généralement attribuée à d'Alembert, et sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir un peu plus loin.

Théorème III. — *Un polynôme en x du degré m ne peut s'annuler pour plus de m valeurs de x, à moins d'être identiquement nul.*

En effet, soit P un polynôme en x du degré m. Si ce polynôme s'annule pour $x=a_1$, nous venons de voir qu'il était divisible par $x-a_1$, et que l'on pouvait poser

$$P = Q_1(x-a_1),$$

Q_1 désignant ici un polynôme du degré $m-1$. Si l'on suppose alors que P s'annule encore pour $x=a_2$, il en sera de même de son égal $Q_1(x-a_1)$; mais si a_2 est différent de a_1, $x-a_1$ ne sera pas nul pour $x=a_2$, et le produit $Q_1(x-a_1)$ ne pourra s'annuler que si $Q_1=0$. Q_1 s'annulant pour $x=a_2$ sera divisible par $x-a_2$, et l'on pourra poser

$$Q_1 = Q_2(x - a_2),$$

Q_2 désignant ici un polynôme de degré $m-2$. Supposons que P s'annule encore pour $x = a_3$, on démontrera, comme tout à l'heure, que Q_1 s'annule aussi pour $x = a_3$; et, en vertu de l'égalité précédente, que Q_2 s'annule également pour $x = a_3$. On pourra donc poser

$$Q_2 = Q_3(x - a_3),$$

Q_3 désignant un polynôme de degré $m-3$. En continuant ainsi, on finira par obtenir une formule telle que

$$Q_{m-1} = Q_m(x - a_m),$$

dans laquelle Q_m désigne une quantité indépendante de x, ou, comme on dit quelquefois, du *degré zéro*.

Si l'on multiplie membre à membre toutes les égalités que nous venons d'écrire, on trouve

$$PQ_1Q_2Q_3\ldots Q_{m-1} = Q_1Q_2\ldots Q_m(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m),$$

ou bien, en supprimant le facteur $Q_1Q_2\ldots Q_{m-1}$ aux deux membres de cette égalité,

$$P = Q_m(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m);$$

et il est bien clair que le polynôme P ne peut plus s'annuler pour aucune valeur de x différente de $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ à moins que Q_m ne soit nul, auquel cas P serait constamment nul, quelle que soit la valeur attribuée à x, ce que l'on exprime en disant que P *est identiquement nul*.

Cette démonstration repose, comme on voit, sur ce que la quantité Q_m ne contient pas x, et, par conséquent, ne peut devenir nulle pour aucune valeur de x, à moins d'être toujours nulle.

Théorème IV. — *Un polynôme identiquement nul,* *ou, d'après le théorème précédent, un polynôme qui s'annule pour un nombre de valeurs de sa variable supérieur à son degré, a ses coefficients nuls.*

En effet, soit

$$P = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m$$

le polynôme en question; ce polynôme, étant nul quel que soit x, sera nul pour $x = 0$. Or, si l'on y fait $x = 0$, ce polynôme se réduit à A_0; donc A_0 est nul. On a donc simplement

$$P = A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m.$$

Mais P étant nul quel que soit x,

$$\frac{P}{x} = A_1 + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^{m-1}$$

sera encore nul pour toutes les valeurs de x, excepté peut-être pour $x = 0$. Mais il est nul pour un nombre de valeurs de x supérieur à son degré, qui est $m - 1$; donc il est certainement nul pour $x = 0$. On en conclut que $A_1 = 0$, et ainsi de suite; donc enfin le polynôme P a tous ses coefficients égaux à zéro. C. Q. F. D.

Théorème V. — *Lorsque deux polynômes* P, Q *entiers en x sont égaux pour plus de m valeurs de x, m désignant le degré de celui de ces polynômes qui a le degré le plus élevé, ces polynômes sont identiquement égaux, c'est-à-dire qu'ils sont toujours égaux et que les coefficients des mêmes puissances de x sont égaux.*

En effet, soient

$$P = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m,$$
$$Q = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_n x^n,$$

les deux polynômes en question; le polynôme

$$P - Q = (A_0 - B_0) + (A_1 - B_1) x + (A_2 - B_2) x^2 + \ldots$$

est du degré m au plus. Or, P étant égal à Q pour plus de m valeurs de x, leur différence $P - Q$ s'annule pour plus de m valeurs de x, et l'on a

$$A_0 - B_0 = 0, \ldots, \quad A_n - B_n = 0, \quad A_{n+1} = 0, \ldots, \quad A_m = 0,$$

ou

$$A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1, \ldots, \quad A_n = B_n, \quad A_{n+1} = 0, \ldots, \quad A_m = 0,$$

ce qui revient à dire que les polynômes sont identiques et de même degré.

Remarque I. — Si les polynômes P et Q étaient égaux pour m valeurs de x et si l'on avait $A_m = B_m$, la différence $P - Q$ serait de degré $m - 1$, et l'on aurait encore $P - Q$ nul pour plus de $m - 1$ valeurs de x; donc

$$A_1 = B_1, \ldots, \quad A_{m-1} = B_{m-1}.$$

Remarque II. — Abel et Cauchy ont tiré un excellent parti du théorème précédent pour généraliser certaines formules reconnues vraies, pour des valeurs entières et positives de certaines lettres, et les étendre à des valeurs quelconques de ces lettres. Il est bien évident, par exemple, que si les polynômes P et Q sont reconnus égaux pour toutes les valeurs entières de x, ils sont égaux pour plus de m valeurs de x, et, par conséquent, identiques et égaux pour les valeurs fractionnaires, positives ou négatives de x. Il est bien évident aussi que si P et Q sont entiers par rapport à plusieurs lettres $x, y, z, \ldots$, et égaux pour toutes les valeurs entières de ces lettres, ils sont encore égaux pour les autres valeurs que l'on peut attribuer à ces lettres. En effet, donnons des valeurs fixes mais entières à $y, z, \ldots$; les polynômes P et Q, égaux pour toutes les valeurs entières de x, le seront pour toutes les valeurs possibles de x : ainsi P et Q sont égaux pour toutes les valeurs de x et les valeurs entières de $y, z\ldots$ Donnons alors à x une valeur quelconque fixe et à z, etc., des valeurs entières fixes, P et Q seront égaux pour toutes les valeurs entières de y, et par suite pour toutes les valeurs imaginables de y; ainsi donc P et Q sont égaux quels que soient x et y et pour toutes les valeurs entières de z. En continuant ainsi, on verrait que P et Q sont égaux pour tous les systèmes de valeurs possibles attribuées à x, y, z....

Enfin, nous pourrions observer que les termes semblables en x, y, z,... ont des coefficients égaux dans P et Q; pour le prouver, il suffit de remarquer que les coefficients de x^i sont égaux dans les deux polynômes, i désignant un entier quelconque inférieur à m pouvant être égal à zéro. Ces coefficients sont des polynômes en y, z,..., égaux quels que soient y, z,...; donc dans ces nouveaux polynômes les coefficients de y^j sont égaux, etc. En continuant ainsi, on finit par trouver deux coefficients indépendants des lettres x, y, z,..., égaux entre eux : ce sont les coefficients de $x^i y^j$,..., et comme i, j,... ne sont assujettis qu'à être moindres que m, il en résulte que tous les coefficients sont égaux de part et d'autre.

V. — Application des principes précédents. — Méthode des coefficients indéterminés.

Nous allons montrer sur un exemple quel parti l'on peut tirer des théorèmes que nous venons d'établir; mais auparavant nous reviendrons sur la définition que nous avons donnée de la division des polynômes entiers pour la généraliser.

Nous avons vu que lorsque l'on essayait de diviser un polynôme U par un polynôme V, on était averti de l'impossibilité de faire l'opération lorsque l'on tombait sur un reste de degré inférieur au diviseur; mais l'opération que l'on fait pour essayer si V divise U conduit à ce résultat important :

Tout polynôme U *peut se décomposer en deux parties dont l'une est le produit d'un polynôme donné* V *par un polynôme* Q, *et dont l'autre est un polynôme* R *de degré inférieur à* U.

Nous allons voir que cette décomposition ne peut se faire que d'une seule manière. En effet, supposons qu'une première opération ayant donné

$$U = VQ + R,$$

on ait trouvé par d'autres moyens

$$U = VQ' + R',$$

R′ étant encore de degré inférieur à V. On en déduirait

$$VQ + R = VQ' + R'$$

ou

$$V(Q - Q') = R' - R.$$

Cette égalité devant subsister quel que soit x, il faut que $V(Q - Q')$ et $R' - R$ soient de même degré, ce qui est impossible, car V est de degré supérieur à R et à R′.

Ceci posé, nous pouvons définir la division une opération qui a pour but, étant donnés un polynôme appelé *dividende* et un autre appelé *diviseur*, de trouver un troisième polynôme appelé *quotient* tel, que multiplié par le diviseur, il reproduise le dividende à un polynôme près de degré inférieur au diviseur, appelé *reste*.

Problème. — *Étant donné un polynôme* P *entier en x, on propose de le diviser par $x - a$.*

Bien que l'on puisse employer la méthode ordinaire, nous allons indiquer une méthode très-féconde, dite *des coefficients indéterminés,* et qui va nous permettre d'arriver plus rapidement au résultat.

Le quotient cherché Q est un polynôme de degré inférieur à P; si donc on a

$$P = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots + A_0,$$

nous pouvons poser

$$Q = B_{m-1} x^{m-1} + B_{m-2} x^{m-2} + \ldots + B_0,$$

$B_0, B_1, \ldots, B_{m-1}$ désignant des coefficients inconnus que nous nous proposons de déterminer. Si nous multiplions Q par $x - a$, nous trouvons

$$\begin{aligned} Q(x-a) = B_{m-1} x^m &+ (B_{m-2} - aB_{m-1}) x^{m-1} \\ &+ (B_{m-3} - aB_{m-2}) x^{m-2} + \ldots - B_0 a; \end{aligned}$$

le reste, que nous désignerons par R, devant être du premier degré. Ceci posé, les polynômes P et $Q(x-a) + R$ sont identiques; on doit donc avoir

$$A_m = B_{m-1}, \quad A_{m-1} = B_{m-2} - aB_{m-1}, \ldots, \quad A_0 = R - aB_0;$$

de là on tire

$$B_{m-1} = A_m, \quad B_{m-2} = A_{m-1} + aB_{m-1}, \ldots, \quad R = A_0 + aB_0.$$

Ces égalités montrent que le premier terme du quotient est égal au premier terme du dividende divisé par x; que le coefficient du second terme du quotient s'obtient en ajoutant au coefficient du second terme du dividende le coefficient du premier terme du quotient multiplié par a; et que, en général, le coefficient d'un terme quelconque au quotient se forme du coefficient du terme précédent et du terme de même rang au dividende d'après la même loi. Le reste se forme du dernier terme du dividende en lui ajoutant le dernier terme du diviseur multiplié par a.

Le reste affecte une forme remarquable que nous allons faire connaître. A cet effet, reprenons l'analyse de Lagrange développée plus haut; désignons par P′ ce que devient P quand on change x en $x - a$.

On a

$$\mathrm{P} - \mathrm{P}' = \mathrm{A}_m (x^m - a^m) + \ldots + \mathrm{A}_1 (x - a);$$

d'où l'on déduit, en divisant par $x - a$ les deux membres de cette égalité,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{P} - \mathrm{P}'}{x - a} = {} & \mathrm{A}_m (x^{m-1} + a x^{m-2} + a^2 x^{m-3} + \ldots + a^{m-1}) \\ & + \mathrm{A}_{m-1} (x^{m-2} + a x^{m-3} + a^2 x^{m-4} + \ldots + a^{m-2}) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \mathrm{A}_1. \end{aligned}$$

Ceci posé, ordonnons le second membre par rapport à x; multiplions ensuite par $x - a$ les deux membres, et ajoutons P′ de part et d'autre, il vient, en désignant par n un nombre entier moindre que m,

$$\begin{aligned} \mathrm{P} = (x - a) [& \mathrm{A}_m x^{m-1} + (\mathrm{A}_{m-1} + \mathrm{A} a_{m-1}) x^{m-2} \\ & + (\mathrm{A}_{n+1} + \mathrm{A}_{n+2} a + \mathrm{A}_{n+3} a^2 + \ldots + \mathrm{A}_m a^{m-n-1}) x^n \ldots] + \mathrm{P}'. \end{aligned}$$

Cette égalité montre que (en vertu de la définition de la division) le polynôme entre crochets est le quotient de P par $x - a$ et que P′ est le reste.

Donc : 1° le reste de la division d'un polynôme P entier en x par $x - a$ s'obtient en changeant dans ce polynôme x en a;

2° Le terme général du quotient, c'est-à-dire le terme en x^n, est

$$x^n (\mathrm{A}_{n+1} + \mathrm{A}_{n+2} a + \mathrm{A}_{n+3} a^2 + \ldots + \mathrm{A}_m a^{m-n-1}).$$

Voici comment d'Alembert établit la première proposition. Soit R le reste de la division de P par $x - a$; soit Q le quotient; R étant de degré inférieur à $(x - a)$ ne contiendra pas x, et l'on aura

$$(1) \qquad \mathrm{P} = (x - a) \mathrm{Q} + \mathrm{R}.$$

Cette égalité ayant lieu quel que soit x, si l'on y fait $x = a$, on trouve

$$P = R;$$

ainsi le reste R est égal à la valeur de P pour $x = a$. On a objecté à cette démonstration que l'égalité (1) n'a été établie que pour les valeurs de x différentes de a; que, par conséquent, on n'a pas le droit d'y faire $x = a$: en effet, la division de deux polynômes ne peut être effectuée que si le diviseur n'est pas zéro. On a fait observer que la relation (1) ayant lieu quel que soit x différent de a, elle a encore lieu pour $x = a$; car deux quantités variables égales ont des limites égales. Mais il restait encore à prouver que l'on obtenait la limite de P pour $x = a$ en y faisant $x = a$; en d'autres termes, il restait à établir que, x variant par degrés insensibles, P ne passait pas brusquement d'une valeur à une autre; or cette question délicate ne sera examinée que beaucoup plus loin.

Le raisonnement de d'Alembert ne peut donc pas être substitué à celui de Lagrange lorsqu'il s'agit d'établir que si P′ est nul P est divisible par $x - a$. Mais à l'endroit où nous sommes arrivés, s'il s'agit simplement de prouver que $R = P'$, on peut le faire aisément en faisant remarquer que les deux polynômes P et $(x - a)Q + R$ étant égaux pour plus de valeurs de x qu'il n'y a d'unités dans les degrés de chacun d'eux, ils le sont quel que soit x, et par conséquent aussi pour $x = a$; donc $R = P'$.

C. Q. F. D.

CHAPITRE IV.

THÉORIE DES RADICAUX ARITHMÉTIQUES.

I. — Définitions.

On appelle *puissance* $n^{ième}$ de A, comme on sait, le produit de n facteurs égaux à A.

On appelle *racine* $n^{ième}$ de A un nombre qui, élevé à la puissance n, reproduit A; cette racine se désigne par le symbole

$$\sqrt[n]{A}.$$

Si le nombre A est positif et s'il n'existe pas de nombre entier ou fractionnaire dont la puissance $n^{ième}$ soit A, on appellera racine $n^{ième}$ de A la limite vers laquelle tendent les fractions croissantes dont la $n^{ième}$ puissance est inférieure à A, ou décroissantes dont la $n^{ième}$ puissance est supérieure à A.

D'après ces conventions, tout nombre positif aura une racine $n^{ième}$ positive et une seule; de plus, il aura une racine négative égale et de signe contraire à sa racine positive si n est pair.

Les racines paires des nombres négatifs n'existent pas; enfin les nombres négatifs ont une racine impaire négative.

Ces théorèmes sont trop faciles à démontrer pour qu'il soit nécessaire de nous y arrêter plus longtemps.

On effectue sur les radicaux des opérations qui ont beaucoup d'analogie avec celles que l'on effectue sur les fractions; nous allons les passer successivement en revue. Nous supposerons toujours les quantités placées sous les radicaux positives; enfin nous ne considérerons que la valeur positive des radicaux, en un mot leur *valeur arithmétique*.

II. — Réduction des radicaux au même indice.

Théorème I. — *Lorsque l'on multiplie par un certain nombre l'indice d'un radical, on en extrait la racine dont l'indice est égal à ce nombre.*

Considérons le radical

$$\sqrt[m]{a}.$$

Multiplions son indice par n, il devient

$$\sqrt[mn]{a}.$$

Or, le produit de mn facteurs égaux à $\sqrt[mn]{a}$ est égal à a; donc le produit de n facteurs égaux à $\sqrt[mn]{a}$ donne un nombre qui, pris m fois comme facteur, reproduit a : ce nombre est donc $\sqrt[m]{a}$. On a donc

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Théorème II. — *Lorsque l'on divise l'indice d'un radical par un de ses sous-multiples, il se trouve élevé à une puissance dont l'exposant est égal à ce sous-multiple.*

Théorème III. — *Lorsque l'on élève la quantité placée sous un radical à une certaine puissance, le radical se trouve élevé à cette puissance.*

En effet, considérons le radical

$$\sqrt[m]{a^n}.$$

Si l'on élève ce radical à la puissance m, on trouve a^n; tandis que $\sqrt[m]{a}$ élevé à la puissance m ne donne que a. Mais le produit de n facteurs égaux à $\sqrt[m]{a}$ élevé à la puissance m donnera a^n; ainsi donc $(\sqrt[m]{a})^n$ et $\sqrt[m]{a^n}$ sont deux nombres (positifs par hypothèse) qui, élevés à la puissance m, deviennent égaux. Ce sont donc les racines $m^{\text{ièmes}}$ d'un même nombre; ce sont donc deux quantités égales; donc enfin

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — Il est bien entendu, comme nous l'avons dit en commençant cette théorie, qu'il ne s'agit ici que de nombres positifs; ainsi il est bien clair que l'on n'a pas

$$\sqrt[2]{1^2} = (\sqrt[2]{1})^2$$

si l'on prend les radicaux négativement.

Théorème IV. — *Lorsque l'on multiplie l'indice d'un radical par un certain nombre et que l'on élève la quantité placée sous le radical à une puissance dont l'exposant est marqué par ce nombre, le radical ne change pas de valeur.*

De là un moyen de comparer deux radicaux. Pour y parvenir, on les réduit au même indice en multipliant l'indice de chacun d'eux par l'indice de l'autre et en élevant la quantité placée sous chaque radical à une puissance dont l'exposant est égal à l'indice de l'autre radical.

S'agit-il, par exemple, de trouver le plus grand des deux nombres

$$\sqrt[5]{4}, \quad \sqrt[7]{6},$$

on réduira les radicaux au même indice, et l'on aura

$$\sqrt[35]{4^7}, \quad \sqrt[35]{6^5}.$$

III. — Multiplication et division des radicaux.

Théorème I. — *On a*

$$\sqrt[m]{A} \times \sqrt[m]{B} = \sqrt[m]{A.B}.$$

En effet, élevons le premier membre de cette égalité à la puissance m, il faudra faire le produit de m facteurs égaux à $\sqrt[m]{A}$ et de m facteurs égaux à $\sqrt[m]{B}$, on obtiendra ainsi AB; donc le premier membre de l'égalité est bien égal à la racine $m^{\text{ième}}$ de AB, c'est-à-dire au second.

Cette démonstration s'applique évidemment à un nombre quelconque de facteurs et l'on en déduit ce que nous savions déjà

$$\left(\sqrt[m]{A}\right)^n = \sqrt[m]{A^n}.$$

Théorème II. — *On a*

$$\sqrt[m]{A} : \sqrt[m]{B} = \sqrt[m]{A:B}.$$

En effet, en multipliant $\sqrt[m]{A:B}$ par $\sqrt[m]{B}$, on trouve $\sqrt[m]{A}$.

Lorsque l'on veut faire le produit ou le quotient de deux radicaux qui n'ont pas le même indice, on commence par les réduire au même indice, après quoi l'opération n'offre plus la moindre difficulté.

Théorème III. — *Si l'on a une suite de rapports égaux*

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots, \tag{1}$$

on a encore

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt[n]{a^n + a'^n + a''^n + \ldots}}{\sqrt[n]{b^n + b'^n + b''^n + \ldots}}.$$

En effet, des formules (1) on tire

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{a'^n}{b'^n} = \frac{a''^n}{b''^n}, \ldots,$$

et par suite (p. 38),

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{a^n + a'^n + a''^n + \ldots}{b^n + b'^n + b''^n + \ldots},$$

c'est-à-dire

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt[n]{a^n + a'^n + a''^n + \ldots}}{\sqrt[n]{b^n + b'^n + b''^n + \ldots}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

IV. — Formule du binôme.

La formule du binôme a pour but de faire connaître le développement de $(x+a)^n$ en polynôme ordonné suivant les puissances de x. Il est bien évident que $(x+a)^n$ est un polynôme en x du degré n; on peut donc poser

$$(1) \quad (x+a)^n = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} + \ldots + A_0,$$

$A_n, A_{n-1}, \ldots, A_0$ étant des coefficients indéterminés. Si dans cette formule on change x en z, il vient

$$(z+a)^n = A_n z_n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_0.$$

Si l'on retranche l'une de l'autre ces deux égalités, on trouve

$$\begin{aligned}&(x+a)^n - (z+a)^n \\ &\qquad = A_n(x^n - z^n) + A_{n-1}(x^{n-1} - z^{n-1}) + \ldots + A_1(x-z).\end{aligned}$$

Or on a

$$(x+a) - (z+a) = x - z.$$

Divisant membre à membre ces deux égalités, on trouve

$$\begin{aligned}&(x+a)^{n-1} + (z+a)(x+a)^{n-2} + \ldots + (z+a)^{n-1} \\ &\quad = A_n(x^{n-1} + zx^{n-2} + \ldots + z^{n-1}) \\ &\qquad + A_{n-1}(x^{n-2} + zx^{n-3} + \ldots + z^{n-2}) + \ldots + A_1.\end{aligned}$$

Cette égalité a lieu en laissant x fixe pour toutes les valeurs possibles de z, excepté peut-être pour $z = x$; car nos calculs n'offrent aucun sens dans ce cas. Néanmoins, comme les deux membres sont deux polynômes entiers en z, égaux pour plus de valeurs de z qu'il n'y a d'unités dans leurs degrés, ils sont égaux quel que soit z, et en particulier pour $z = x$. Si l'on fait alors $z = x$, on trouve

$$n(x+a)^{n-1} = nA_n x^{n-1} + (n-1)A_{n-1}x^{n-2} + \ldots + A_1.$$

Multiplions les deux membres de cette formule par $x + a$, nous trouvons

$$n(x+a)^n = nA_n x^n + [(n-1)A_{n-1} + naA_n]x^{n-1} + \ldots + A_1 a.$$

Or, en multipliant par n les deux membres de (1), on trouve

$$n(x+a)^n = nA_n x^n + nA_{n-1}x^{n-1} + \ldots + nA_0.$$

Or les deux développements que nous trouvons pour $n(x+a)^n$ doivent être identiques; on a donc (p. 52)

$$nA_n = nA_n, \quad nA_{n-1} = (n-1)A_{n-1} + naA_n, \ldots,$$

ou

$$A_n = A_n, \quad A_{n-1} = \frac{n}{1}aA_n, \quad A_{n-2} = \frac{n-1}{2}aA_{n-1}, \ldots.$$

La loi suivant laquelle procèdent ces égalités est évidente, et quand on connaîtra A_n, on calculera successivement A_{n-1}, $A_{n-2}, \ldots$, et l'on aura

$$A_{n-1} = \frac{n}{1}aA_n, \quad A_{n-2} = \frac{n(n-1)}{1.2}a^2A_n,$$

$$A_{n-3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3A_n, \ldots,$$

$$A_{n-\alpha} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha}a^\alpha A_n, \ldots.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la formule (1), il vient

$$(x+a)^n = A_n\left[x^n + \frac{n}{1}ax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)..(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha}a^\alpha x^{n-\alpha} + \ldots + a^n\right].$$

Cette formule devant avoir lieu quel que soit x, on peut supposer $x = 0$; il vient alors

$$a^n = A_n a^n,$$

c'est-à-dire $A_n = 1$; d'où l'on conclut finalement

$$(x+a)^n = x^n + \frac{n}{1}ax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2} + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha}a^\alpha x^{n-\alpha} + \ldots + a^n.$$

Telle est la formule que nous voulions établir.

V. — Puissance $n^{ième}$ d'un polynôme.

Lorsque, dans un polynôme, tous les termes se forment d'après une même loi, c'est-à-dire en attribuant dans un même terme et à une même lettre les valeurs entières successives $m, m+1, m+2, \ldots, m'$, on le représente à l'aide d'une notation abrégée qui consiste à placer le terme qui sert à former tous les autres après la lettre grecque $\sum$, au-dessus et au-dessous de laquelle on écrit m et m'; ainsi

$$\sum_{n=m}^{n=m'} a_n$$

représentera la quantité

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m'},$$

et on lira *somme ou sigma de $n=m$ jusqu'à $n=m'$ de a_n*. La formule du binôme, en faisant usage de la notation en question, pourra s'écrire

$$(x+a)^n = x^n + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \frac{n(n-1)\ldots(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha} a^\alpha x^{n-\alpha}$$

On se sert aussi de la notation abrégée

$$\prod_{n=m}^{n=m'} a_n$$

pour désigner le produit $a_m a_{m+1} a_{m+2} \ldots a_{m'}$; de sorte que la formule du binôme peut encore s'écrire

$$(x+a)^n = x^n + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \prod_{\mu=1}^{\mu=\alpha} \frac{n-\mu+1}{\mu} a^\alpha x^{n-\alpha}.$$

Proposons-nous actuellement de trouver le développement de $(a+b+c+\ldots)^n$; dans la formule du binôme, le terme général

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha} a^\alpha x^{n-\alpha}$$

peut s'écrire, en multipliant et en divisant par $1.2.3\ldots(n-\alpha)$,

$$\frac{1.2.3.4\ldots n}{1.2.3\ldots\alpha.1.2.3\ldots(n-\alpha)} a^\alpha x^{n-\alpha}.$$

Si alors nous changeons x en $x+b$, ce terme deviendra

$$\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots\alpha.1.2.3\ldots(n-\alpha)} a^\alpha (x+b)^{n-\alpha},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{\beta=0}^{\beta=n} \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots\alpha.1.2.3\ldots(n-\alpha)} \times \frac{1.2.3\ldots(n-\alpha)}{1.2.3\ldots\beta.1.2.3\ldots(n-\alpha-\beta)} a^\alpha b^\beta x^{n-\alpha-\beta}.$$

En convenant de remplacer $1.2.3\ldots\beta$ par 1 quand on fait $\beta = 0$, cette formule peut encore s'écrire

$$\sum_{\beta=0}^{\beta=n} \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots\alpha.1.2.3\ldots\beta.1.2.3\ldots(n-\alpha-\beta)} a^\alpha b^\beta x^{n-\alpha-\beta},$$

et la quantité écrite sous le signe $\sum$ représente le terme général du développement de $(a+b+x)^n$; si nous changeons alors x en $x+c$, et ainsi de suite, il est facile de voir que l'on arrive à la formule générale

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &(a+b+c+\ldots+l)^n \\ &\quad = \sum \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots\alpha\ 1.2.3\ldots\beta\ 1.2.3\ldots\gamma\ 1.2.3\ldots\lambda} a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda, \end{aligned} \right.$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$, telles que $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda = n$, en convenant toujours de remplacer $1.2.3\ldots m$ par 1 toutes les fois que l'on a $m = 0$.

VI. — Racines des polynômes.

On dit qu'un polynôme entier ordonné par rapport à x

$$P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

est *une puissance* $m^{\text{ième}}$ *parfaite,* lorsqu'il existe un polynôme

$$Q = b_i x^i + b_{i-1} x^{i-1} + \ldots + b_0$$

entier qui, élevé à la puissance m, reproduit P.

Proposons-nous de reconnaître si un polynôme est une puissance $m^{ième}$ parfaite, et dans ce cas cherchons sa racine. Considérons le polynôme

$$P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0;$$

si sa racine $m^{ième}$ existe, désignons-la par

$$Q = b_i x^i + b_{i-1} x^{i-1} + \ldots + b_0.$$

Appliquons au polynôme Q la formule que nous avons démontrée au paragraphe précédent, nous aurons

$$Q^m = b_i^m x^{mi} + \frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots(m-1)} b_i^{m-1} b_{i-1} x^{mi-1} + \ldots,$$

ou bien

$$Q^m = b_i^m x^{mi} + m b_i^{m-1} b_{i-1} x^{mi-1} + \ldots$$

En identifiant les polynômes P et Q^m, on trouve

$$b_i^m x^{mi} = a_n x^n,$$

$$m b_i^{m-1} b_{i-1} x^{mi-1} = a_{n-1} x^{n-1}.$$

De la première de ces formules on conclut que :

1° $mi = n$ ou $i = \frac{n}{m}$; donc n doit être divisible par m : supposons qu'il en soit ainsi;

2° b_i est la racine $m^{ième}$ de a_n.

De la seconde formule on tire

$$b_{i-1} = \frac{1}{m} \cdot \frac{a_{n-1}}{b_i^{m-1}} = \frac{1}{m} \frac{a_{n-1}}{b_i^m} b_i,$$

ou

$$b_{i-1} = \frac{1}{m} \frac{a_{n-1}}{a_n} b_i.$$

Supposons que l'on ait calculé b_i et b_{i-1}; du polynôme P on retranchera $(b_i x^i + b_{i-1} x^{i-1})^m$, le reste sera composé comme il suit :

$$m(b_i x^i + b_{i-1} x^{i-1})^{m-1}(b_{i-2} x^{i-2} + \ldots + b_0) + \ldots.$$

Or, dans cette expression, le terme du degré le plus élevé est

$$m b_i^m b_{i-2} x^{mi-2};$$

en l'égalant au terme du degré le plus élevé dans le résultat trouvé directement et que nous désignerons par c, on trouve

$$b_{i-2} = \frac{c}{m b_i^m b_{i-2}}.$$

Connaissant b_{i-2}, on retranchera du polynôme P la quantité

$$\mathrm{P} = (b_i x^i + b_{i-1} x^{i-1} + b_{i-2} x^{i-2})^m,$$

et l'on continuera ainsi jusqu'à ce que l'on tombe sur un reste nul ou sur une soustraction impossible à effectuer.

VII. — Cas de la racine carrée.

Le cas de la racine carrée étant le plus simple, nous insisterons davantage sur lui, et d'abord nous ferons observer que l'on a

$$\begin{aligned}&(a+b+c+\ldots+l)^2\\ &\quad = a^2 + 2ab + 2bc^2 + \ldots + b^2 + 2bc + \ldots + c^2 + \ldots + l^2.\end{aligned}$$

Cette formule s'obtient en faisant $n=2$ dans la formule (1), p. 25, ou bien encore directement, en observant que

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2,\\ (a+b+c)^2 &= a^2 + 2(b+c)a + (b+c)^2\\ &= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Le carré d'un polynôme se compose donc, comme on voit, de la somme des carrés de ses termes et de leurs doubles produits.

Ceci posé, proposons-nous d'extraire la racine carrée du polynôme

$$P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0.$$

Si nous désignons par

$$Q = b_i x^i + b_{i-1} x^{i-1} + \ldots + b_0$$

la racine, nous trouverons, comme tout à l'heure,

$$b_i = \sqrt{a_n}, \quad b_{i-1} = \frac{1}{2} \frac{a_{n-1}}{b_i}.$$

Nous retrancherons de P la quantité $(b_i x^i + b_{i-1} x^{i-1})^2$, nous obtiendrons enfin b_{i-2} comme tout à l'heure; mais au lieu de retrancher de P le carré de

$$b_i x^i + b_{i-1} x^{i-1} + b_{i-2} x^{i-2},$$

nous nous contenterons de retrancher du premier reste que nous avons obtenu la quantité

$$2 b_{i-2} x^{i-2} (b_i x^i + b_{i-1} x^{i-1}) + b_{i-2}^2 (x^{i-2})^2;$$

et ainsi de suite. Une simplification analogue pourrait sans doute être apportée dans le calcul de la racine $m^{ième}$, mais les calculs exigeraient une grande attention de la part de celui qui se livrerait à ce genre de spéculations.

VIII. — Remarques.

Nous avons supposé que les polynômes dont nous cherchions les racines étaient ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre; l'hypothèse contraire aurait pu être adoptée : elle conduit à cette conclusion :

L'exposant du terme du degré le moins élevé d'une puissance $n^{ième}$ exacte doit être zéro, n ou un multiple de n.

Il est souvent avantageux de modifier la marche que nous avons suivie ainsi qu'il suit :

On développe l'expression Q^n par la formule (1) de la p. 67; on identifie ensuite le polynôme P avec le développement de Q^n. On a ainsi n égalités qui permettent, à l'aide de procédés que nous étudierons plus loin, de déterminer $b_0, b_1, \ldots, b_i$.

Application. — *Trouver la condition pour que*

$$ax^2 + bx + c = P$$

soit un carré parfait.

L'expression précédente ne peut être que le carré d'un polynôme du premier degré. Posons alors

$$ax^2 + bx + c = (mx + n)^2,$$

ou bien

$$ax^2 + bx + c = m^2x^2 + 2mnx + n^2;$$

on en déduit

$$a = m^2, \quad b = 2mn, \quad c = n^2.$$

De ces formules on tire sans difficulté

$$b^2 = 4ac.$$

Cette relation est donc nécessaire pour que le polynôme P soit un carré parfait : elle est suffisante. En effet, alors on a

$$P = ax^2 + 2\sqrt{ac}\,x + c,$$

ou

$$P = (\sqrt{a})^2 x^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{c}\,x + (\sqrt{c})^2,$$

ou

$$P = (\sqrt{a}\,x + \sqrt{c})^2.$$

EXERCICES.

Vérifier les formules

1. $$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(bc-ad)^2$$
$$= (ac-bd)^2+(bc+ad)^2.$$

(LÉONARD DE PISE.)

2.
$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2) = (aa'+bb'+cc'+dd')^2$$
$$+(ab'-ba'+cd'-dc')^2$$
$$+(ac'-bd'+ca'-db')^2$$
$$+(ad'+bc'-cb'+da')^2.$$

(EULER.)

3. $$(p^2-aq^2-br^2+abs^2)(p'^2-aq'^2-br'^2+abs'^2)$$
$$=(pp'+aqq'\pm brr'\pm abss')^2$$
$$-a(pq'+p'q\pm ars'\pm ar's)^2$$
$$-b(pr'-aqs'\pm rp'\mp asq')^2$$
$$+ab(qr'-ps'\pm p's\mp rq')^2.$$

(LAGRANGE.)

4.
$$\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)(-a+b+c+d)+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)(a-b+c+d)$$
$$+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)(a+b-c+d)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)(a+b+c-d)=16.$$

5. $$a^2+b^2 \geqq 2ab.$$

6. $a^n+a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+1>0$, pour n pair.

7. $\dfrac{a+b+c+\ldots+l}{n}$; n désignant le nombre des quantités a, $b,\ldots,l$ est ce que l'on appelle *la moyenne arithmétique* de ces quantités; elle est comprise entre la plus grande et la plus petite d'entre elles.

$\sqrt[n]{abc\ldots l}$ est leur moyenne géométrique; elle est aussi comprise entre la plus grande et la plus petite d'entre elles.

CHAPITRE V.

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

I. — Principes généraux.

Lorsque, dans une égalité, les deux membres sont égaux, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres, cette égalité porte le nom d'*identité;* telles sont, par exemple, les égalités

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$
$$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2.$$

Lorsque, au contraire, l'égalité n'a lieu que pour certaines valeurs des lettres qu'il s'agit de déterminer, elle porte le nom d'*équation;* les valeurs des lettres qui rendent les deux membres réellement égaux portent le nom de *racines* de l'équation. Quoi qu'il en soit, on confond souvent dans le langage les mots *égalité, équation;* au fond cela n'a pas grand inconvénient.

Théorème I. — *On ne change pas les racines d'une équation en ajoutant une même quantité aux deux membres.*

En effet, considérons l'équation

$$A=B. \tag{1}$$

Soient x, y, z,... les inconnues, ou si l'on veut les lettres dont on doit déterminer la valeur pour rendre A réellement égal à B; il est bien évident que les systèmes de valeurs de x, y, z,..., qui rendent A égal à B, rendront encore $A + m$ égal à $B + m$; que réciproquement les systèmes de valeurs qui rendent $A + m$ égal à $B + m$ rendront encore A égal à B : en d'autres termes, l'équation considérée a mêmes racines que

$$A + m = B + m. \tag{2}$$

Cette règle comporte une exception : si la quantité m cessait d'être définie algébriquement pour des valeurs de x, y, z,... qui rendent A égal à B, l'équation (2) pourrait ne plus admettre les racines de l'équation (1).

Corollaire. — Le signe de m ayant été supposé quelconque, on peut dire que l'on ne change pas les racines d'une équation en retranchant une même quantité aux deux membres.

Théorème II. — *On n'altère pas les racines d'une équation en multipliant ses deux membres par une même quantité ne contenant pas les inconnues.*

En effet, considérons l'équation

$$A = B;$$

si l'on multiplie par m les deux membres de cette égalité, il est bien clair que si pour un système quelconque de valeurs des inconnues on a $A = B$, on aura encore $Am = Bm$; et réciproquement, si l'on a $Am = Bm$, on aura pour les mêmes valeurs des inconnues $A = B$. Il y a cependant un cas d'exception : si, en effet, A était différent de B, on pourrait avoir Am égal à Bm si m pouvait passer par zéro; or il n'y aura rien à craindre à cet égard si m ne contient pas les inconnues et si l'on ne choisit pas le facteur m égal à zéro, ce qui n'aurait aucun but raisonnable.

Nous allons montrer sur un exemple que, en multipliant par un même facteur les deux membres d'une équation, on peut introduire de nouvelles racines. L'équation

$$x = 1$$

admet évidemment la racine 1 et la racine 1 seulement. En multipliant par $x - 2$ les deux membres, on a

$$(x - 2)x = x - 2,$$

et il est facile de voir que la nouvelle équation admet la racine $x = 2$, cela tient à ce que le facteur $x - 2$ passe par zéro pour $x = 2$. En général, *quand on multiplie par m les deux membres d'une équation, on introduit dans cette équation les solutions de l'équation* $m = 0$.

En effet, les systèmes de valeurs des inconnues $x, y, z,\ldots$, qui rendent Am égal à Bm, rendront A égal à B ou m égal à zéro; donc ils appartiennent à l'une des deux équations

$$A = B, \quad m = 0.$$

Si cependant, en supposant $m = 0$, A et B cessaient d'être algébriquement définis, il est clair que $Am = Bm$ n'entraînerait pas $m = 0$, car on ne pourrait pas dire que Am et Bm sont nuls si A et B n'existaient pas. Pour me faire comprendre, je choisis un exemple : l'équation

$$\frac{1}{x} = 1$$

admet la racine $x = 1$ et n'admet évidemment que celle-là, puisque pour $x \gtrless 1$ on a $\frac{1}{x} \lessgtr 1$. Multiplions par x les deux membres de cette équation, nous n'introduisons pas pour cela la racine $x = 0$, parce que $\frac{1}{x}$ n'existe plus, en un mot n'est plus défini en supposant le diviseur x égal à zéro, et effectivement l'équation en question devient

$$1 = x$$

quand on multiplie par x ses deux membres.

De même l'équation $A = B$ pourrait être satisfaite pour certaines valeurs de x, y, z,..., sans que

$$Am = Bm$$

pût être satisfaite pour les mêmes valeurs de x, y,...; car m pourrait n'être plus défini pour les valeurs de x, y, z,..., qui rendent A égal à B.

En résumé, quand on multiplie les deux membres d'une équation par une même quantité, on ne change pas les racines si cette quantité est indépendante des inconnues; si au contraire le multiplicateur en question contient les inconnues, il peut se faire que l'on change les racines, que l'on en introduise de nouvelles, ou enfin que l'on en supprime.

Théorème III. — *On peut diviser par une même quantité les deux membres d'une équation sans changer les racines, pourvu que cette quantité ne contienne pas les inconnues.*

Ce théorème au fond revient au précédent et donne lieu aux mêmes remarques, si l'on observe que multiplier par $\frac{1}{m}$ et diviser par m sont deux opérations équivalentes.

Théorème IV. — *Lorsque deux équations admettent les mêmes racines, l'équation que l'on obtient en les ajoutant ou en les retranchant membre à membre peut remplacer l'une quelconque d'entre elles.*

En effet, considérons les deux équations en x, y, z,...,

$$A = B, \tag{1}$$

$$C = D; \tag{2}$$

les systèmes de valeurs de x, y, z,..., qui rendent à la fois A égal à B et C égal à D, rendent A + C égal à B + D, et réciproquement les systèmes qui satisfont à l'équation

$$A + C = B + D, \tag{3}$$

et à l'une quelconque des équations (1) ou (2), satisfont à l'autre.

Remarques. — On peut évidemment aussi remplacer un système de n équations par $n - 1$ d'entre elles, et celle que l'on obtient par l'addition des autres effectuée membre à membre; il est bien évident aussi que la différence effectuée membre à membre de deux équations peut remplacer l'une quelconque d'entre elles, etc.

Théorème V. — *En général, on ne change pas les racines d'un système d'équations quand on remplace l'une d'elles par celle que l'on obtient en les multipliant membre à membre.*

Il est bien évident, en effet, que si un certain système de valeurs des inconnues x, y, z,... rend identiques les équations

$$A = B, \quad C = D, \quad E = F, \ldots,$$

le même système de valeurs rendra identique l'équation

$$A \times C \times E \ldots = B \times D \times F \times \ldots,$$

et réciproquement, de cette équation combinée avec

$$C = D, \quad E = F, \ldots,$$

on déduira $A = B$. Mais cette règle est soumise à des exceptions; ainsi, par exemple, l'équation

$$AC = BD,$$

jointe à l'équation

$$A = B,$$

entraîne non-seulement l'équation

$$C = D,$$

mais encore, si A et D peuvent passer par zéro, l'équation

$$A = D.$$

C'est ainsi que les équations

$$x - y = 0, \quad x + y = 2,$$

qui n'admettent évidemment que la solution $x = y = 1$, multipliées membre à membre, fournissent l'équation

$$x^2 - y^2 = 0,$$

qui, combinée avec $x - y = 0$, ne peut pas remplacer

$$x + y = 0;$$

car le système

$$x^2 - y^2 = 0, \quad x - y = 0$$

admet une infinité de solutions, à savoir toutes les valeurs possibles pour x, à condition que les valeurs correspondantes de y auront une valeur absolue égale à celle de x. Nous ne pousserons pas plus loin la théorie des transformations que l'on peut faire subir aux équations; l'usage en fera connaître d'autres soumises en général aux mêmes restrictions que celles dont nous venons de parler.

II. — Usage des principes précédents.

Résoudre une équation ou un système d'équations, c'est chercher leurs racines.

Lorsqu'une équation est de la forme

$$P = Q,$$

P et Q désignant des polynômes entiers de degré m par rapport aux inconnues, on dit qu'elle est *du degré m*. Lorsque l'un des polynômes P, Q est de degré inférieur à m, l'autre restant du degré m, on dit encore que l'équation est du degré m.

Pour résoudre une équation ou un système d'équations, on commence en général par effectuer les opérations indiquées : on ramène de cette façon les deux membres à être aussi simples que possible; on chasse ensuite les dénominateurs, ce qui se fait en multipliant les deux membres de chaque équation par le produit des dénominateurs qui entrent dans ses deux membres.

Il peut se faire ainsi que l'on altère les racines : il faudra discuter les résultats afin d'étudier l'effet produit sur le système que l'on cherche à résoudre. On fait ensuite passer les termes qui contiennent les inconnues dans un même membre et les termes indépendants des inconnues dans l'autre; on fait passer un terme d'un membre d'une équation dans un autre en changeant son signe. Cette opération revient, en effet, à retrancher aux deux membres de l'équation une même quantité égale au terme en question; enfin, s'il y a lieu, on réduit les termes semblables.

La règle que nous venons de donner est une règle générale et qui bien entendu n'a rien d'absolu. Nous avons dit que pour chasser les dénominateurs d'une équation il fallait multiplier les deux membres par le produit des dénominateurs; il suffit d'en multiplier les deux membres par le plus petit multiple des dénominateurs dans lesquels chaque lettre sera considérée comme représentant un facteur premier.

Quelquefois on conserve à dessein dans une équation certains dénominateurs; mais on peut en faire disparaître d'autres. Pour faire disparaître un dénominateur, il suffit évidemment de multiplier les deux membres de l'équation par ce dénominateur, ce qui se fait en multipliant par le dénominateur en question tous les termes qui ne le contiennent pas et en l'effaçant dans les termes qui le contiennent.

Pour donner une application des principes précédents, nous nous proposerons de résoudre l'équation

$$\frac{x}{x+1} + 3x = 4(x-1) - \frac{6x-7}{6}.$$

Chassons les dénominateurs en multipliant par 6 et par $x+1$, il vient

$$6x + 18x(x+1) = 24(x-1)(x+1) - (6x-7)(x+1).$$

En multipliant par $x+1$, nous avons pu introduire la solution $x = -1$ de l'équation

$$x + 1 = 0.$$

Mais pour $x = -1$ le premier membre de l'équation proposée n'est plus défini, car il contient le terme $\frac{x}{x+1}$ ou $\frac{-1}{0}$; en sorte qu'il peut se faire que nous n'ayons pas introduit de nouvelle solution : la suite nous l'apprendra.

Si nous effectuons les produits indiqués, il vient

$$6x + 18x^2 + 18x = 24x^2 - 24 - 6x^2 + x + 7;$$

réduisons les termes semblables, nous aurons

$$18x^2 + 24x = 18x^2 + x - 17.$$

Si nous faisons passer dans le premier membre les termes qui contiennent l'inconnue, il vient

$$23x = -17,$$

et en divisant par 23 les deux membres, on a

$$x = -\frac{17}{23};$$

nous ne retrouvons pas la solution $x = -1$; on en conclut que $x = -\frac{17}{23}$ satisfait à l'équation proposée, ce que l'on peut du reste vérifier directement.

Nous allons voir maintenant comment on simplifie, à l'aide d'artifices de calcul, la règle générale que nous avons donnée. Proposons-nous de résoudre l'équation

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x+7}{x+3}.$$

S'il y a égalité entre les deux membres de cette équation pour une certaine valeur de x, nous pourrons de chaque numérateur retrancher son dénominateur, diviser les numérateurs par les résultats, et il y aura encore égalité pour la même valeur de x (*voir* p. 39). Il vient ainsi

$$\frac{x+1}{2} = \frac{x+7}{4};$$

et en multipliant par 4 les deux membres de cette égalité,

$$2x + 2 = x + 7.$$

Faisons passer les termes en x dans le premier membre, les termes connus dans le second, il vient

$$2x - x = 7 - 2 \quad \text{ou} \quad x = 5,$$

ce qu'il est facile de vérifier.

III. — Des équations du premier degré à une inconnue.

Toute équation du premier degré à une inconnue peut être ramenée à la forme

$$(1) \qquad Ax = B,$$

A et B étant deux quantités indépendantes de x, pour cela il suffit de faire passer dans le premier membre les termes qui contiennent l'inconnue, et dans le second ceux qui ne la contiennent pas.

On résout immédiatement l'équation (1) en divisant les deux membres par A, ce qui donne

$$x = \frac{B}{A},$$

et l'équation (1) n'a pas d'autre solution.

On peut donc dire que *toute équation du premier degré à une inconnue a toujours une solution et une seule.*

Si B était égal à zéro, il est clair que l'on aurait $x = 0$. Quelques auteurs examinent le cas où $A = 0$, mais alors dans l'équation x n'existe plus, l'équation n'est plus du premier degré; elle se réduit à une égalité absurde $0 = B$, ou à une identité si l'on a $B = 0$. On peut être conduit à de semblables résultats en cherchant à résoudre certaines équations absurdes ou certaines identités que l'on pose comme équations.

Par exemple, quel que soit x, nous avons vu que l'on avait

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1;$$

si l'on regarde actuellement cette identité comme une équation, on trouve

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2x + 1,$$

ou, faisant passer les termes inconnus dans le premier membre, les termes connus dans le second,

$$0 \times x^2 + 0 \times x = 0,$$

ce qui est une identité. Cela tient à ce que l'on est parti d'une identité, ou si l'on veut d'une équation satisfaite quel que soit x; si au contraire on avait posé

$$(2) \qquad (x+1)^2 = x^2 + 2x,$$

on aurait trouvé

$$0 \times x^2 + 0 \times x = -1,$$

résultat absurde et qui prouve que l'équation (2) n'a pas de racines. Et, en effet, comme $(x+1)^2$ est égal à x^2+2x+1, il est impossible qu'il soit égal à x^2+2x, c'est-à-dire au même nombre diminué de 1.

Si l'on écarte donc le cas où $A=0$, c'est-à-dire où l'équation (1) n'est pas une équation, on peut dire que *toute équation du premier degré à une inconnue admet une racine et une seule.*

IV. — Des équations du premier degré a plusieurs inconnues.

Une seule équation à plusieurs inconnues suffit très-rarement à la détermination de ces inconnues. En effet, si l'on donne à toutes les inconnues sauf une des valeurs arbitraires, on peut en général résoudre par rapport à l'inconnue restante l'équation en question; ce qui montre que l'on peut ainsi trouver autant de solutions que l'on veut.

Bien qu'il n'en soit pas toujours ainsi, nous verrons qu'un système de n équations du premier degré à n inconnues admet ordinairement une solution et une seule. Toutes les fois qu'il n'en admet pas, on dit que le système est *incompatible*; toutes les fois qu'il en admet deux ou plus, on dit qu'il est *indéterminé*.

Puisqu'un système de n équations à n inconnues admet ordinairement une solution, un système de $n-1$ équations, ou moins, à n inconnues, doit être insuffisant, puisque l'on peut choisir au moins une inconnue arbitrairement, et qu'il reste alors assez d'équations pour trouver les valeurs des inconnues restantes.

De même, un système de $n+1$ équations, ou plus, à n inconnues, ne peut pas en général être résolu; car n quelconques d'entre elles admettant une solution et une seule, cette solution ne conviendra pas toujours à un autre système formé de n des équations données.

Lorsqu'un système d'équations du premier degré admet deux solutions, il en admet une infinité, et c'est ce qui fait dire qu'il est indéterminé.

En effet, considérons par exemple le système à deux inconnues

$$ax+by=c, \quad a'x+b'y=c';$$

supposons-le satisfait pour $x=\alpha$, $y=\beta$ et pour $x=\alpha'$, $y=\beta'$; supposons α différent de α', β pouvant être égal à β' ou différent : on aura, par hypothèse,

$$a\alpha+b\beta=c, \quad a\alpha'+b\beta'=c.$$

Si l'on multiplie la première de ces deux équations par k, la seconde par $1-k$, et si l'on ajoute, on trouve

$$a[k(\alpha-\alpha')+\alpha']+b[k(\beta-\beta')+\beta]=c;$$

on aurait de même

$$a'[k(\alpha-\alpha')+\alpha']+b'[k(\beta-\beta')+\beta']=c',$$

ce qui prouve que $x = k(\alpha - \alpha') + \alpha'$, $y = k(\beta - \beta') + \beta'$ est encore une solution du système proposé, et comme k est arbitraire, on voit que x peut prendre une infinité de valeurs différentes, β peut être égal à β', et dans ce cas y a une valeur unique; mais cette valeur, combinée avec les valeurs de x, n'en constitue pas moins autant de solutions différentes.

Éliminer une inconnue entre plusieurs équations, c'est remplacer ces équations par d'autres qui ne contiennent plus cette inconnue, et qui cependant admettent les mêmes solutions pour les inconnues restantes. Nous allons exposer diverses méthodes d'élimination.

1° *Élimination par substitution.* — L'élimination par substitution consiste à résoudre l'une des équations par rapport à l'une des inconnues et à porter la valeur trouvée dans les autres équations, qui alors ne contiennent plus cette inconnue. Voici un exemple de cette méthode. Considérons les équations

$$(1) \qquad 3x + 8y = 25,$$

$$(2) \qquad 12x - 7y = 22.$$

Tirons de (1) la valeur de x, en supposant y connu, il vient

$$(3) \qquad x = \frac{25 - 8y}{3},$$

et l'équation (3), en vertu des principes exposés (p. 73), peut remplacer l'équation (1). Si alors on remplace x par $\frac{25 - 8y}{3}$ dans l'équation (2), on trouve une équation qui ne contient plus y et qui peut remplacer l'équation (2) ou l'équation (3), c'est-à-dire l'équation (1). En effet, remplacer x dans l'équation (2) par sa valeur tirée de l'équation (3) revient à écrire l'équation (3) d'abord sous la forme

$$x - \frac{25 - 8y}{3} = 0,$$

puis à multiplier par 12 ses deux membres et à la retrancher de l'équation (2). La méthode de substitution n'altère donc pas les racines et peut être employée dans tous les cas; le calcul s'achève facilement et l'équation (2) devient, après la *substitution* de la valeur de x tirée de l'équation (3),

$$(4) \qquad 12\,\frac{25 - 8y}{3} - 7y = 22;$$

d'où l'on tire, en résolvant cette équation à une inconnue par rapport à y,

$$(5) \qquad y = 2.$$

L'équation (5), qui admet les mêmes racines que l'équation (4), peut remplacer les équations (1) ou (2); si alors on porte la valeur obtenue pour y dans l'une de ces équations, on élimine y et l'on trouve une équation à une inconnue en x qui permet de calculer la valeur de cette inconnue. Si l'on fait $y = 2$ dans l'équation (1), on trouve

$$3x + 16 = 25,$$
$$x = 3.$$

Remarque. — La méthode que nous venons d'employer s'applique à un nombre quelconque d'équations et réduit le système total des équations à un nombre moindre d'une unité et ayant une inconnue de moins. On peut alors procéder sur le nouveau système comme sur le premier et faire disparaître une inconnue et une équation; on arrive alors finalement à une seule équation contenant une seule inconnue, si le nombre des équations est égal à celui des inconnues, et l'on peut en tirer la valeur de cette inconnue. Si le nombre des équations est supérieur à celui des inconnues, on a plusieurs équations contenant une même inconnue; ces équations ne fournissent pas en général la même valeur pour cette inconnue, et l'on conçoit que le système d'équations est surabondant. Si au contraire le nombre des inconnues est supérieur à celui des équations, on tombe sur une équation à plusieurs inconnues, et l'on voit que l'on peut choisir arbitrairement l'une d'elles : le système a une infinité de solutions.

Ce raisonnement est très-vague, en ce sens qu'il suppose que les équations à une inconnue que l'on est censé résoudre ont une solution bien déterminée; aussi verrons-nous les conclusions précédentes, qui tendent à établir qu'un système de n équations doit contenir n inconnues, tomber en défaut.

2° *Élimination par addition.* — Cette méthode consiste à multiplier par des facteurs convenables deux des équations à résoudre, de telle sorte que les coefficients de la même inconnue soient égaux. S'ils sont de même signe, on retranche les équations membre à membre; s'ils sont de signes contraires, on ajoute ces équations, et l'on fait ainsi évidemment disparaître une inconnue. L'équation à laquelle on arrive peut, en vertu des principes démontrés plus haut (p. 73), remplacer l'une quelconque des équations qui lui ont donné naissance.

Reprenons les équations de tout à l'heure

$$3x + 8y = 25, \tag{1}$$

$$12x - 7y = 22. \tag{2}$$

Pour donner des valeurs égales aux coefficients de x, on peut multiplier la première équation par le coefficient de x dans la seconde, et *vice versâ*. Mais il est plus simple de multiplier par 4 les deux membres de l'équation (1);

en retranchant alors membre à membre, on trouve

$$39y = 78,$$
$$y = 2.$$

3° *Élimination par comparaison.* — Cette méthode peu usitée revient au fond à la précédente; elle consiste à égaler les valeurs d'une même inconnue tirée de deux équations différentes.

4° *Élimination par la méthode des multiplicateurs.* — Cette méthode, attribuée à Bezout, consiste à multiplier les équations par des facteurs tels, qu'en les ajoutant toutes les inconnues disparaissent à l'exception d'une seule.

Considérons d'abord les équations

$$(1) \qquad ax + by = c,$$
$$(2) \qquad a'x + b'y = c'.$$

Multiplions la seconde équation par λ, ajoutons avec la première, il vient

$$(a + a'\lambda)x + (b + b'\lambda)y = c + c'\lambda.$$

Déterminons maintenant λ par la condition

$$a + a'\lambda = 0, \quad \text{d'où} \quad \lambda = -\frac{a}{a'},$$

l'équation (3) devient

$$\left(b - \frac{ab'}{a'}\right) y = c - \frac{ac'}{a'};$$

d'où l'on tire

$$y = \frac{a'c - c'a}{a'b - b'a}.$$

En posant dans l'équation (3)

$$b + b'\lambda = 0, \quad \text{ou} \quad \lambda = -\frac{b}{b'},$$

on aurait trouvé

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Considérons en second lieu les équations

$$(1) \qquad ax + by + cz = d,$$
$$(2) \qquad a'x + b'y + c'z = d',$$
$$(3) \qquad a''x + b''y + c''z = d''.$$

Multiplions la seconde par le facteur indéterminé λ, la troisième par λ', et ajoutons, il vient

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a + a'\lambda + a''\lambda')x + (b + b'\lambda + b''\lambda')y + (c + c'\lambda + c''\lambda') \\ \quad = d + d'\lambda + d''\lambda'. \end{array} \right.$$

Profitons de l'indétermination de λ et λ' et posons

$$(5) \qquad b + b'\lambda + b''\lambda' = 0,$$
$$(6) \qquad c + c'\lambda + c''\lambda' = 0.$$

Multiplions l'équation (6) par μ et ajoutons avec l'équation (5), il vient

$$(7) \qquad b + c\mu + (b' + c'\mu)\lambda + (b'' + c''\mu)\lambda' = 0.$$

Posons enfin

$$b' + c'\mu = 0, \quad \text{ou} \quad \mu = -\frac{b'}{c'},$$

l'équation (7) donne

$$b - \frac{b'}{c'}c + \left(b'' - \frac{b'}{c'}c''\right)\lambda' = 0;$$

d'où

$$\lambda' = \frac{cb' - bc'}{c'b'' - b'c''}.$$

Si l'on se reporte aux équations (5) et (6), on voit que pour en déduire λ quand on connaît λ', il suffit de changer, dans la formule qui donne λ', b' en b'', b'' en b', c' en c'' et c'' en c'; car quand on opère ce changement dans les équations (5) et (6), il est bien clair que la valeur de λ' qui satisfait est l'ancienne valeur de λ, et *vice versâ*. On a donc

$$\lambda = \frac{cb'' - bc''}{c''b' - b''c'}.$$

Si l'on porte alors dans l'équation (4) les valeurs que nous venons de trouver pour λ et λ', il vient, en vertu des équations (4) et (5),

$$\begin{aligned}\left(a + a'\frac{cb'' - bc''}{c''b' - b''c'} + a''\frac{cb' - bc'}{c'b'' - b'c''}\right)x \\ = d + d'\frac{cb'' - bc'}{c''b' - b''c'} + d''\frac{cb' - bc'}{c'b'' - b'c''};\end{aligned}$$

d'où l'on tire, en ordonnant par rapport aux accents,

$$x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + cb'd'' - bc'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + cb'a'' - bc'a''}.$$

Pour déduire de cette formule la valeur de y, il suffit de changer a en b, b en c et c en a. En effet, par ce changement, les équations (1), (2), (3) fourniront pour y la valeur qu'elles fournissaient avant pour x, et pour z la valeur qu'elles fournissaient pour y. Enfin on pourrait aussi se contenter de changer a en b et b en a.

Ce qui est remarquable, c'est que par ces changements le dénominateur de la valeur de x ne change pas, en sorte que les trois inconnues ont le même dénominateur. Le numérateur d'une inconnue ne diffère du dénominateur que par le changement en d de la lettre qui sert de coefficient à cette inconnue dans les équations (1), (2), (3); nous généraliserons plus loin ces résultats.

V. — Discussion des cas qui peuvent se présenter dans la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues.

Reprenons les équations dont il a déjà été question,

$$ax + by = c, \tag{1}$$

$$a'x + b'y = c'. \tag{2}$$

Ces équations renferment toutes les équations numériques à deux inconnues et du premier degré que l'on pourrait se proposer de résoudre; il suffit pour cela d'attribuer à a, b, a', b', c et c' des valeurs convenables, nulles au besoin.

Multiplions par b' la première équation et par b la seconde; en retranchant alors membre à membre, il vient

$$(ab' - ba')x = cb' - bc'. \tag{3}$$

Jusqu'ici nous avons implicitement supposé que b et b' n'étaient pas nuls à la fois; sans quoi nous aurions fait une opération illusoire conduisant à l'identité

$$0 = 0.$$

Nous allons supposer $ab' - ba'$ différent de zéro, et alors l'équation (3) donnera

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}. \tag{4}$$

On trouverait de même, en supposant que a et a' ne sont pas nuls à la fois,

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}. \tag{5}$$

Ces formules montrent que si $ab' - ba'$ est différent de zéro, le système des équations (1) et (2) admet toujours une solution et une seule; car les hypothèses que nous avons faites, que a et a' ne sont pas nuls à la fois ou que b et b' ne sont pas nuls à la fois, rentrent dans celle-ci

$$ab' - ba' \gtrless 0.$$

Supposons actuellement

$$(6) \qquad ab' - ba' = 0,$$

et toutes les quantités a, a', b, b', c, c' différentes de zéro; alors les valeurs de x et de y se présentent en général sous la forme

$$\frac{m}{0}.$$

Si l'on remonte à l'équation (3), qui a fourni cette valeur de x, on voit que cette équation se réduit à une absurdité, puisque son premier membre est nul et que le second ne l'est pas en général. Les équations (1) et (2) conduisant par des calculs légitimes à une absurdité sont incompatibles; c'est du reste ce qu'il est facile d'établir directement.

1° Nous supposerons le numérateur de la valeur de x, c'est-à-dire le second membre de la formule (3), différent de zéro; nous aurons alors

$$(7) \qquad cb' - bc' \gtrless 0.$$

Mais de la formule (6) on tire

$$(8) \qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'};$$

et de la formule (7),

$$(9) \qquad \frac{b}{b'} \gtrless \frac{c}{c'};$$

et, par conséquent, de ces deux dernières formules,

$$(10) \qquad \frac{a}{a'} \gtrless \frac{c}{c'},$$

ou

$$ac' - ca' \gtrless 0.$$

Cette quantité est précisément le numérateur de la valeur de y qui va se présenter aussi sous la forme $\frac{m}{0}\cdot$ Si l'on désigne alors par p la valeur commune des rapports $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, on tirera de la formule (8)

$$a = pa', \quad b = pb',$$

et de la formule (9)

$$c \lessgtr pc'.$$

En portant dans l'équation (1) les valeurs que nous venons de trouver pour a et b, on trouve

$$pa'x + pb'y = c \lessgtr pc'.$$

Mais l'équation (2) multipliée par p donne

$$pa'x + pb'y = pc'.$$

On voit donc que les équations (1) et (2) impliquent des conditions contradictoires puisqu'elles exigent que la même quantité soit à la fois égale et différente de pc'.

2° Il pourrait arriver que le numérateur de la valeur de x fût égal à zéro; l'équation (3) ne présenterait plus rien d'absurde, au contraire elle se réduirait à l'identité

$$0 = 0.$$

La valeur de x prend la forme $\frac{0}{0}$; il est facile de voir que dans ce cas les équations (1) et (2) rentrent l'une dans l'autre et que les valeurs de x et de y sont indéterminées; nous supposerons toujours les coefficients a, b, c, a', b', c' différents de zéro, et la relation

$$(6)\qquad ab' - ba' = 0$$

fournira comme plus haut

$$(8)\qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

Si nous supposons actuellement le numérateur de la valeur de x nul, ou

$$(11)\qquad cb' - bc' = 0,$$

il vient

$$(12)\qquad \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'};$$

et, en vertu de l'équation (8),

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'},$$

ou bien

$$ac' - ca' = 0,$$

et l'on voit que le numérateur de la valeur de y est également nul. Si l'on désigne par p la valeur commune des rapports $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$, les équations (11) et (12) donnent

$$a = pa', \quad b = pb', \quad c = pc'.$$

Si l'on porte ces valeurs de a, b, c dans l'équation (1), on trouve

$$pa'x + pb'y = pc',$$

équation que l'on déduit en multipliant par p l'équation (2). On voit qu'en réalité on n'a qu'une seule équation entre x et y, ce qui est insuffisant pour déterminer ces inconnues, puisqu'alors on peut choisir l'une d'elles arbitrairement.

Il reste maintenant à examiner les cas où quelques coefficients des équations (1) et (2) seraient nuls; mais auparavant, observons que les formules (4) et (5), qui font connaître x et y, satisfont aux équations (1) et (2) toutes les fois que $ab' - ba'$ n'est pas nul. Nous supposerons donc

$$(6) \qquad ab' - ba' = 0.$$

1° Si aucun des coefficients a, b, a', b' n'est nul, on tire de cette équation, comme nous avons vu plus haut,

$$a = pa', \quad b = pb',$$

et, si c seul est nul, on voit que les équations (1) et (2) sont incompatibles, et les inconnues se présentent sous la forme $\frac{m}{0}$. Si c et c' sont nuls tous deux, les équations (1) et (2) rentrent l'une dans l'autre, et les inconnues se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$.

2° Supposons $a = 0$, alors l'équation (6) montre que a' ou b doit être nul; si a' est nul, on n'a plus, à proprement parler, deux inconnues dans les équations (1) et (2) qui ne peuvent déterminer x et qui sont surabondantes pour déterminer y, à moins que ces deux équations ne soient une conséquence l'une de l'autre. Dans ce cas, les formules (4) et (5) donnent des résultats de la forme

$$x = \frac{m}{0}, \quad y = \frac{0}{0}.$$

Dans le cas où $cb' - bc' = 0$, x se présente aussi sous la forme $\frac{0}{0}$. Cependant, dans ce cas, la valeur de y est parfaitement déterminée, puisque $\frac{c}{c'}$ est égal à $\frac{b}{b'}$; les équations (1) et (2) rentrent l'une dans l'autre et sont à une seule inconnue. La formule illusoire

$$y = \frac{0}{0},$$

à laquelle on arrive, tient à ce que l'équation (5) a été obtenue en multipliant par a' et a les équations (1) et (2). Or a et a' sont nuls; on a donc fait des calculs illusoires.

Si l'on supposait $b = 0$ avec $a = 0$, l'équation (1) se réduirait à l'absurdité $c = 0$, à moins que c ne fût naturellement nul. Lorsque c est différent de zéro, les équations (4) et (5) donnent

$$x = \frac{m}{0}, \quad y = \frac{m}{0};$$

lorsque c est nul, on a au contraire

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0}.$$

3° Supposons $a = 0$ avec $a' = 0$ et $b' = 0$. Dans ce cas, les équations (1) et (2) se réduisent à une absurdité, à moins que $c' = 0$, et à une équation à une inconnue

$$by = c.$$

Les formules (4) et (5) donnent dans ce cas

$$x = \begin{cases} \frac{m}{0} \text{ pour } c' \gtrless 0, \quad c \gtrless 0, \\ \frac{0}{0} \text{ pour } c' = 0 \text{ ou } c = 0, \end{cases}$$

$$y = \frac{0}{0}.$$

4° Si l'on a $a = 0$, $a' = 0$, $b = 0$, $b' = 0$, les équations (1) et (2) sont absurdes ou illusoires et les formules (4) et (5) donnent

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0}.$$

De cette discussion résulte que si l'on a réellement deux équations à deux inconnues ne présentant rien de contradictoire et ne rentrant pas l'une dans l'autre, les formules (4) et (5) pourront servir à résoudre le système (1) et (2). Nous avons, en effet, examiné tous les cas possibles, à savoir :

I. $ab' - ba' \gtrless 0$.

II. $ab' - ba' = 0$.

1° Aucun des coefficients a, b, a', b' n'est nul.

2° Un coefficient d'inconnue nul comprenant l'un des deux suivants :

a. Deux coefficients appartenant à la même inconnue nuls.

b. Deux coefficients n'appartenant pas à la même inconnue nuls.

3° Trois coefficients nuls.

4° Quatre coefficients nuls.

Dans chacun de ces cas, nous avons supposé c et c' nuls ou différents de zéro, et toujours la condition $ab' - ba' = 0$ nous a conduit à affirmer que les équations (1) et (2) étaient incompatibles ou insuffisantes.

VI. — Des déterminants.

Lorsque l'on a un système de n^2 quantités rangées comme il suit :

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots, & l_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots, & l_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & \ldots, & l_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots, & l_n \end{vmatrix},$$

on appelle *lignes* les rangées horizontales, *colonnes* les rangées verticales; les quantités qui forment ces rangées portent le nom d'*éléments*.

Deux éléments qui n'appartiennent ni à la même ligne ni à la même colonne forment une *inversion*, lorsque le numéro de la colonne du premier élément étant plus élevé que le numéro de la colonne du second, le numéro de la ligne du premier élément est moins élevé que le numéro de la ligne du second, ou *vice versâ*.

On appelle *déterminant* du système des n^2 éléments considérés, et l'on désigne par la notation de la formule (1), la somme des produits obtenus en prenant de toutes les manières possibles un facteur dans le tableau (1), de telle sorte que dans un même produit deux facteurs n'appartiennent jamais à la même rangée (colonne ou ligne). On donne le signe $+$ aux produits dans lesquels le nombre des inversions formées par les facteurs est pair, et le signe $-$ aux autres produits.

Les déterminants ont aussi porté le nom de *résultantes*, *fonctions alternées*, etc. Cauchy a souvent employé la notation

$$\sum \pm (abc\ldots l),$$

pour désigner le déterminant (1).

La définition que nous avons donnée du déterminant de n^2 éléments permet évidemment d'énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *Un déterminant ne change pas quand ses lignes deviennent colonnes et que ses colonnes deviennent lignes.*

Théorème II. — *Lorsque, dans un déterminant, on permute deux lignes ou deux colonnes, ce déterminant est multiplié par* -1.

En effet, considérons un terme

$$(2) \qquad \ldots d_i \ldots f_j \ldots$$

du déterminant primitif, les points indiquant des facteurs manquants que nous supposerons rangés, ainsi que d_i et f_j, dans l'ordre où les colonnes auxquelles ils appartiennent se présentent. Permutons les $i^{\text{ième}}$ et $j^{\text{ième}}$ lignes, au terme (2) de l'ancien déterminant correspondra le terme

$$(3) \qquad \ldots d_j \ldots f_i \ldots$$

dans le nouveau; mais ce terme existe déjà dans l'ancien déterminant, en sorte que, aux signes près, les deux déterminants en question sont composés des mêmes termes. Occupons-nous actuellement du signe de ces termes. A cet effet, voyons combien le changement de i en j et de j en i a introduit d'inversions ou en a supprimé dans le terme (2). Soit g_μ un élément du produit (2); si g_μ n'est pas compris entre d_i et f_j, ou si μ n'est pas compris entre i et j, le changement de i en j et de j en i ne modifie pas le nombre des inversions relativement à l'élément g_μ. Si au contraire g_μ est compris entre d_i et f_j ~~et~~ ou μ entre i et j, le changement de i en j introduit ou supprime une inversion. Le changement de j en i produit le même effet, de sorte que l'on peut dire que par rapport à un élément quelconque le nombre des inversions introduites est pair, zéro étant regardé comme un nombre pair. Mais, par rapport aux termes d_i et f_j, le changement de i en j et de j en i introduit ou supprime forcément une inversion. En sorte que dans l'ancien déterminant le terme (3) contient un nombre impair d'inversions de plus ou de moins que le terme (2); il est donc de signe contraire, tandis que ce même terme (3) considéré dans le nouveau déterminant est de même signe que le terme (2). Les deux déterminants en question se composent donc des mêmes termes affectés de signes contraires; ils sont donc égaux au signe près. C. Q. F. D.

Théorème III. — *Un déterminant dont deux rangées parallèles sont identiques est nul.*

En effet, il est bien clair que ce déterminant ne change pas quand on permute les rangées identiques; si donc ce déterminant n'était pas nul, il changerait de signe, en vertu du théorème précédent, par la permutation en question.

Théorème IV. — *Lorsque, dans une rangée, tous les éléments sont nuls à l'exception d'un seul, le déterminant se réduit au produit de cet élément par un déterminant de degré moindre.*

En effet, supposons que la $i^{ième}$ ait tous ses éléments nuls, à l'exception de l'élément qui se trouve dans la $j^{ième}$ colonne. Permutons la $i^{ième}$ ligne successivement avec toutes celles qui la précèdent, de manière à la placer la première; prenons de la même manière la $j^{ième}$ colonne et plaçons-la la première. Le déterminant, en vertu du théorème II, se trouve multiplié par $(-1)^{i+j-2}$, ou simplement $(-1)^{i+j}$, et prend la forme

$$\begin{vmatrix} a_1, & 0, & 0, \ldots, & 0 \\ a_2, & b_2, & c_2, \ldots, & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n, & b_n, & c_n, \ldots, & l_n \end{vmatrix}.$$

Si l'on se reporte actuellement à la définition des déterminants, on voit avec un peu d'attention que le précédent se réduit à

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2, & c_2, \ldots, & l_2 \\ b_3, & c_3, \ldots, & l_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n, & c_n, \ldots, & l_n \end{vmatrix},$$

ce qui démontre le théorème.

Problème. — *Étant donné le déterminant*

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, \dots, & l_1 \\ a_2, & b_2, \dots, & l_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n, & b_n, \dots, & l_n \end{vmatrix} = \mathrm{D},$$

on propose de l'ordonner suivant les éléments d'une même ligne ou d'une même colonne.

En d'autres termes, si nous posons par exemple

$$\mathrm{D} = \mathrm{A}_i a_i + \mathrm{B}_i b_i + \dots + \mathrm{L}_i l_i,$$

il s'agit de déterminer A_i, $\mathrm{B}_i, \dots, \mathrm{L}_i$. Pour y parvenir, on observe que $\mathrm{A}_i a_i$ n'est autre chose que ce que devient D quand on y suppose

$$b_i = 0, \quad c_i = 0, \dots, \quad l_i = 0,$$

que $\mathrm{B}_i b_i$ est la valeur de D pour

$$a_i = 0, \quad c_i = 0, \dots, \quad l_i = 0, \dots$$

On a donc, en vertu du théorème précédent,

$$\mathrm{A}_i = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} b_1, & c_1, \dots, & l_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i-1}, & c_{i-1}, \dots, & l_{i-1} \\ b_{i+1}, & c_{i+1}, \dots, & l_{i+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_n \dots & \dots & l_n \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{B}_i = (-1)^{i+2} \begin{vmatrix} a_1, & c_1, \dots, & l_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1}, & c_{i-1}, \dots, & l_{i-1} \\ a_{i+1}, & c_{i+1}, \dots, & l_{i+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n, & c_n, \dots, & l_n \end{vmatrix}, \dots$$

A_i, $\mathrm{B}_i, \dots$ sont ce que l'on appelle les *déterminants mineurs* du déterminant (1).

On trouve ainsi successivement

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_2, & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 - a_2 b_1 c_3 + a_2 c_1 b_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 c_1 b_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

VII. — Résolution d'un système général d'équations linéaires.

C'est la théorie des équations linéaires qui a conduit les géomètres à l'étude des déterminants. Lorsque l'on résout un système général d'équations du premier degré à deux inconnues, on remarque immédiatement que les inconnues se présentent sous la forme de fractions ayant même dénominateur; ce dénominateur est le déterminant du système des coefficients : nous allons généraliser cette proposition.

Considérons le système de n équations

$$
\begin{array}{ll}
(1) & a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + l_1 u = s_1, \\
(2) & a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + l_2 u = s_2, \\
 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
(n) & a_n x + b_n y + c_n z + \ldots + l_n u = s_n,
\end{array}
$$

dans lequel $x, y, z, \ldots, u$ désignent n inconnues; désignons par D le déterminant du système des coefficients des inconnues, et posons

$$
\begin{aligned}
D &= A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_n a_n, \\
&= B_1 b_1 + B_2 b_2 + \ldots + B_n b_n, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}
$$

$A_1, B_1, \ldots, A_2, \ldots, B_2, \ldots$ désignant des coefficients indépendants des lettres qu'ils multiplient. Nous avons vu, dans le paragraphe précédent, comment étaient formés ces coefficients. Multiplions l'équation (1) par A_1; l'équation (2) par $A_2, \ldots$, l'équation (n) par A_n; ajoutons, il vient simplement

$$\text{(P)} \quad (A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_n a_n) x = A_1 s_1 + A_2 s_2 + \ldots + A_n s_n,$$

car les quantités

$$\begin{array}{l} A_1 b_1, \ A_2 b_2, \ldots, \ A_n b_n, \\ A_1 c_1, \ A_2 c_2, \ldots, \ A_n c_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

sont nulles si l'on observe qu'elles représentent des déterminants ayant deux colonnes identiques (théorème III, p. 100).

La formule (P) donne immédiatement

$$x = \frac{A_1 s_1 + A_2 s_2 + \ldots + A_n s_n}{A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_n a_n},$$

ou bien

$$\text{(Q)} \quad x = \begin{vmatrix} s_1, & b_1, \ldots, & l_1 \\ s_2, & b_2, \ldots, & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ s_n, & b_n, \ldots, & l_n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1, & b_1, \ldots, & l_1 \\ a_2, & b_2, \ldots, & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n, & b_n, \ldots, & l_n \end{vmatrix}.$$

La formule (Q) est la traduction analytique du théorème suivant, qui constitue la règle dite *de Cramer*.

Théorème. — *Les racines d'un système d'équations linéaires, en nombre égal à celui des inconnues, sont des fractions qui ont pour dénominateur commun le déterminant du système des coefficients des inconnues, et pour numérateurs les déterminants obtenus en remplaçant dans le dénominateur commun la colonne qui contient les coefficients de l'inconnue que l'on veut cal-*

culer, par une colonne formée des seconds membres des équations proposées.

Cette règle ne peut être considérée comme démontrée que si les quantités $A_1, A_2, \ldots, A_n$, par lesquelles nous avons multiplié les équations (1), (2),..., (n), ne sont pas toutes nulles; si l'on fait abstraction de ce cas, sur lequel nous allons revenir, on voit que le système (1),..., (n) admet toujours une solution, et une seule, si le déterminant D des coefficients est différent de zéro. Si ce déterminant est nul, l'équation (P), conséquence des équations (1), (2),..., (n), est absurde, le système proposé (1),..., (n) est donc lui-même absurde; en d'autres termes, les équations (1), (2),..., (n) sont incompatibles, à moins que les déterminants

$$\begin{array}{c} A_1 s_1 + A_2 s_2 + \ldots + A_n s_n, \\ B_1 s_1 + B_2 s_2 + \ldots + B_n s_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_1 s_1 + L_2 s_2 + \ldots + L_n s_n \end{array}$$

ne soient tous nuls. Dans ce cas, en effet, l'équation (P) ne présente plus rien d'absurde; elle est identique, et l'on ne peut pas en conclure la valeur de x; en un mot, la méthode que nous avons suivie ne permet pas de calculer les valeurs des inconnues. Cependant on peut constater que l'une des équations est une conséquence des autres. En effet, l'équation (P) peut s'écrire

$$\begin{gathered}(A_1 a_1 + \ldots + A_n a_n) x + (A_1 b_1 + \ldots + A_n b_n) y + \ldots \\ = A_1 s_1 + A_2 s_2 + \ldots + A_n s_n.\end{gathered}$$

Cette équation, dans notre hypothèse, est une identité, puisque chacun de ses termes est nul; si l'on en retranche l'équation (2) multipliée par A_2, l'équation (3) multipliée par $A_3, \ldots$, on en tire l'équation (1) : dans le cas actuel, il y aura donc en général indétermination.

Il reste à examiner le cas singulier dont nous avons parlé, et où les déterminants A_1, A_2,... sont tous nuls. Nous allons voir que, dans ce cas, il y a incompatibilité ou indétermination; en d'autres termes, toutes les fois que le déterminant D sera nul, il y aura indétermination ou incompatibilité.

Supposons que le système (1), (2),..., (n) fournisse pour les inconnues $x, y, z, \ldots, u$ des valeurs uniques; alors les quantités $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ne seront pas toutes nulles, et l'on déduira aisément du système (1), (2),..., (n) le système suivant :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} z + \ldots + \begin{vmatrix} a_1 & l_1 \\ a_2 & l_2 \end{vmatrix} u = \begin{vmatrix} a_1 & s_1 \\ a_2 & s_2 \end{vmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ a_n & b_n \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_{n-1} & c_{n-1} \\ a_n & c_n \end{vmatrix} z + \ldots + \begin{vmatrix} a_{n-1} & l_{n-1} \\ a_n & l_n \end{vmatrix} u = \begin{vmatrix} a_{n-1} & s_{n-1} \\ a_n & s_n \end{vmatrix},$$

qui, d'après la manière dont il a été obtenu, doit admettre un système de solutions uniques; donc les déterminants qui servent de coefficients à y ne sont pas tous nuls; si l'on observe alors que l'on a

$$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} b_1 - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} b_2 + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} b_3 = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \ldots,$$

et que les coefficients $b_1, b_2, \ldots$ ne peuvent être tous nuls; on déduira facilement des équations précédentes la formule suivante :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} z + \ldots = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & s_1 \\ a_2 & b_2 & s_2 \\ a_3 & b_2 & s_3 \end{vmatrix},$$

et d'autres analogues. D'après la manière dont ces équations ont été obtenues, elles doivent être satisfaites pour les valeurs de $z, \ldots, u$ qui satisfont au système (1), (2), ..., (n), et uniquement pour ces valeurs; donc les déterminants qui multiplient z ne sauraient être tous nuls. En poursuivant ce raisonnement, on arrive à prouver que le déterminant D ne peut être égal à zéro ; donc l'équation de condition

$$D = 0$$

exprime que le système (1), (2), ... est incompatible ou indéterminé, et l'on peut regarder la *règle de Cramer* comme donnant la solution dans tous les cas possibles, puisqu'elle ne devient illusoire que si $D = 0$.

Remarque I. — La règle de Cramer montre que les inconnues sont des fonctions linéaires des seconds membres des équations (1), ..., (n).

Remarque II. — Le système d'équations à n inconnues

$$\begin{array}{l} a_1\ \ x + b_1\ \ y + c_1\ \ z + \ldots + l_1\ \ u = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} x + b_{n-1} y + c_{n-1} z + \ldots + l_{n-1} u = 0 \end{array}$$

est évidemment indéterminé dans le cas général; mais si l'on divise chacune des équations par u et si l'on considère les rapports $\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \ldots$, ils auront des valeurs déterminées, et l'on aura

$$x : \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \ldots & l_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n-1} & c_{n-1} \ldots & l_{n-1} \end{vmatrix} = y : \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \ldots & l_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & c_n \ldots & l_n \end{vmatrix} = \ldots$$

Remarque III. — Si l'on veut éliminer les n quantités $x, y, z, \ldots, u$ entre les $n+1$ équations

$$(\mathrm{S})\quad \left\{ \begin{array}{l} a_1\ \ x + b_1\ \ y + \ldots + l_1\ \ u + s_1\ \ = 0, \\ a_2\ \ x + b_2\ \ y + \ldots + l_2\ \ u + s_2\ \ = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n+1} x + b_{n+1} y + \ldots + l_{n+1} u + s_{n+1} = 0, \end{array} \right.$$

il suffit de porter dans la dernière les valeurs de $x, y, z, \ldots, u$ tirées des n premières; on trouve ainsi

$$a_{n+1}\begin{vmatrix} -s_1, & b_1, \ldots, & l_1 \\ -s_2, & b_2, \ldots, & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -s_n, & b_n, \ldots, & l_n \end{vmatrix} + b_{n+1}\begin{vmatrix} a_1, & -s_1, \ldots, & l_1 \\ a_2, & -s_2, \ldots, & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n, & -s_n, \ldots, & l_n \end{vmatrix} + \ldots$$

$$+ s_{n+1}\begin{vmatrix} a_1, & b_1, \ldots, & l_1 \\ a_2, & b_2, \ldots, & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n, & b_n, \ldots, & l_n \end{vmatrix} = 0.$$

Si actuellement, dans chacun des déterminants qui figurent dans l'équation précédente, on place la colonne des s la dernière, ces déterminants vont être multipliés par certaines puissances de (-1), celui qui multiplie l_{n+1} excepté, car, dans celui-là, la colonne des s est la dernière; les signes de ces déterminants seront alternativement $+$ et $-$; si enfin on change les signes dans la colonne des s, chaque déterminant change de signe, excepté le coefficient de s_{n+1}; on voit ainsi (problème, p. 101), que le résultat cherché de l'élimination est

$$(\mathrm{T}) \qquad \begin{vmatrix} a_1, & b_1, \ldots, & l_1, & s_1 \\ a_2, & b_2, \ldots, & l_2, & s_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+1}, & b_{n+1}, \ldots, & l_{n+1}, & s_{n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation s'appelle la *résultante des équations proposées*.

Remarque IV. — Pour qu'un déterminant soit nul, il faut qu'il existe une relation linéaire constante entre les éléments d'une même ligne ou d'une même colonne; l'équation (T), en effet, exprime qu'il existe des quantités $x, y, z, \ldots, u$ satisfaisant aux équations (S).

VIII. — Des calculs que l'on peut effectuer sur les déterminants.

Désignons par $\mu_1, \ldots, \mu_2, \ldots, \mu_n$ non plus des quantités, mais des signes de séparation, en sorte que

$$(1) \quad a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \ldots + a_n \mu_n = b_1 \mu_1 + b_2 \mu_2 + \ldots + b_n \mu_n$$

soit une manière abrégée d'écrire les n égalités

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3 \ldots$$

Cauchy, à qui nous empruntons les développements de ce paragraphe (*Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. IV), a donné aux signes $\mu_1, \mu_2, \ldots$ le nom de *clefs*.

Si l'on a plusieurs ~~in~~égalités symboliques, telles que

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \ldots = b_1 \mu_1 + b_2 \mu_2 + \ldots, \\ c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 + \ldots = d_1 \mu_1 + d_2 \mu_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

il est bien évident que l'on aura encore

$$\begin{aligned} &(a_1 + c_1 + \ldots)\mu_1 + (a_2 + c_2 + \ldots)\mu_2 + \ldots \\ &\quad = (b_1 + d_1 + \ldots)\mu_1 + (b_2 + d_2 + \ldots)\mu_2 + \ldots, \end{aligned}$$

car cette égalité signifie que

$$\begin{aligned} a_1 + c_1 + \ldots &= b_1 + d_1 + \ldots, \\ a_2 + c_2 + \ldots &= b_2 + d_2 + \ldots, \end{aligned}$$

et ces égalités sont des conséquences des égalités suivantes

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \ldots, \quad c_1 = d_1 \ \ldots,$$

représentées par les équations (2).

D'une manière générale, si l'on considère une équation dont les deux membres ne diffèrent que par le changement de a en b, de c en $d, \ldots$, cette équation, contenant des clefs ou n'en contenant pas, sera une conséquence légitime et rigoureuse des équations (2).

Si, par exemple, on effectue le produit des équations (2) membre à membre sans jamais intervertir l'ordre des facteurs, et en attribuant aux produits *symboliques* des clefs des valeurs arbitraires contenant elles-mêmes des clefs ou n'en contenant pas, pourvu qu'au même produit des mêmes clefs on attribue toujours la même valeur *symbolique*, il est clair que l'égalité ainsi obtenue sera une conclusion *rigoureuse* et *légitime* des équations (2).

Ceci posé, désignons toujours par $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ n clefs, et posons, pour abréger,

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} s_1 = a_1\mu_1 + b_1\mu_2 + \ldots + l_1\mu_n, \\ s_2 = a_2\mu_1 + b_2\mu_2 + \ldots + l_2\mu_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n = a_n\mu_1 + b_n\mu_2 + \ldots + l_n\mu_n; \end{array}\right.$$

convenons de regarder comme nul le produit de n clefs dont deux au plus sont égales, ou, si l'on veut, portent le même indice; convenons, en outre, de regarder comme égal à $+\mu_1\mu_2\ldots\mu_n$ ou $-\mu_1\mu_2\ldots\mu_n$ le produit de n clefs toutes différentes, selon que le nombre des inversions des indices est pair ou impair: il est évident que le produit symbolique $s_1 s_2 \ldots s_n$ représentera le déterminant des coefficients des clefs dans les équations (3), multiplié par le facteur symbolique $\mu_1\mu_2\ldots\mu_n$, auquel nous attribuerons une valeur déterminée; en sorte que, si l'on désigne par D le déterminant en question, on pourra écrire

$$(4)\qquad s_1 s_2 \ldots s_n = \mathrm{D}.\mu_1\mu_2\ldots\mu_n.$$

Posons maintenant

$$(5)\qquad \begin{cases} t_1 = \alpha_1 s_1 + \beta_1 s_2 + \ldots + \lambda_1 s_n, \\ t_2 = \alpha_2 s_1 + \beta_2 s_2 + \ldots + \lambda_2 s_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_n = \alpha_n s_1 + \beta_n s_2 + \ldots + \lambda_n s_n. \end{cases}$$

Observons actuellement que le produit $s_1 s_2 \ldots s_n$ change quand on intervertit l'ordre de ses facteurs symboliques, et que la formule (4) subsiste encore pourvu que les indices des lettres s et μ se correspondent; en sorte que le produit des n facteurs s à indices différents est $\pm s_1 s_2 \ldots s_n$, selon que le nombre des inversions des indices est pair ou impair; observons enfin que si deux facteurs s dans le produit portaient le même indice, ce produit serait nul, car à ce produit correspondrait un déterminant ayant deux lignes identiques. On voit donc que $s_1, s_2 \ldots, s_n$ peuvent être regardées comme des clefs jouissant des mêmes propriétés que $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. On tirera donc des équations (5)

$$(6)\qquad t_1 t_2 \ldots t_n = \Delta s_1 s_2 \ldots s_n,$$

Δ désignant le déterminant du système des coefficients de s dans les équations (5). Des formules (4) et (6) on tire

$$t_1 t_2 \ldots t_n = \mathrm{D}\Delta \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n,$$

et l'on voit que $\mathrm{D} \times \Delta$ n'est autre chose que le déterminant du système des coefficients de $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ dans $t_1, t_2, \ldots, t_n$, de sorte que l'on peut écrire

$$\mathrm{D} \times \Delta = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_1, & \mathrm{B}_1, \ldots, & \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{A}_2, & \mathrm{B}_2, \ldots, & \mathrm{L}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{A}_n, & \mathrm{B}_n, \ldots, & \mathrm{L}_n \end{vmatrix},$$

formule dans laquelle on a posé, pour abréger,

$$\begin{aligned}
A_i &= \alpha_i a_1 + \beta_i a_2 + \gamma_i a_3 + \ldots + \lambda_i a_n,\\
B_i &= \alpha_i b_1 + \beta_i b_2 + \gamma_i b_3 + \ldots + \lambda_i b_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
L_i &= \alpha_i l_1 + \beta_i l_2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_i l_n.
\end{aligned}$$

Il est clair que l'on peut aussi choisir

$$\begin{aligned}
A_i &= \alpha_i a_1 + \beta_i b_1 + \ldots + \lambda_i l_1,\\
B_i &= \alpha_i a_2 + \beta_i b_2 + \ldots + \lambda_i l_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

ou bien encore

$$\begin{aligned}
A_i &= a_i \alpha_1 + b_i \beta_1 + \ldots + l_i \lambda_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

ou bien enfin

$$\begin{aligned}
A_i &= a_i \alpha_1 + b_i \alpha_2 + \ldots + l_i \alpha_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

car les déterminants D et Δ ne changent pas de valeur quand on transforme leurs lignes en colonnes et leurs colonnes en lignes, et leur produit ne change pas en intervertissant l'ordre des facteurs, par conséquent ne change pas quand on change les lettres grecques en lettres françaises, et *vice versâ*.

Nous avons supposé les déterminants D et Δ de même degré; s'il n'en était pas ainsi, il faudrait commencer par transformer celui de ces déterminants qui a le moindre degré en un autre de même degré que son multiplicateur. Cela se fera en observant que l'on a (théor. IV, p. 100)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 \ldots & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n \ldots & l_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & a_1 \ldots & l_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_n \ldots & l_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \ldots & l_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & a_n \ldots & l_n \end{vmatrix} = \ldots$$

Lorsque l'on veut multiplier un déterminant par un simple monôme, il suffit évidemment de multiplier tous les termes d'une même colonne ou d'une même ligne par ce monôme.

L'addition des déterminants offre bien plus de difficultés que leur multiplication. Lorsque deux déterminants ne diffèrent que par une seule rangée, il suffit d'ajouter terme à terme les rangées identiques; c'est ce qu'il est facile de prouver en mettant les deux déterminants sous la forme

$$A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_n a_n,$$
$$A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + \ldots + A_n \alpha_n,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignant les éléments des colonnes qui diffèrent. On trouve alors pour somme des déterminants en question

$$A_1(a_1 + \alpha_1) + \ldots + A_n(a_n + \alpha_n),$$

ce qui démontre la règle que nous avions énoncée.

Cette règle n'est pas sans importance : il en résulte, en effet, qu'un déterminant ne change pas de valeur quand aux termes d'une rangée on ajoute ceux d'une rangée parallèle multipliés par un facteur constant. Car cette opération revient à ajouter au déterminant proposé un déterminant dans lequel une rangée a ses termes équimultiples d'une rangée parallèle, c'est-à-dire nul. En appliquant cette remarque, on trouve

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Nous terminerons ce qui est relatif à la théorie des déterminants par la démonstration d'une formule remarquable donnée par Cauchy dans son *Analyse algébrique*, et probablement due à cet illustre auteur.

Proposons-nous d'évaluer le produit des différences de n quantités

$$\left.\begin{array}{r}(a-b)(a-c)(a-d)\dots(a-l)\\ (b-c)(b-d)\dots(b-l)\\ (c-d)\dots(c-l)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ (k-l)\end{array}\right\} = \mathrm{P}.$$

Il est clair que le terme $+a^{n-1}b^{n-2}\dots k^1 l^0$ entrera dans le produit P; les autres termes de ce produit peuvent s'en déduire en changeant l'un des facteurs a, b,... dans l'un de ceux qui le suivent, à la condition de multiplier en même temps par -1, la lettre a pouvant être remplacée une fois seulement par b, par c,..., la lettre b une fois seulement par c, par d,..., et jamais par a, etc.; on peut donc dire que le produit P se compose de tous les produits de la forme $a^\alpha b^\beta \dots l^\lambda$ dans lesquels on a

$$\alpha+\beta+\dots+\lambda=(n-1)+(n-2)+\dots+1+0,$$

affectés de signes convenables. Or si l'on considère le déterminant

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix}1, & a, & a^2, & \dots, & a^{n-1}\\ 1, & b, & b^2, & \dots, & b^{n-1}\\ 1, & c, & c^2, & \dots, & c^{n-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1, & l, & l^2, & \dots, & l^{n-1}\end{vmatrix},$$

il est naturel de se demander s'il ne serait pas égal à P. Or D et P sont deux polynômes du degré $n-1$ en a qui se réduisent à zéro pour les $n-1$ valeurs $b, c, \ldots, l$ de a; ils sont donc tous deux égaux au produit de

$$(a-b)(a-c)\ldots(a-l)$$

par une quantité indépendante de a : en d'autres termes, leur rapport est indépendant de a (*voir* p. 51). On démontrerait de la même façon que leur rapport est indépendant de $b, c, \ldots l$; pour déterminer ce rapport, il suffit d'observer que les termes en $a^{n-1} b^{n-2} \ldots k^1 l^0$ ont tous deux pour coefficients l'unité dans P et dans D, et par suite (p. 53, Remarque I), on a $P = D$. C. Q. F. D.

On peut conclure de là que le résultat de l'élimination de $x, y, z, \ldots, u$ entre les équations

$$\begin{gathered} x+y+z+\ldots+u=0, \\ ax+by+cz+\ldots+lu=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^{n-1}x+b^{n-1}y+\ldots+l^{n-1}u=0, \end{gathered}$$

est égal au produit des différences de $a, b, c, \ldots, l$; si donc toutes ces quantités sont inégales, les équations précédentes sont compatibles. Cette remarque est utilisée dans une question importante de calcul intégral.

IX. — Des problèmes d'algèbre qui conduisent a des équations du premier degré.

Pour résoudre un problème dans lequel le résultat cherché est un nombre ou même se compose de plusieurs nombres, on désigne les inconnues, c'est-à-dire les quantités à déterminer, par des lettres, puis on suppose les résultats connus et l'on indique, à l'aide des signes algébriques, les calculs qu'il faudrait effectuer sur les lettres qui désignent les inconnues, pour vérifier qu'elles sont bien les solutions du problème; on arrive ainsi à des équations que l'on essaye de résoudre. Lorsque ces équations peuvent être résolues, les solutions que l'on en déduit sont ordinairement celles du problème que l'on a mis en équation : je dis *ordinairement*, parce qu'il arrive quelquefois que les équations auxquelles on est conduit fournissent, non-seulement la solution cherchée, mais encore des solutions étrangères à la question que l'on traite. Nous ne pouvons pas à présent donner la raison de cette anomalie, sur laquelle nous aurons bien souvent l'occasion de revenir. Donnons quelques exemples.

Problème I. — *La somme de deux nombres est* 18, *leur différence est* 6, *trouver ces deux nombres.*

Soit x le plus petit des deux nombres, le plus grand sera $x+6$ puisque leur différence est 6, et comme leur somme fait 18, on doit avoir

$$x+x+6=18,$$

d'où l'on tire

$$x=6.$$

Ainsi le plus petit des deux nombres est 6, le plus grand est donc 12.

Problème II. — *Dans quel système de numération le nombre* 15 *est-il représenté par* 23?

Ici l'inconnue est la base; désignons-la par x, le nombre total des unités contenues dans 23 est de deux fois la base augmentée de 3. On a donc

$$2x+3=15,$$

d'où l'on tire

$$x=6.$$

Ainsi la base du système cherché est 6.

PROBLÈME III. — *Un marchand vend en deux jours 600 oranges et reçoit en tout 40 francs, à savoir 20 francs par jour; mais le second jour il vend ses oranges deux fois meilleur marché que le premier : on demande à quel prix il a vendu ses oranges et combien il en a vendu chaque jour.*

Soit x le nombre des oranges vendues le premier jour, le prix de ces x oranges est de 20 francs; donc le prix d'une orange est $\frac{20}{x}$ pour le premier jour.

Le second jour, il vend le reste de ses oranges, c'est-à-dire $600 - x$ pour 20 francs; donc le prix d'une orange est alors $\frac{20}{600 - x}$; mais comme elles sont deux fois meilleur marché que le premier jour, on doit avoir

$$\frac{20}{x} = 2 \times \frac{20}{600 - x}.$$

En multipliant par $\frac{x(600 - x)}{20}$ les deux membres de cette équation, on risque d'y introduire les solutions $x = 0$ ou $x = 600$; mais il n'en est rien. En effet, on trouve

$$600 - x = 2x$$

ou

$$x = 200.$$

Ainsi, le premier jour, il a été vendu 200 oranges; par conséquent, on en a vendu 400 le second jour. Le premier jour, le prix d'une orange était $0^{f},10$; le second jour, il était $0^{f},05$.

PROBLÈME IV. — *Deux joueurs ont gagné 6000 francs à eux deux en deux parties; après la première partie, le gain du premier joueur est triple de celui du second; le premier donne alors 1000 francs au second; après la* *seconde partie, le premier joueur a gagné deux fois plus que le second, mais il lui donne encore la moitié de son gain, après quoi ils se trouvent chacun en possession de* 3000 *francs; on demande quel a été le gain de chaque joueur à la fin de chaque partie.*

Soit x le gain du second joueur après la première partie, le gain du premier sera $3x$; soit y le gain du second joueur à la fin de la seconde partie, le gain du premier sera $2y$. Or le gain total des joueurs fait 6000 francs; on a donc

$$(1) \qquad x + 3x + y + 2y = 6000.$$

Mais à la fin de la première partie le second joueur possède $x + 1000$ puisqu'il a reçu 1000 francs; à la fin de la seconde partie, il possède d'abord $x + 1000$, plus son gain y, plus la moitié y du gain du premier; il a donc en tout

$$(2) \qquad x + 1000 + y + y = 3000.$$

Les équations (1) et (2) peuvent s'écrire

$$4x + 3y = 6000,$$
$$x + 2y = 2000;$$

on tire de ces équations

$$y = 400, \quad x = 1200.$$

Ainsi le gain du premier joueur est de $3x$ ou 3600 francs après la première partie, et de $2y$ ou 800 francs après la seconde; le gain du second est de 1200 francs après la première partie et de 400 francs après la seconde.

Problème V. — *Un nombre se compose de trois chiffres; la somme de ses chiffres est* 11; *le dernier chiffre est double du second diminué du premier et de* 1;

enfin, en ajoutant 198 à ce nombre, on retrouve le nombre renversé; quel est ce nombre?

Soient x le chiffre des unités, y celui des dizaines, z celui des centaines; la somme des chiffres étant 11, on a

$$(1) \qquad z + y + x = 11;$$

le dernier chiffre étant double du second diminué du premier et de 1, on a

$$(2) \qquad x = 2(y - z - 1).$$

Enfin le nombre lui-même est $100z + 10y + x$; en lui ajoutant 198, on doit trouver le nombre renversé, c'est-à-dire $100x + 10y + z$. On a donc

$$(3) \qquad 100z + 10y + x + 198 = 100x + 10y + z.$$

Les équations (1), (2), (3) peuvent s'écrire ainsi :

$$(4) \qquad x + y + z = 11,$$
$$(5) \qquad x - 2y + 2z = -2,$$
$$(6) \qquad 99x - 99z = 198.$$

L'équation (6) donne immédiatement

$$(7) \qquad x - z = 2.$$

En multipliant l'équation (4) par 2 et en l'ajoutant avec l'équation (5), on trouve

$$(8) \qquad 3x + 4z = 20.$$

Des équations (7) et (8), on tire

$$x = 4, \quad z = 2,$$

et l'équation (4) donne alors $y = 5$; ainsi le nombre cherché est 254.

X. — Interprétation des solutions négatives.

Il peut arriver que les racines d'une équation ou d'un système d'équations soient négatives; si le résultat demandé dans le problème dont ces équations sont la traduction est un nombre abstrait, le problème ne présente rien d'absurde. Mais si le résultat cherché est un nombre concret, le problème que l'on a mis en équation n'admet pas de solution. Éclaircissons ceci à l'aide d'un exemple.

Un père a 68 *ans, son fils en a* 40; *on demande au bout de combien de temps l'âge du père sera le double de celui du fils.*

Désignons par x ce temps; au bout du temps x le père aura $68 + x$ années, le fils $40 + x$, et l'on doit avoir

$$68 + x = 2(40 + x); \tag{1}$$

en résolvant cette équation, on trouve

$$x = -12. \tag{2}$$

Ce résultat prouve que l'équation (1), qui est la traduction du problème en langage algébrique, n'admet pas de solution positive; en d'autres termes, le problème n'admet pas de solution. Et, en effet, l'âge du père n'étant pas le double de l'âge du fils, il ne le deviendra jamais, et le rapport des deux âges se rapproche toujours de 1.

La solution négative $x = -12$ n'est cependant pas aussi absurde que l'on pourrait croire au premier abord. En effet, changeons x en $-x'$, x' sera égal à 12, et l'équation (1) deviendra

$$68 - x' = 2(40 - x'), \tag{3}$$

et cette dernière équation admet évidemment pour solution $x' = 12$. L'équation (3) est la traduction algébrique du problème suivant :

Un père a 68 ans, son fils en a 40, à quelle époque l'âge du père a-t-il été le double de celui du fils?

Nous trouvons alors pour réponse : il y a ~~20~~ 12 ans.

En général, toutes les fois que l'on trouve une solution négative à un problème, il faut changer le signe de la lettre qui représente l'inconnue dans l'équation à laquelle conduit le problème; la solution négative devient alors positive et est le plus souvent la réponse d'un problème analogue à celui qui a été posé et dont l'équation modifiée est la traduction algébrique.

Observons qu'à l'aide d'une simple convention deux problèmes peuvent être compris sous le même énoncé. Reprenons le problème de tout à l'heure; posons-le en ces termes :

Un père a 68 ans, son fils en a 40; quand l'âge du père sera-t-il ou a-t-il été le double de celui du fils?

Posé en ces termes, le problème est en quelque sorte double; mais si nous convenons de regarder comme positif le temps à venir, comme négatif le temps passé; si nous convenons, en un mot, que les locutions *dans* —N *années* et *il y a* N *années* soient équivalentes, nous raisonnerons ainsi qu'il suit : soit x le temps positif ou négatif au bout duquel l'âge du père sera le double de celui du fils.

Au bout du temps x, le père aura $68 + x$ années; ceci est évident si l'âge du père devient dans l'avenir double de celui du fils. Dans le cas où l'âge du père a été le double de celui du fils, $68 + x$ représente encore l'âge du père lorsqu'il est le double de celui du fils; car x' désignant la valeur absolue de x, cet âge est $68 - x'$, c'est-à-dire $68 + x$. De même, à l'époque cherchée, l'âge du fils est

$40 + x$; or on doit avoir

$$68 + x = (40 + x) \times 2.$$

Comme on trouve $x = -12$, on en conclut que l'âge du père *a été* il y a douze ans double de celui du fils.

En Algèbre, lorsqu'une quantité variable peut être comptée dans deux sens opposés, comme le temps, dans le présent ou dans l'avenir; les longueurs sur une même ligne à partir d'un point fixe; la fortune d'un négociant qui peut être active ou passive, etc., on convient de regarder comme positives les grandeurs comptées dans un sens et comme négatives les grandeurs comptées dans l'autre; l'avantage que l'on retire de cette convention est de comprendre sous un seul énoncé plusieurs questions du même genre.

Problème des courriers. — *Deux mobiles* A *et* B *partent simultanément de deux points* P *et* Q *et cheminent sur la droite* PQ, *le premier parcourant a mètres par seconde, le second b mètres par seconde; la distance* PQ *est de l mètres; on demande à quelle époque leur rencontre a lieu.*

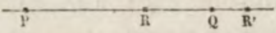
Convenons de regarder comme positives les distances parcourues dans le sens PQ, et comme négatives les distances parcourues dans le sens QP; convenons de regarder les temps passés comme négatifs, les temps à venir comme positifs.

Soit x la distance à laquelle la rencontre a lieu, comptée à partir du point P, le sens positif étant toujours PQ; nous désignerons par R le point de rencontre; la distance PR est égale en valeur absolue au temps employé à la parcourir, que nous désignerons par t multiplié par a; en sorte qu'en valeur absolue on a

(1) $$x = at.$$

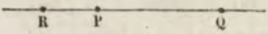
Voyons si cette égalité a encore lieu quand on a égard aux signes. 1° Supposons a et t positifs. Si a est positif, le point A se meut de P vers Q; si t est positif, la rencontre *aura lieu*. Donc le point R est placé du côté de Q par rapport au point P, comme dans la *fig.* 1; par conséquent x est positif, et par conséquent la formule (1) est

Fig. 1.



exacte. 2° Si a est positif, mais t négatif, le point A se meut dans le sens PQ, mais la rencontre *a eu lieu*. Le point R cette fois se trouve du côté opposé à Q par rapport à P, comme dans la *fig.* 2; alors x est négatif, at est

Fig. 2.



négatif aussi; donc la formule (1) convient encore à ce cas. 3° Si a est négatif et t positif, la rencontre *aura lieu*, mais le point A se meut dans le sens QP, en sorte que R se trouve encore placé comme dans la *fig.* 2, et x est négatif ainsi que at. La formule (1) convient encore à ce cas. 4° Si a et t sont négatifs tous deux, la rencontre a eu lieu, et comme le point A se meut dans le sens QP, le point R se trouve placé comme dans la *fig.* 1; x est donc positif comme at, et la formule (1) est encore exacte dans ce cas.

Si nous désignons par y la distance parcourue par le point B entre Q et R, une discussion analogue à la précédente fournit l'équation

$$(2) \qquad y = bt.$$

Ceci posé, je dis que l'on a

$$(3) \qquad x - y = l.$$

Cette équation est évidente si x et y sont positifs tous deux, car alors le point de rencontre se trouve placé comme le point R' de la *fig.* 1, et l'on a

$$PR' - QR' = PQ$$

ou

$$x - y = l.$$

Mais si la rencontre a lieu entre P et Q au point R de la *fig.* 1, on a

$$PR + RQ = PQ.$$

Mais $PR = x$, $RQ = -y$, puisque y est négatif, et $PQ = l$; on a donc

$$x - y = l.$$

Enfin, si le point de rencontre se trouve placé comme le point R de la *fig.* 2, on a

$$QR - PR = PQ.$$

Ici on a

$$QR = -y, \quad PR = -x, \quad \text{et} \quad PQ = l;$$

donc

$$x - y = l;$$

la formule (3) peut donc être considérée comme parfaitement établie. Pour résoudre le système des équations (1), (2), (3), il suffit de retrancher l'équation (2) de l'équation (1); il vient alors

$$x - y = (a - b)t,$$

et, en comparant avec l'équation (3),

$$l = (a - b)t;$$

d'où

(4) $$t = \frac{l}{a - b}.$$

Les équations (1) et (2) donnent alors

$$x = \frac{al}{a-b}, \quad y = \frac{bl}{a-b}.$$

Proposons-nous de résoudre la question suivante :

Deux mobiles partent simultanément de deux points P *et* Q; *ils marchent à la rencontre l'un de l'autre. Le premier parcourt* 10 *mètres par seconde, le second* 40 *mètres, la distance* PQ *est de* 1250 *mètres; au bout de combien de temps se rencontreront-ils?*

Pour trouver ce temps, il suffit de faire dans la formule (4) l égal à 1250, a égal à 10 et b égal à -40; on trouve ainsi

$$t = \frac{1250}{10+40} = 25.$$

Bien que le problème des courriers soit éminemment propre à mettre en évidence les avantages que l'on tire de l'interprétation des quantités négatives, nous allons encore traiter une question d'Arithmétique d'une grande importance et qui se trouve considérablement simplifiée par les théories précédemment exposées : je veux parler de l'étude des erreurs relatives.

XI. — Théorie des erreurs relatives.

Lorsque l'on ne peut pas calculer exactement un nombre, on cherche à en approcher autant que l'on peut; la différence entre le nombre exact et le nombre approché porte le nom d'*erreur absolue*. Cette erreur peut être par *excès* ou par *défaut*, selon que le nombre approché est plus grand ou plus petit que le nombre exact. Nous regarderons comme positives les erreurs par excès et comme négatives les erreurs par défaut; en sorte que A étant le nombre exact, a le nombre approché, l'erreur sera toujours en grandeur et en signe $a - A$.

On appelle *erreur relative* l'erreur absolue divisée par le nombre exact.

THÉORÈME I. — *L'erreur relative d'un produit de deux facteurs est égale à la somme des erreurs relatives de ses facteurs augmentée du produit des mêmes erreurs.*

En effet, soient A et B les facteurs exacts du produit, α et β les erreurs absolues de ces mêmes facteurs; les nombres approchés a et b seront donnés par les formules

$$a = A + \alpha,$$
$$b = B + \beta.$$

Quels que soient les signes de α et β, on déduit des égalités précédentes

$$ab = AB + A\beta + B\alpha + \alpha\beta.$$

En retranchant AB aux deux membres de cette équation et en divisant par AB, on a

$$\frac{ab - AB}{AB} = \frac{\beta}{B} + \frac{\alpha}{A} + \frac{\alpha\beta}{AB}.$$

Si l'on observe que $ab - AB$ est en grandeur et en signe l'erreur absolue du produit, $\frac{ab - AB}{AB}$ désigne son erreur relative, $\frac{\alpha}{A}$, $\frac{\beta}{B}$ sont les erreurs relatives de ses facteurs, et l'égalité précédente démontre le théorème énoncé.

On voit encore dans cet exemple combien l'usage des quantités négatives simplifie l'énoncé des théorèmes et leur démonstration.

THÉORÈME II. — *L'erreur relative d'un quotient est* *sensiblement égale à la différence des erreurs relatives du dividende et du diviseur.*

Soient D le dividende exact, d l'erreur; Δ le diviseur exact, δ l'erreur; Q le quotient exact, q l'erreur : on a

$$(1) \qquad Q = \frac{D}{\Delta},$$

le quotient approché est

$$\frac{D+d}{\Delta+\delta};$$

on a donc

$$q = \frac{D+d}{\Delta+\delta} - \frac{D}{\Delta},$$

ou bien

$$(2) \qquad q = \frac{d\Delta - \delta D}{\Delta(\Delta+\delta)}.$$

Si nous divisons les équations (1) et (2) membre à membre, il vient

$$\frac{q}{Q} = \frac{\frac{d}{D} - \frac{\delta}{\Delta}}{\left(1 + \frac{\delta}{\Delta}\right)}.$$

Le premier membre de cette équation est l'erreur relative du quotient, le second membre doit donc être une autre expression de cette erreur. Il est sensiblement égal à

$$\frac{d}{D} - \frac{\delta}{D},$$

si l'on observe que $\frac{\delta}{D}$ est en général très-petit, ce qui démontre le théorème en question.

XII. — Des solutions de la forme $\frac{m}{0}$.

On dit qu'une quantité variable est *infinie,* quand on a l'intention de la faire croître indéfiniment; ainsi il est absurde de dire qu'une quantité qui ne varie pas est *infinie,* et zéro peut être une valeur particulière d'une quantité infinie. On voit quelle différence il existe entre l'infini métaphysique, qui est une chose complétement vague et incompréhensible, et l'infini mathématique, qui se définit d'une manière très-précise.

On dit qu'une quantité est *infiniment petite* quand elle a zéro pour limite.

Le symbole $\frac{m}{0}$ peut se présenter comme solution d'un problème et représente alors l'*infini*, mais cette locution ne présente aucun sens si on la prend à la lettre, et la solution $\frac{m}{0}$ ne sera censée représenter l'infini que si au zéro on substitue mentalement une quantité variable et infiniment petite. Essayons de nous faire comprendre par un exemple :

Concevons un courrier A *marchant avec une vitesse de a mètres par seconde dans le même sens qu'un courrier* B *parcourant b mètres par seconde; on demande à quelle époque ils se rencontreront, la distance à laquelle ils se trouvent l'un de l'autre étant l au moment du départ.*

Nous avons déjà résolu ce problème, et en désignant par t le temps qui s'écoule depuis le moment du départ jusqu'au moment de la rencontre, on a

$$t = \frac{l}{a-b}.$$

Si dans cette formule on fait $a = b$, on trouve

$$t = \frac{l}{0},$$

on peut alors dire que les courriers se rencontrent à l'infini; mais voici ce qu'il faut entendre par cette locution. A proprement parler, ils ne se rencontrent pas du tout quand $a = b$, c'est-à-dire quand ils marchent tous deux avec la même vitesse; mais si au lieu de faire brusquement $a = b$ on suppose a fixe et b variable, $a - b$ prendra diverses valeurs, et l'on voit que t deviendra d'autant plus grand que $a - b$ sera plus petit, car une fraction est d'autant plus grande que son dénominateur est plus petit, et croît au delà de toute limite quand son dénominateur tend vers zéro, c'est-à-dire devient *infiniment petit*. Ainsi, dire : pour $a = b$, t est infini, c'est énoncer d'une manière abrégée la proposition suivante :

Le temps au bout duquel la rencontre des courriers a lieu croît au delà de toute limite à mesure que la différence des espaces a et b parcourus dans une seconde tend vers zéro.

L'infini se désigne ordinairement par le symbole ∞.

XIII. — Théorème sur les limites.

Rappelons que l'on appelle *limite* d'une quantité variable une quantité fixe dont cette quantité variable peut s'approcher indéfiniment, c'est-à-dire de telle sorte que la différence entre ces deux quantités puisse être prise moindre en valeur absolue que toute quantité donnée.

Théorème I. — *La limite d'une somme algébrique est égale à la somme algébrique des limites de ses parties.*

Soient, en effet, x, y, z,... des quantités variables, a, b, c,... leurs limites respectives, soit enfin α la différence $a - x$, β la différence $b - y$,..., on aura

$$a = x + \alpha, \quad b = y + \beta\ldots,$$

d'où

$$a + b + \ldots = x + y + \ldots + \alpha + \beta + \ldots;$$

mais α, β,... peuvent être pris chacun moindres que toute quantité donnée, puisque ces quantités représentent les différences entre les variables et leurs limites; si donc les quantités x, y, z,... sont en nombre limité, α, β,... seront en nombre limité, et leur somme pourra être rendue moindre que toute quantité donnée, ce qui revient à dire que $a + b + \ldots$ et $x + y + \ldots$ peuvent différer l'un de l'autre d'aussi peu que l'on veut; en d'autres termes, on a

$$a + b + \ldots = \lim\,(x + y + \ldots).$$

Il est essentiel de remarquer que nous avons supposé le nombre des parties de la somme variable limité; s'il n'en était plus ainsi, le théorème précédent pourrait tomber en défaut : c'est ce que nous établirons nettement un peu plus tard.

Théorème II. — *La limite d'un produit de plusieurs facteurs est égale au produit des limites de ces facteurs.*

Pour le démontrer, désignons par x, y, z,... les facteurs variables, par a, b, c,... leurs limites respectives; posons

$$x - a = \alpha, \quad y - b = \beta, \quad z - c = \gamma\ldots.$$

α, β, γ,... pourront être pris aussi petits que l'on voudra, et l'on aura

$$x = a + \alpha, \quad y = b + \beta, \quad z = c + \gamma\ldots,$$

ou bien

$$xyz\ldots = (a+\alpha)(b+\beta)(c+\gamma)\ldots.$$

Si l'on effectue les multiplications indiquées, on trouve

$$xyz\ldots = abc\ldots + \omega.$$

ω désignant un ensemble de termes dans chacun desquels entre comme facteur l'une des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, chacun de ces termes peut donc être pris aussi petit que l'on veut, et leur somme ω par conséquent aussi; donc la différence ω entre $xyz\ldots$ et $abc\ldots$ peut être prise aussi petite que l'on veut; en d'autres termes, $xyz\ldots$ a pour limite $abc\ldots$. C. Q. F. D.

Il faut observer qu'en supposant que nous pouvions prendre ω moindre que toute quantité donnée, nous avons implicitement admis que le nombre des termes contenus dans ω était limité, ce qui suppose enfin le nombre des facteurs $x, y, z, \ldots$ limité.

THÉORÈME III. — *La limite d'un quotient est égale au quotient des limites du dividende et du diviseur.*

En effet, soient D le dividende, d le diviseur, q le quotient, on a

$$D = dq,$$

$$\lim D = \lim dq = \lim d \lim q,$$

d'où

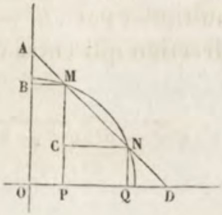
$$\lim q = \frac{\lim D}{\lim d}.$$ C. Q. F. D.

XIV. — Sur les solutions de la forme $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\ldots$

En résolvant l'équation d'un problème, on peut trouver une solution de la forme $\frac{0}{0}$; en général, ce symbole indique une indétermination dans les équations du problème, et par suite dans le problème lui-même. Toutefois, la solution que l'on trouve ainsi peut provenir d'une solution plus générale dans laquelle on a donné des valeurs particulières à certaines lettres qui entraient comme données dans le problème ; il peut arriver alors que le problème ne soit pas réellement indéterminé : c'est ce que nous allons constater sur un exemple.

Problème. — *Du sommet d'un angle droit* DOA *comme centre on décrit un cercle* (*fig.* 3) ; *par deux*

Fig. 3.



points M *et* N *de ce cercle on fait passer une droite* MN ; *les distances* MP *et* NQ *des points* M *et* N *à la droite* OD *sont respectivement* δ *et* δ', *le rayon du cercle est* a : *on demande de calculer la ligne* AO.

Désignons AO par x. Les triangles ABM, MCN, semblables, donnent

$$\frac{AB}{BM} = \frac{MC}{CN},$$

ou

$$\frac{x - \delta}{\sqrt{a^2 - \delta^2}} = \frac{\delta - \delta'}{\sqrt{a^2 - \delta'^2} - \sqrt{a^2 - \delta^2}}.$$

Cette équation donne

$$(1) \qquad x = \delta + \frac{(\delta - \delta')\sqrt{a^2 - \delta^2}}{\sqrt{a^2 - \delta'^2} - \sqrt{a^2 - \delta^2}}.$$

Si l'on fait $\delta = \delta'$, on trouve

$$x = \delta + \frac{0}{0}.$$

La ligne AO, dans le cas que nous considérons, est réellement indéterminée, puisque toute droite passant en M passe aussi en N lorsque δ est devenu égal à δ'; cependant, le point A tend vers une position *limite* à mesure que le point N s'approche de N; cette position *limite* est l'endroit où la tangente au cercle en M vient rencontrer OA, la quantité x a donc une valeur limite que l'on peut se proposer de déterminer à l'aide la formule (1). Pour y arriver, il suffit de multiplier par $\sqrt{a^2 - \delta'^2} + \sqrt{a^2 - \delta^2}$ les deux termes de la fraction qui entre dans la formule (1); on trouve ainsi

$$x = \delta + \frac{(\delta - \delta')\sqrt{a^2 - \delta^2}\left[\sqrt{a^2 - \delta'^2} + \sqrt{a^2 - \delta^2}\right]}{\delta^2 - \delta'^2},$$

ou bien

$$x = \delta + \frac{\sqrt{a^2 - \delta^2}\left[\sqrt{a^2 - \delta'^2} + \sqrt{a^2 - \delta^2}\right]}{\delta + \delta'}.$$

Les deux membres de cette formule sont constamment égaux, donc leurs limites sont égales; or la limite de la fraction qui entre dans la formule précédente est égale au quotient des limites de ses deux termes (th. III, p. 130); la limite de $\sqrt{a^2 - \delta'^2}$, quand δ' tend vers δ, est $\sqrt{a^2 - \delta^2}$, comme il est facile de le prouver par un raisonnement très-simple; donc enfin

$$\lim x = \delta + \frac{\sqrt{a^2 - \delta^2} \times 2\sqrt{a^2 - \delta^2}}{2\delta} = \delta + \frac{a^2 - \delta^2}{\delta},$$

ou

$$\lim x = \frac{a^2}{\delta},$$

résultat exact, ainsi qu'il est facile de le constater directement.

Il serait difficile de donner des règles précises pour lever l'indétermination apparente que l'on rencontre dans la résolution des problèmes. Le plus souvent les quantités limites qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$ ou même $\frac{\infty}{\infty}$ prennent des valeurs déterminées après la suppression d'un facteur commun aux deux termes de la fraction, qui devient $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Ainsi, par exemple, l'expression $\frac{a^2 - b^2}{a - b}\frac{h}{2}$, qui représente l'aire d'un trapèze dont la hauteur est h et dont les bases sont a et b, se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ quand on y fait $a = b$, c'est-à-dire quand le trapèze devient un parallélogramme; cette indétermination apparente, ou plutôt cette absurdité apparente disparaît, lorsqu'on a supprimé aux deux termes de la fraction $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$ le facteur $a - b$. L'aire du trapèze prend alors la valeur

$$(a + b)\frac{h}{2}.$$

Cette dernière expression est toujours égale à la précédente; leurs limites sont donc égales lorsque l'on fait tendre b vers a, et l'on trouve, dans ce cas,

$$\frac{2ah}{2} = ah;$$

c'est l'expression connue de l'aire du parallélogramme.

Proposons-nous de trouver la limite vers laquelle tend l'expression

$$\frac{n+1}{n-1}.$$

Lorsque n augmente indéfiniment, cette expression est une de celles qui se présentent sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$; on a

$$\frac{n+1}{n-1} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}},$$

donc

$$\lim \frac{n+1}{n-1} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{1+\lim\frac{1}{n}}{1-\lim\frac{1}{n}} = 1.$$

EXERCICES.

1. Diophante, l'auteur du plus ancien livre d'Algèbre qui nous reste, passa dans sa jeunesse le $\frac{1}{6}$ de l'âge qu'il vécut, $\frac{1}{12}$ dans l'adolescence; ensuite il se maria et passa dans cette union le $\frac{1}{7}$ de sa vie augmenté de 5 ans avant d'avoir un fils, auquel il survécut de 4 ans, et qui n'atteignit que la moitié de l'âge où son père est parvenu. Quel âge avait Diophante lorsqu'il mourut? (Traduction d'un passage grec trouvé dans un recueil d'épigrammes.)

2. a bœufs en m jours ont mangé α mètres carrés d'herbe; b bœufs en n jours ont mangé β mètres carrés d'herbe. Combien c bœufs en p jours mangeront-ils d'herbe, en admettant que l'herbe croisse pendant qu'ils mangent? (Posé en d'autres termes dans l'*Arithmétique universelle* de Newton.)

3. A quelles heures ont lieu les rencontres des aiguilles d'une montre?

4. Un homme entre dans une église avec une somme composée de pièces de 2 francs; il donne à des pauvres autant de sous qu'il a de pièces de 2 francs. Dieu change les pièces de 2 francs qui lui restent en pièces de 5 francs; le dévot dépense 7 pièces de 5 francs et rentre chez lui avec le double de ce qu'il avait en entrant dans l'église. Quelle somme d'argent avait-il d'abord?

5. Une femme porte des œufs au marché : elle en vend à une première personne la moitié plus la moitié d'un; elle vend à une deuxième personne la moitié de ce qui lui reste plus la moitié d'un œuf; enfin, en vendant à une troisième personne la moitié de ce qui lui reste plus la moitié d'un œuf, il ne lui reste plus rien. Combien avait-elle d'œufs?

6. Un corps formé d'un alliage d'or et d'argent pèse P grammes; plongé dans l'eau il n'en pèse plus que P'. Quelle quantité d'or et d'argent contient-il, sachant que la densité de l'or est δ et celle de l'argent δ'?

7. Trouver la limite de l'expression

$$\frac{m^2+m+1}{m^2-1}$$

pour $m=\infty$.

8. Trouver la limite de $\frac{x^4-2x^2+1}{x-1}$ pour $x=1$.

9. Démontrer que le déterminant qui a pour éléments les déterminants mineurs d'un déterminant de degré n est la $n-1^{\text{ième}}$ puissance de ce déterminant.

CHAPITRE VI.

DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ ET DES QUESTIONS QUI EN DÉPENDENT.

I. — De la racine carrée.

Le carré d'une quantité ou la seconde puissance de cette quantité est, comme on sait, le produit de deux facteurs égaux à cette quantité; il en résulte que tout carré est une quantité essentiellement positive.

On appelle *racine carrée* d'une quantité une quantité qui, multipliée par elle-même, reproduit la première; la racine carrée d'une quantité A se désigne par le symbole $\sqrt{A}$.

Théorème. — 1° *Les quantités négatives n'ont pas de racine carrée; 2° les quantités positives ont deux racines égales et de signes contraires; 3° zéro n'a qu'une racine qui est zéro.*

En effet, soit x la racine carrée de A, on aura, par définition même,

$$x^2 = A.$$

Or, si A est négatif, l'équation précédente n'a pas de racines, puisque le premier membre est positif et le second négatif; si nous supposons alors A positif et si nous désignons par a le nombre positif qui, élevé au carré, donne A, nous aurons

$$x^2 = a^2,$$

ou bien

$$x^2 - a^2 = 0.$$

Cette équation peut encore s'écrire

$$(x - a)(x + a) = 0.$$

Or il n'y a que deux manières d'annuler le premier membre de cette équation, c'est de faire $x - a = 0$ ou $x + a = 0$; d'où l'on tire

$$x = a \quad \text{ou} \quad x = - a,$$

ou, si l'on veut,

$$x = \pm \sqrt{a} \ (*),$$

$\sqrt{a}$ désignant l'une quelconque des deux valeurs de la racine carrée de A, la valeur positive, par exemple. Si $A = 0$, il est bien clair que de l'équation

$$x^2 = A \quad \text{ou} \quad x^2 = 0$$

on ne pourra conclure que $x = 0$.

Nous avons admis qu'il existait toujours un nombre positif qui, élevé au carré, reproduisait le nombre positif A. Nous avons vu, en effet, que s'il n'existait pas de nombre commensurable tel que

$$a^2 = A,$$

on était convenu de définir *racine carrée de* A la limite vers laquelle convergeaient les fractions croissantes dont le carré était inférieur à A. Donc, etc. C. Q. F. D.

Rappelons enfin que le carré d'un binôme $(a + b)$ se compose du carré de a, du double produit de a par b et du carré de b; c'est ce qu'exprime la formule suivante,

---

(*) Le signe $\pm$ s'énonce *plus ou moins*.

que l'on vérifie aisément d'après la règle de la multiplication des polynômes,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

II. — Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

La forme la plus générale sous laquelle peut se présenter l'équation du second degré est

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$

a désignant une quantité essentiellement différente de zéro; b et c sont d'ailleurs quelconques. Pour résoudre cette équation, on commence ordinairement par diviser chacun des coefficients par a (*), puis on pose

$$(2) \qquad \frac{b}{a} = p, \quad \frac{c}{a} = q;$$

(*) On peut résoudre directement l'équation (1) de la manière suivante : on la met sous la forme

$$\left(x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0,$$

et l'on vérifie aisément, en développant le carré indiqué, l'identité de cette formule avec l'équation (1). On déduit immédiatement de là

$$\left(x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

puis

$$x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}},$$

ou

$$x\sqrt{a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}},$$

ou enfin

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

elle prend alors la forme

$$x^2 + px + q = 0. \tag{3}$$

Si l'on observe alors que $x^2 + px$ sont les deux premiers termes du carré de $x + \frac{p}{2}$ ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, l'équation précédente pourra s'écrire

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0,$$

ou bien, en faisant passer les termes connus dans le second membre,

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q. \tag{4}$$

Jusqu'ici nous n'avons fait subir à l'équation (1) que des transformations incapables d'altérer la valeur des racines. Quelques auteurs continuent le calcul en disant : *extrayons la racine carrée des deux membres* de l'équation (4) : cette locution est vicieuse. En effet, on sait que les deux équations

$$A = B, \quad A^2 = B^2$$

n'admettent pas les mêmes racines, en sorte que le raisonnement reste incomplet. Toutefois, on peut faire observer que les solutions de l'équation

$$A^2 = B^2 \tag{5}$$

sont celles des deux équations

$$A = -B \quad \text{et} \quad A = +B. \tag{6}$$

En effet, de l'équation (5), on tire

$$A^2 - B^2 = 0,$$

ou

$$(A + B)(A - B) = 0.$$

Or les valeurs des inconnues qui rendent $(A + B)(A - B)$ nul sont celles qui rendent $A + B$ et $A - B$ égaux à zéro ; du reste il n'y en a pas d'autres, en sorte que l'équation (5) équivaut aux deux suivantes :

$$A + B = 0, \quad A - B = 0,$$

c'est-à-dire aux équations (6) comprises toutes deux dans la formule unique

$$A = \pm B;$$

en sorte que l'équation (4) peut être remplacée par la suivante

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Mais on peut arriver directement à ce résultat en faisant observer que $x + \frac{p}{2}$ élevé au carré devant reproduire $\frac{p^2}{4} - q$ est par définition la racine carrée de cette quantité. Or cette racine a deux valeurs $+\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ et $-\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$; en sorte que l'on a

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \tag{7}$$

pourvu toutefois que $\frac{p^2}{4} - q$ soit positif ou nul. Dans le cas où $\frac{p^2}{4} - q$ serait négatif, l'équation (4) et par suite l'équation (1) n'auraient pas de racines, car il n'existe pas de quantité $x + \frac{p}{2}$ dont le carré soit négatif.

De l'équation (7) on tire enfin

$$(8)\qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Si l'on remplace p et q par leurs valeurs (2), il vient

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}},$$

ou bien

$$(9)\qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Les formules (8) et (9) sont d'un fréquent usage dans l'analyse; nous allons en donner immédiatement quelques applications.

Première application. — *Résoudre l'équation*

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Nous assimilerons cette équation à l'équation (3), nous ferons $p = -4$, $q = 3$, et en appliquant la formule (8), nous trouverons

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - 3},$$

ou

$$x = 2 \pm 1;$$

ainsi l'une des racines est 3, l'autre 1, ce que l'on peut vérifier *à posteriori*.

Nous avons vu que si $\frac{p^2}{4} - q$ était négatif, l'équation du second degré n'admettait pas de racines. La formule (8), dans ce cas, ainsi que la formule (9), deviennent absurdes; en sorte que ces formules mêmes, lorsqu'on cherchera à les appliquer, indiqueront l'absence de racines.

DEUXIÈME APPLICATION. — *Résoudre l'équation*

$$x^2 - 2x + 7 = 0.$$

La formule (8) donne

$$x = 1 \pm \sqrt{1 - 7},$$

ou bien

$$x = 1 \pm \sqrt{-6};$$

ce résultat montre que l'équation considérée n'a pas de racines.

TROISIÈME APPLICATION. — *Résoudre l'équation*

$$x^2 + 7x + 10 = 0.$$

Nous pourrions encore appliquer la formule (8), mais comme nous introduirions ainsi des fractions, le coefficient de x n'étant pas divisible par 2, c'est à la formule (9) que nous aurons recours. Nous assimilerons alors l'équation proposée à l'équation (1); nous ferons $a = 1$. $b = 7$, $c = 10$. Nous aurons alors

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2},$$

$$x = \frac{-7 \pm 3}{2},$$

c'est-à-dire

$$x = -5 \quad \text{ou} \quad x = -2.$$

QUATRIÈME APPLICATION. — *Résoudre l'équation*

$$36x^2 - 12x + 1 = 0.$$

Il faut faire, dans la formule (9), $a = 36$, $b = -12$, $c = 1$; il vient alors

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{72},$$

ou

$$x = \frac{12}{72} = \frac{1}{6};$$

ici nous ne trouvons qu'une racine.

Avec un peu d'habitude, on simplifie mentalement la formule (9) lorsque b est divisible par 2, et alors c'est la formule

$$(10) \qquad x = \frac{-\left(\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a},$$

obtenue en divisant par 2 les deux termes de la fraction qui entre dans le second membre de la formule (9), que l'on applique.

Cinquième application. — *Résoudre l'équation*

$$4x^2 - 8x + 3 = 0.$$

La formule (10) donne

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{4},$$

ou

$$x = \frac{4 \pm 2}{4},$$

ou

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x = \frac{3}{2}.$$

L'application de la formule (9) aurait donné des chiffres plus gros; ainsi on aurait trouvé

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 48}}{8}.$$

IV. — Discussion des racines de l'équation du second degré.

Reprenons l'équation

$$(1) \qquad x^2 + px + q = 0.$$

Nous avons trouvé que les racines étaient données par la formule

$$(2) \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Nous avons vu que si la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ était négative, il n'y avait pas de racines, et alors la formule (2) devient absurde; on convient dans ce cas de dire que les racines de l'équation (1) sont *imaginaires*.

Lorsque la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ est nulle, l'équation (1) n'admet qu'une seule racine, elle est égale à $-\frac{p}{2}$; on convient de dire que l'équation (1) a *deux racines égales* à $-\frac{p}{2}$.

Enfin, lorsque $\frac{p^2}{4} - q$ est positif, on a deux racines dites *réelles et inégales*. On peut observer à ce propos que si la quantité q est négative, l'équation (1) a toujours deux racines réelles et inégales, car alors $\frac{p^2}{4} - q$ sera toujours positive.

Lorsque la quantité q est négative, ou si l'on veut quand dans l'équation

$$(3) \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$

c et a sont de signes contraires, il y a forcément une racine positive et une négative, car dans la formule (2) le radical a une valeur absolue plus grande que $-\frac{p}{2}$.

Lorsque, les racines restant réelles, q est positif, on voit que les racines seront de même signe, car alors la valeur absolue du radical dans la formule (2) est moindre que $-\frac{p}{2}$. Si p est positif, elles seront négatives; sinon, elles seront positives.

Si nous désignons par x' et x'' les racines de l'équation (1), nous aurons

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

En ajoutant ces deux formules membre à membre, on trouve

$$x' + x'' = -p.$$

En les multipliant membre à membre, on trouve

$$\begin{aligned} x'x'' &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) \\ &= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 \\ &= \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = q. \end{aligned}$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *La somme des racines de l'équation* (1) *est égale à* $-p$, *leur produit est égal à* q.

Ou, ce qui revient au même :

La somme des racines de l'équation (3) *est égale à* $-\frac{b}{a}$, *leur produit à* $\frac{c}{a}$.

Si donc on se proposait de former une équation du second degré, admettant pour racines deux nombres donnés x' et x'', il suffirait d'écrire

$$x^2 - (x' + x'')x + x'x'' = 0.$$

Du reste, en résolvant cette équation, on trouve

$$x = \frac{x' + x'' \pm \sqrt{(x' + x'')^2 - 4x'x''}}{2},$$

ou

$$x = \frac{x' + x''}{2} \pm \frac{x' - x''}{2},$$

c'est-à-dire

$$x = x' \quad \text{et} \quad x = x''.$$

Il arrive dans certaines questions que l'on connaît la somme s de deux quantités x' et x'' ainsi que leur produit P; pour déterminer ces quantités, il suffit d'observer qu'elles sont racines de l'équation du second degré

$$(4) \qquad x^2 - sx + \mathrm{P} = 0.$$

En effet, la somme des racines de cette équation est s, leur produit est P; du reste, il est facile de prouver que l'équation (4) fournit la solution complète du problème. En effet, si l'on pose

$$x' + x'' = s,$$
$$x'x'' = \mathrm{P},$$

on voit, par la première de ces équations, que

$$x'' = s - x',$$

et, par conséquent, la seconde peut s'écrire

$$x'(s - x') = P,$$

ou bien

$$x'^2 - sx' + P = 0;$$

ce qui prouve que x' est une racine de l'équation (4). On verrait de même que x'' est racine de la même équation.

Si l'on donnait

$$x' - x'' = d,$$
$$x'x'' = P,$$

x' et $-x''$ seraient racines de l'équation

$$x^2 - dx - P = 0.$$

Exemple. — *Trouver deux nombres dont la somme fasse* 12 *et dont le produit fasse* 27.

Ces deux nombres sont les racines de l'équation

$$x^2 - 12x + 27 = 0;$$

d'où l'on tire

$$x = 6 \pm \sqrt{36 - 27},$$
$$x = 6 \pm 3,$$

et par suite les nombres cherchés sont 9 et 3.

V. — Discussion du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Proposons-nous d'étudier la manière dont varie le trinôme

(1) $$y = ax^2 + bx + c,$$

lorsque l'on fait croître x depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Si nous posons comme plus haut

$$\frac{b}{a} = p, \quad \frac{c}{a} = q,$$

la formule (1) donne successivement

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right),$$

(2) $$y = a(x^2 + px + q).$$

Nous distinguerons trois cas :

1° $\frac{p^2}{4} - q > 0$. *L'équation* $y = 0$ *a ses racines réelles et inégales*. Dans ce cas, la formule (2) donne

(3) $$y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q\right].$$

$\frac{p^2}{4} - q$ étant positif, on peut le poser égal à λ^2, et la formule précédente donne

(4) $$y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \lambda^2\right].$$

Cette égalité montre que le trinôme y est la différence de deux carrés; ces carrés sont $\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)\sqrt{\pm a}\right]^2$ et $(\lambda\sqrt{\pm a})^2$; le signe + placé sous le radical convenant au cas où a est positif et le signe — au cas où il est négatif.

Le trinôme y peut encore se mettre sous une autre forme. L'équation (3) peut s'écrire

$$y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2\right],$$

ou

$$y = a\left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right),$$

c'est-à-dire, en désignant par x' et x'' les racines de l'équation $y = 0$,

$$(5) \qquad y = a(x - x')(x - x'').$$

Ainsi le trinôme y, dans le cas que nous examinons, est le produit de deux binômes du premier degré. Si nous identifions cette valeur de y avec celle que fournit la formule (2), il vient

$$x^2 + px + q = (x - x')(x - x''),$$

ou bien

$$x^2 + px + q = x^2 - (x' + x'')x + x'x''.$$

Cette relation ayant lieu quel que soit x, on a (Chapitre III, p. 52)

$$-p = (x' + x''), \quad q = x'x''.$$

Nous retrouvons les relations démontrées p. 145.

Ceci posé, supposons $a > 0$, et reprenons la formule (4),

$$(4) \qquad y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \lambda^2\right].$$

Si nous faisons varier x depuis $-\infty$ jusqu'à $-\frac{p}{2}$, y va décroître, car le seul terme variable $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ décroît et s'annule pour $x = -\frac{p}{2}$. Si nous continuons à faire croître x, le terme $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ va croître et repassera, pour des valeurs de x équidistantes de $-\frac{p}{2}$, par les mêmes valeurs que précédemment; en sorte que la plus petite valeur que peut prendre y correspond à $x = -\frac{p}{2}$, demi-somme des racines de l'équation $y = 0$. Cette valeur est $-a\lambda^2$; du reste, pour $x = \pm\infty$, y est égal à l'infini.

Pour $a = 0$, y est toujours nul.

Enfin, pour $a < 0$, il est facile de voir, sans recommencer la discussion, que y croît depuis $-\infty$ jusqu'à $-a\lambda^2$, lorsque x varie de $-\infty$ à $-\frac{p}{2}$, puis décroît depuis $-a\lambda^2$ jusqu'à $-\infty$ lorsque x varie de $-\frac{p}{2}$ à $+\infty$.

2° *Supposons* $\frac{p^2}{4} - q = 0$. *L'équation* $y = 0$ *a ses racines égales*. Dans ce cas, on peut écrire comme plus haut

$$y = a(x^2 + px + q) = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)\right].$$

Mais comme $\frac{p^2}{4} - q = 0$,

$$y = a\left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Le trinôme y est donc un carré parfait si a est positif et un carré parfait pris en signe contraire si a est négatif.

x variant de $-\infty$ à $-\frac{p}{2}$, demi-somme des racines, y décroît si a est positif, croît dans le cas contraire; x variant de $-\frac{p}{2}$ à $+\infty$, y croît si a est positif et décroît dans le cas contraire.

3° *Supposons* $\frac{p^2}{4} - q < 0$. *L'équation* $y = 0$ *a ses racines imaginaires*. On a toujours

$$y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q\right].$$

Mais comme $\frac{p^2}{4} - q < 0$, on peut poser

$$-\frac{p^2}{4} + q = -\left(\frac{p^2}{4} - q\right) = \lambda^2;$$

il vient alors

$$y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \lambda^2\right],$$

et dans ce cas on voit que y est, au signe près, la somme de deux carrés dont l'un ne contient pas la quantité x; aussi y ne peut-il s'annuler pour aucune valeur attribuée à cette lettre : c'est ce qui explique pourquoi, dans ce cas, l'équation $y = 0$ n'a pas de racines.

Les variations de y s'étudient dans ce cas comme dans le premier; de cette discussion résultent plusieurs faits importants :

1° Si l'équation $y = 0$ a ses racines réelles, le trinôme y passe deux fois par zéro; il est de même signe que son premier terme ax^2 quand x n'est pas compris entre les racines, ce qui peut se voir sur la formule

$$y = a(x - x')(x - x'').$$

Il est de signe contraire à son premier terme quand x varie entre les racines x', x''; enfin il est la différence de deux carrés.

2° Si l'équation $y = 0$ a ses racines égales, le trinôme y est toujours de même signe que son premier terme ax^2, excepté lorsque x devient égal à l'une des racines : il est un carré parfait.

3° Si l'équation $y = 0$ a ses racines imaginaires, le trinôme y conserve toujours le signe de son premier terme; il est au signe près égal à la somme de deux carrés.

Nous venons de voir que dans le cas où le trinôme

$$y = ax^2 + bx + c$$

égalé à zéro avait ses racines égales, il était un carré parfait, du moins au signe près. Il est facile de démontrer que :

Pour qu'un trinôme du second degré soit un carré parfait, il faut que, égalé à zéro, l'équation résultante ait ses racines égales.

En effet, $ax^2 + bx + c$ ne peut être que le carré d'un binôme. Soit $mx + n$ ce binôme, on doit avoir

$$ax^2 + bx + c = (mx + n)^2.$$

Or, en égalant $(mx + n)^2$ à zéro, on trouve deux racines égales. Du reste, la formule précédente donne

$$ax^2 + bx + c = m^2x^2 + 2mnx + n^2,$$

et en identifiant,

$$m^2 = a, \quad 2mn = b, \quad n^2 = c.$$

On déduit de là

$$m = \sqrt{a} \quad \text{et} \quad n = \sqrt{c};$$

et par suite,

$$ax^2 + bx + c = (x\sqrt{a} + \sqrt{c})^2.$$

En remplaçant dans l'équation

$$2mn = b$$

m et n par leurs valeurs $\sqrt{a}$ et $\sqrt{c}$, on a

$$2\sqrt{ac} = b,$$

ou bien, en élevant au carré,

$$4ac = b^2, \quad b^2 - 4ac = 0.$$

Nous retrouvons ainsi par une autre voie la condition qui doit être satisfaite pour que l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ait ses racines égales.

VI. — Examen du cas ou le coefficient de x^2 est très-petit.

La formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{1}$$

qui donne les racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{2}$$

a été démontrée pour toutes les valeurs de a différentes de zéro. Il est intéressant de rechercher ce qu'elle devient quand on y introduit l'hypothèse $a = 0$ qui fait disparaître l'une des racines de l'équation (2) en l'abaissant au premier degré; en d'autres termes, nous allons voir ce que devient la racine qui disparaît pour $a = 0$. Si l'on introduit directement zéro à la place de a dans la formule (1), les racines

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{3}$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{4}$$

prennent respectivement les formes illusoires

$$x' = \frac{0}{0}, \quad x'' = \frac{-2b}{0}.$$

Ces formules ne nous apprennent rien; mais si nous multiplions les deux termes de la fraction qui représente la valeur de x', formule (3), par $-b-\sqrt{b^2-4ac}$, et les deux termes de la fraction qui représente la valeur de x'', formule (4), par $-b+\sqrt{b^2+4ac}$, en observant que l'on a

$$(u-v)(u+v)=u^2-v^2,$$

on trouve

$$x'=\frac{4ac}{2a\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)},$$

$$x''=\frac{4ac}{2a\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)},$$

ou simplement, en supprimant le facteur commun $2a$,

$$x'=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}},\quad x''=\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Si l'on fait alors tendre a vers zéro, on voit que $\sqrt{b^2-4ac}$ tend vers b, par suite x' tend vers $-\frac{c}{b}$, racine de l'équation

$$bx+c=0,$$

tandis que x'' augmente indéfiniment. Ainsi, en employant un langage figuré dont nous avons fait connaître le sens (p. 127), on peut dire que pour $a=0$ l'une des racines de l'équation (2) devient infinie et que l'autre est égale à $-\frac{c}{b}$.

Lorsque a est très-petit, les formules (3) et (4) sont fort peu commodes pour le calcul des racines. En effet, le radical $\sqrt{b^2-4ac}$ est peu différent de b; il faudra donc le calculer avec un grand nombre de chiffres pour que

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ne soit pas nul ou donne une faible approximation pour x'. Voici une méthode qui permet de calculer x' assez rapidement et qui permet d'évaluer l'erreur absolue commise sur les résultats auxquels on arrive.

Commençons par diviser les deux membres de l'équation (2) par b et résolvons par rapport à x, il vient

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x^2,$$

ou bien, en posant

$$-\frac{c}{b} = \gamma, \quad -\frac{a}{b} = \alpha,$$

(5)
$$x = \gamma + \alpha x^2.$$

La quantité α est très-petite, comme a; on aura alors une première approximation x, en négligeant αx^2 et en prenant

$$x_1 = \gamma.$$

La racine dont on approche ainsi est la plus petite; l'autre, en effet, est très-grande, et il n'est pas permis de négliger αx^2 pour la calculer. Si à la place de x^2 dans l'équation (5) on substitue x_1^2, on aura une seconde approximation x_2, en général plus satisfaisante que la première,

$$x_2 = \gamma + \alpha x_1^2 \quad \text{ou} \quad x_2 = \gamma + \alpha\gamma^2.$$

En remplaçant toujours dans l'équation (5) x^2 par x_2^2, on obtiendra une nouvelle valeur approchée de x

$$x_3 = \gamma + \alpha x_2^2 \quad \text{ou} \quad x_3 = \gamma + \alpha\gamma^2 + 2\alpha^2\gamma^3 + \alpha^3\gamma^4,$$

et ainsi de suite.

Comme nous ne calculons que la valeur absolue de x, nous supposerons γ positif; s'il était négatif, on calculerait alors $-x$ au lieu de x, et le terme connu dans le second membre de l'équation (5) deviendrait positif. Nous aurons alors deux cas à distinguer :

1° $\alpha > 0$. Dans ce cas, on a évidemment

$$x_1 < x,\quad x_2 < x,\quad x_3 < x,\ldots,$$
$$x_1 < x_2,\quad x_2 < x_3,\quad x_3 < x_4,\ldots.$$

Les erreurs sont toujours par défaut, mais on approche sans cesse du résultat cherché. Voici comment on peut calculer l'erreur commise à chaque opération. Lorsque x dans le trinôme du second degré varie en dehors des racines, le signe de ce trinôme est le même que celui de son premier terme; lorsqu'il varie entre les racines, ce signe change. Il résulte de là que deux valeurs de x, qui substituées dans

$$(6) \qquad x - \gamma - \alpha x^2$$

donnent des résultats de signe contraire, comprennent une racine. Ceci posé, après avoir calculé x_2, on remarquera que x_2 mis à la place de x donne un résultat négatif, car $\gamma + \alpha x_2^2$ est égal à $x_3 > x_2$; on forcera alors la valeur trouvée x_2 de x de la quantité imposée comme limite à l'erreur, et l'on verra si le résultat de la substitution à la place de x dans l'équation (5) donne un résultat positif.

Exemple. — Résoudre l'équation

$$(7) \qquad 0,008x^2 - x + 1 = 0,$$

ou

$$x = 1 + 0,008x^2.$$

On posera

$$x_1 = 1,$$
$$x_2 = 1 + 0,008 = 1,008,$$
$$x_3 = 1 + 0,008 \times \overline{1,008}^2 = 1,008128512,$$
$$x_4 = 1 + 0,008 \times \overline{1,008128512}^2 = 1,008130 5.$$

Si l'on substitue à la place de x dans l'équation (7) 1,0081306, on trouve un résultat négatif, tandis que 1,0081305 donne comme 1 un résultat positif; donc 1,0081306 et 1,0081305 sont deux valeurs approchées, l'une par excès, l'autre par défaut.

2° Supposons $\alpha < 0$. Dans ce cas on aura, si en valeur absolue $\gamma > \alpha\gamma^2$ ou $1 > \alpha\gamma$,

$$x_1 > x, \quad x_2 < x, \quad x_3 > x, \ldots,$$
$$x_2 > x_1, \quad x_3 < x_2, \ldots.$$

Les erreurs seront donc alternativement par excès et par défaut. De plus, chaque valeur approchée est comprise entre celle qui la précède et la suit; on est donc dans les meilleures conditions pour apprécier l'erreur commise à chaque opération.

Lorsque l'on aura ainsi calculé la plus petite des racines, l'autre s'en déduira par l'une des formules

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\alpha},$$

$$x' x'' = \frac{c}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Nous avons supposé α petit, mais surtout petit par rapport à γ, en sorte que, par exemple, non-seulement en valeur absolue

$$\gamma > \alpha\gamma^2,$$

condition qui doit être satisfaite en théorie, mais encore

$$\gamma > 100 \quad \text{ou} \quad 1000\alpha\gamma^2,$$

condition pratique pour la simplicité des calculs; s'il n'en était pas ainsi, il faudrait recourir à la formule

$$x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Le cas où c est très-petit présente les mêmes difficultés que celui où a est très-petit; il se ramène à celui-ci, en posant dans l'équation (2),

$$x = \frac{1}{z};$$

d'où

$$cz^2 + bz + a = 0.$$

z une fois calculé, x s'en déduit par la formule précédente.

VII. — Des équations bicarrées.

On appelle *équations bicarrées* les équations de la forme

$$(1) \qquad ax^4 + bx^2 + c = 0;$$

elles se ramènent immédiatement aux équations du second degré en prenant x^2 pour inconnue. On en conclut

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Une équation bicarrée aura donc en général quatre racines. Si $b^2 - 4ac < 0$, elle n'aura pas de racines; car alors il n'existe pas de valeur pour x^2 qui satisfasse à l'équation (1). Si l'une des quantités comprises dans la formule

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

est négative, l'équation n'aura que deux racines; si elles sont négatives toutes deux, l'équation (1) n'aura pas de racines.

Nous allons faire connaître une formule qui permet de simplifier dans bien des cas le calcul des racines de l'équation (1); les racines de cette équation sont de la forme

$$\sqrt{A + \sqrt{B}}.$$

Le problème que nous allons nous proposer de résoudre est celui-ci :

Problème. — A *et* B *étant censés rationnels, on demande de trouver deux nombres* x *et* y *rationnels satisfaisant à la relation*

$$(2) \qquad \sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{u} + \sqrt{v}.$$

Remarquons auparavant que si l'on a

$$m + \sqrt{n} = m' + \sqrt{n'},$$

m, n, m', n' désignant des nombres rationnels, on aura forcément

$$m = m', \quad n = n',$$

si $\sqrt{n}$ et $\sqrt{n'}$ ne sont pas commensurables. En effet,

$$\sqrt{n} = (m' - m + \sqrt{n'}),$$

et en élevant au carré,

$$(3) \qquad n = (m' - m)^2 + n' + 2\sqrt{n'}(m' - m).$$

Or le produit $2\sqrt{n'}(m' - m)$ sera incommensurable tant que $m - m'$ ne sera pas nul; car si ce nombre était commensurable, on pourrait poser

$$2\sqrt{n'}(m' - m) = \frac{\mu}{\nu},$$

μ et ν étant des nombres entiers; d'où

$$\sqrt{n'} = \frac{\mu}{\nu} : 2(m' - m).$$

$\sqrt{n'}$ serait donc égal à un nombre commensurable, ce qui est contre notre hypothèse. Mais alors, si $m \gtrless m'$, le second membre de la formule (3) est incommensurable, le premier ne l'est pas; donc il faut que l'on ait $m = m'$, et par suite $n = n'$.

Ceci posé, revenons à la formule (2). En élevant au carré, on a

$$A + \sqrt{B} = u + v + 2\sqrt{uv};$$

d'où nous concluons

$$A = u + v, \quad \sqrt{B} = 2\sqrt{uv} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4}B = uv.$$

Nous ferons ensuite observer que si le radical $\sqrt{B}$ est pris avec le signe $-$, les radicaux $\sqrt{u}$ et $\sqrt{v}$ devront être pris avec des signes contraires. On connaît ainsi la somme et le produit de u et v; ces quantités (p. 146) sont donc racines de l'équation du second degré

$$x^2 - Ax + \frac{B}{4} = 0.$$

On en déduit

$$u \quad \text{ou} \quad v = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

et par suite,

$$(4) \quad \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Cette formule résoudra le problème toutes les fois que $A^2 - B$ sera un carré parfait. Toutefois, nous ferons observer que la formule (4) est une identité et qu'elle a lieu dans le cas où les nombres A et B sont tout à fait quelconques. En effet, les deux nombres u et v ont été déterminés par la condition de satisfaire aux formules

$$u + v = A, \quad uv = \frac{1}{4} B,$$

qui satisfont à la condition

$$u + v \pm 2\sqrt{uv} = A \pm \sqrt{B},$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{u} \pm \sqrt{v} = \sqrt{A \pm \sqrt{B}},$$

quels que soient A et B. Du reste, la formule (4) se vérifie aisément en élevant ses deux membres au carré.

Exemple. — Résoudre l'équation

$$x^4 + px^2 + q = 0.$$

On a

$$x = \pm\sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}.$$

Appliquons au calcul de x la formule (4). Pour cela, il faut faire dans cette formule

$$A = -\frac{p}{2}, \quad B = \frac{p^2}{4}, \quad A^2 - B = q;$$

il vient alors

$$x = \pm\left(\sqrt{-\frac{p}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{q}} \pm \sqrt{-\frac{p}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{q}}\right).$$

La transformation en question réussira donc toutes les fois que q sera un carré parfait; ainsi l'équation

$$x^4 - 24x^2 + 36 = 0$$

donnera

$$x = \pm(\sqrt{6+3} \pm \sqrt{6-3}),$$

ou

$$x = \pm(3 \pm \sqrt{3}).$$

VIII. — Propriété remarquable du trinôme $x^4 + px^2 + q$.

Le trinôme $x^4 + px^2 + q$ peut toujours se mettre sous la forme d'un produit de deux trinômes du second degré. Ceci est évident lorsque les racines de l'équation

$$x^4 + px^2 + q = 0$$

sont réelles, en considérant x^2 comme l'inconnue; alors, en effet, en désignant par x' et x'' ces racines, on a

$$x^4 + px^2 + q = (x^2 - x')(x^2 - x'').$$

Supposons donc x' et x'' imaginaires, alors on a

$$\frac{p^2}{4} - q < 0. \tag{1}$$

D'un autre côté, en considérant x^4 et q comme les termes extrêmes d'un carré, on a

$$x^4 + px^2 + q = (x^2 + \sqrt{q})^2 + (p - 2\sqrt{q})\,x^2. \tag{2}$$

Mais de la relation (1) on tire successivement, en observant que si $p > 0$,

$$p^2 < 4q,$$
$$p < 2\sqrt{q},$$
$$p - 2\sqrt{q} < 0.$$

Si p est négatif, cette formule sera satisfaite d'elle-même. La formule (2) peut alors s'écrire

$$x^4 + px^2 + q = (x^2 + \sqrt{q})^2 - x^2\left(\sqrt{2\sqrt{q} - p}\right)^2,$$

ou bien

$$x^4 + px^2 + q$$
$$= \left(x^2 + \sqrt{q} - x\sqrt{2\sqrt{q} - p}\right)\left(x^2 + \sqrt{q} + x\sqrt{2\sqrt{q} - p}\right).$$

C. Q. F. D.

Applications. — On a

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1),$$
$$x^4 + 1 = \left(x^2 + 1 - x\sqrt{2}\right)\left(x^2 + 1 + x\sqrt{2}\right).$$

IX. — Des questions de maximum résolubles par des équations du second degré.

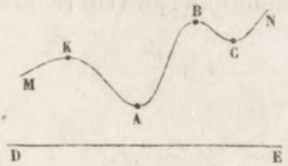
On appelle *maximum* d'une quantité variable une valeur de cette quantité plus grande que celles qui la précèdent ou la suivent *immédiatement*.

On appelle *minimum* d'une quantité variable une valeur de cette quantité plus petite que celles qui la précèdent ou la suivent *immédiatement*.

Comme on voit, le maximum d'une quantité n'est pas la plus grande de toutes ses valeurs; celle-ci porte le nom de *maximum absolu*. On appelle de même *minimum absolu* d'une quantité la plus petite de toutes les valeurs de cette quantité.

Si nous considérons, par exemple, une courbe sinueuse MN (*fig.* 4) et une droite DE situées dans un

Fig. 4.



même plan, la distance d'un point quelconque de MN à DE est une quantité variable qui est maximum en B et en K, minimum en A et en C. Un minimum, comme on voit, peut être plus grand que certains maximums.

Problème I. — *Trouver le maximum d'un produit de deux facteurs dont la somme est constante et égale à $2a$.*

Soit x l'une des parties de la somme, l'autre sera $2a - x$, et l'on aura, en désignant par y le produit que l'on veut rendre maximum,

$$y = x(2a - x),$$

ou bien

$$x^2 - 2ax + y = 0;$$

d'où l'on tire

$$x = a \pm \sqrt{a^2 - y}.$$

A l'inspection de cette formule, on voit que la plus grande valeur que puisse prendre y est a^2, car pour de plus grandes valeurs de y, x n'existerait plus; pour $y = a^2$, on a $x = a$. Ainsi les deux facteurs du produit y sont égaux lorsque ce produit est maximum absolu; du reste y peut décroître de a^2 à $-\infty$.

Problème II. — *Trouver le minimum d'une somme de deux facteurs dont le produit est constant et égal à p^2.*

En appelant x l'un des facteurs, l'autre sera $\frac{p^2}{x}$, et y désignant la somme que l'on veut rendre minimum, on a

$$x + \frac{p^2}{x} = y,$$

ou bien

$$x^2 - xy + p^2 = 0,$$

$$x = \frac{1}{2}y \pm \frac{1}{2}\sqrt{y^2 - 4p^2}.$$

On voit immédiatement que l'on peut faire croître y^2 au delà de toute limite, mais que l'on ne peut pas lui donner de valeurs inférieures à $4p^2$. $y=2p$ est donc un minimum, $y=-2p$ un maximum ; du reste on a alors

$$x=\frac{1}{2}y=\pm p,$$

et l'on reconnaît que les facteurs doivent être égaux pour qu'il y ait minimum, égaux et de signe contraire pour qu'il y ait maximum.

Problème III. — *Trouver les maximums et les minimums de la fraction*

$$(1)\qquad y=\frac{ax^2+bx+c}{mx^2+nx+p}.$$

Résolvons par rapport à x, nous aurons successivement

$$x^2(my-a)+x(ny-b)+py-c=0,$$

$$x=\frac{ny-b\pm\sqrt{(ny-b)^2-4(my+a)(py-c)}}{2(my-a)}.$$

Si nous posons alors

$$n^2-4mp=\lambda,\quad -2nb+4mc+4ap=\mu,\quad b^2-4ac=\nu,$$

il vient

$$x=\frac{ny-b\pm\sqrt{\lambda y^2+\mu y+\nu}}{2(my-a)},$$

formule dans laquelle le trinôme u placé sous le radical devra être positif. Nous aurons trois cas à distinguer :

1° $\mu^2-4\lambda\nu>0$. Le trinôme $\lambda y^2+\mu y+\nu=u$ peut alors se mettre sous la forme

$$n=\lambda(y-y')(y-y''),\quad \text{où}\quad y'<y''.$$

Si alors λ est positif, le trinôme u ne sera positif que pour toutes les valeurs de y non comprises entre y' et y'', y' sera alors une limite d'accroissement pour y, un maximum. La valeur correspondante de x sera

$$x = \frac{ny' - b}{2(my' - a)}.$$

y'', au contraire, sera un minimum, et la valeur correspondante de x sera

$$x = \frac{ny'' - b}{2(my'' - a)}.$$

Si, au contraire, λ est négatif, u ne sera positif que pour les valeurs de y comprises entre entre y' et y'', y' sera un minimum, y'' un maximum.

2° Si $\mu^2 - 4\lambda\nu$ est nul, le trinôme u est un carré parfait au facteur λ près; si ce dernier est positif, les valeurs de x prennent la forme

$$x = \frac{Ay + B}{2(my - a)}.$$

Il est clair que y peut passer par tous les états de valeur possibles; il n'y a donc ni maximum ni minimum. Si λ est négatif, on ne peut donner qu'une seule valeur admissible à y, celle qui annule le trinôme u.

3° Si $\mu^2 - 4\lambda\nu < 0$, dans ce cas, le trinôme u conserve toujours le signe de λ; si donc λ est positif, il n'y a pas de maximum ni de minimum; si λ est négatif, il n'y a pas de valeur admissible pour x : ce cas ne peut pas se présenter. Il est bien clair, en effet, que si l'on donne à x une certaine valeur dans l'équation (1), il en résultera une autre pour y, et par conséquent, pour certaines valeurs données de y, il existera des valeurs correspondantes pour x.

Revenons au cas où l'on aurait

$$\mu^2 - 4\lambda\nu = 0.$$

Si l'on remplace λ, μ, ν par leurs valeurs, on a

$$\mu^2 - 4\lambda\nu = (4mc + 4ap - 2nb)^2 - 4(n^2 - 4mp)(b^2 - 4ac),$$

ou bien

$$\mu^2 - 4\lambda\nu = 16(m^2c^2 + a^2p^2 + acn^2 + mpb^2 \\ - mnbc - abpn - 2acmp).$$

Si l'on suppose $a = mi$, $b = ni$, $c = pi$, la relation précédente donne

$$\mu^2 - 4\lambda\nu = 0.$$

Nous savons, en effet, qu'alors y conserve une valeur indépendante de x.

Il nous reste à examiner le cas où $\lambda = 0$. Dans ce cas, il y a toujours un maximum ou un minimum donné par la formule

$$y = -\frac{\nu}{\mu}.$$

X. — Sur quelques questions de maximum et de minimum résolues a l'aide de procédés élémentaires.

Problème I. — *Trouver le maximum d'un produit de plusieurs facteurs dont la somme est constante.*

Considérons d'abord le cas de deux facteurs a et b. On a

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}.$$

Laissons la somme $a + b$ constante; il est clair que le premier membre de cette égalité sera maximum quand le terme soustractif $\frac{(a-b)^2}{4}$ sera minimum. Si donc on peut prendre $a=b$, on aura alors la valeur maximum de ab.

Considérons maintenant un nombre quelconque de facteurs $abc\ldots l$; il est bien clair qu'on ne change pas leur somme en remplaçant a et b par $\frac{a+b}{2}$. Mais si a et b sont différents, on voit, d'après ce qui précède, que ab sera inférieur à $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$; donc, tant qu'il existera deux facteurs inégaux dans le produit, il ne sera pas maximum; donc enfin le maximum cherché a lieu lorsque tous les facteurs sont égaux.

Remarque. — Il est bon d'observer toutefois que si la nature de la question que l'on traite ne permet pas de prendre les facteurs égaux, la solution que nous venons de donner doit être modifiée ainsi qu'il suit :

Un produit de plusieurs facteurs dont la somme est donnée est maximum lorsque la différence entre deux facteurs quelconques est la plus petite possible.

Problème II. — *Trouver le minimum d'une somme de termes dont le produit est constant.*

Nous considérerons d'abord deux termes a et b; nous aurons alors

$$a+b=\sqrt{(a-b)^2+4ab}.$$

On voit immédiatement que ab étant constant, $a+b$ sera d'autant plus petit que $(a-b)$ sera plus petit; si donc on peut prendre $a=b$, $a+b$ sera minimum.

En raisonnant comme dans le problème précédent, on démontre facilement que *le minimum d'une somme de termes dont le produit est constant a lieu lorsque ces* *facteurs sont égaux ou ont entre eux des différences aussi petites que possible.*

PROBLÈME III. — *$x+y+z+\ldots$ est constant, trouver le maximum de*

$$x^m y^n z^p \ldots,$$

expression dans laquelle $m, n, p, \ldots$ sont des nombres constants.

Il est clair que le maximum de $x^m y^n z^p \ldots$ a lieu en même temps que celui de

$$\left(\frac{x}{m}\right)^m \left(\frac{y}{n}\right)^n \left(\frac{z}{p}\right)^p, \ldots.$$

Mais l'expression précédente est le produit de $m+n+p\ldots$ facteurs dont la somme est égale à $x+y+z\ldots$, c'est-à-dire constante; le maximum aura donc lieu quand ces facteurs seront égaux, ou que

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{q}=\ldots.$$

PROBLÈME IV. — *Trouver le cône maximum inscrit dans une sphère de rayon donné.*

Si l'on désigne par a le rayon de la sphère, par x le rayon de la base et par y la hauteur du cône, la quantité qu'il faut rendre maximum a pour expression

$$\frac{1}{3}\pi x^2 y,$$

ou simplement

$$x^2 y.$$

Or on trouve facilement entre x et y la relation

$$x^2 = y(2a-y).$$

Si l'on remplace alors x^2 dans l'expression à rendre maximum par la valeur que nous venons de trouver, elle devient

$$y^2(2a-y).$$

Or la somme des facteurs y, $2a-y$ est constante et égale à $2a$; il y aura donc maximum (*voir* le problème précédent) lorsque l'on aura

$$\frac{y}{2}=2a-y,$$

ou

$$y=\frac{4}{3}a,\quad x=\frac{2}{3}a\sqrt{2}.$$

Problème V. — *Trouver le cône minimum circonscrit à une sphère de rayon donné a.*

Soient x le rayon de la base, y la hauteur du cône, la quantité à rendre maximum est toujours

$$x^2y=z. \tag{1}$$

Si du centre de la sphère on abaisse une perpendiculaire sur l'une des génératrices du cône, on obtient une figure dans laquelle deux triangles semblables qu'il est aisé d'apercevoir donnent la relation

$$\frac{y-a}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{a}{x},\quad \text{ou}\quad \frac{(y-a)^2}{x^2+y^2}=\frac{a^2}{x^2}.$$

Si nous résolvons par rapport à x^2, il vient

$$x^2=\frac{a^2y^2}{(y-a)^2-a^2}=\frac{a^2y^2}{y^2-2ay}.$$

En multipliant par y et en ayant égard à l'équation (1), il vient

$$z=\frac{a^2y^3}{y^2-2ay}.$$

Or z sera minimum quand

$$\frac{1}{z} = \frac{y^2 - 2ay}{a^2 y^3}$$

sera maximum. Or cette dernière expression peut s'écrire

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2a^3} \frac{2a}{y} \left(1 - \frac{2a}{y}\right).$$

Si l'on observe que $\frac{1}{2a^3}$ est constant et que la somme des facteurs $\frac{2a}{y}$ et $1 - \frac{2a}{y}$ est constante, $\frac{1}{z}$ sera maximum, et par suite z minimum lorsque l'on aura

$$\frac{2a}{y} = 1 - \frac{2a}{y}, \quad \text{ou} \quad y = 4a.$$

Cette donnée suffit pour construire le cône minimum.

EXERCICES.

1. On a employé deux ouvriers gagnant des salaires différents: le premier ayant été payé au bout d'un certain nombre de jours a reçu 96 francs, et le second ayant travaillé six jours de moins n'a eu que 54 francs; s'il avait travaillé tous les jours et que l'autre eût manqué six jours, ils auraient reçu tous les deux la même somme. On demande combien de jours chacun d'eux a travaillé et le prix de sa journée.

2. On remet à un banquier deux billets sur la même personne: le premier de 550 francs, payable dans sept mois; le second de 720 francs, payable dans quatre mois, et il donne pour le tout une somme de 1200 francs. On demande quel est le taux annuel de l'intérêt d'après lequel ces billets ont été escomptés.

3. Deux lumières sont placées en A et B; trouver en quel point C

de la droite AB il faut placer un écran pour qu'il soit éclairé également par ces deux lumières d'intensités m et n. (Tiré de l'*Algèbre* de Clairaut.)

4. Résoudre les systèmes d'équations

$$\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-y^2=5, \\ xy=6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-y^2=a^2, \\ x-y=b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3-y^3=a^3, \\ x-y=b. \end{cases}$$

5. Résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^2+y^2=z^2.$$

CHAPITRE VII.

THÉORIE DES PROGRESSIONS.

I. — Progressions arithmétiques.

On appelle *progression arithmétique* une suite de termes dans laquelle chacun d'eux est égal au précédent augmenté d'une quantité constante positive ou négative que l'on appelle *raison* de la progression.

Considérons la progression arithmétique

$$a,\ b,\ c,\ d, \ldots,\ k,\ l. \tag{1}$$

Soient r la raison et n le nombre des termes; on aura par définition même

$$b = a + r, \quad c = b + r, \ldots, \quad l = k + r.$$

On voit déjà, d'après cela, que le second terme b est égal au premier plus la raison; le troisième terme c est égal au second b plus la raison, c'est-à-dire au premier plus deux fois la raison; en ajoutant la raison à c, on trouve d, donc le quatrième terme est égal au premier plus trois fois la raison, et, en général, le $n^{\text{ième}}$ terme l est égal à a plus $n - 1$ fois la raison. On peut donc écrire

$$l = a + (n - 1)r,$$

ce qui donne lieu au théorème suivant :

Théorème I. — *Dans toute progression, un terme quelconque est égal au premier (et l'on peut prendre* *pour premier terme celui que l'on veut), plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.*

Problème. — *Trouver la somme des termes d'une progression arithmétique.*

Désignons par s la somme des termes de la progession (1). Nous aurons, en conservant d'ailleurs les mêmes notations que tout à l'heure,

$$s = a + b + c + \ldots + k + l. \tag{1}$$

Nous pouvons aussi écrire, en renversant l'ordre des termes,

$$s = l + k + \ldots + c + b + a. \tag{2}$$

Or la suite $l, k, \ldots, c, b, a$ peut être considérée comme une progression arithmétique ayant pour premier terme l et pour raison $-r$. Si l'on considère alors les $i^{\text{ièmes}}$ termes des progressions (1) et (2), on trouve respectivement pour leur expression $a + \overline{i-1}\,r$ et $l - \overline{i-1}\,r$; leur somme est donc $a + l$. Il résulte de là que si l'on ajoute les formules (1) et (2) terme à terme, la somme des termes de même rang sera toujours $a + l$; on peut donc écrire

$$2s = (a + l) \times n,$$

c'est-à-dire

$$s = \frac{(a + l)\,n}{2}, \tag{3}$$

formule que l'on peut encore écrire comme il suit, en remplaçant l par sa valeur $a + \overline{n-1}\,r$,

$$s = \frac{(2a + \overline{n-1}\,r)\,n}{2}.$$

La formule (3) montre que :

Théorème II. — *La somme des termes d'une progres-*

sion arithmétique s'obtient en ajoutant les termes extrêmes et en multipliant le résultat par la moitié du nombre des termes.

Applications. — Les entiers successifs forment une progression arithmétique dont la raison est 1. On a donc ici $a = 1$, $r = 1$, et en désignant par s la somme de n entiers consécutifs commençant par 1,

$$s = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Les nombres impairs forment aussi une progression arithmétique. La raison est 2, le $n^{ième}$ nombre impair est $1 + \overline{n-1}\,.2$ ou $2n - 1$, et l'on trouve, pour la somme des n premiers nombres, n^2.

II. — Des progressions géométriques.

On appelle *progression géométrique* une suite de termes dans laquelle chacun d'eux est égal au précédent, multiplié par une quantité constante que l'on appelle *raison* de la progression.

Considérons la progression géométrique

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots,\ k,\ l.$$

Le second terme b est égal au premier multiplié par la raison; pour avoir le troisième terme c, il faut multiplier b par la raison, ou, ce qui revient au même, multiplier a deux fois de suite par la raison; on verrait de même que, pour avoir le quatrième terme, il faut multiplier le premier trois fois de suite par la raison, et d'une manière générale :

Théorème I. — *Un terme quelconque d'une progression géométrique s'obtient en multipliant le premier* *autant de fois par la raison qu'il y a de termes avant lui.*

Il résulte de là que, en désignant par q la raison de la progression, ses termes peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$a,\ aq,\ aq^2, \ldots,\ aq^{n-1}.$$

Si nous désignons par s la somme des termes de cette progression, nous pourrons écrire

$$s = a\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right).$$

Or, si l'on se reporte au Chapitre III, p. 49, on reconnaît immédiatement que la quantité écrite entre parenthèses n'est autre chose que le quotient de $q^n - 1$ divisé par $q - 1$, en sorte que l'on a

$$s = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Cette formule peut encore s'écrire

$$s = \frac{lq - a}{q - 1}.$$

On peut trouver la quantité s d'une autre manière, en observant que

$$sq = aq + bq + \ldots + lq,$$

ou bien

$$sq = b + c + \ldots + l + lq;$$

d'où l'on conclut

$$sq - s = lq - a,$$

et par suite

$$s = \frac{lq - a}{q - 1}.$$

EXERCICES.

1. Trouver le produit des termes d'une progression géométrique.

2. Dans les formules

$$s = \frac{(a+l)n}{2}, \quad l = a + \overline{n-1}\,r,$$

relatives aux progressions arithmétiques, on peut se donner deux des quantités a, l, n, r, et se proposer de calculer les deux autres.

3. Problème analogue pour les progressions géométriques.

4. Les termes des progressions géométriques croissent avec une rapidité qui dépasse l'imagination. Voici quelques exemples qui pourront convaincre le lecteur.

Trouver la quantité de blé obtenue en plaçant 1 grain sur la 1re case d'un échiquier, 2 sur la 2e, 4 sur la 3e, et ainsi de suite en doublant toujours jusqu'à la 64e. Cette quantité de blé avait été demandée, dit-on, par l'inventeur du jeu d'échecs comme récompense de sa découverte. (Hâtons-nous de dire que cette anecdote est d'une authenticité fort douteuse.)

En supposant qu'Adam ait eu 3 fils, chacun d'eux 3 autres fils, et ainsi de suite; en supposant de plus que la vie d'un homme soit de 1 siècle, on demande quelle devrait être actuellement la population mâle du globe.

En supposant que le prix du pain augmente de $\frac{1}{10}$ de sa valeur chaque année, on demande quel devrait être aujourd'hui le prix de la livre de pain, sachant que du temps d'Adam ce prix s'élevait à 1 centime les 100 kilogrammes.

Le résultat que l'on trouve donne à réfléchir, surtout si on le réduit à une somme payable avec des diamants.

5. Si la population d'un empire s'est accrue en 200 ans de $\frac{1}{10}$ de sa valeur primitive, calculer l'accroissement annuel moyen de la population.

N. B. — Nous supposons le lecteur familiarisé avec l'usage des Tables de logarithmes.

CHAPITRE VIII.

ANALYSE COMBINATOIRE.

I. — Des arrangements.

On appelle *arrangements* de m objets pris n à n les résultats obtenus en prenant n de ces objets de toutes les manières possibles, de telle sorte que deux quelconques de ces résultats diffèrent, soit par les objets dont ils sont composés, soit par l'ordre de ces objets.

Proposons-nous de trouver le nombre des arrangements de m objets pris n à n, nombre que l'on désigne habituellement par le symbole A_m^n. A cet effet, supposons que l'on connaisse le nombre des arrangements de m objets pris i à i, ou A_m^i; si l'on veut former les arrangements de m objets pris $i+1$ à $i+1$, il faudra ajouter successivement à chaque arrangement des m objets pris i à i les $m-i$ objets qui n'y entrent pas. On formera ainsi $m-i$ nouveaux arrangements avec chacun des anciens, c'est-à-dire en tout $A_m^i(m-i)$ nouveaux résultats.

En effet, je dis : 1° que tous ces résultats sont des arrangements différents, car ils diffèrent, soit par l'arrangement composé de i objets qui a servi à les former, soit par le dernier objet ajouté; 2° qu'un arrangement quelconque de $i+1$ objets s'y trouve, car, si à cet arrangement on enlève son dernier objet, on retrouve un arrangement de i objets. Or, comme ils ont été tous employés, il en résulte qu'il se trouve parmi ceux que nous avons formés; on a donc enfin

$$A_m^{i+1} = A_m^i (m - i).$$

Si l'on observe alors que A_m^1 est égal à m et si dans la formule précédente on fait $i = 1, 2, 3, \ldots, n - 1$, on trouve

$$A_m^2 = m(m-1), \quad A_m^3 = A_m^2 (m-2), \ldots,$$

$$A_m^n = A_m^{n-1} (m - n + 1),$$

et en multipliant ces égalités membre à membre, puis en supprimant dans les deux membres de la formule résultante des facteurs égaux,

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).$$

C. Q. F. D.

II. — Des permutations.

On appelle *permutations* de n objets les résultats obtenus en disposant ces n objets les uns à côté des autres de toutes les manières possibles.

Proposons-nous de trouver le nombre des permutations de n objets; désignons ce nombre par P_n (*). Supposons que l'on sache former le nombre P_i : à chaque permutation de i objets, ajoutons un nouvel objet en lui faisant occuper successivement la première, la seconde, ..., la $i+1^{ième}$ place; on formera ainsi $(i+1) P_i$ résultats différents, soit par la permutation de i objets qui a servi à les former, soit par le rang occupé par le nouvel objet. En second lieu, une permutation quelconque de $i+1$ objets fait partie de celles que l'on vient de considérer,

(*) On désigne quelquefois ce nombre par le symbole $n!$.

car en lui enlevant le dernier de ses objets, on retombe sur une des permutations de i objets, permutations qui ont été toutes employées. On a donc

$$P_{i+1} = P_i (i+1).$$

En faisant successivement $i = 1, 2, \ldots, n-1$ et en observant que P_1 est égal à 1, on a

$$P_2 = 1.2, \quad P_3 = P_2.3, \ldots, \quad P_n = P_{n-1}.n;$$

et par suite, en multipliant ces égalités membre à membre,

$$P_n = 1.2.3\ldots n.$$

On peut remarquer que

$$P_n = A_n^n.$$

Et, en effet, si dans la formule trouvée p. 179 on fait $m = n$, on trouve

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots 2.1. = P_n.$$

III. — Des combinaisons.

On appelle *combinaisons* de m objets pris n à n les résultats obtenus en prenant n de ces objets de toutes les manières possibles, deux résultats différant seulement par la nature des objets qui entrent dans chacun d'eux et non par leur ordre.

Désignons par C_m^i le nombre des combinaisons de m objets pris i à i, pour former les combinaisons de m objets pris $i+1$ à $i+1$; on peut, à chaque combinaison composée de i objets, ajouter chacun des $m-i$ objets qui n'y entrent pas. On obtient ainsi $C_m^i \times (m-i)$ résultats qui contiendront toutes les combinaisons formées de

$i+1$ objets, puisqu'en retranchant un objet à l'une des combinaisons formée de $i+1$ objets, on retrouve une combinaison formée de i objets, et que toutes celles-ci ont été employées; mais les résultats que nous obtenons de la sorte ne sont pas tous différents. En effet, si nous considérons l'un quelconque d'entre eux, quel que soit l'objet que l'on en retranche, on retombe sur une combinaison différente formée de i objets; une combinaison quelconque de m objets pris $n+1$ à $n+1$ a donc été obtenue par notre procédé de $i+1$ manières différentes, en sorte que $C_m^i(m-i)$ représente $i+1$ fois C_m^{i+1}. On a donc

$$C_m^{i+1} = C_m^i \frac{m-i}{i+1};$$

d'où l'on conclut, en faisant $i=1, 2, 3, \ldots, n-1$, et en observant que le nombre des combinaisons de m objets pris un à un est m,

$$C_m^2 = m\frac{m-1}{2}, \quad C_m^3 = C_m^2\frac{m-2}{3}, \ldots,$$

$$C_m^n = C_m^{n-1}\frac{m-n+1}{n};$$

d'où l'on conclut

$$(1) \qquad C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}.$$

On voit, d'après ce qui précède, que

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}.$$

Cette formule peut du reste se démontrer directement en observant que les arrangements de m objets pris n à n

peuvent s'obtenir en permutant les n objets de chaque combinaison de m objets pris n à n de toutes les manières possibles. On a donc

$$A_m^n = C_m^n \times P_n;$$

d'où l'on déduit la formule précédente, et par suite, si l'on veut, la formule (1).

Si l'on adopte la notation $n!$ pour représenter le produit $1.2.3\ldots n$, la formule (1) peut encore s'écrire

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

IV. — Remarques au sujet des théories précédentes.

Problème I. — *Concevons qu'après avoir formé les arrangements de m lettres prises n à n on suppose i de ces lettres identiques à a, j de ces lettres identiques à b, etc.: combien obtiendra-t-on de résultats différents?*

Supposons d'abord qu'il n'y ait que i lettres identiques à a :

1° Les arrangements où a n'entre pas seront tous différents : ce sont les arrangements de $m - i$ lettres prises n à n; leur nombre est A_{m-i}^n ou

$$P_n . C_{m-i}^n.$$

2° Les arrangements où a entre une fois seront encore tous différents : si l'on veut en connaître le nombre, considérons les combinaisons correspondantes; ôtons a, nous aurons les combinaisons de $m - i$ lettres $n - 1$ à $n - 1$. Si dans chacune de ces combinaisons nous permutons les n lettres qui y entrent y compris a, nous aurons $P_n \, C_{m-i}^{n-1}$

résultats différents ou

$$\frac{P_n}{P_1} C_{m-i}^{n-1}.$$

3° Les arrangements où a entre deux fois ne seront pas tous différents; si nous ôtons deux fois a et si nous considérons les combinaisons correspondantes, elles sont en nombre C_{n-i}^{n-2}, et si nous permutons les lettres qui y entrent en y comprenant deux fois a, nous aurons $P_n C_{m-i}^{n-2}$ résultats qui ne seront pas tous différents, car en permutant les deux lettres a dans chaque combinaison, on ne la change pas; il n'y aura donc en tout que $\frac{P_n}{P_2} C_{m-i}^{n-1}$ résultats différents, etc.

Le nombre cherché est donc

$$P_n \left(C_{m-i}^{n} + \frac{C_{m-i}^{n-1}}{P_1} + \frac{C_{m-i}^{n-2}}{P_2} + \frac{C_{m-i}^{n-3}}{P_3} + \ldots + \frac{C_{m-i}^{n-i}}{P_i} \right).$$

Supposons maintenant qu'il y ait i lettres égales à a, j lettres égales à b.

Le terme général de la quantité cherchée sera le nombre des arrangements dans lesquels a entre μ fois et b ν fois. Il est facile de voir que ce nombre est

$$\frac{P_n}{P_\mu P_\nu} C_{m-i-j}^{n-\mu-\nu},$$

en sorte que le nombre des résultats cherchés est

$$\sum \frac{P_n}{P_\mu P_\nu} C_{m-i-j}^{n-\mu-\nu},$$

μ et ν ne devant pas recevoir de valeurs supérieures à i et à j. Sans insister davantage, on voit comment on traiterait le problème dans le cas général.

Problème II. — *Trouver le nombre des permutations* *différentes que l'on obtient en supposant un certain nombre de lettres identiques dans les permutations de n lettres.*

Les permutations de n lettres pouvant être considérées comme des arrangements de n lettres n à n, ce problème rentre donc dans le précédent.

PROBLÈME III. — *Trouver le nombre des résultats différents obtenus en supposant, dans les combinaisons de m lettres prises n à n, i lettres identiques à a, j lettres identiques à b.*

Considérons une combinaison dans laquelle a entre μ fois, b ν fois...; supprimons les lettres a et b de cette combinaison, nous trouvons une combinaison de $m-i-j$ lettres prises $n-\mu-\nu$ à $n-\mu-\nu$; donc le nombre des combinaisons distinctes où a entre μ fois et b ν fois est $C_{m-i-j}^{n-\mu-\nu}$; d'où l'on conclut facilement le nombre cherché.

V. — FORMULE DU BINÔME.

On appelle *formule du binôme* celle qui fait connaître le développement d'une puissance quelconque d'un binôme. Cette formule (dans le cas où l'exposant de la puissance est entier et positif) paraît avoir été connue bien avant Newton, qui n'a fait que l'étendre aux exposants fractionnaires. On peut consulter à ce sujet : 1° l'article BINÔME dans le *Dictionnaire des Mathématiques* de Montferrier; 2° un article de M. O. Terquem, inséré dans ses *Nouvelles Annales*, t. VI; 3° enfin, l'*Histoire des Mathématiques* de Montucla. Voici comment on peut arriver à cette formule à l'aide de l'analyse combinatoire.

Multiplions entre eux les binômes

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+l).$$

Pour faire un produit de deux polynômes, on multiplie chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur; en d'autres termes, le produit de deux polynômes est la somme des produits obtenus en prenant pour facteurs un terme dans chaque polynôme de toutes les manières possibles.

Le produit de trois polynômes est donc égal à la somme des produits obtenus en prenant pour facteurs un terme dans chaque polynôme de toutes les manières possibles, et cette loi est évidemment générale.

Ceci posé, le produit que nous cherchons est égal à la somme des produits obtenus en prenant pour facteurs un terme dans chacun des binômes $(x+a)$, $(x+b)$,... de toutes les manières possibles. Prenons d'abord x dans chacun des m binômes en question, nous formons le terme x^m; prenons ensuite x dans $m-1$ binômes, et le second terme dans le $m^{ième}$ binôme restant; faisons cette opération de toutes les manières possibles, nous trouverons $x^{m-1}(a+b+\ldots+l)$, que l'on peut désigner par la notation abrégée

$$x^{m-1}\sum a,$$

déjà employée (première partie, p. 66).... En général, si nous prenons x dans $m-n$ binômes, il faudra prendre les seconds termes dans chacun des n binômes restants; en répétant cette opération de toutes les manières possibles et réduisant les termes semblables, on trouve

$$x^{m-n}\sum abc\ldots f,$$

$\sum abc\ldots f$ désignant, pour abréger, la somme des produits obtenus en prenant pour facteurs n des m lettres $a, b, c, \ldots, l$ de toutes les manières possibles. $\sum abc\ldots f$ représente donc la somme des combinaisous des m lettres $a, b, \ldots, f$ prises n à n sous forme de produits. Si donc on vient à supposer $a = b = c = \ldots = l$, le terme que nous venons de calculer se réduit à

$$C_m^n\, x^{m-n}\, a^n.$$

Enfin, pour achever la formation du produit que nous cherchons, nous prendrons les seconds termes des binômes, et nous aurons le terme $abc\ldots l$: nous pourrons donc écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &(x+a)(x+b)\ldots(x+l) \\ &\quad = x^m + x^{m-1}\sum a + \ldots + x^{m-n}\sum ab\ldots f + \ldots + ab\ldots l. \end{aligned}\right.$$

Nous aurons plus loin occasion de faire usage de cette formule ; si l'on y fait $a = b = c = \ldots = l$, il vient

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \ldots + C_m^n\, a^n x^{m-n} + \ldots + a^m.$$

Cette formule peut encore s'écrire, en remplaçant C_m^n par sa valeur,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2 x^{m-2} + \ldots \\ &\quad + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}a^n x^{m-n} + \ldots + a^m. \end{aligned}\right.$$

Nous ferons, au sujet de cette formule, plusieurs remarques importantes.

1° *Deux coefficients également éloignés des extrêmes dans le développement de* $(x+a)^n$ *sont égaux.*

En effet, en changeant x en a et a en x, les coefficients des termes ne changent pas; le premier membre de l'équation (2) ne change pas non plus. On a alors, en identifiant les deux développements de $(x+a)^m$ que l'on obtient ainsi, c'est-à-dire en égalant les coefficients des mêmes puissances de x, le théorème qu'il s'agissait d'établir; il conduit à la formule

$$C_m^n = C_m^{m-n},$$

que l'on peut vérifier directement. Elle revient, en effet, à la suivante :

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} = \frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(m-n)}.$$

Si l'on réduit les deux membres de cette égalité au même dénominateur, les numérateurs deviennent égaux à $1.2.3\ldots n$.

2° Si l'on fait $a = x = 1$, on a

$$2^m = 1 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^n + \ldots + C_m^m.$$

3° Si l'on fait $a = -x = -1$, on a

$$0 = 1 - C_m^1 + C_m^2 - \ldots \pm C_m^n \mp \ldots \pm C_m^n.$$

4° Si, dans la formule (2), on met le terme général sous la forme

$$\frac{m!}{n!(m-n)!} a^{m-n} x^n, \tag{3}$$

$i!$ désignant d'une manière générale le produit $1.2.3\ldots i$, si l'on change ensuite a en $a+b$, le terme général du développement de $(x+a+b)^m$ sera donné par le terme général du développement de l'expression (3) dans laquelle on aura changé a en $a+b$, il sera donc

$$\frac{m!\,(m-n)!}{n!\,(m-n)!\,(m-n-\alpha)!\,\alpha!}\,a^{\alpha}\,b^{m-n-\alpha}\,x^{n}$$
$$=\frac{m!}{n!\,(m-n-\alpha)!\,\alpha!}.$$

En changeant ensuite b en $b+c$, on obtient de la même façon le terme général du développement de $(x+a+b+c)^m$, et en continuant ainsi on trouve, comme p. 66,

$$(x+a+b+\ldots+l)^m=\sum\frac{m!}{n!\,\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}\,a^{\alpha}\,b^{\beta}\,c^{\gamma}\ldots l^{\lambda}\,x^{n},$$

formule dans laquelle on a toujours

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda+n=m;$$

les entiers $\alpha, \beta\ldots$ pouvant être zéro, on y supposera toujours a^0 égal à 1, et $0!$ égal à 1.

VI. — Du triangle arithmétique.

Considérons les coefficients des puissances successives du binôme; écrivons sur une première ligne les coefficients de la première puissance, c'est-à-dire 1 et 1; sur

1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

une seconde ligne écrivons les coefficients de la seconde puissance, c'est-à-dire 1, 2, 1, et ainsi de suite, de sorte que les coefficients des termes de même rang se correspondent dans une même colonne verticale. Le tableau que nous formons ainsi porte le nom de *triangle arithmétique*; les propriétés de ce triangle ont été développées avec beaucoup de soin par Pascal dans son *Traité du triangle arithmétique;* toutefois il ne dispose pas son

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	
1	3	6	10		
1	4	10			
1	5				
1					

triangle tout à fait de la même façon que nous. Si nous concevons que, dans le triangle dont nous avons parlé en premier lieu, on fasse glisser chaque colonne verticale de manière à amener toutes les unités qui sont en tête sur une même ligne horizontale, on aura le triangle de Pascal. Les nombres qui sont inscrits dans la $n^{\text{ième}}+1$ colonne verticale du triangle portent le nom de *nombres figurés du* $n^{\text{ième}}$ *ordre*, les nombres du premier ordre ou $1, 2, 3, 4, \ldots$ portent aussi le nom de *nombres naturels*, les nombres du second ordre celui de *nombres triangulaires*, les nombres du troisième ordre celui de *pyramidaux*, les nombres du quatrième ordre celui de *triangulo-triangulaires*.

Théorème I. — *Le* $i^{\text{ième}}$ *nombre figuré de l'ordre* n *a pour expression*

$$\frac{i(i+1)\ldots(i+n-1)}{1.2.3\ldots n} \quad \text{ou} \quad \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+i-1)}{1.2.3\ldots(i-1)},$$

En effet, les nombres figurés de l'ordre n sont les nombres de combinaisons n à n; le premier est relatif à n objets, le second à $n+1, \ldots$ le $i^{\text{ième}}$ à $n+i-1$, en sorte que le $i^{ième}$ nombre figuré de l'ordre n est C^n_{n+i-1}, ou, d'après un corollaire (p. 187), C^{i-1}_{n+i-1}, c'est-à-dire

$$\frac{(i+n-1)(i+n-2)\ldots i}{1.2.3\ldots n} \quad \text{ou} \quad \frac{(n+i-1)(n+i-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

expressions identiques avec celles que nous avions annoncées.

Théorème II. — *Un nombre figuré est égal au nombre écrit immédiatement au-dessus de lui dans le triangle arithmétique, augmenté du nombre placé à la gauche de ce dernier.*

En d'autres termes,

$$C^n_{n+i} = C^n_{n+i-1} + C^{n-1}_{n+i-1}.$$

Cette formule se vérifie très-facilement en remplaçant les symboles C^n_{n+i}, C^n_{n+i-1}, C^{n-1}_{n+i-i} par leurs valeurs. Voici comment on peut l'établir directement. Considérons la formule

$$(x+a)^{n+i-1} = x^{n+i-1} + \ldots + C^n_{n+i-1}\, a^n x^{i-i} + \ldots,$$

démontrée p. 186; multiplions ses deux membres par $(x+a)$, nous aurons

$$(x+a)^{n+i} = x^{n+i} + \ldots + \left(C^n_{n+i-1} + C^{n-1}_{n+i-1}\right) a^n x^i + \ldots;$$

or, en identifiant cette formule avec celle que l'on obtient en appliquant directement la formule du binôme à l'expression $(x+a)^{n+1}$, on trouve

$$C^n_{n+i-1} + C^{n-1}_{n+i-1} = C^n_{n+i}.$$

C. Q. F. D.

Théorème III. — *Il résulte du théorème précédent* *qu'un nombre figuré quelconque est égal à la somme des nombres figurés de l'ordre précédent, placés immédiatement au-dessus de lui dans le triangle arithmétique.*

Ainsi, l'on a

$$\frac{i(i+1)\dots+(i+n-1)}{1.2.3\dots n}=\frac{1.2.3\dots(n-1)}{1.2.3\dots(n-1)}+\frac{2.3.4\dots n}{1.2\dots(n-1}+\dots$$
$$+\frac{i(i+1)\dots(i+n-2)}{1.2.3\dots(n-1)}.$$

Le triangle arithmétique dont nous venons de parler est un cas particulier d'un triangle beaucoup plus général que Pascal appelle aussi *triangle arithmétique*, et que nous allons apprendre à former.

Dans une première colonne verticale écrivons le nombre a; dans une seconde colonne contiguë écrivons les nombres a, $a+b$, $2a+b, \dots$, obtenus en ajoutant au nombre b les produits de a par les nombres figurés du premier ordre; dans une troisième colonne écrivons les produits des nombres du second ordre par a augmentés des produits des nombres du premier ordre par b, et ainsi de suite; nous formerons le tableau ci-contre.

a				
a	b			
a	$a+b$	b		
a	$2a+b$	$a+2b$	b	
a	$3a+b$	$3a+3b$	$a+3b$	b
a	$4a+b$	$6a+4b$	$4a+6b$	$a+4b$
a	$5a+b$	$10a+5b$	$10a+10b$	$5a+10b$

Les propriétés connues des nombres figurés montrent : 1° qu'*un nombre inscrit dans le tableau précédent est égal à celui qui est placé au-dessus de lui augmenté de celui qui est à gauche de ce dernier;* 2° *un nombre* *quelconque est égal à somme de tous ceux qui sont écrits au-dessus de lui dans la colonne précédente.*

Considérons la troisième colonne de notre dernier tableau; faisons $b = 1$, elle se composera de la suite

$$1,\quad a+2,\quad 3a+3,\quad 6a+4,\quad 10a+5\ldots.$$

Lorsque $a = 1$, on retrouve les *nombres triangulaires*; lorsque $a = 2$, on obtient les *nombres carrés*, qui ne sont autre chose que les carrés des nombres naturels; lorsque $a = 3$, on obtient ce que l'on appelle les *nombres pentagonaux*; lorsque $a = 4$, on obtient les *nombres hexagonaux*, etc. Voici maintenant la raison de ces dénominations.

Fig. 5.

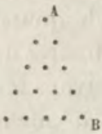


Fig. 6.

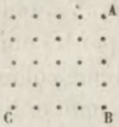


Fig. 7.

Considérons la *fig.* 5 : elle commence par un point; au-dessous on a placé deux points, puis trois, puis quatre, etc. Si n représente le nombre de points placés sur le côté AB, le nombre total des points contenus dans la figure sera

$$1+2+3+\ldots+n,$$

somme des n premiers nombres naturels, c'est-à-dire représentera le $n^{ième}$ nombre triangulaire.

Si nous considérons maintenant la *fig.* 6, si nous désignons par n le nombre de points contenus dans le côté AB, il y aura n^2 points en tout dans la figure; or, on peut évaluer ce nombre d'une autre manière, en observant que l'on trouve de chaque côté de la diagonale AC k points, k désignant le $n-1^{ième}$ nombre triangulaire : il y a donc en tout

$$2k + n = n(n-1) + n = n^2$$

points dans la figure, c'est-à-dire un nombre de points marqué par le $n^{ième}$ nombre carré.

Si nous considérons la *fig.* 7 et si le côté AB contient n points, nous voyons que la figure totale contiendra, en désignant par k le $n-1^{ième}$ nombre triangulaire, $3k+n$ points, et ainsi de suite.

VII. — Sommes des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique.

Considérons la progression arithmétique

$$u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots,\ u_m,\ u_{m+1}, \ldots.$$

Soit h la raison; nous aurons, en désignant par n un entier quelconque,

$$u_2^{n+1} = (u_1+h)^{n+1} = u_1^{n+1} + (n+1)u_1^n h + \frac{(n+1)n}{1.2} u_1^{n-1} h^2 + \ldots,$$

$$u_3^{n+1} = (u_2+h)^{n+1} = u_2^{n+1} + (n+1)u_2^n h + \frac{(n+1)n}{1.2} u_2^{n-1} h^2 + \ldots,$$

....

$$u_{m+1}^{n+1} = (u_m+h)^{n+1} = u_m^{n+1} + (n+1)u_m^n h + \frac{(n+1)n}{1.2} u_m^{n-1} h^2 + \ldots.$$

Ajoutons ces égalités membre à membre, il vient, en supprimant des termes communs de part et d'autre,

$$u_{m+1}^{n+1} - u_1^{n+1} = (n+1)h\sum_{i=1}^{i=m} u_i^n + \frac{(n-1)n}{1.2} h^2 \sum_{i=1}^{i=m} u_i^{n-1} + \ldots,$$

d'où l'on tire

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum u_i^n = \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_1^{n+1}}{(n+1)h} - \frac{n}{2} h \sum u_i^{n-1} \\ - \frac{n(n-1)}{2.3} h^2 \sum u_i^{n-2} - \ldots \end{aligned} \right.$$

Cette formule permet de calculer la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des termes d'une progression arithmétique lorsque l'on connaît la somme des puissances 1, 2, 3,..., $n-1$.

Proposons-nous par exemple de trouver la somme des carrés des p premiers nombres. Il faudra, dans la formule précédente, faire $h=1$ et $n=2$; il viendra alors

$$\sum_{i=1}^{i=p} i^2 = \frac{(p+1)^3 - 1}{3} - \frac{p(p+1)}{2} - \frac{p}{3},$$

ou bien, réductions faites,

$$\sum_{i=1}^{i=p} i^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$$

La même formule (1) donne ensuite, pour $n=3$,

$$\sum_{i=1}^{i=p} i^3 = \frac{(p+1)^4 - 1}{4} - \frac{3}{2}\frac{p(p+1)(2p+1)}{6} - \frac{3.2}{2.3}\frac{p(p+1)}{2} - \frac{3.2.1}{2.3.4} p,$$

c'est-à-dire, réductions faites,

$$\sum_{i=1}^{i=p} i^3 = \left[\frac{p(p+1)}{2}\right]^2.$$

VIII. — Application des théories précédentes à la sommation des piles de boulets.

Dans les arsenaux, les projectiles emmagasinés sont aujourd'hui de deux espèces : les uns sont destinés aux pièces lisses et sont sphériques, les autres sont destinés aux pièces rayées et ont une forme cylindro-conique.

Nous nous occuperons d'abord de la sommation des piles de projectiles cylindro-coniques; ces piles sont formées d'une première rangée de projectiles se touchant tout le long d'une génératrice cylindrique. Soit n le nombre des projectiles placés dans cette rangée; au-dessus et entre les intervalles laissés par les projectiles de la première rangée, on place une seconde rangée de $n-1$ projectiles; au-dessus de cette rangée, on en place une troisième composée de $n-2$, et ainsi de suite. On forme ainsi une espèce de triangle dans lequel le nombre des projectiles employés est évidemment le $n^{\text{ième}}$ nombre triangulaire, ou $\frac{n(n+1)}{1.2}$; pour donner plus de solidité à la pile, on place plusieurs rangées verticales, semblables à celle dont nous venons de donner la description, les unes contre les autres. En désignant par p le nombre de ces rangées, le nombre total des boulets sera

$$p.\frac{n(n+1)}{2}.$$

Donc : *Pour avoir le nombre des projectiles oblongs contenus dans une pile, comptez le nombre des boulets contenus en long et en large à la partie inférieure de la pile; si n désigne le nombre contenu dans le sens du diamètre et p le nombre contenu dans le sens de la lon-*

gueur des projectiles, p. $\frac{n(n+1)}{2}$ *représentera le nombre total des projectiles contenus dans la pile.*

Les boulets sphériques sont rangés le plus souvent sous forme de *piles rectangulaires;* les piles *carrées* ou *quadrangulaires* sont moins fréquemment usitées. Enfin on n'emploie que rarement les *piles triangulaires*, et seulement pour un petit nombre de projectiles, à cause de l'espace qu'elles exigent.

Occupons-nous d'abord de la pile triangulaire. Soit n le nombre des boulets contenus dans le côté du triangle équilatéral qui forme la base de la pile; cette base contient évidemment un nombre total de boulets égal au $n^{\text{ième}}$ nombre triangulaire, ou $\frac{n(n+1)}{2}$ boulets; au-dessus de cette base ou première rangée, on en a placé une seconde, en ayant soin de mettre les nouveaux boulets entre les interstices laissés par les premiers. Le côté de cette seconde rangée ne contient que $n-1$ boulets; par conséquent, la rangée elle-même contient un nombre de boulets représenté par le $n-1^{\text{ième}}$ nombre triangulaire, et ainsi de suite. Il y aura donc en tout dans la pile un nombre de boulets égal à la somme des n premiers nombres triangulaires, c'est-à-dire égal au $n^{\text{ième}}$ nombre pyramidal (de là le nom de *nombres pyramidaux* donné aux nombres du troisième ordre).

Donc, *si n désigne le nombre des boulets contenus dans le côté d'une pile triangulaire,*

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$$

représentera le nombre total des boulets contenus dans la pile.

Considérons maintenant une pile quadrangulaire. Dans cette pile, la base est formée de boulets tangents, les points de contact ayant lieu aux extrémités des diamètres rectangulaires; la forme générale de cette base est un carré, en sorte que si n désigne le nombre des boulets contenus dans le côté, n^2 représentera le nombre total des boulets contenus dans la base. Au-dessus de la base se trouve une rangée de $(n-1)^2$ boulets, et ainsi de suite; en sorte que le nombre total des boulets contenus dans la pile est la somme des carrés des n premiers nombres, ou

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ainsi donc, n *désignant le nombre des boulets contenus dans le côté d'une pile quadrangulaire,*

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

représentera le nombre total des boulets contenus dans cette pile.

Considérons enfin une pile rectangulaire, sa base est construite de la même manière que celle de la pile quadrangulaire. Soient n et n' les nombres de boulets contenus dans les côtés de la base; au-dessus de la base, on place une rangée rectangulaire ayant $n-1$ et $n'-1$ boulets de côté, et ainsi de suite. Posons $n'=n+p$; le nombre total des boulets de la pile sera

$$n(n+p)+(n-1)(n-1+p)+\ldots+1+p,$$

c'est-à-dire

$$n^2+(n-1)^2+\ldots+2^2+1+[n+(n-1)+\ldots+2+1]p,$$

ou bien

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}p,$$

c'est-à-dire

$$\frac{n(n+1)(3p+2n+1)}{6},$$

ou bien

$$\frac{n(n+1)(3n'-n+1)}{6}.$$

On aurait pu arriver à ce résultat en observant que la pile pouvait se décomposer en une pile quadrangulaire ayant n boulets de côté, et en une autre pile analogue aux piles de projectiles oblongs, mais inclinée et ayant p et n boulets de côté.

Donc, *n et n' désignant le nombre des boulets contenus dans le petit et le grand côté d'une pile rectangulaire, le nombre total des boulets contenus dans la pile sera*

$$\frac{n(n+1)(3n'-n+1)}{6}.$$

Si dans cette formule on fait $n'=n$, on retrouve la formule qui convient aux piles quadrangulaires.

IX. — Théorie des factorielles.

Kramp et Arbogast ont donné le nom de *factorielle* au produit d'une suite limitée de termes en progression arithmétique. Kramp propose la notation suivante :

$$a^{n|r} = a(a+r)(a+2r)\ldots(a+\overline{n-1}\,r).$$

Vandermonde propose cette autre notation :

$$[a, r]^n = a(a+r)\ldots(a+\overline{n-1}\,r).$$

Nous adopterons la notation de Vandermonde, et nous aurons

$$A_m^n = [m-n+1, 1]^n,$$

$$P_n = n! = [1, 1]^n.$$

Première propriété. — *On a*

$$(1)\qquad [a, r]^n = [a + \overline{n-1}\,r, -r]^n.$$

En effet, le second membre est, à l'ordre des facteurs près, identique au premier.

Deuxième propriété. — *On a*

$$(2)\qquad [a, r]^n = [a, r]^{n-1}(a + \overline{n-1}\,r),$$
$$[a, r]^n = [a, r]^{n-i}(a + \overline{n-i}\,r)\ldots(a - \overline{n-1}\,r),$$

équation que l'on peut écrire comme il suit :

$$(3)\qquad [a, r]^n = [a, r]^{n-i}[a + \overline{n-i}\,r, r]^i.$$

Troisième propriété :

$$[a, 0]^n = a^n.$$

Théorème de Vandermonde, dit binôme des factorielles. — On a

$$[a+b, r]^1 = a + b = [a, r]^1 + [b, r]^1,$$
$$[a+b, r]^2 = (a+b)(a+b+r) = a(a+r) + 2ab + b(b+r),$$

ou bien

$$[a+b, r]^2 = [a, r]^2 + 2[a, r]^1[b, r]^1 + [b, r]^2.$$

Sans aller plus loin, on peut déjà soupçonner la formule

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} [a+b, r]^m = [a, r]^m &+ C_m^1 [a, r]^{m-1}[b, r]^1 \\ &+ C_m^2 [a, r]^{m-2}[b, r]^2 + \ldots \\ &+ C_m^n [a, r]^{m-n}[b, r]^n + \ldots + [b, r]^m, \end{aligned}\right.$$

qui constitue le beau théorème de Vandermonde. Nous venons de reconnaître que ce théorème est vrai dans les cas où l'on a $n = 1$, $n = 2$. Admettons la formule (4) :

si nous démontrons qu'elle subsiste quand on change m en $m+1$, elle sera établie avec toute la généralité désirable. En effet, étant vraie pour $m=2$, elle le sera pour $m=3$; étant vraie pour $m=3$, elle le sera pour $m=4$, et ainsi de suite. Le mode de raisonnement que nous allons employer est d'un usage fréquent en analyse.

Multiplions par $(a+b+mr)$ les deux membres de l'équation (4), il vient, en vertu de l'équation (2),

$$(5)\qquad [a+b,r]^{m+1} = \ldots \mathrm{C}_m^n [a]^{m-n}[b]^n (a+b+mr)+\ldots,$$

et en omettant à l'intérieur des crochets le nombre r qui devrait y figurer invariablement. Or on a

$$(6)\qquad \begin{cases} [a]^{m-n}(a+mr) = [a]^{m-n}(a+\overline{m-n}r+nr) \\ \qquad\qquad = [a]^{m-n+1}+nr[a]^{m-n}, \end{cases}$$

$$(7)\qquad [b]^n b = [b]^n(b+nr-nr) = [b]^{n+1}-nr[b]^n.$$

En vertu de ces deux relations, l'équation (5) peut s'écrire

$$\begin{aligned}[a+b,r]^{m+1} = \ldots \mathrm{C}_m^n \Big\{ &[b]^n \{[a]^{m-n+1}+nr[a]^{m-n}\} \\ &+[a]^{m-n}\{[b]^{n+1}-nr[b]^n\}\Big\}+\ldots \\ = \ldots \mathrm{C}_m^n \{&[b]^n[a]^{m-n+1}+[b]^{n+1}[a]^{m-n}\} \\ +\mathrm{C}_m^{n+1}\{&[b]^{n+1}[a]^{m-n} \\ &+[b]^{n+2}[a]^{m-n-1}\}+\ldots,\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en groupant différemment les termes,

$$[a+b,r]^{m+1} = \ldots (\mathrm{C}_m^n+\mathrm{C}_m^{n+1})[a]^{m-n}[b]^{n+1}+\ldots,$$

ou bien, en observant que $\mathrm{C}_m^n+\mathrm{C}_m^{n+1}$ est égal à C_{m+1}^{n+1} (p. 190),

$$[a+b,r]^{m+1} = \ldots \mathrm{C}_{m+1}^{n+1}[a]^{m-n}[b]^{n+1}+\ldots.$$

Cette formule n'est autre chose que la formule (4), dans laquelle on a changé m en $m+1$; donc celle-ci est générale. C. Q. F. D.

On peut se proposer de développer la factorielle $[a, r]^{n+1}$ suivant les puissances de r, et l'on a alors

$$(8)\quad \begin{cases} [a,r]^{n+1} = a(a+r)\ldots(a+nr) \\ \qquad = a^{n+1} + s_1 ra^n + s_2 r^2 a^{n-1} \ldots s_\mu r^\mu a^{n-\mu+1} + s_n ra^n. \end{cases}$$

Dans cette formule (p. 185), s_1 est la somme des n premiers membres, s_2 est la somme de leurs produits deux à deux, s_3 la somme de leurs produits trois à trois, etc.

Kramp, dans son *Arithmétique universelle*, trouve les coefficients $s_1, s_2, \ldots, s_\mu$ *par la voie récurrente* (*), ainsi qu'il suit :

Multiplions les deux membres de l'équation (8) par $(a + \overline{n+1}\, r)$, il vient

$$(9)\quad \begin{cases} a[a+r, r]^{n+1} \\ = a^{n+2} + \begin{array}{l} s_1 \\ +(n+1) \end{array}\Bigg| a^{n+1} r + \begin{array}{l} s_2 \\ +(n+1)s_1 \end{array}\Bigg| a^n r^2 + \begin{array}{l} s_3 \\ +(n+1)s_2 \end{array}\Bigg| a^{n-1} r^3 + \ldots \begin{array}{l} \\ +\ldots \end{array} \end{cases}$$

D'un autre côté, en changeant dans la formule (8) a en $(a+r)$ et en multipliant par a, il vient

$$a[a+r, r]^{n+1}$$
$$= a(a+r)^{n+1} + s_1 ar(a+r)^n + s_2 ar^2 (a+r)^{n-1} + \ldots,$$

ou bien

$$a[a+r, r]^{n+1}$$
$$= a^{n+2} + \begin{array}{l} C^1_{n+1} \\ +s_1 \end{array}\Bigg| a^{n+1} r + \begin{array}{l} C^2_{n+1} \\ +s_1 C^1_n \\ +s_2 \end{array}\Bigg| a^n r^2 + \begin{array}{l} C^2_{n+1} \\ +s_1 C^1_n \\ +s_2 C^1_{n-1} \\ +s_3 \end{array}\Bigg| a^{n-1} r^3 + \ldots.$$

(*) On dit que des quantités s'obtiennent *par la voie récurrente* lorsqu'elles se déduisent les unes des autres successivement à l'aide d'équations linéaires.

En identifiant cette formule avec l'équation (9), on a

$$s_1 + (n+1) \quad = s_1 + C_{n+1}^1,$$
$$s_2 + (n+1)s_1 = s_2 + s_1 C_n^1 + C_{n+1}^2,$$
$$s_3 + (n+1)s_2 = s_3 + s_2 C_{n-1}^1 + s_1 C_n^2 + C_{n+1}^3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

ou bien

$$s_1 = C_{n+1}^2,$$
$$2s_2 = s_1 C_n^2 + C_{n+1}^3,$$
$$3s_3 = s_2 C_{n-1}^2 + s_1 C_n^3 + C_{n+1}^4,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Pour terminer ces notions sur les factorielles, nous allons résoudre le problème inverse de celui que nous venons de considérer, et nous allons développer a^n en une suite de factorielles.

A cet effet, nous observerons que l'on a

$$a[a, r]^n = a(a+1)\dots(a+\overline{n-1}\,r) \times \{(a+nr) - nr\},$$

c'est-à-dire

$$(10) \qquad a[a, r]^n = [a, r]^{n+1} - nr[a, r]^n.$$

Or on a, en n'écrivant pas la raison r,

$$a = [a]^1,$$
$$a^2 = a[a]^1 = [a]^2 - r[a]^1,$$
$$a^3 = [a]^2 a - ra[a]^1 = [a]^3 - 3r[a]^2 + r^2[a]^1,$$
$$a^4 = [a]^3 a - 3r[a]^2 a + r^2[a]^1 a$$
$$= [a]^4 - 6r[a]^3 + 7r^2[a]^2 - r^3[a]^1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Si nous posons en général

$$a^n = [a]^n + p_1 r[a]^{n-1} + p_2 r^2 [a]^{n-2}$$
$$+ p_3 r^3 [a]^{n-3} + \dots + p_{n-1} r^{n-1} [a]^1,$$

nous en déduisons

$$a^{n+1} = a[a]^n + p_1 ra[a]^{n-1} + p_2 r^2 a[a]^{n-2} + \ldots,$$

c'est-à-dire, en vertu de la formule (10),

$$a^{n+1} = [a]^{n+1} + \left.\begin{matrix} p_1 \\ -n \end{matrix}\right| r[a]^n + \left.\begin{matrix} p_2 \\ -p_1(n-1) \end{matrix}\right| r^2[a]^{n-1} + \ldots.$$

Si donc a^n est développable en une suite de factorielles, a^{n+1} le sera aussi. Or a^2, a^3, a^4 sont déjà développables de cette manière; donc a^5 doit l'être, et par suite a^6, etc.; donc toutes les puissances de a sont développables en une suite de factorielles. Si l'on désigne par $q_1, q_2, q_3, \ldots$ les coefficients de $[a]^n r$, $[a]^{n-1} r^2$, $[a]^{n-3} r^3, \ldots$, dans le développement de a^{n+1}, la loi de formation des coefficients est donnée par la formule

$$q_1 = p_1 - n, \quad q_2 = p_2 - (n-1)p_1, \quad q_3 = p_3 - (n-2)p_2, \ldots$$

X. — Application des théories précédentes a la démonstration de quelques propositions sur les nombres.

Le nombre des combinaisons de m objets pris n à n représente un nombre entier; il en résulte que

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

est toujours un nombre entier. De là le théorème suivant :

Théorème I. — *Le produit de n nombres consécutifs est toujours divisible par* $1.2.3\ldots n$.

Corollaire. — *Le produit de $n-1$ nombres suivant ou précédant immédiatement un nombre premier supérieur à n est toujours divisible par* $1.2.3\ldots n$.

Tous les coefficients du développement de

$$(a+b+c+\ldots+l)^m$$

sont évidemment entiers; il en résulte que

$$\frac{1.2.3.4\ldots m}{1.2.3\ldots\alpha\times 1.2.3\ldots\beta\times 1.2.3\ldots\lambda}$$

représente toujours un nombre entier lorsque l'on a $\alpha+\beta+\ldots+\lambda=m$; donc :

THÉORÈME II. — *Le produit des m premiers nombres,* et à fortiori *le produit de m nombres consécutifs est toujours divisible par*

$$1.2.3\ldots\alpha\times 1.2.3\ldots\beta\times 1.2.3\ldots\lambda,$$

si l'on a

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda=m.$$

COROLLAIRE. — *Si α est un diviseur de m, le produit de m nombres consécutifs sera divisible par*

$$(1.2.3\ldots\alpha)^{\frac{m}{\alpha}}.$$

Si dans la formule

$$(a+b+c+\ldots+l)^m = a^m+b^m+\ldots+l^m+\sum\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}a^\alpha b^\beta\ldots l^\lambda$$

on suppose $a=b=c=\ldots=l=1$; si, de plus, on désigne par N la totalité des nombres $a, b, \ldots, l$, il vient

$$N^m = N + \sum\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}. \tag{1}$$

Si l'on vient à remplacer dans cette formule m par un nombre premier, la quantité placée sous le signe $\sum$ sera un multiple de m; car $m!$ étant divisible par $\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!$

et m étant premier, $(m-1)!$ sera aussi divisible par $\alpha!$ $\beta!\ldots\lambda!$; par suite, $\frac{m(m-1)!}{\alpha!\ldots\lambda!}$ ou $\frac{m!}{\alpha!\ldots\lambda!}$ sera un multiple de m. La formule (1) peut donc s'écrire

$$N^m = N + \text{multiple de } m;$$

donc $N^m - N$ est divisible par m, et par suite, si m ne divise pas N, $N^{m-1}-1$ sera divisible par m; de là le théorème suivant, dû à Fermat :

Théorème III. — *Si m désigne un nombre premier qui ne divise pas* N, $N^{m-1} - 1$ *sera divisible par m.*

Reprenons les formules démontrées p. 202 :

$$\begin{aligned} s_1 &= C_{n+1}^2, \\ 2s_2 &= s_1 C_n^2 + C_{n+1}^3, \\ 3s_3 &= s_2 C_{n-1}^2 + s_1 C_n^3 + C_{n+1}^4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ns_n &= s_{n-1} C_2^2 + s_{n-2} C_3^3 + \ldots + C_{n+1}^{n+1}, \end{aligned}$$

dans lesquelles $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ sont les sommes des produits 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, n à n des n premiers nombres. En vertu de la première formule, si $n+1$ est un nombre premier > 2, s_1 sera divisible par $n+1$; en effet C_{n+1}^2 est égal à $\frac{(n+1)n}{1.2}$. Or 1.2 divisant $(n+1)n$ et étant premier avec $(n+1)$ divisera n; donc $\frac{n}{2}$ sera entier, et par suite C_{n+1}^2 divisible par $(n+1)$.

Si $(n+1)$ est un nombre premier supérieur à 3, notre seconde égalité prouve que s_2 est divisible par $n+1$. En effet, C_{n+1}^3 est divisible par $n+1$; pour le démontrer, il suffit d'observer que l'on a

$$C_{n+1}^3 = \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}.$$

Or C_{n+1}^3 est entier ; donc $1.2.3$ divise $(n+1)n(n-1)$; donc il divise $n(n-1)$, car il est premier avec $(n+1)$. s_1 est aussi divisible par $n+1$; donc $2s_2$ et par suite s_2 l'est aussi.

En continuant ce raisonnement, on arrive à démontrer que $ns_n - C_{n+1}^{n+1}$ ou $1.2.3\ldots n \times n - 1$ est divisible par $n+1$. Mais

$$1.2.3\ldots n \times n - 1 = 1.2.3\ldots n(n+1) - 1.2.3\ldots n - 1 ;$$

donc $1.2.3\ldots(n+1) - 1.2.3\ldots n - 1$ est un multiple de $n+1$; donc enfin $1.2.3\ldots n + 1$ est divisible par $n+1$. De là le théorème suivant, dû à Wilson :

Théorème IV. — *Si $n+1$ désigne un nombre premier, le produit $1.2.3\ldots n$ augmenté de 1 sera divisible par $n+1$.*

Ce théorème est très-remarquable, car la propriété que nous venons d'énoncer n'appartient qu'aux nombres premiers. Si, en effet, $n+1$ n'est pas premier, il aura pour diviseur un des nombres compris dans la suite $1.2.3\ldots n$, et par conséquent $1.2.3\ldots n+1$ ne saurait être divisible par le diviseur en question, et *à fortiori* ne saurait être divisible par $n+1$.

EXERCICES.

1. Démontrer la formule suivante due à Abel (*Œuvres complètes* publiées par Holmboë),

$$(x+a)^m = x^m + ma(x+b)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a(a-2b)(x+2b)^{m-2}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a(a-3b)^2(x+3b)^{m-3} + \ldots.$$

2. Développer la $n^{ième}$ puissance d'un polynôme entier en x et ordonner le développement par rapport aux puissances croissantes de x.

3. Trouver le nombre des termes du développement de

$$(a+b+c+\ldots+l)^n.$$

4. Trouver tous les diviseurs d'un nombre et la somme de ces diviseurs.

Si $a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \times \ldots \times l^\lambda$ désigne le nombre en question, et a, $b, c, \ldots, l$ ses facteurs premiers, la somme de ses diviseurs, y compris l'unité et le nombre lui-même, sera

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \cdots \frac{l^{\lambda+1}-1}{l-1}.$$

5. Démontrer la formule

$$1.2.3\ldots n = n^n - n(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^n - \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^n + \ldots \pm n;$$

en déduire le théorème de Wilson.

6. Combien peut-on tracer de diagonales dans un polygone de n côtés; en combien de points les diagonales et les côtés se rencontrent-ils?

7. Combien y a-t-il de coefficients dans un polynôme entier du degré m par rapport aux n variables $x, y, \ldots, z$?

8. Combien peut-on jouer de parties de bataille différentes?

9. Combien peut-on jouer de parties de dominos différentes?

10. De combien de manières peut-on amener un nombre de points donné N avec μ dés à jouer?

11. On appelle *probabilité d'un événement* le rapport du nombre des cas favorables à l'arrivée de l'événement au nombre total des cas possibles supposés également possibles.

Ainsi la probabilité d'amener le 6 avec un dé est $\frac{1}{6}$, parce qu'il y a un seul cas favorable à l'arrivée de l'événement attendu, et 6 cas possibles, à savoir l'arrivée des points 1, 2, 3, 4, 5, 6; d'après cela, calculer la probabilité :

1° D'amener 15 avec 3 dés; 2° d'amener 16 avec 4 dés; 3° de gagner 2 lots dans une loterie de 100 billets; 4° de gagner n lots dans une loterie de m billets; 5° d'amener pile 4 fois de suite au jeu de pile ou face.

12. Calculer le nombre des boulets d'une pile à base hexagonale: la forme générale de la base est un hexagone régulier formé de boulets contigus au-dessus, et dans les interstices on place une seconde rangée de boulets, et ainsi de suite.

13. On construit un château de cartes de la manière suivante : on place bout à bout n couples de cartes inclinées l'une sur l'autre; pour assujettir la stabilité, on place une carte entre deux couples consécutifs, par-dessus on met $n-1$ couples dont on assujettit la stabilité de la même façon, et ainsi de suite. Combien faudra-t-il de cartes pour faire le château?

14. Au lieu de faire le château comme dans la question précédente, on assujettit la stabilité en remplaçant chaque couple par un nombre de couples égal à celui des couples primitifs, de sorte que la base de l'édifice, ainsi que chacun des étages, affecte la forme générale d'un carré. Calculer d'après cela le nombre des cartes employées.

SECONDE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS GÉNÉRALES.

I. — Introduction.

Nous allons maintenant aborder cette partie de l'Algèbre appelée *Analyse algébrique* par Cauchy, *Introduction à l'analyse infinitésimale* par Euler. L'analyse algébrique a pour but de préparer l'esprit à l'étude des branches élevées de l'analyse, en ajoutant des conceptions plus philosophiques aux spéculations de l'Algèbre élémentaire.

Dans l'analyse algébrique, les quantités que l'on considère sont systématiquement variables ; l'emploi des lettres devient donc tout à fait indispensable pour les représenter. Les théorèmes sur les limites, la notion de l'infini et de l'infiniment petit reviennent à chaque instant et constituent le véritable fondement de la science que nous allons étudier.

Quelques auteurs ont défini les mots de *constante* et *variable ;* nous ne pensons pas pouvoir substituer à ces mots des idées plus claires que celles que l'on y attache immédiatement (*).

(*) « Quantitas constans est quantitas determinata, perpetuo eumdem

Lorsque deux quantités dépendent l'une de l'autre, de telle sorte que l'une d'elles variant, l'autre varie aussi, et que l'une d'elles restant constante, l'autre reste constante aussi, on dit qu'elles sont *fonctions* l'une de l'autre.

Les fonctions d'une quantité x se désignent par les notations

$$f(x),\quad F(x),\ldots,\quad \varphi(x),\quad \psi(x),\ldots,\quad F'(x),\quad F_1(x),\ldots.$$

On dit qu'une quantité f est *fonction de plusieurs autres*, lorsque, celles-ci restant constantes, à l'exception d'une seule x d'entre elles, f et x sont fonctions l'une de l'autre; on représente les fonctions de plusieurs quantités par les notations

$$f(x, y, z\ldots),\quad \varphi(x, y),\quad \psi(x, y, z),\ldots.$$

« ... Le mot *fonction* a été employé par les premiers analystes pour désigner en général les puissances d'une même quantité; depuis, on a étendu la signification de ce mot à toute quantité formée d'une manière quelconque d'une autre quantité. Leibnitz et les Bernoulli l'ont employé les premiers dans cette acception générale.... » (Lagrange, *Équations numériques*.)

II. — Rappel de quelques définitions et théorèmes fondamentaux.

On appelle *limite* d'une quantité variable une quantité fixe dont elle approche indéfiniment, de manière à pouvoir en différer d'aussi peu que l'on veut.

---

valorem servans.... Quantitas variabilis est quantitas indeterminata, quæ omnes omnino valores determinatos in se complectitur. »

(Euler, *Introductio in analysin infinitorum*.)

La limite d'une somme ou d'un produit de plusieurs quantités variables EN NOMBRE LIMITÉ *est égale à la somme ou au produit des limites de ces quantités.*

La limite d'une différence ou d'un quotient de deux variables est égale à la différence ou au quotient des limites de ces variables.

Ces théorèmes s'étendent encore au cas où quelques-unes des variables seraient remplacées par des constantes, pourvu que l'on considère ces constantes comme étant à elles-mêmes leurs propres limites.

On dit qu'une quantité *variable est infinie*, lorsqu'elle peut croître en valeur absolue au delà de toute limite.

On appelle *valeur d'une fonction pour une valeur infinie de sa variable* la limite vers laquelle tend cette fonction lorsque cette variable croît indéfiniment; ainsi on dira que $\frac{1}{x}$ est égal à zéro pour $x = \infty$.

On appelle *quantité infiniment petite* une quantité variable qui a pour limite zéro; ainsi on pourra dire que $\frac{1}{x}$ est infiniment petit pour x infini. Toutefois, il ne faut pas confondre ou assimiler le zéro à l'infiniment petit; le zéro est constant, l'infiniment petit est variable; il peut donc passer par des valeurs très-considérables avant d'atteindre sa limite zéro.

III. — De la continuité.

On dit qu'une quantité *varie d'une manière continue entre deux limites a et b*, lorsqu'elle ne peut passer entre ces limites d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.

On dit qu'une *fonction est continue entre les limites a* *et b de sa variable,* lorsque, celle-ci variant d'une manière continue entre a et b, la fonction varie elle-même d'une manière continue.

On dit enfin qu'*une fonction de x est continue pour $x = a$* lorsqu'elle est continue entre des limites de sa variable, l'une plus grande, l'autre plus petite que a.

Théorème I. — 1° *Lorsqu'une fonction $f(x)$ est continue pour $x = a$, à un accroissement h infiniment petit de x correspond un accroissement k infiniment petit de $f(x)$;* 2° *réciproquement, si, dans le voisinage de a, à un accroissement infiniment petit de x correspond un accroissement infiniment petit de $f(x)$, la fonction $f(x)$ est continue.*

1° Si la fonction $f(x)$ est continue pour $x = a$, il existe deux limites $a + \alpha$, $a - \beta$ de x entre lesquelles $f(x)$ reste continue; si donc on suppose $a + h$ compris entre $a + \alpha$ et $a - \beta$, $f(x)$ ne pourra passer de la valeur $f(a)$ à la valeur $f(a + \alpha)$ sans passer par toutes les valeurs intermédiaires; donc il existera une valeur $a + h$ de x pour laquelle $f(a + h)$ aura telle valeur aussi voisine que l'on voudra de $f(a)$. Ceci revient à dire que pour un accroissement h infiniment petit et positif de x, $f(x)$ prend un accroissement (positif ou négatif) infiniment petit. On ferait un raisonnement analogue sur les valeurs négatives de h : la première partie du théorème est donc démontrée.

2° Supposons que la quantité

$$k = f(x + h) - f(x)$$

soit infiniment petite en même temps que h pour toutes les valeurs de x et de $x + h$ comprises entre $a + \alpha$ et $a - \beta$. Soit μ une valeur comprise entre $f(a + \alpha)$ et $f(a - \beta)$; je dis qu'il existera une valeur de x satisfaisant à la relation

$$\mu = f(x),$$

et comprise entre $a + \alpha$ et $a - \beta$. En effet, s'il n'est pas possible de satisfaire à la condition en question, désignons par z la valeur de x pour laquelle $f(x)$ approche le plus de μ. Supposons, pour fixer les idées,

$$f(z) < \mu.$$

$f(z+h) - f(z)$ pouvant être pris aussi petit que l'on veut, et par suite moindre en valeur absolue que $\mu - f(z)$, il en résulte que pour des valeurs infiniment petites de h, $f(z+h) - f(z)$ est forcément négatif; $f(x)$ ne saurait donc franchir la limite μ et atteindre la valeur $a + \alpha$, ce qui est contre notre hypothèse. On conclut de là que $f(x)$ passe par toutes les valeurs comprises entre $a + \alpha$ et $a - \beta$; elle est donc continue.

Théorème II. — *La somme, la différence, le produit, le quotient de plusieurs fonctions continues est encore une fonction continue.*

En effet, prenons par exemple le produit de plusieurs fonctions continues $f_1(x) \times f_2(x) \ldots f_n(x)$; changeons x en $x + h$: le produit devient $f_1(x+h)$, $f_2(x+h), \ldots, f_n(x+h)$; lorsque l'on fait tendre h vers zéro, $f_1(x+h)$, $f_2(x+h) \ldots$ tendent vers les limites $f_1(x)$, $f_2(x) \ldots$. Or la limite du produit $f_1(x+h) \times f_2(x+h) \ldots$ est égale au produit des limites de ses facteurs; donc $f_1(x+h) \times f_2(x+h) \ldots$ a pour limite $f_1(x) \times f_2(x) \ldots$, et par conséquent peut en différer d'aussi peu que l'on veut; donc $f_1(x) \times f_2(x) \ldots$ représente une fonction continue.

Pour comprendre la force du raisonnement qui précède, il faut bien remarquer que si $f(x)$ n'était pas continue pour la valeur a de sa variable, $f(a+h)$ n'aurait pas pour limite $f(a)$, ce qui peut arriver de deux manières : 1° la fonction $f(x)$ passe brusquement d'une valeur à une autre lorsque x ne varie pas sensiblement. Ces cas sont très-rares : nous en verrons plus loin des exemples. 2° La fonction $f(x)$ existe pour $x = a + h$, mais n'existe plus pour $x = a$; alors $f(a)$ n'existant pas, $f(a+h)$ n'a pas de limite. Par exemple, la fonction $\frac{1}{x}$ n'existe pas pour $x = 0$; elle est discontinue pour $x = 0$; la fonction $\sqrt{1 - x}$ est discontinue pour $x = 1$, etc.

Remarque. — Un quotient de deux fonctions continues cesse d'être continu lorsque le diviseur passe par zéro. En effet, alors le raisonnement exposé plus haut tombe en défaut, car le quotient des limites de deux quantités dont le diviseur est nul n'existe plus.

Théorème III. — *Si $u = f(x)$ est une fonction continue de x pour $x = a$, et si y est une fonction continue de u pour $u = f(a)$, y sera une fonction continue de x pour $x = a$.*

En effet, à un accroissement infiniment petit de x correspond un accroissement infiniment petit de u, à un accroissement infiniment petit de u correspond un accroissement infiniment petit de y; donc, en définitive, à un accroissement infiniment petit de x correspond un accroissement infiniment petit de y; donc y est fonction continue de x.

Nous terminerons ce paragraphe en faisant observer qu'une somme ou un produit composé d'un nombre illimité de fonctions continues peut fort bien cesser d'être continu, soit en passant brusquement d'une valeur à une autre, soit en cessant d'exister, bien que chaque partie ou chaque facteur existe encore. Nous verrons plus loin des exemples de ce fait.

IV. — Des fonctions simples.

Toutes les fonctions que l'on considère en analyse se ramènent à trois types que l'on appelle *fonctions simples,* qui par leur combinaison par voie d'addition, soustraction, multiplication, etc., reproduisent toutes les autres; ces fonctions types ont reçu le nom de *fonctions simples*. On leur adjoint souvent leurs *inverses*.

On appelle *fonction inverse* d'une fonction $f(x)$ la fonction y, qui satisfait à l'égalité

$$x = f(y).$$

Les fonctions simples *directes,* c'est-à-dire les types que nous allons étudier, sont la *fonction simple algébrique,* la *fonction exponentielle* et le *sinus*.

CHAPITRE II.

DE LA FONCTION SIMPLE ALGÉBRIQUE, DE LA FONCTION EXPONENTIELLE ET DES LOGARITHMES.

I. — Préliminaires.

Lemme I. — *Les puissances successives des nombres plus grands que* 1 *vont en croissant et peuvent dépasser toute limite.*

En effet, tout nombre plus grand que 1 peut être représenté par $1+\alpha$, et l'on a, par la formule du binôme,

$$(1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha \quad (*).$$

(*) Cette formule peut s'établir directement comme il suit :

$$(1+\alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2,$$

et par conséquent

$$1 + \alpha^2 > 1 + 2\alpha.$$

En multipliant les deux membres de cette inégalité par $1+\alpha$, on a

$$(1+\alpha)^3 > 1 + 3\alpha + 2\alpha^2,$$

et *à fortiori*

$$(1+\alpha)^3 > 1 + 3\alpha.$$

Supposons que l'on ait trouvé

$$(a) \qquad (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha,$$

je dis que l'on aura

$$(1+\alpha)^{n+1} > 1 + (n+1)\alpha.$$

En effet, en multipliant les deux membres de la formule (a) par $1+\alpha$, La formule précédente montre qu'en prenant n suffisamment grand, $(1+\alpha)^n$ pourra être pris plus grand que toute quantité donnée; du reste, il est bien évident que

$$(1+\alpha)^{n+1} > (1+\alpha)^n.$$

Lemme II. — *Les puissances successives des nombres moindres que 1 vont en diminuant et ont zéro pour limite.*

En effet, tout nombre moindre que 1 peut être considéré comme le quotient de l'unité divisée par un nombre $(1+\alpha)$ plus grand que 1, et alors le lemme que nous venons de démontrer rend celui-ci évident.

Lemme III. — *Les racines successives des nombres plus grands que 1 vont en diminuant et ont l'unité pour limite.*

En effet : 1° a désignant un nombre plus grand que 1,

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n(n+1)]{a^{n+1}},$$
$$\sqrt[n+1]{a} = \sqrt[n(n+1)]{a^n};$$

donc évidemment

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n+1]{a}.$$

2° Je dis que l'on peut toujours prendre n assez grand pour que

(1) $$\sqrt[n]{a} - 1 < \delta,$$

---

on trouve

$$(1+\alpha)^n > 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2,$$

c'est-à-dire

$$(1+\alpha)^{n+1} > 1 + (n+1)\alpha.$$

Donc, si la formule (a) est vérifiée pour une valeur de n, elle l'est pour la valeur de n immédiatement supérieure d'une unité; or cette formule est vérifiée pour $n=2$, elle l'est donc pour $n=3$, pour $n=4, \ldots$, donc elle est générale.

δ désignant une quantité aussi petite que l'on voudra. En effet, de l'inégalité précédente on déduit

$$(2) \qquad a < (1 + \delta)^n;$$

or (Lemme I^{er}),

$$1 + n\delta < (1 + \delta)^n.$$

Si donc on prend

$$a < 1 + n\delta,$$

à fortiori l'inégalité (2) sera satisfaite, et par suite (1); pour satisfaire à la question, il suffit, comme on voit, de prendre

$$n > \frac{a - 1}{\delta},$$

ce qui revient à dire que la racine $n^{\text{ième}}$ de a a pour limite 1 lorsque n augmente indéfiniment.

Lemme IV. — *Les racines successives d'un nombre moindre que 1 vont en croissant et ont l'unité pour limite.*

Ce lemme est une conséquence du précédent.

II. — De l'exposant fractionnaire.

Désignons par a un nombre positif : si nous observons que l'on a

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

toutes les fois que m est divisible par n, nous serons conduits naturellement à représenter par le symbole $a^{\frac{m}{n}}$ l'expression $\sqrt[n]{a^m}$, lors même que le nombre m ne sera plus divisible par n. Mais pour que cette notation soit logique, il est nécessaire que les règles de l'exposant entier s'appliquent encore à l'exposant fractionnaire; c'est ce qui a lieu. En effet,

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m}.\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$$
$$= a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

On a donc, pour toutes les valeurs positives et commensurables de α,

$$a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta};$$

on en conclut

$$a^\alpha . a^\beta . a^\gamma = a^{\alpha+\beta} . a^\gamma = a^{\alpha+\beta+\gamma},$$

et, en général,

$$a^\alpha . a^\beta . a^\gamma \ldots = a^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}$$

On a aussi, pour toutes les valeurs positives et rationnelles de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots,$

$$a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta},$$

car

$$a^{\alpha-\beta} \times a^\beta = a^\alpha.$$

On a encore

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}}.$$

En effet,

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}}$$
$$= \sqrt[qn]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}}.$$

C. Q. F. D.

Enfin, on vérifie aisément que

$$(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha, \quad (a:b)^\alpha = a^\alpha : b^\alpha, \ldots.$$

III. — De l'exposant incommensurable.

Lemme I. — *Supposons, pour fixer les idées, le nombre a plus grand que l'unité; alors,* $\frac{m}{n}$ *désignant un nombre commensurable, on aura*

$$a^{\frac{m}{n}} > 1.$$

En effet, $a^{\frac{m}{n}}$ est égal à $\sqrt[n]{a^m}$; or, a^m est plus grand que 1, donc $\sqrt[n]{a^m}$ sera aussi plus grand que 1 (Lemme I, p. 216); au contraire, si a était moindre que 1, on aurait

$$a^{\frac{m}{n}} < 1.$$

Lemme II. — $a^{\frac{m}{n}}$ *croît avec* $\frac{m}{n}$ *si a est plus grand que* 1; *il décroît dans le cas contraire.*

En effet,

$$a^{\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}} = a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{m'}{n'}};$$

si donc a est plus grand que 1, $a^{\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}}$ sera plus grand que $a^{\frac{m}{n}}$; il serait évidemment plus petit dans le cas contraire, ce qui démontre le lemme énoncé.

Lemme III. — *Si le nombre commensurable* $\frac{m}{n}$ *a pour limite zéro,* $a^{\frac{m}{n}}$ *aura pour limite l'unité.*

En effet, les racines croissantes de a ont pour limite l'unité (Lemme III, p. 217); donc il existera toujours une racine, la $\mu^{ième}$ par exemple, qui sera telle que

$$\sqrt[\mu]{a} \quad \text{ou} \quad a^{\frac{1}{\mu}} < 1 \pm \delta,$$

δ étant une quantité aussi petite que l'on voudra; et pour toutes les valeurs de $\frac{m}{n}$ inférieures à $\frac{1}{\mu}$, on aura *à fortiori*

$$a^{\frac{m}{n}} < 1 \pm \delta;$$

ceci revient à dire que $a^{\frac{m}{n}}$ a pour limite l'unité.

Ces préliminaires une fois posés, nous pouvons définir l'exposant incommensurable comme il suit.

Soient $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}, \cdots$ une série de fractions ayant pour limite le nombre incommensurable x; la limite vers laquelle tendent les quantités $a^{\frac{m}{n}}, a^{\frac{m'}{n'}}, \ldots$ est ce que nous appellerons a^x. Cette limite existe; car, si l'on suppose $a > 1$ et $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \ldots$ croissants, $a^{\frac{m}{n}}, a^{\frac{m'}{n'}}, \ldots$ seront des nombres croissants inférieurs à a^θ, θ désignant un nombre commensurable supérieur à x; ils auront donc une limite λ. Supposons maintenant que $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \cdots$ tendent vers x d'une manière quelconque: on peut toujours prendre $\frac{p}{q}$ moindre que x, mais assez voisin de x pour que

$$\lambda - a^{\frac{p}{q}} < \frac{\delta}{2},$$

δ désignant un nombre aussi petit que l'on voudra; mais quel que soit $\frac{m}{n}$, pourvu qu'il soit assez voisin de $\frac{p}{q}$ et par conséquent de x, on pourra toujours poser, en vertu du lemme précédent,

$$\text{val. abs.}\left(a^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{m}{n}}\right) < \frac{\delta}{2},$$

c'est-à-dire

$$\text{val. abs.}\left(\lambda - a^{\frac{m}{n}}\right) < \delta,$$

ce qui prouve que $a^{\frac{m}{n}}$ a pour limite λ, de quelque manière que $\frac{m}{n}$ tende vers x. Nous avons supposé $a > 1$; en supposant $a < 1$, le raisonnement se fait identiquement de la même façon.

Il va sans dire que les règles de l'exposant entier s'appliquent à l'exposant incommensurable; en effet, on a

$$a^x . a^z = \lim a^{\frac{m}{n}} \lim a^{\frac{p}{q}},$$

$\frac{m}{n}$ et $\frac{p}{q}$ étant les fractions qui ont pour limite x et z. On tire de là

$$a^x . a^z = \lim a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = \lim a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}};$$

or, $\lim a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$ est ce que nous avons appelé a^{x+z}, car $x+z$ est la limite de $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$; donc

$$a^x . a^z = a^{x+z}.$$

De cette égalité on peut déduire, comme au paragraphe précédent, toutes les propriétés des exponentielles.

IV. — De l'exposant négatif et nul.

Si l'on observe que pour $m > n$ on a

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

on est conduit à poser dans tous les cas, comme définition,

$$a^{m-n} = a^m : a^n,$$

et en particulier, si $m = n$,

$$a^0 = 1.$$

Or on a, dans le cas où $m < n$,

$$a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}};$$

on est donc conduit à écrire

$$a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}},$$

ou enfin

$$a^{-s} = \frac{1}{a^s}.$$

Les règles de l'exposant négatif sont les mêmes que celles de l'exposant positif. En effet, on a

$$a^{-\alpha} \times a^{\beta} = a^{\beta} : a^{\alpha} = a^{\beta-\alpha},$$

$$a^{-\alpha} \times a^{-\beta} = 1 : (a^{\alpha} . a^{\beta}) = 1 : a^{\alpha+\beta} = a^{-\alpha-\beta};$$

donc, quel que soit α et quel que soit β,

$$a^{\alpha} . a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}.$$

On en conclut, comme p. 219,

$$a^\alpha . a^\beta . a^\gamma \ldots = a^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots},$$

$$a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}.$$

Enfin, je dis que l'on a

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}.$$

En effet, si α est négatif et égal à $-\alpha'$, on a

$$(a^\alpha)^\beta = (a^{-\alpha'})^\beta = \left(\frac{1}{a^{\alpha'}}\right)^\beta = \frac{1}{a^{\alpha'\beta}} = a^{-\alpha'\beta} = a^{\alpha\beta}.$$

Si β' est négatif et égal à $-\beta'$, on a

$$(a^\alpha)^\beta = (a^\alpha)^{-\beta'} = \frac{1}{(a^\alpha)^{\beta'}} = a^{-\alpha\beta'} = a^{\alpha\beta}.$$

Si α et β sont tous deux négatifs et égaux à $-\alpha'$, $-\beta'$, on a

$$(a^\alpha)^\beta = (a^{-\alpha'})^{-\beta'} = 1 : \left(\frac{1}{a^{\alpha'}}\right)^{\beta'} = 1 : \frac{1}{a^{\alpha'\beta'}}$$

$$= 1 : a^{-\alpha'\beta'} = a^{\alpha'\beta'} = a^{\alpha\beta}.$$

C. Q. F. D.

On verrait facilement que

$$(ab)^\alpha = a^\alpha . b^\alpha, \quad (a:b)^\alpha = a^\alpha : b^\alpha, \ldots$$

V. — Définition de la fonction simple algébrique. Son utilité.

Si l'on considère x comme variable et si m désigne un nombre constant, x^m est ce que l'on appelle la *fonction simple algébrique*. Toutefois, Abel et quelques autres géomètres ne regardent la fonction x^m comme algébrique qu'autant que l'exposant m est commensurable (*voir* Abel, *Sur les fonctions algébriques des différents ordres*, œuvres complètes).

« . . . La position d'une grandeur à la suite d'une autre suffit pour exprimer leur produit; si ces grandeurs sont les mêmes, ce produit est le carré ou la seconde puissance de cette grandeur. Mais, au lieu de l'écrire deux fois, Descartes imagina de ne l'écrire qu'une fois, en lui donnant le nombre 2 pour exposant, et il exprima les puissances successives en augmentant successivement cet exposant d'une unité. Cette notation, en ne la considérant que comme une manière abrégée de représenter ces puissances, semble peu de chose; mais, tel est l'avantage d'une langue bien faite, que ses notations les plus simples sont devenues souvent la source des théories les plus profondes, et c'est ce qui a eu lieu pour les exposants de Descartes. Wallis, qui s'est attaché spécialement à suivre le fil de l'induction et de l'analogie, a été conduit par ce moyen à exprimer les puissances radicales par des exposants fractionnaires.... Wallis supposa généralement que l'exposant $-\frac{n}{m}$ exprime l'unité divisée par la racine $n^{ième}$ de la grandeur élevée à la puissance m. Ce fut dans son ouvrage intitulé *Arithmetica infinitorum* que Wallis exposa ces remarques.... » (Laplace, *Théorie analytique des Probabilités*, 1[re] partie, livre I.)

VI. — De la fonction exponentielle.

Lorsque a désigne un nombre positif constant et x un exposant variable, la fonction a^x est ce que l'on appelle la *fonction exponentielle simple*. « . . . L'extension la plus importante que cette notation (celle des exposants) ait reçue est celle des exposants variables; ce qui constitue le calcul exponentiel, l'une des branches les plus fécondes de l'Analyse moderne. Leibnitz a indiqué le premier, dans les *Actes de Leipsick* pour 1682, les transcendantes à exposants variables.... » (LAPLACE, *Théorie analytique des Probabilités,* 1[re] partie, livre I.)

VII. — CONTINUITÉ DE LA FONCTION ALGÉBRIQUE ET DE LA FONCTION EXPONENTIELLE.

THÉORÈME I. — *La fonction x^α, dans laquelle α désigne un exposant constant quelconque, est croissante et continue pour toutes les valeurs positives de sa variable.*

Faisons varier x entre les limites a et b, x^α prendra des valeurs comprises entre a^α et b^α. En effet, x^α croît avec x si α est positif, il décroît dans le cas contraire; pour le démontrer, il suffit d'observer que si, par exemple, α est positif, et si l'on pouvait avoir

$$(x+h)^\alpha < x^\alpha,$$

on en déduirait

$$\frac{(x+h)^\alpha}{x^\alpha} < 1,$$

ou

$$\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha < 1,$$

ce qui est impossible, puisque les puissances entières et les racines d'un nombre plus grand que 1 sont plus grandes que 1.

En second lieu, si μ est compris entre a^α et b^α, il est facile de voir que x^α passera par la valeur μ. En effet, il suffit pour cela de faire $x = \mu^{\frac{1}{\alpha}}$; donc x^α ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires; x^α est donc une fonction continue pour les valeurs positives de x.

Quand on donne à x des valeurs négatives, la continuité peut être interrompue; il y a plus, la fonction x^α est alors mal définie, car $(-8)^{\frac{1}{3}}$ et $(-8)^{\frac{2}{6}}$, dans lesquelles l'exposant est le même, représentent respectivement $\sqrt[3]{-8}$ ou -2 et

$$\pm\sqrt[6]{(-8)^2} = \pm\sqrt[6]{8^2} = \pm\sqrt[3]{8} = \pm 2.$$

Il est impossible de se faire une idée de la valeur d'une expression telle que $(-1)^{\sqrt{2}}$. Enfin, si le nombre α est une fraction telle que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, etc., x^α n'existe pas.

THÉORÈME II. — *La fonction a^x, dans laquelle a est constant et x variable, croît avec x si a est plus grand que 1, elle décroît dans le cas contraire; de plus, elle est continue.*

En effet, supposons, pour fixer les idées, $a > 1$; pour démontrer que a^x croît avec x, il suffit d'établir que l'on a

$$a^m > a^n \quad \text{pour} \quad m > n.$$

Si m et n sont commensurables et de la forme $m = \frac{p}{q}$, $n = \frac{r}{s}$, p, q, r, s désignant des nombres entiers, on a

$$(1)\quad \begin{cases} a^m = a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{sp}{sq}} = \left(a^{\frac{1}{sq}}\right)^{sp}, \\ a^n = a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{rq}{sq}} = \left(a^{\frac{1}{sq}}\right)^{rq}. \end{cases}$$

Mais

$$\frac{p}{q} > \frac{r}{s} \quad \text{ou} \quad sp > rq.$$

Or $a^{\frac{1}{sq}}$ est plus grand que 1 puisque $a > 1$; donc

$$\left(a^{\frac{1}{sq}}\right)^{sp} > \left(a^{\frac{1}{sq}}\right)^{rq},$$

ou, en vertu des formules (1),

$$a^m > a^n.$$

Supposons maintenant l'une des quantités m ou n incommensurable; soit l un nombre commensurable compris entre m et n, de telle sorte que

$$m > l > n.$$

Faisons tendre l vers m, par exemple, en le faisant croître et passer par des valeurs commensurables, a^l ira en croissant, et la limite de a^l est ce que nous avons appelé a^m; cette limite est le plus petit des nombres auxquels a^l reste inférieur; donc, que m soit commensurable ou non, on a toujours

$$a^l < a^m.$$

On verrait de même que

$$a^l > a^n;$$

donc

$$a^m > a^n.$$

C. Q. F. D.

Donnons maintenant à x un accroissement infiniment petit h, a^x prendra l'accroissement

$$k = a^{x+h} - a^x.$$

Il est facile de prouver que cet accroissement est infiniment petit. En effet, on a

$$k = a^{x+h} - a^x = a^x[a^h - 1].$$

Mais a^h a pour limite l'unité quand h tend vers zéro.

Cette proposition a été établie pour les valeurs commensurables de h (lemme III, p. 220); mais comme a^h décroît avec h, il en résulte que la limite de a^h est encore l'unité pour les valeurs incommensurables de h. Ce qui revient à dire que k a pour limite zéro; donc a^x est une fonction continue. C. Q. F. D.

Nous avons supposé $a > 1$: la démonstration se fait de la même façon dans le cas contraire; il est bien entendu, du reste, que a est censé positif, la fonction a^x n'ayant été définie que dans ce cas.

VIII. — Des logarithmes.

La fonction x^α reproduit une fonction algébrique quand on en prend l'inverse; la fonction inverse de a^x est ce que l'on appelle le *logarithme* de x pris dans la base a : on la désigne par le symbole

$$\log_a x.$$

Lorsque $a = 10$, on écrit simplement

$$\log x.$$

Ainsi le *logarithme* d'un nombre peut se définir : l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever un nombre constant appelé *base*, pour reproduire le nombre proposé.

Théorème I. — *Tout nombre positif a un logarithme; les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes.*

En effet, si l'on désigne par x un nombre positif et si l'on pose

$$(1) \qquad a^y = x,$$

y sera ce que nous avons appelé le logarithme de x. Or, si nous faisons varier y d'une manière continue depuis

$-\infty$ jusqu'à $+\infty$, a^y variera d'une manière continue (p. 227) entre zéro et $+\infty$; donc il passera par la valeur x; donc le nombre x a un logarithme. De plus, on voit qu'il n'en aura qu'un seul.

Si l'on avait supposé x négatif, on n'aurait pas pu satisfaire à l'équation (1), puisque a^y est toujours positif; donc les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes.

Remarques. — On a toujours

$$\log_a 1 = 0, \quad \text{car} \quad a^0 = 1,$$
$$\log_a 0 = -\infty \quad \text{pour } a > 1, \text{ car alors } a^{-\infty} = 0,$$
$$\log_a 0 = +\infty \quad \text{pour } a < 1, \text{ car alors } a^{+\infty} = 0,$$

. . . .

Théorème II. — *Le logarithme est une fonction qui croît avec sa variable lorsque la base est plus grande que* 1; *elle décroît lorsque sa variable croît, dans le cas contraire.*

Théorème III. — *Le logarithme d'un produit est égal au produit des logarithmes de ses facteurs.*

En effet, si l'on pose

$$y_1 = \log_a x_1, \quad y_2 = \log_a x_2, \ldots, \quad y_n = \log_a x_n,$$

on a, par définition,

$$x_1 = a^{y_1}, \quad x_2 = a^{y_2}, \ldots, \quad x_n = a^{y_n};$$

donc

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_n = a^{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n},$$

c'est-à-dire

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \log_a x_1 x_2 \ldots x_n,$$

ou bien

$$\log_a x_1 + \log_a x_2 + \ldots = \log_a x_1 x_2 \ldots x_n.$$

C. Q. F. D.

Théorème IV. — *Le logarithme d'un quotient est égal à la différence des logarithmes du dividende et du diviseur.*

En effet, soient D le dividende, d le diviseur, q le quotient, on a

$$D = dq,$$

ou

$$\log_a D = \log_a d + \log_a q;$$

d'où

$$\log_a q = \log_a D - \log_a d.$$

C. Q. F. D.

Théorème V. — *Le logarithme d'une puissance d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre multiplié par l'exposant de la puissance.*

En effet, soit y le logarithme de x dans la base a, on aura

$$a^y = x,$$

et en élevant les deux membres à la puissance i,

$$a^{iy} = x^i.$$

Cette égalité montre que

$$iy = \log_a x^i,$$

ou

$$i \log_a x = \log_a x^i.$$

C. Q. F. D.

Ces propriétés, sans doute déjà connues du lecteur, font de la fonction logarithmique une des plus importantes de l'Analyse. En effet, si l'on avait une table contenant les logarithmes des nombres, on voit que l'on pourrait considérablement simplifier les calculs de multiplication, de division et surtout d'extraction de racines. Nous allons indiquer tout à l'heure le procédé qui a été suivi dans la construction des premières tables de logarithmes.

IX. — Des logarithmes d'après Neper.

La découverte des logarithmes est communément attribuée à Neper, baron écossais; toutefois, s'il faut en croire le témoignage de Montucla, Michel Stiefels, géomètre allemand, aurait fait connaître cinquante ans avant Neper la propriété fondamentale des logarithmes

$$[\log ab = \log a + \log b].$$

«... Mon cher beau-frère et maître Juste Byrge a calculé, il y a vingt ans et davantage, une belle table des progressions avec leurs différences de 10 en 10 avec 9 chiffres, etc., de sorte que l'invention des logarithmes n'est pas de Neper.... »

Ces lignes, rapportées par Montucla, sont de Benjamin Bramer; elles ont été écrites en 1630. A ce qu'il paraît, le titre de l'ouvrage auquel ces lignes sont empruntées indique l'existence d'une préface qui a été perdue et dans laquelle la théorie des logarithmes serait exposée tout au long. Or l'ouvrage de Neper sur les logarithmes est de 1614. Il va sans dire que nous ne nous rangeons ni pour ni contre l'opinion de Montucla; pour se prononcer sur un semblable sujet, il faudrait faire de longues et pénibles recherches que nous n'aurions ni la patience ni le courage d'entreprendre.

Quoi qu'il en soit, l'invention des logarithmes a précédé celle de la fonction exponentielle, et la définition que nous avons donnée plus haut de la fonction logarithmique n'est pas celle de ses inventeurs. Nous allons maintenant nous placer au même point de vue que Neper, en dégageant ses conceptions des idées de mouvement dont elles avaient été accompagnées à l'origine.

Considérons deux progressions, l'une géométrique commençant par l'unité, l'autre arithmétique commençant par zéro :

(1) $\div\!\!\div 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots : q^m, \ldots,$

(2) $\div\, 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \ldots\ldots mr, \ldots.$

Chaque terme de la progression arithmétique est dit le logarithme du terme de même rang dans la progression géométrique.

THÉORÈME I. — *Si l'on insère entre deux termes consécutifs de la progression* (1) *un nombre suffisamment grand de moyens, la nouvelle raison différera aussi peu que l'on voudra de l'unité; si entre les termes correspondants de la progression* (2) *on insère le même nombre de moyens, la raison de la nouvelle progression sera en même temps aussi peu différente de zéro que l'on voudra* (*).

En effet, les raisons des nouvelles progressions seront respectivement

$$\sqrt[m+1]{q}, \quad r:(m+1).$$

Or ces deux quantités ont respectivement pour limites 1 et zéro (p. 218); donc, etc. C. Q. F. D.

THÉORÈME II. — *Désignons par* $1+\alpha$ *la raison de la nouvelle progression géométrique, par* β *la raison de la nouvelle progression arithmétique,* α *et* β *pourront, comme nous avons vu, être pris aussi petits que l'on*

(*) Insérer m moyens arithmétiques entre a et b, c'est trouver m nombres qui avec a et b forment une progression arithmétique dont a et b soient les termes extrêmes; la raison r de cette progression est donnée par la formule $b = a + (m+1)r$ ou $r = (b-a):(m+1)$.

Insérer m moyens géométriques entre a et b, c'est trouver m nombres qui avec a et b forment une progression géométrique dont a et b soient les termes extrêmes; la raison q de cette progression est donnée par la formule $b = aq^{m+1}$ ou $q = \sqrt[m+1]{b:a}$.

voudra, et, lorsqu'ils seront suffisamment petits, la différence entre deux termes consécutifs des nouvelles progressions pourra être prise aussi petite que l'on voudra.

Soient $(1+\alpha)^n$, $(1+\alpha)^{n+1}$ deux termes consécutifs de la progression géométrique; leur différence est

$$(1+\alpha)^n(1+\alpha-1)=\alpha(1+\alpha)^n.$$

Je dis que l'on peut prendre α assez petit pour que

$$(1) \qquad \alpha(1+\alpha)^n<\delta,$$

δ désignant une quantité aussi petite que l'on voudra. En effet, l'inégalité précédente peut s'écrire

$$(2) \qquad \alpha<\frac{\delta}{(1+\alpha)^n}.$$

Prenons alors, non-seulement $\alpha<\delta$, mais encore

$$\alpha<\frac{\delta}{(1+\delta)^n},$$

l'inégalité (2) sera alors satisfaite *à fortiori*, et par suite l'inégalité (1), ce qui démontre le théorème que nous avions énoncé relativement à la progression géométrique. La différence entre deux termes consécutifs de la progression arithmétique a pour expression générale

$$(n+1)\beta-n\beta=\beta;$$

elle peut donc être prise aussi moindre que toute quantité donnée. Il résulte de ces théorèmes que l'on pourra toujours insérer entre les termes des progressions

$$(1) \qquad 1,\ q,\ q^2,\dots,\ q^n,\dots,$$
$$(2) \qquad 0,\ r,\ 2r,\dots,\ nr,\dots,$$

un nombre de moyens assez grand pour que la différence entre un nombre donné N et un certain terme de la progression géométrique soit moindre qu'une quantité donnée δ; ceci aura lieu lorsque la différence entre deux moyens consécutifs quelconques sera moindre que δ. On pourra augmenter aussi ce nombre de moyens assez pour que la différence des deux termes de la progression arithmétique correspondants aux deux termes de la progression géométrique comprenant N soit moindre qu'une quantité donnée ε. Soient alors $(1+\alpha)^m$ et $(1+\alpha)^{m+1}$ les termes de la nouvelle progression géométrique qui comprennent N, on dira que *$m\beta$ ou $(m+1)\beta$ est le logarithme de* N *à ε près*. Enfin, si l'on fait tendre α vers zéro, $(1+\alpha)^m$ tendra si l'on veut vers N, et la limite vers laquelle tendra alors $m\beta$ sera ce que Neper appelait *le logarithme de* N dans le système correspondant aux progressions (1) et (2).

X. — Concordance de la définition népérienne des logarithmes avec la définition actuelle.

Il est facile de prouver que le logarithme d'un produit est égal au produit des logarithmes de ses facteurs, en partant de la définition de Neper. En effet, considérons d'abord deux nombres N et N′; supposons que ces nombres fassent partie de la progression géométrique qui sert à définir le système, N et N′ seront de la forme q^n et $q^{n'}$; leurs logarithmes seront de la forme nr et $n'r'$. Or NN′ ou $q^{n+n'}$ est un terme de la progression géométrique; il a pour logarithme $(n+n')r$, c'est-à-dire $nr+n'r$, c'est-à-dire enfin la somme des logarithmes de N et N′. Si les nombres N et N′ ne font pas partie de la progression géométrique qui sert à définir le système de logarithmes, nous insérerons entre les termes de cette progression un suffisamment grand nombre de moyens pour que la différence entre deux termes consécutifs de la nouvelle progression soit moindre que δ. Soient alors ν le nombre de la nouvelle progression qui s'approche le plus de N, ν' le nombre de la nouvelle progression qui s'approche le plus de N', on aura

$$\log \nu + \log \nu' = \log \nu\nu'.$$

Mais δ pouvant être pris aussi petit que l'on veut, les différences entre ν et N, ν' et N', entre $\nu\nu'$ et NN' et les logarithmes de ces quantités pourront être prises aussi petites que l'on voudra, et par suite, en passant aux limites, on aura

$$\log N + \log N' = \log NN'.$$

C. Q. F. D.

Reprenons les deux progressions

$$(1) \qquad 1,\ q,\ q^2, \ldots,\ q^n,$$
$$(2) \qquad 0,\ r,\ r^2, \ldots,\ nr.$$

nr est le terme de la progression arithmétique correspondant à q^n; or, on a

$$q^n = \left(q^{\frac{1}{r}}\right)^{nr}.$$

On voit donc que les nombres nr de la progression arithmétique sont les exposants des puissances auxquelles il faut élever le nombre constant $q^{\frac{1}{r}}$ pour reproduire les termes de même rang dans la progession géométrique; les premiers nombres sont donc les logarithmes des derniers pris dans la base $q^{\frac{1}{r}}$.

Réciproquement, étant donnée la base d'un système de logarithmes, il est bien évident que l'on trouvera une infinité de couples de progressions capables de le définir.

XI. — Construction d'une table de logarithmes.

Les propriétés des logarithmes permettraient de simplifier considérablement les opérations compliquées de l'Arithmétique, si l'on avait un moyen rapide de se procurer le logarithme d'un nombre, et *vice versâ*, de trouver le nombre correspondant à un logarithme donné.

Si, par exemple, il s'agissait d'extraire la racine 27ᵉ de 5, on aurait

$$\log \sqrt[27]{5} = \frac{1}{27} \log 5.$$

Si alors on connaissait le logarithme de 5, celui de $\sqrt[27]{5}$ serait connu, et si l'on avait un moyen de remonter d'un logarithme donné au nombre correspondant, on en déduirait la valeur de $\sqrt[27]{5}$. On a donc été conduit à construire des tables contenant les nombres depuis 1 jusqu'à une limite plus ou moins reculée avec leurs logarithmes; nous allons donner une idée de la manière dont ont procédé les inventeurs des logarithmes, sauf à revenir sur cette question plus tard et à montrer comment on peut aujourd'hui simplifier les calculs.

Partons avec Briggs des deux progressions

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 10, & 100, & 1000, & 10000,\ldots \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4,\ldots \end{array}$$

qui présentent cet avantage que, étant donné un nombre, on connaît immédiatement la partie entière ou caractéristique de son logarithme. (La partie décimale prend chez les Allemands le nom de *mantisse*.) « .... Constat ergo logarithmus quisque ex numero integro et fractione decimali, et ille numerus integer vocari solet *characteristica*, fractio decimalis autem *mantissa.* » (Euler, *Introd. in Analysin,* cap. VI.)

La partie entière d'un logarithme est évidemment égale à $n-1$, si le nombre correspondant se compose de n chiffres. Si l'on veut calculer les logarithmes des nombres compris entre 1000 et 10 000 avec 7 décimales par exemple, on insérera entre 3 et 4 au moins 10000000 moyens arithmétiques, mais il vaudra mieux substituer au nombre 10000000 la puissance de 2 immédiatement supérieure diminuée de 1. Soit $2^i - 1$ cette puissance diminuée de 1; on insérera entre 1000 et 10 000 $2^i - 1$ moyens géométriques qui auront pour logarithmes les nombres correspondants trouvés tout à l'heure; la raison de la nouvelle progression géométrique sera $\sqrt[2^i]{10}$; ce nombre s'obtiendra par l'extraction de i racines carrées successives. On comprend maintenant pourquoi nous avons substitué à 10000000 le nombre $2^i - 1$.

Les progessions considérées peuvent être prolongées vers la gauche, en sorte que les logarithmes des nombres moindres que 1 sont négatifs; on convient de conserver la partie décimale positive en ayant soin de prendre la caractéristique négative. C'est ainsi que $-0,5$ pourra s'écrire $\bar{1},5$, en plaçant le signe — au-dessus de la partie entière.

Avec cette convention, un nombre décimal aura pour partie entière $\bar{1}$, si son premier chiffre commence immédiatement après la virgule; $\bar{2}$, si son premier chiffre commence un rang après la virgule, etc.

Nous n'avons pas à entrer ici dans le détail de la construction d'une table de logarithmes; nous ne parlerons pas non plus du calcul logarithmique, auquel le lecteur est habitué.

XII. — Du module d'un système de logarithmes.

Il est souvent utile de savoir passer d'un système de logarithmes à un autre. Ainsi, par exemple, les premiers logarithmes calculés par les soins de Neper n'avaient pas pour base 10. Pour les calculer dans la nouvelle base, il suffit de les multiplier par un nombre constant : c'est ce que nous allons établir.

Soient x le logarithme de N dans la base a, et y le logarithme du même nombre dans la base b, on aura

$$N = a^x;$$

en prenant les logarithmes des deux nombres dans la base b, on a

$$\log_b N = x \log_b a,$$

ou bien

$$\log_b N = \log_a N . \log_b a; \tag{1}$$

de là le théorème suivant :

Théorème I. — *Le logarithme d'un nombre pris dans le nouveau système s'obtient en multipliant le logarithme de ce nombre dans l'ancien système par le logarithme de l'ancienne base dans le nouveau système.*

Si l'on fait $N = b$ dans la formule (1), on a

$$1 = \log_a b . \log_b a,$$

ou

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b};$$

donc :

Théorème II. — *Le logarithme de l'ancienne base dans le nouveau système et de la nouvelle base dans l'ancien système sont inverses l'un de l'autre.*

Le nombre constant $\log_b a$ ou $1 : \log_a b$ est ce que l'on appelle le *module* qui sert à passer du système dont la base est a, au système dont la base est b.

Lorsque Neper eut inventé les logarithmes, il ne tarda pas à s'apercevoir que si α représente un nombre très-petit, et que si β est le logarithme de $1+\alpha$, le logarithme de $1+2\alpha$, qui diffère fort peu de $1+2\alpha+\alpha^2=(1+\alpha)^2$, différera fort peu de 2β; de même, 3β, logarithme de $(1+\alpha)^3$, différera fort peu du logarithme de $1+3\alpha\ldots$; donc les nombres très-voisins de l'unité croissent proportionnellement à leurs logarithmes. La limite du rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ pour $\alpha=0$ était ce que Neper appelait le *module* d'un système de logarihmes. Neper crut faire l'hypothèse la plus simple en posant

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

Il obtint alors un sytème de logarithmes que l'on a appelés *naturels*, *népériens*, *hyperboliques*. Effectivement, les logarithmes népériens sont ceux que l'on rencontre le plus fréquemment en analyse. Proposons-nous de calculer la base.

La base est le nombre qui a pour logarithme 1; or $1+\alpha$ ayant pour logarithme β, $(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}$ aura pour logarithme $\frac{\beta}{\beta}$ ou 1; si donc nous supposons $\frac{\beta}{\alpha}=1$, on aura, en appelant e la base des logarithmes naturels,

$$e = \lim (1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}} \quad \text{pour } \alpha = 0 \text{ et } \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1,$$

ou

$$e = \lim (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}} = \lim (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Nous calculerons plus loin la limite de l'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. Elle est égale à 2,718281828459045....

Cherchons maintenant le module qui sert à passer des logarithmes naturels aux logarithmes pris dans la base a. Ce module sera $1 : \log_e a$. Soit β le logarithme de $1+\alpha$ dans la base a, on aura

$$a = \lim (1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}} \quad \text{pour } \alpha = 0,$$

ou bien

$$\log_e a = \lim \left[\frac{1}{\beta} \log_e (1+\alpha)\right];$$

or, pour α très-petit, on a $\log_e (1+\alpha) = \alpha$, ou, pour être plus rigoureux, $\log (1+\alpha)$ est un nombre qui, divisé par α, donne 1 pour quotient, lorsque l'on passe aux limites et que l'on fait $\alpha = 0$; on en conclut

$$\log_e a = \lim \left[\frac{\alpha}{\beta} \frac{\log_e(1+\alpha)}{\alpha}\right] = \lim \frac{\alpha}{\beta}.$$

$\log_e a$ est donc l'inverse de ce que Neper appelait le module. Aujourd'hui c'est $\log_e a$ ou $\lim \frac{\alpha}{\beta}$ que l'on appelle le *module* d'un système de logarithmes; c'est, d'après ce que nous avons vu, le nombre par lequel il faut multiplier les logarithmes naturels pour avoir ceux du système dont la base est a.

XIII. — Règle d'intérêt composé.

De l'argent est placé à intérêt composé, lorsqu'à la fin de chaque année on place les intérêts avec le capital.

Soient a un capital, r l'intérêt de 1 franc au bout d'un an; proposons-nous de calculer la valeur A de ce capital au bout de n années.

Au bout d'un an, 1 franc est devenu $(1+r)$, a francs sont donc devenus $a(1+r)$; d'où l'on voit que pour obtenir la valeur d'un capital placé pendant un an, il suffit de multiplier par $(1+r)$ la valeur primitive de ce capital. Si donc on place le capital a, qui est devenu $a(1+r)$, encore un an, il deviendra $a(1+r)(1+r)$ ou $a(1+r)^2$; si l'on place encore ce capital pendant un an, il deviendra $a(1+r)^2(1+r)$ ou $a(1+r)^3$, etc., et enfin, au bout de n années, il deviendra $a(1+r)^n$. On a donc

$$A = a(1+r)^n.$$

C'est dans cette formule que consiste la règle d'intérêt composé; elle sert à résoudre plusieurs problèmes que nous allons examiner successivement.

Problème I. — *Trouver ce que devient une somme a placée au taux de* $100r$ *pour* 100 *pendant un temps t.*

Soient n l'entier contenu dans t, φ la fraction qui complète le temps t, on aura

$$A = a(1+r)^n + a(1+r)^n \varphi r,$$

φ étant exprimé en fraction d'année.

Problème II. — *Quel est le capital a qui, placé à* $100r$ *pour* 100, *devient* A *au bout du temps t?*

Si l'on pose $t = n + \varphi$, n étant le plus grand entier contenu dans t, on a

$$A = a(1+r)^n + a(1+r)^n \varphi r;$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{A}{(1+r)^n(1+\varphi r)}.$$

Problème III. — *Au bout de combien de temps le capital a placé à* $100r$ *pour* 100 *devient-il* A?

Si l'on désigne par $n+\varphi$ le temps cherché, n désignant toujours le plus grand entier contenu dans $n+\varphi$, on a

$$(1)\qquad A = a(1+r)^n + a(1+r)^n \varphi r = a(1+r)^n(1+\varphi r),$$

et en prenant les logarithmes,

$$\log A = \log a + \log(1+\varphi r) + n\log(1+r),$$

ou bien

$$n = \frac{\log A - \log a}{\log(1+r)} - \frac{\log(1+\varphi r)}{\log(1+r)}.$$

Mais $\dfrac{\log(1+\varphi r)}{\log(1+r)}$ est moindre que 1; on a donc, à moins d'une unité près,

$$n = \frac{\log A - \log a}{\log(1+r)}.$$

Si donc on évalue $\dfrac{\log A - \log a}{\log(1+r)}$ par défaut à moins d'une unité près, on aura n; n une fois connu, l'équation (1) fera connaître φ par la résolution d'une équation du premier degré.

PROBLÈME IV. — *A quel taux faut-il placer la somme a pour obtenir la somme* A *au bout du temps $n+\varphi$?*

On partira toujours de la formule

$$A = a(1+r)^n + a(1+r)^n r\varphi,$$

ou bien

$$(1)\qquad A = a(1+r)^n(1+r\varphi).$$

Le taux qui dépend de r s'obtient par la résolution d'une équation du $(n+1)^{ième}$ degré; mais on peut profiter de la petitesse de r pour la résoudre par approximations

16.

successives, et l'on pose d'abord

$$A = a(1 + r_1)^n.$$

De là on tire une première valeur de r,

$$r_1 = \frac{\log A - \log a}{n} - 1,$$

trop petite. Si dans l'équation (1) on remplace le facteur r du produit $r\varphi$ par r_1, on trouve, en résolvant par rapport à r, une seconde valeur approchée r_2 de r,

$$r_2 = \frac{\log A - \log[a(1 + r_1\varphi)]}{n} - 1,$$

trop grande. En opérant avec r_2 comme avec r_1, on obtient une valeur r_3 trop petite, et ainsi de suite.

Dans les problèmes précédents, nous avons supposé que les sommes placées ne pouvaient être touchées qu'un an après avoir été déposées, à moins de pouvoir être retirées tout à fait.

Supposons actuellement (ce qui est évidemment l'intérêt du prêteur) qu'immédiatement après avoir prêté l'argent on le retire avec ses intérêts pour le replacer de nouveau, et ainsi de suite. Désignons par a la somme placée et r l'intérêt simple de 1 franc pendant un an; au bout du temps θ, a sera devenu

$$a(1 + \theta r).$$

Si nous retirons cette somme pour la placer de nouveau avec ses intérêts, nous aurons, au bout du temps $\theta + \theta'$, une somme

$$a(1 + \theta r)(1 + \theta' r),$$

et ainsi de suite; de sorte qu'au bout du temps

$\theta + \theta' + \theta'' + \ldots + \theta^{(n)}$, nous aurons la somme

$$A = a(1 + \theta r)(1 + \theta' r)(1 + \theta'' r)\ldots(1 + \theta^{(n)} r).$$

Supposons maintenant que $\theta + \theta' + \theta'' \ldots$ conserve une valeur constante égale à Θ, et que l'on fasse tendre θ, θ', θ'',... vers zéro; cherchons ce que devient A. Pour cela, prenons les logarithmes népériens des deux membres de l'équation précédente, et désignons par l la caractéristique de ces logarithmes, nous aurons

$$(1) \quad lA = la + l(1 + \theta r) + l(1 + \theta' r) + l(1 + \theta'' r) + \ldots.$$

Mais quand θ tend vers zéro, nous avons vu que

$$\lim \frac{l(1 + \theta r)}{\theta r} = 1.$$

On peut donc écrire

$$\frac{l(1 + \theta r)}{\theta r} = 1 + \varepsilon,$$

ε désignant une quantité qui s'annule avec θ.

De là on tire

$$l(1 + \theta r) = \theta r + \theta\varepsilon,$$

et la formule (1) devient

$$lA = la + (\theta + \theta' + \theta'' \ldots) r + \varepsilon\theta + \varepsilon'\theta' + \varepsilon''\theta'' \ldots,$$

c'est-à-dire, en appelant η une moyenne entre ε, ε', ε'',...,

$$lA = la + \Theta r + \Theta\eta,$$

et, pour $\theta = 0$, $\theta' = 0$,...,

$$lA = la + \Theta;$$

d'où l'on tire, en désignant par e la base des logarithmes népériens,

$$A = ae^{\Theta r}.$$

XIV. — Des annuités.

Une annuité est une somme que l'on paye chaque année, soit pour éteindre une dette, soit pour se réserver un capital.

Problème I. — *Pendant n années on paye a francs au commencement de chaque année : on demande quel capital on aura formé au bout des n années, le taux de l'argent étant* $100r$ *pour* 100.

Les a francs placés au commencement de la 1re année sont devenus $a(1+r)^n$.

Les a francs placés au commencement de la 2e année sont devenus $a(1+r)^{n-1}$.

. . . .

Les a francs placés au commencement de la $n^{\text{ième}}$ année sont devenus $a(1+r)$.

On pourra donc retirer, au bout de n années,

$$a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \ldots + a(1+r),$$

c'est-à-dire (p. 176)

$$a\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)-1}(1+r),$$

ou bien

$$a[(1+r)^n - 1]\left(1+\frac{1}{r}\right).$$

Problème II. — *Quelle annuité a faut-il payer pour éteindre une dette* A *en n années, le taux étant de* $100r$ *pour* 100?

Au bout de n années, A est devenu $A(1+r)^n$; en désignant par a l'annuité qu'il faut payer à la fin de chaque année, on devra poser

$$A(1+r)^n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \ldots + a,$$

ou bien

$$A(1+r)^n = a\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)-1},$$

ou enfin

$$A(1+r)^n = a\frac{(1+r)^n - 1}{r};$$

d'ou l'on tire

$$a = A\frac{(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1}.$$

Problème III. — *Au bout de combien de temps aura-t-on éteint une dette* A *par une annuité de a au taux de* 100r *pour* 100?

En désignant par n ce temps, il faudra poser

$$A(1+r)^n \leqq \frac{a}{r}[(1+r)^n - 1].$$

On résoudra par rapport à n, en ayant soin de choisir le plus petit nombre entier satisfaisant à l'inégalité. En $n-1$ années, la dette ne sera pas tout à fait éteinte; on fera alors la différence

$$A(1+r)^{n-1} - \frac{a}{r}[(1+r)^n - 1] = \delta.$$

On trouvera une quantité δ inférieure à A : cette somme resterait à payer. Si donc on veut attendre encore un an, la dernière annuité devra être $\delta(1+r)$.

Problème IV. — *Quelle somme faut-il placer pour obtenir pendant n années une rente de a francs, le taux étant* 100r *pour* 100?

En désignant par x la somme qu'il faut placer, cette somme vaudra au bout de n années $x(1+r)^n$; la rente reçue équivaut à

$$a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+\ldots+a=a\,\frac{(1+r)^n-1}{r},$$

puisque, à chaque fois que l'on retire a francs, c'est autant d'argent qui pour le banquier ne rapporte pas d'intérêt. On a donc

$$x(1+r)^n=\frac{a[(1+r)^n-1]}{r}.$$

On tire de là

$$x=\frac{a[(1+r)^n-1]}{(1+r)^n r}.$$

Faisons $n=\infty$, nous aurons la somme y qu'il faut placer pour obtenir une rente perpétuelle de a francs,

$$y=\lim\frac{a[(1+r)^n-1]}{(1+r)^n r}=\lim\frac{a}{r}\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right]=\frac{a}{r}.$$

Ainsi la somme qu'il faut placer pour obtenir la rente perpétuelle est $\frac{a}{r}$.

CHAPITRE III.

DES IMAGINAIRES

I. — Définitions.

Convenons de représenter à l'aide du symbole

$$ai + bj + c = a'i + b'j + c' \tag{1}$$

la triple égalité

$$a = a', \quad b = b', \quad c = c',$$

sans attacher aux lettres i, j d'autre sens que celui de séparation. Les signes i, j, qui pourraient être en plus grand nombre, ont reçu de Cauchy le nom de *clefs*. Les formules telles que (1) portent le nom d'*égalités symboliques*, et l'on dit, pour abréger le langage, que a et a' sont les coefficients de i et que b et b' sont les coefficients de j. L'ensemble des quantités qui forme le premier membre de la formule (1) s'appelle une *quantité imaginaire*.

Ainsi, pour nous, une quantité imaginaire se compose de l'ensemble de plusieurs nombres qui, dans un calcul ultérieur, doivent être respectivement égalés à des nombres donnés.

Supposons que l'on ait deux formules analogues à la formule (1), ou, pour nous servir du langage consacré, supposons que l'on ait deux *égalités* entre quantités imaginaires

$$(1)\qquad ai + bj + c = a'i + b'j + c',$$

$$(2)\qquad mi + nj + p = m'i + n'j + p',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On en déduira

$$(3)\qquad \begin{cases} (a+m)i + (b+n)j + c + p \\ \quad = (a'+m')i + (b'+n')j + c' + p'. \end{cases}$$

En effet, cette égalité exprime que

$$(4)\qquad a+m = a'+m', \quad b+n = b'+n', \quad c+p = c'+p'.$$

Mais les formules (1) et (2) exprimaient que

$$(5)\qquad \begin{cases} a = a', \quad b = b', \quad c = c', \\ m = m', \quad n = n', \quad p = p'; \end{cases}$$

donc la formule (3), qui est équivalente aux formules (4), est exacte. D'une manière générale, on peut dire que si l'on forme deux quantités imaginaires ne différant que par le changement de a en a', de b en b', etc., elles seront encore égales en vertu des formules (5). Ainsi, par exemple, faisons le produit des égalités (1) et (2) membre à membre, en considérant un instant i et j comme de véritables quantités; faisons ensuite $i^2 = -1$, $j^2 = -2$, $ij = 10$, et réduisons les termes semblables, il est bien évident que l'on obtiendra encore une formule exacte.

Les clefs tendent à s'introduire tous les jours davantage dans l'analyse; leur emploi donne beaucoup d'élégance et de simplicité au calcul. Nous avons déjà vu quel heureux parti Cauchy avait su en tirer dans l'évaluation du produit de deux déterminants.

Hamilton est le créateur d'un système d'imaginaires auxquelles il a donné le nom de *quaternions;* ces imaginaires contiennent trois clefs : elles sont par conséquent de la forme

$$ai + bj + ck + d.$$

Hamilton convient de traiter les clefs i, j, k comme de véritables quantités assujetties à vérifier les relations

$$\begin{array}{lll} ij = -k, & jk = -i, & ki = -j, \\ ji = k, & kj = i, & ik = j, \\ i^2 = -1, & j^2 = -1, & k^2 = -1. \end{array}$$

II. — Des imaginaires de la forme $x + y\sqrt{-1}$.

De toutes les clefs, celle qui a été le mieux étudiée, celle qui est le plus anciennement connue, est celle que l'on est convenu de représenter par le symbole $\sqrt{-1}$, qu'il faut bien se garder de confondre avec la racine carrée du nombre -1. Le nombre -1 n'a pas de racine carrée; aussi avons-nous le droit, sans crainte de tomber dans une ambiguïté, de représenter une clef par le symbole $\sqrt{-1}$ qui n'a jamais été défini dans le courant de cet ouvrage.

Nous ferons observer que la position de la clef indique assez quelles sont les quantités que l'on doit considérer comme égales dans une formule symbolique, pour qu'il ne soit pas nécessaire de l'écrire toujours à la même place; ainsi, pour nous, les expressions

$$x + y\sqrt{-1}, \quad y\sqrt{-1} + x, \quad \sqrt{-1}\,y + x, \quad x + \sqrt{-1}\,y$$

seront équivalentes, puisqu'elles expriment que dans une égalité symbolique x doit être égalé à la quantité indépendante de la clef $\sqrt{-1}$, et que y doit être égalé au coefficient de $\sqrt{-1}$.

Lorsque le coefficient de $\sqrt{-1}$ est nul, on n'écrit pas cette clef; ainsi l'équation

$$a + b\sqrt{-1} = c$$

remplace les deux suivantes :

$$a = c, \quad b = 0.$$

De même, lorsque le coefficient de $\sqrt{-1}$ n'est pas nul et que le terme indépendant de $\sqrt{-1}$ est nul, on n'écrit pas ce dernier, en sorte que

$$a + b\sqrt{-1} = d\sqrt{-1}$$

est équivalent à

$$a = 0, \quad b = d.$$

D'après cela, on voit que la formule

$$a + b\sqrt{-1} = 0$$

équivaut aux suivantes

$$a = 0, \quad b = 0,$$

et l'on est ainsi conduit à dire qu'une quantité imaginaire nulle est celle dans laquelle la partie indépendante de $\sqrt{-1}$ et le coefficient de ce symbole sont égaux à zéro.

Lorsque le coefficient de $\sqrt{-1}$ est l'unité, on ne l'écrit pas; ainsi

$$a + \sqrt{-1} = c + d\sqrt{-1}$$

équivaut à

$$a = c, \quad 1 = d.$$

On appelle ordinairement les quantités qui ne sont pas imaginaires *quantités réelles*. En toute rigueur, les quantités imaginaires sont tout aussi *réelles* que les quantités dites *réelles;* il est fâcheux que ces épithètes *réelle, imaginaire* se soient introduites dans la science, vu qu'elles tendent à fausser l'esprit des commençants.

Euler, qui a créé la théorie des imaginaires, ne les a pas présentées d'une manière aussi rigoureuse qu'on le fait aujourd'hui, grâce aux travaux de Truel, Argand, Français, Mourey, Vallès, Cauchy. Autrefois, les quantités imaginaires avaient en elles quelque chose de fantastique : elles ne représentaient rien, elles servaient d'instrument dans les recherches; mais, à la suite d'une découverte due à l'emploi des imaginaires, les géomètres amis de la rigueur réclamaient une confirmation du résultat obtenu, par d'autres voies : c'est ce qui a valu leur nom à ce genre de quantités.

III. — Des quatre opérations.

On appelle *somme* et *produit* de plusieurs imaginaires de la forme $a+b\sqrt{-1}$ les résultats obtenus en faisant la somme et le produit de ces quantités absolument comme si $\sqrt{-1}$, au lieu d'être un signe de séparation (analogue aux signes $+$, $-$, $\times$, etc.), était une véritable quantité ayant pour puissances successives

$$\sqrt{-1},\quad -1,\quad -\sqrt{-1},\quad +1,\quad \sqrt{-1},\ldots,$$

et en général, i désignant un nombre entier, on supposera

$$(\sqrt{-1})^{4i+1}=\sqrt{-1},\qquad (\sqrt{-1})^{4i+2}=-1,$$
$$(\sqrt{-1})^{4i+3}=-\sqrt{-1},\quad (\sqrt{-1})^{4i}=+1.$$

D'après cela, la somme et le produit des imaginaires $x+y\sqrt{-1}$ et $a+b\sqrt{-1}$ seront respectivement

$$(a+x)+(b+y)\sqrt{-1},$$
$$ax-by+(ay+bx)\sqrt{-1}.$$

Théorème I. — *Lorsque des imaginaires* $a+b\sqrt{-1}$,

$a'+b'\sqrt{-1}$ sont respectivement égales à d'autres, $c+d\sqrt{-1}$, $c'+d'\sqrt{-1}$,..., la somme (ou le produit) des premières est égal à la somme (ou au produit) des dernières.

En effet, la somme (ou le produit) de $a+b\sqrt{-1}$, $a'+b'\sqrt{-1}$,... ne diffère de la somme (ou du produit) de $c+d\sqrt{-1}$, $c'+d'\sqrt{-1}$,... que par la substitution de la lettre a à la lettre c, de la lettre a' à la lettre c',..., de la lettre b à la lettre d, etc. Mais les imaginaires $a+b\sqrt{-1}$, $a'+b'\sqrt{-1}$,..., étant respectivement égales à $c+d\sqrt{-1}$, $c'+d'\sqrt{-1}$, on a

$$a=c,\quad a'=c',\ldots,\quad b=d,\quad b'=d',\ldots,$$

et, par suite, la somme (ou le produit) des premières imaginaires sera égal à la somme (ou au produit) des dernières.

Théorème II. — *Une somme ne change pas quand on intervertit l'ordre de ses parties. Un produit ne change pas de valeur quand on intervertit l'ordre de ses facteurs. Pour multiplier une imaginaire par un produit, il suffit de la multiplier successivement par chaque facteur de ce produit.*

Nous appellerons *différence* de deux quantités de la forme $x+y\sqrt{-1}$ l'imaginaire qui, ajoutée à la seconde, reproduit la première.

Théorème III. — *La différence de deux imaginaires s'obtient en retranchant l'une de l'autre les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$.*

En effet, il est clair qu'en ajoutant au résultat ainsi obtenu la seconde imaginaire, on reproduit la première.

Théorème IV. — *Lorsque deux imaginaires* A *et* B *sont respectivement égales à deux autres* A′ *et* B′, *la différence des premières est égale à la différence des dernières.*

On appelle *quotient* de deux imaginaires A et B de la forme $x + y\sqrt{-1}$ une imaginaire de la même forme qui, multipliée par B, reproduit A.

Théorème V. — *Étant données deux imaginaires* $a + b\sqrt{-1}$, $c + d\sqrt{-1}$, *leur quotient existe toujours tant que l'on n'a pas* $c = 0$, $d = 0$; *de plus, ce quotient est unique.*

En effet, appelons $x + y\sqrt{-1}$ le quotient, on aura, par définition,

$$a + b\sqrt{-1} = (x + y\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}),$$

c'est-à-dire, en vertu de nos conventions,

$$a + b\sqrt{-1} = cx - dy + \sqrt{-1}\,(dx + cy).$$

Or cette formule est équivalente aux deux suivantes :

$$cx - dy = a,$$
$$dx + cy = b;$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{cb - ad}{c^2 + d^2}.$$

On aura donc toujours pour x et y un et un seul système de valeurs, excepté si l'on a

$$c^2 + d^2 = 0.$$

Or une somme de deux carrés ne peut être nulle que si chacun de ces carrés est égal à zéro; donc enfin le quotient de deux imaginaires cesse d'exister quand le diviseur est nul (*). C. Q. F. D.

THÉORÈME VI. — *Un quotient de deux imaginaires ne change pas quand on multiplie le dividende et le diviseur par une même quantité.*

En effet, soient D le dividende, d le diviseur et q le quotient, on aura

$$D = d \times q.$$

Si nous multiplions par m les deux membres de cette égalité, il vient

$$mD = d \times m \times q,$$

qui exprime que dm multiplié par q reproduit mD; donc q est le quotient de mD par md. C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — Pour mettre le quotient de deux imaginaires

$$\frac{a + b\sqrt{-1}}{c + d\sqrt{-1}}$$

sous la forme $x + y\sqrt{-1}$, il suffit de multiplier les deux termes de ce quotient par $c - d\sqrt{-1}$; il vient alors

$$\frac{(a + b\sqrt{-1})(c - d\sqrt{-1})}{(c + d\sqrt{-1})(c - d\sqrt{-1})},$$

ou bien

$$\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(cb - ad)\sqrt{-1}}{c^2 + d^2},$$

ce que nous avions déjà trouvé.

(*) Nous n'avons pas défini les mots *facteur, dividende, diviseur*, etc., uniquement pour abréger le discours; le lecteur comprend parfaitement le sens que l'on doit y attacher. Il nous a suffi de définir les mots *somme, produit, quotient*.

Théorème VII. — *Lorsque deux imaginaires* A *et* B *sont respectivement égales à deux autres* A′ *et* B′, *on a*

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}.$$

On appelle *limite d'une imaginaire variable* $x + y\sqrt{-1}$ l'imaginaire fixe dont la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ sont respectivement les limites de x et de y.

Le lecteur vérifiera sans peine que les théorèmes sur les limites d'une somme, d'un produit, d'un quotient, démontrés sur les quantités réelles, s'appliquent encore aux quantités imaginaires.

Ajoutons à cela que l'on appelle *quantité infinie* une imaginaire dont l'une des parties réelles croît indéfiniment. On appelle aussi *quantités imaginaires infiniment petites* celles qui ont pour limite zéro.

IV. — Du module et de l'argument.

Toute quantité imaginaire $x + y\sqrt{-1}$ peut être mise sous la forme suivante :

$$(1)\qquad x + y\sqrt{-1} = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y\sqrt{-1}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Si l'on remarque alors que la somme des carrés des quantités $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ est égale à l'unité, on pourra poser

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos\theta, \qquad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin\theta.$$

Si l'on pose, en outre,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

l'égalité (1) pourra s'écrire

$$x + y\sqrt{-1} = r\left(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta\right).$$

La quantité r est ce que l'on appelle le *module* de l'expression $x + y\sqrt{-1}$; l'angle θ est son *argument*.

On convient de prendre le module toujours positif; quant à l'argument, il peut varier entre $-\infty$ et $+\infty$, en sorte que cet argument n'étant absolument donné que par son sinus et son cosinus, sa valeur se trouve indéterminée et comprise dans la formule

$$\theta_1 + 2k\pi,$$

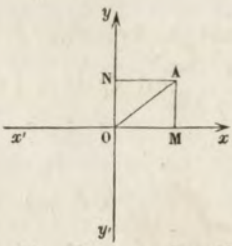
θ_1 désignant le plus petit argument positif répondant à l'imaginaire en question, et k pouvant prendre toutes les valeurs entières comprises entre $-\infty$ et $+\infty$.

Deux imaginaires qui ont le même module et qui ne diffèrent que par le signe de leur argument; en d'autres termes, deux imaginaires de la forme $x + y\sqrt{-1}$, $x - y\sqrt{-1}$ sont dites *conjuguées*. Une imaginaire dont le module est l'unité est ce que l'on appelle une *expression réduite;* la forme la plus générale des expressions réduites est

$$\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta.$$

Traçons dans un plan deux droites rectangulaires

Fig. 8.



xOx', yOy' (*fig.* 8); donnons-leur le nom d'*axe des x* et d'*axe des y*.

Ceci posé, considérons l'imaginaire

$$x + y\sqrt{-1}.$$

Prenons sur $x'x$, à partir du point O, une longueur OM égale en valeur absolue à x, dans le sens Ox si x est positif, dans le sens Ox' s'il est négatif; prenons de même ON égal à la valeur absolue de y et dans le sens Oy si y est positif, dans le sens Oy' si y est négatif. Construisons enfin un rectangle sur ON et OM ; le sommet A de ce rectangle sera déterminé toutes les fois que l'on se donnera x et y, ou, ce qui revient au même, $x+y\sqrt{-1}$. Réciproquement, à tout point A du plan correspondra une imaginaire déterminée, et une seule, dont la partie réelle sera l'x du point A et dont le coefficient de $\sqrt{-1}$ sera l'y.

En sorte que nous confondrons souvent dans le langage les expressions *point* et *quantité imaginaire*. Si nous menons la diagonale OA, nous aurons

$$\mathrm{OA} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos \mathrm{MOA} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\sin \mathrm{MOA} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

et, par conséquent, OA est le module de $x + y\sqrt{-1}$, l'angle MOA en est l'argument, cet angle MOA devant être compté depuis la droite OM jusqu'à la droite OA dans le sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre. Nous ne nous arrêterons pas à généraliser les formules précédentes; il faudrait, pour les établir en toute rigueur, supposer successivement le point M dans chacun des angles xOy, yOx', $x'Oy'$, $y'Ox$, et discuter les signes de x et de y. Nous laissons au lecteur le soin de compléter cette démonstration.

Voici un autre mode de représentation des quantités imaginaires, proposé par Mourey dans un excellent ouvrage publié sur cette théorie.

A partir du point O, que l'on appelle *origine* des imaginaires, traçons une droite OA ayant pour longueur le module de l'imaginaire $x+y\sqrt{-1}$ et faisant avec Ox un angle égal à l'argument de cette imaginaire; la droite OA représentera l'imaginaire $x+y\sqrt{-1}$ aussi bien que le point A.

THÉORÈME I. — *La somme de plusieurs imaginaires est représentée par la résultante des droites qui représentent les imaginaires en question.*

En effet, considérons les imaginaires

$$z_1=x_1+y_1\sqrt{-1},\quad z_2=x_2+y_2\sqrt{-1},\quad z_3=x_3+y_3\sqrt{-1},\ldots,$$

leur somme est

$$Z=x_1+x_2+x_3+\ldots+(y_1+y_2+\ldots)\sqrt{-1}.$$

Or $x_1, x_2,\ldots$ représentent les projections sur l'axe des x des droites qui représentent respectivement $z_1, z_2, z_3,\ldots$; donc $x_1+x_2+x_3+\ldots$ représente la projection de la résultante de ces droites sur Ox, $y_1+y_2+y_3+\ldots$ représente la projection sur Oy de la résultante des mêmes droites; donc enfin Z est représentée par la résultante des droites qui représentent $z_1, z_2,\ldots$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — De là résulte immédiatement que *le module d'une somme est moindre que la somme des modules de ses parties.*

THÉORÈME II. — 1° *Le module d'un produit est égal* *au produit des modules de ses facteurs; 2° l'argument d'un produit est égal à la somme des arguments de ses facteurs.*

En effet, considérons les imaginaires

$$r\left(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta\right) \quad \text{et} \quad r'\left(\cos\theta'+\sqrt{-1}\sin\theta'\right);$$

si nous en faisons le produit, il vient, en intervertissant l'ordre des facteurs,

$$rr'\left(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta\right)\left(\cos\theta'+\sqrt{-1}\sin\theta'\right),$$

ou bien

$$rr'\left[\left(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'\right)+\sqrt{-1}\left(\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta'\right)\right],$$

c'est-à-dire

$$rr'\left[\cos(\theta+\theta')+\sqrt{-1}\sin(\theta+\theta')\right].$$

Mais en multipliant ce résultat par une nouvelle imaginaire $r''\left(\cos\theta''+\sqrt{-1}\sin\theta''\right)$, on trouvera

$$rr'r''\left[\cos(\theta+\theta'+\theta'')+\sqrt{-1}\sin(\theta+\theta'+\theta'')\right],$$

et ainsi de suite; ce qui démontre le théorème énoncé.

THÉORÈME III. — *Lorsqu'un produit de plusieurs facteurs est nul, l'un de ses facteurs est forcément égal à zéro.*

Ce théorème, évident lorsqu'il ne s'agit que de quantités réelles, est loin de l'être lorsque les facteurs sont imaginaires; on conçoit, en effet, que des réductions venues à la suite des hypothèses

$$(\sqrt{-1})^2=-1, \quad (\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1},\ldots$$

fassent évanouir un produit sans que ses facteurs soient nuls. Quoi qu'il en soit, le module d'un produit étant égal au produit des modules de ses facteurs, si le produit est nul, son module sera nul, et par conséquent le module de l'un des facteurs au moins devra être égal à zéro. Mais une imaginaire dont le module est zéro est évidemment nulle; donc, etc. C. Q. F. D.

Théorème IV. — *Le module d'un quotient est égal au quotient des modules du dividende et du diviseur. L'argument d'un quotient est égal à la différence des arguments du dividende et du diviseur.*

En effet, soient $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ le dividende, $\rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)$ le diviseur, le quotient sera donné par la formule

$$\frac{r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)}{\rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{r}{\rho}\,\frac{(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)(\cos\omega - \sqrt{-1}\sin\omega)}{(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)(\cos\omega - \sqrt{-1}\sin\omega)},$$

c'est-à-dire

$$\frac{r}{\rho}\left[\cos(\theta-\omega) + \sqrt{-1}\sin(\theta-\omega)\right],$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Remarque. — Le quotient de 1 par une expression réduite est l'imaginaire conjuguée de cette expression réduite; on a, en effet,

$$\frac{1}{\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega} = \cos\omega - \sqrt{-1}\sin\omega.$$

V. — Théorie des radicaux algébriques.

Jusqu'ici, nous avons pu remarquer une analogie complète entre le calcul des imaginaires et le calcul des quantités réelles; cette analogie cesse dès que l'on essaye de généraliser la notion de radical ou d'exposant, ainsi que nous allons le constater.

Si nous représentons par le symbole

$$(x + y\sqrt{-1})^n,$$

et si nous appelons *puissance* $n^{ième}$ de $x + y\sqrt{-1}$ le produit de n facteurs égaux à cette imaginaire, nous aurons, en vertu du théorème II, p. 260,

$$[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + \sqrt{-1}\sin n\theta).$$

Si l'on suppose en particulier $r = 1$, on obtient la formule suivante

$$(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \sqrt{-1}\sin n\theta,$$

restée célèbre sous le nom de *formule de Moivre,* du nom du géomètre français qui l'a découverte.

On appelle *racine* $n^{ième}$ d'une imaginaire A une quantité qui élevée à la puissance n reproduit A.

Théorème I. — *Toute imaginaire a n racines* $n^{ièmes}$.

En effet, considérons l'imaginaire

$$R(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta);$$

désignons par $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ sa racine $n^{ième}$, nous aurons, par définition,

$$[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^n = R(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta),$$

c'est-à-dire, en vertu de la formule de Moivre,

$$r^n(\cos n\theta + \sqrt{-1}\sin n\theta) = \mathrm{R}\,(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta).$$

Cette égalité se décompose en deux autres :

$$(1)\qquad \begin{cases} r^n\cos n\theta = \mathrm{R}\cos\Theta, \\ r^n\sin n\theta = \mathrm{R}\sin\Theta; \end{cases}$$

si l'on élève au carré ces deux égalités et si l'on ajoute, on trouve

$$r^{2n} = \mathrm{R}^2;$$

et en observant que r doit être un nombre essentiellement positif ou nul,

$$(2)\qquad r^n = \mathrm{R}, \quad \text{ou} \quad r = \sqrt[n]{\mathrm{R}};$$

les formules (1) donnent alors

$$\cos n\theta = \cos\Theta, \quad \sin n\theta = \sin\Theta,$$

et par suite

$$n\theta = \Theta + 2k\pi,$$

k désignant un entier quelconque, c'est-à-dire

$$\theta = \frac{\Theta + 2k\pi}{n}.$$

Si l'on désigne alors, avec Cauchy, par le symbole $\sqrt[n]{((\mathrm{A}))}$ la racine $n^{ième}$ de l'imaginaire A, on voit que la racine $n^{ième}$ de $\mathrm{R}(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta)$ aura n valeurs données par la formule

$$(3)\qquad \begin{cases} \sqrt[n]{((\mathrm{R}(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta)))} \\ \quad = \sqrt[n]{\mathrm{R}}\left(\cos\dfrac{\Theta + 2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\dfrac{\Theta + 2k\pi}{n}\right), \end{cases}$$

formule dans laquelle il suffira de faire k successivement égal à 0, 1, 2, 3, ..., n. En effet, si l'on fait k égal à $ni+j$, j désignant un entier compris entre 0 et $n-1$ inclusivement, et i désignant un entier quelconque positif ou négatif, on obtient, pour la racine $n^{ième}$ de

$$R\left(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta\right),$$

une valeur dont l'argument ne diffère de $\frac{\Theta + 2j\pi}{n}$ que d'un multiple entier de la circonférence, c'est-à-dire une valeur déjà comprise parmi celles que l'on obtient en faisant k égal à 0, 1, 2, 3, ..., $n-1$ dans la formule (3); donc enfin la racine $n^{ième}$ d'une imaginaire a n valeurs, comme nous l'avions annoncé.

Au surplus, il est facile de voir que ces n valeurs sont toutes différentes, car les arcs compris dans les formules

$$\frac{\Theta}{n},\quad \frac{\Theta+2\pi}{n},\quad \frac{\Theta+4\pi}{n},\ldots,\quad \frac{\Theta+2\overline{n-1}\,\pi}{n}$$

ne diffèrent pas d'une circonférence; deux quelconques d'entre eux ne sauraient donc avoir à la fois même sinus et même cosinus.

Remarque I. — Si, dans la formule (3), on suppose $\Theta = 0$, on trouve

$$\sqrt[n]{((R))} = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\right).$$

On arrive ainsi à ce résultat singulier et paradoxal : la racine $n^{ième}$ d'une quantité réelle a n valeurs. Nous ferons remarquer que R ne désigne qu'en apparence une quantité réelle; en effet, la formule précédente, déduite de (3) dans l'hypothèse $\Theta = 0$, devrait s'écrire correctement

$$(4)\qquad \sqrt[n]{((R + 0\sqrt{-1}))} = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\right);$$

seulement, dans une égalité symbolique, nous sommes convenus de ne pas écrire $\sqrt{-1}$ lorsque son coefficient est zéro, et la formule que nous venons d'écrire en dernier lieu exprime que si l'on élève le second membre à la puissance n, il sera égal à $R + 0\sqrt{-1}$, c'est-à-dire que la partie réelle sera R et le coefficient de $\sqrt{-1}$ sera zéro.

Toutefois, pour nous conformer à un usage reçu et aussi pour éviter les périphrases, nous conviendrons de dire que les quantités réelles ont n racines, en sous-entendant que ces quantités sont de la forme $R + 0\sqrt{-1}$; du reste, en vertu de la formule (4), l'une des valeurs de

$$\sqrt[n]{((R + 0\sqrt{-1}))}$$

est égale à $\sqrt[n]{R} + 0\sqrt{-1}$, ou, si l'on veut, à $\sqrt[n]{R}$, en vertu de nos conventions.

Remarque II. — La formule (3) peut encore s'écrire

$$\sqrt[n]{((R(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta)))}$$
$$= \left[\sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\Theta}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\Theta}{n}\right)\right]\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\right);$$

or, en vertu de la formule (4), dans laquelle on peut supposer $R = 1$, $\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}$ désigne une quelconque des racines $n^{\text{ièmes}}$ de $1 + 0\sqrt{-1}$, ou, si l'on veut, de l'unité; Θ peut être censé représenter l'un quelconque des arguments de $R(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta)$. La formule précédente nous montre donc que les n racines $n^{\text{ièmes}}$ d'une imaginaire quelconque peuvent s'obtenir en multipliant l'une quelconque d'entre elles successivement par chacune des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Dorénavant, lorsque nous ne spécifierons pas la valeur d'une racine $n^{\text{ième}}$, nous la représenterons par le symbole $\sqrt{((\ ))}$; au contraire, lorsqu'il sera question d'une valeur bien déterminée de cette racine, par exemple lorsqu'il s'agira de celle qui a le plus petit argument positif, nous ferons usage du signe $\sqrt{\ }$.

VI. — Calcul des radicaux algébriques.

Théorème I. — *Si l'on multiplie chacune des valeurs de* $\sqrt[n]{((A))}$ *par chacune des valeurs de* $\sqrt[n]{((B))}$, *on reproduit chacune des valeurs de* $\sqrt[n]{((AB))}$.

En effet, soit

$$A = r_1(\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\sin\theta_1),$$
$$B = r_2(\cos\theta_2 + \sqrt{-1}\sin\theta_2),$$

on aura

$$\sqrt[n]{((A))} = r_1^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta_1 + 2k_1\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta_1 + 2k_1\pi}{n}\right),$$
$$\sqrt[n]{((B))} = r_2^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta_2 + 2k_2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta_2 + 2k_2\pi}{n}\right),$$

et par suite

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \sqrt[n]{((A))}\times\sqrt[n]{((B))} = r_1^{\frac{1}{n}} r_2^{\frac{1}{n}}\Big[&\cos\frac{\theta_1+\theta_2+2(k_1+k_2)\pi}{n} \\ &+\sqrt{-1}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+2(k_1+k_2)\pi}{n}\Big], \end{aligned}\right.$$

formules dans lesquelles k_1 et k_2 désignent, ainsi que k_1+k_2, des entiers tout à fait quelconques. D'un autre côté on a

$$AB = r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sqrt{-1}\sin(\theta_1 + \theta_2)\right],$$

$$\sqrt[n]{((AB))} = r_1^{\frac{1}{n}} r_2^{\frac{1}{n}} \left[\cos\frac{\theta_1 + \theta_2 + 2i\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta_1 + \theta_2 + 2i\pi}{n}\right],$$

i désignant un entier quelconque. De la comparaison de cette formule avec la précédente on déduit

$$\sqrt[n]{((A))} \times \sqrt[n]{((B))} = \sqrt[n]{((AB))} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si l'on voulait supprimer les doubles parenthèses, on le pourrait; mais il faudrait choisir convenablement les valeurs des radicaux.

Théorème II. — *Si l'on divise chacune des valeurs de* $\sqrt[n]{((A))}$ *par chacune des valeurs de* $\sqrt[n]{((B))}$, *on obtient* n *résultats différents qui sont les* n *valeurs de* $\sqrt[n]{((A:B))}$.

Théorème III. — *Si l'on élève à la puissance* m *les valeurs de* $\sqrt[n]{((A))}$, *on obtient les valeurs de* $\sqrt[n]{((A^m))}$.

Théorème IV. — *Si l'on extrait les racines* $m^{\text{ièmes}}$ *des* n *valeurs de* $\sqrt[n]{((A))}$, *on obtient les valeurs de* $\sqrt[mn]{((A))}$.

Remarque. — Quand on a un radical de la forme

$$\sqrt[mn]{((A^m))},$$

il faut éviter de le simplifier et d'écrire

$$\sqrt[mn]{((A^m))} = \sqrt[n]{((A))};$$

en effet, le premier membre de cette formule a mn valeurs, le second n'en a que n; quand on n'agit pas avec précaution dans le calcul des radicaux imaginaires, on s'expose souvent à tomber dans de grossières erreurs; il ne faut pas en accuser l'emploi des symboles imaginaires, dont le calcul n'est pas tout à fait soumis aux mêmes règles que celui des quantités réelles. Ainsi, par exemple, on raisonnerait mal en écrivant

$$(1) \qquad \sqrt[2]{-2} \times \sqrt[2]{-2} = \sqrt[2]{(-2)(-2)} = \sqrt[2]{4} = 2,$$

puis

$$(2) \qquad \sqrt[2]{-2} \times \sqrt[2]{-2} = (\sqrt[2]{-2})^2 = -2;$$

d'où l'on déduirait

$$2 = -2.$$

En effet, dans la formule (1), $\sqrt[2]{-2}$ désigne une valeur particulière de $\sqrt[2]{((-2))}$, $\sqrt[2]{(-2)(-2)}$ désigne une valeur particulière de $\sqrt[2]{((4))}$; on ne peut, sans examen, égaler ces deux valeurs; et en effet, on a

$$\begin{aligned} \sqrt[2]{((-2))} &= \sqrt[2]{2(\cos\pi + \sqrt{-1}\sin\pi)} \\ &= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + \sqrt{-1}\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right], \end{aligned}$$

ou

$$\sqrt[2]{((-2))} = \pm\sqrt{2}\sqrt{-1}.$$

Prenons les radicaux avec le signe +; on voit que l'on n'aura pas

$$\sqrt[2]{-2} \times \sqrt[2]{-2} = \sqrt[2]{4},$$

mais bien

$$\sqrt[2]{-2} \times \sqrt[2]{-2} = \sqrt{2} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{2} \times \sqrt{-1} = -2.$$

Si l'on prend les radicaux avec le signe —, on arrive encore au même résultat. Donc la formule (1) est toujours fausse, si $\sqrt[2]{-2}$ représente toujours la même valeur de $\sqrt[2]{((-2))}$.

VII. — Sur les équations en général.

Les règles de la multiplication et de la division algébrique s'appliquent évidemment aux quantités imaginaires comme aux quantités réelles; il en est de même de la formule du binôme.

On peut former des équations à l'aide de quantités réelles et imaginaires, et chercher s'il n'existe pas des quantités imaginaires satisfaisant à ces équations; les principes fondamentaux que nous avons démontrés sur la résolution des équations, dans la première partie de cet ouvrage, sont encore applicables aux cas où l'on considérerait des égalités symboliques; ces principes ne dépendent absolument que des quatre premières opérations de l'Algèbre reconnues applicables aux quantités imaginaires. Ainsi, il n'y a rien à ajouter à la théorie des équations du premier degré et à la théorie des déterminants. Il n'en est pas de même des équations du second degré où interviennent des questions sur les radicaux; il y a donc lieu d'examiner de nouveau la théorie des équations du second degré : c'est ce que nous allons faire.

VIII. — Sur les équations du second degré.

Nous conviendrons de ne pas écrire l'indice d'un radical lorsque cet indice sera 2.

Ceci posé, cherchons la racine carrée de $a+b\sqrt{-1}$; désignons cette racine par $x+y\sqrt{-1}$, nous aurons

$$(x+y\sqrt{-1})^2 = a+b\sqrt{-1},$$

ou bien

$$x^2-y^2+2xy\sqrt{-1} = a+b\sqrt{-1}.$$

Cette équation équivaut aux deux suivantes :

(1) $$x^2 - y^2 = a,$$

(2) $$2xy = b;$$

la dernière peut s'écrire

(3) $$-x^2 y^2 = -\frac{b^2}{4}.$$

A l'inspection des équations (1) et (3), on reconnaît immédiatement que x^2 et $-y^2$ sont racines de l'équation en u

$$u^2 - au - \frac{b^2}{4} = 0.$$

d'où l'on déduit

$$u = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2},$$

c'est-à-dire, en observant que y^2 doit être positif,

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right),$$

$$y^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} - a\right).$$

On déduit de là

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)},$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} - a\right)}.$$

L'équation (2) montre avec quels signes on doit prendre x et y; si, par exemple, b est positif, on prendra x et y de même signe, en sorte que l'on aura

$$\sqrt{((a + b\sqrt{-1}))} = \pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} + \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} - a\right)}\sqrt{-1}\right];$$

si b est négatif, on aura, au contraire,

$$\sqrt{((a+b\sqrt{-1}))}=\pm\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})}\right.$$
$$\left.-\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)}\sqrt{-1}\right].$$

Si l'on fait $b=0$, on trouve : 1° en supposant $a>0$,

$$\sqrt{((a))}=\pm\sqrt{a};$$

en supposant $a<0$,

$$\sqrt{((a))}=\pm\sqrt{-a}\sqrt{-1};$$

ou, en explicitant les signes,

$$\sqrt{((-\alpha^2))}=\pm\alpha\sqrt{-1},$$

Une équation du second degré a toujours deux racines lorsque l'on admet pour l'inconnue des valeurs imaginaires : voici comment il faut entendre cette proposition. Considérons l'équation

$$x^2+px+q=0.$$

Supposons $\frac{p^2}{4}-q<0$; on peut se proposer de chercher s'il existe pour x des valeurs de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ vérifiant cette équation considérée comme égalité symbolique, c'est-à-dire en sous-entendant dans le second membre le terme $0\sqrt{-1}$. On trouve alors successivement

$$\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2=\frac{p^2}{4}-q,$$

$$x+\frac{1}{2}p=\pm\sqrt{-1}\sqrt{q-\frac{p^2}{4}},$$

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{-1}\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$$

IX. — Des fonctions de variable imaginaire.

Cauchy appelle *fonction* de $x+y\sqrt{-1}$ toute expression de la forme

$$X+Y\sqrt{-1},$$

dans laquelle X et Y représentent des fonctions de x et de y (*). On désigne une fonction de $x+y\sqrt{-1}$ à l'aide d'une des notations

$$f(x+y\sqrt{-1}),\quad \varphi(x+y\sqrt{-1}),$$
$$\psi(x+y\sqrt{-1}),\quad F(x+y\sqrt{-1}),\ldots$$

Les fonctions imaginaires se partagent, comme les fonctions réelles, en *algébriques* et *transcendantes*.

Une fonction est algébrique lorsqu'on la forme en soumettant la variable un nombre fini de fois aux six opérations fondamentales de l'Arithmétique, à savoir l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'élévation aux puissances et l'extraction des racines.

Une fonction non algébrique est dite *transcendante*.

Une fonction algébrique est *rationnelle* lorsqu'elle ne contient pas de radicaux.

Une fonction rationnelle est *entière* lorsque la variable n'entre pas en diviseur.

Une fonction $X+Y\sqrt{-1}$ de $x+y\sqrt{-1}$ est *continue* lorsque, à un accroissement infiniment petit quelconque de $x+y\sqrt{-1}$, correspond un accroissement infiniment petit de $X+Y\sqrt{-1}$ et nous appelons ici *accroissement d'une quantité* la différence entre deux valeurs de cette quantité.

(*) Tous les analystes n'ont pas adopté la définition de Cauchy.

Pour qu'une fonction $X + Y\sqrt{-1}$ de $x + y\sqrt{-1}$ soit continue, il faut et il suffit évidemment que X et Y soient des fonctions continues de x et de y; il faut et il suffit aussi que son module et son argument soient des fonctions continues du module et de l'argument de sa variable. Ces propositions deviennent évidentes si l'on représente les imaginaires à l'aide de points, comme il a été expliqué plus haut.

X. — Définition de la fonction exponentielle.

Nous avons défini le symbole

$$[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^x,$$

pour toutes les valeurs entières et positives de x, comme étant le produit de x facteurs égaux à $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$; nous en avons déduit la formule

$$[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^x = r^x(\cos\theta x + \sqrt{-1}\sin\theta x).$$

Nous pouvons maintenant nous servir de cette formule pour définir le symbole $[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^x$, lorsque x sera fractionnaire, incommensurable ou négatif. Ainsi $r^x(\cos\theta x + \sqrt{-1}\sin\theta x)$ est ce que nous appellerons dorénavant la $x^{ième}$ puissance de $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$.

La puissance $x^{ième}$ de $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ n'a qu'une seule valeur lorsque x est entier; mais il n'en est pas de même dans les autres cas. En effet, l'expression $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ ne change pas quand on remplace θ par $\theta + 2k\pi$, k désignant un entier quelconque; ainsi les valeurs de $[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^x$ seront données par la formule

$$[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^x$$
$$= r^x[\cos(\theta x + 2k\pi x) + \sqrt{-1}\sin(\theta x + 2k\pi x)].$$

Si x est incommensurable, les arcs compris dans la formule

$$\theta x + 2k\pi x$$

auront pour sinus et cosinus une infinité de nombres différents, en sorte que la puissance $x^{ième}$ d'une quantité imaginaire a en général une infinité de valeurs.

Le lecteur se demandera sans doute pourquoi nous n'avons pas défini la puissance fractionnaire $\frac{p}{q}$ de $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ à l'aide de la formule

$$(1)\quad [r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^p};$$

pourquoi enfin nous n'avons pas suivi, dans la définition des puissances de quantités imaginaires, la même marche que dans la définition des puissances de quantités positives. La raison en est simple : d'après notre définition, $[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^x$ est une quantité qui possède plusieurs valeurs, il est vrai, mais dont le nombre des valeurs ne change qu'avec la valeur et non avec la forme de x; ainsi nous avons

$$(2')\quad [r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^{\frac{3}{2}} = [r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^{\frac{6}{4}} = \ldots$$

Au contraire, en partant de l'équation (1) pour définir les puissances fractionnaires, on voit que

$$[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^{\frac{p}{q}}$$

aurait q valeurs, et par conséquent varierait avec la forme de la fraction $\frac{p}{q}$; en sorte que par exemple la formule (2) serait inexacte. De la définition que nous venons de donner résulte la généralisation de la formule de Moivre, à savoir

$$(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^x = \cos\theta x + \sqrt{-1}\sin\theta x.$$

Une quantité réelle étant assimilable à une imaginaire, on voit qu'une quantité réelle peut avoir une infinité de puissances $x^{\text{ièmes}}$ dont une seule est toujours réelle.

Les règles des exposants s'appliquent encore aux imaginaires, avec certaines restrictions toutefois; ainsi on a

$$\begin{aligned}
&[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^x\,[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^{x'} \\
&\quad = r^x(\cos\theta x + \sqrt{-1}\sin\theta x)\, r^{x'}(\cos\theta x' + \sqrt{-1}\sin\theta x') \\
&\quad = r^{x+x'}[\cos\theta(x+x') + \sqrt{-1}\sin\theta(x+x')] \\
&\quad = [r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^{x+x'}.
\end{aligned}$$

Les autres propriétés des exposants se démontreraient d'une manière semblable.

Théorème. — *La fonction a^x est continue, lors même que l'on suppose a imaginaire.*

Cela résulte évidemment de la formule

$$[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)]^x = r^x(\cos\theta x + \sqrt{-1}\sin\theta x),$$

dans laquelle r^x, $\cos\theta x$ et $\sin\theta x$ sont des fonctions continues. Nous verrons plus loin comment on peut encore généraliser davantage la fonction exponentielle, en supposant sa variable imaginaire, et nous verrons qu'alors encore elle reste continue.

CHAPITRE IV.

THÉORIE GÉNÉRALE DES SÉRIES.

I. — Définitions.

On appelle *série* une suite illimitée de termes qui se forment et se suivent d'après une loi déterminée. On appelle encore les séries *suites infinies*.

Une série est convergente quand la somme de ses n premiers termes tend vers une limite déterminée, lorsque n augmente indéfiniment, en suivant du reste une loi quelconque; cette limite est ce que l'on appelle la *valeur* de la série ou la *somme de ses termes*.

Une série qui n'est pas convergente est appelée *divergente*. La série

$$(\alpha_0-\alpha_1)+(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_4)+\ldots+(\alpha_{n-1}-\alpha_n)+\ldots,$$

dans laquelle α_n désigne un nombre qui a pour limite zéro, lorsque n augmente indéfiniment, est convergente, car la somme de ses n premiers termes est $\alpha_0-\alpha_n$, et cette quantité a pour limite a_0 pour $n=\infty$.

Au contraire, la série

$$+1-1+1-1+1-\ldots-1+1,\ldots$$

est divergente, car la somme de ses n premiers termes est alternativement zéro et 1; elle ne tend par conséquent pas vers une limite déterminée lorsque n croît d'une manière quelconque.

On comprend difficilement comment d'illustres analystes ont pu écrire des formules telles que

$$\text{(A)} \qquad +1-1+1-1\ldots=\frac{1}{2}.$$

(Leibnitz, *Lettre à Christian Wolff*. — Euler, *Institutiones calculi differentialis et integralis*, pars posterior, cap. I, etc.)

Une série divergente ne saurait représenter $\frac{1}{2}$. En effet, quelle idée peut-on se faire d'une somme composée d'un nombre illimité de parties? En toute rigueur, on n'a pas même le droit d'écrire

$$(1) \quad \alpha_0=(\alpha_0-\alpha_1)+(\alpha_1-\alpha_2)+\ldots+(\alpha_n-\alpha_{n+1})+\ldots,$$

lorsque α_n tend vers zéro, c'est-à-dire lorsque la série est convergente. On le fait cependant, mais seulement en vertu d'une convention qui consiste à séparer une série convergente de la limite vers laquelle tend la somme de ses termes par le signe $=$. Ainsi la formule (1) est une manière abrégée d'écrire

$$\alpha_0=\lim[(\alpha_0-\alpha_1)+\ldots+(\alpha_n-\alpha_{n+1})], \text{ pour } n=\infty.$$

La formule (A) est donc complétement absurde, puisque la limite de la somme de ses n premiers termes n'existe pas : elle n'est donc pas égale à $\frac{1}{2}$.

Si nous insistons sur ce point, c'est que malheureusement l'on trouve dans d'excellents auteurs, parmi les princes de la science, des fautes analogues à celle dont nous venons de parler. Abel s'en plaint amèrement dans une de ses lettres à Holmboë (voir *Œuvres complètes*).

II. — Théorèmes sur la convergence.

Théorème I. — *Pour qu'une série soit convergente, il faut que ses termes diminuent indéfiniment.*

En effet, soit la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \ldots .$$

Soit en général s_n la somme des n premiers termes, on a

$$s_{n+1} - s_n = u_n. \tag{1}$$

Si l'on suppose la série proposée convergente et si l'on désigne sa valeur par s, on aura

$$\lim s_{n+1} = s,$$
$$\lim s_n = s;$$

donc

$$\lim s_{n+1} - \lim s_n = \lim (s_{n+1} - s_n) = 0.$$

Donc, en vertu de l'équation (1),

$$\lim u_n = 0.$$

Remarque I. — La démonstration que nous venons d'employer, comme du reste toutes celles que nous emploierons dans l'exposition de ces principes, est basée sur le calcul des limites; elle précise le sens que nous devons attribuer à la locution *diminuer indéfiniment* Quand nous disons que u_n doit diminuer indéfiniment, nous devons entendre par là que cette quantité, réelle ou imaginaire, doit avoir zéro pour limite, rien de plus : ainsi u_n peut tendre comme on veut vers zéro; il n'est nullement nécessaire, par exemple, que l'on ait

$$u_n > u_{n+1} > u_{n+2} > \ldots .$$

Remarque II. — On aurait également pu écrire les équations suivantes :

$$\lim s_{n+p} = s,$$
$$\lim s_n = s;$$

d'où, retranchant la deuxième de la première,

$$\lim u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p-1} = 0,$$

ce qui conduit à ce résultat :

Pour qu'une série soit convergente, il faut que la somme des p termes qui suivent le $n^{ième}$ diminue indéfiniment quand n augmente indéfiniment, quel que soit du reste p.

Remarque III. — Il existe des séries dans lesquelles u_n peut tendre vers zéro sans que la série à laquelle appartient ce terme soit convergente; par exemple, considérons la série suivante, appelée série *harmonique :*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \ldots$$

Il est facile de s'assurer que cette série est divergente, car si l'on prend n termes après le $n^{ième}$, la somme

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

est plus grande que $\frac{1}{2n}$ répété n fois, c'est-à-dire que $\frac{1}{2}$. Si donc on groupe les termes de la série harmonique ainsi qu'il suit :

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$$
$$+ \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) + \ldots,$$

on voit que la somme de ses $2n$ premiers termes est plus grande que $\frac{1}{2}$ répété autant de fois que l'on veut en prenant n suffisamment grand. La somme de ces $2n$ premiers termes croît donc au delà de toute limite; donc la série est divergente. C. Q. F. D.

Il arrive souvent que l'on rend une série convergente par un simple changement des signes de quelques-uns de ses termes. Ainsi la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \pm \frac{1}{n} \mp \frac{1}{n+1} \cdots$$

est convergente. En général :

Théorème II. — *Si dans une série les termes sont, à partir de l'un d'eux, indéfiniment décroissants et alternativement positifs et négatifs, cette série est convergente.*

En effet, considérons la série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - \ldots \pm u_{n+p} \mp u_{n+p+1} \pm \ldots,$$

dans laquelle les termes sont indéfiniment décroissants et alternativement positifs et négatifs à partir de u_n.

Appelons en général S_m la somme des m premiers termes de la série. Si nous remarquons que les termes vont constamment en diminuant, les quantités

$$u_n - u_{n+1}, \quad u_{n+2} - u_{n+3}, \ldots, \quad u_{n+2p} - u_{n+2p+1}$$

seront toutes positives, et, par conséquent,

$$(1) \qquad S_{n+1} < S_{n+3} < S_{n+5} < \ldots < S_{n+2p+1} \ldots;$$

les quantités $-u_{n+1} + u_{n+2}, \ldots, -u_{n+2p-1} + u_{n+2p}, \ldots$ seront toutes négatives, et, par suite,

$$(2) \qquad S_{n+2} > S_{n+4} > S_{n+6} > \ldots > S_{n+2p} > \ldots.$$

Or

$$S_{n+2p} = S_{n+2p-1} + u_{n+2p}.$$

Donc S_{n+2p} est plus grand que S_{n+2p-1}, et, à cause de la suite d'inégalités (1), plus grand que S_{n+1}. Ainsi donc une somme quelconque comprise dans la suite S_{n+2}, S_{n+4}, $S_{n+6}, \ldots$, est plus grande que S_{n+1}; il en résulte que ces sommes, allant constamment en décroissant et restant supérieures à S_{n+1} qui est fixe, ont une limite S. Or, on a

$$S_{n+2p} - u_{n+2p+1} = S_{n+2p+1}.$$

Faisons croître p indéfiniment, le premier membre de cette équation a pour limite S, car u_{n+2p+1} a pour limite zéro; donc S_{n+2p+1} a pour limite S également; donc, de quelque manière que croisse l'entier m, S_m a une limite, ce qui revient à dire que la série proposée est convergente.

Corollaire. — On voit que la valeur de la série étant comprise entre S_n et S_{n+1}, l'erreur commise en prenant S_n pour valeur de la série est moindre en valeur absolue que u_{n+1}.

Théorème III. — *Quand une série à termes positifs a ses termes respectivement plus petits que ceux d'une autre série également à termes positifs, et de plus convergente, la première série est aussi convergente.*

Soient, en effet,

$$(1) \qquad s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

la série convergente donnée (on représente ordinairement une série convergente en séparant la somme d'un certain nombre de termes de sa valeur par le signe =, on supprime le mot *lim*), et

$$(2) \qquad v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

la série proposée. Soit s_n la somme des n premiers termes de la série (1), t_n la somme des n premiers termes de la série (2); comme $v_0 < u_0$, $v_1 < u_1, \ldots$, $v_n < u_n$, on a évidemment

$$t_n < s_n,$$

donc *à fortiori*

$$t_n < s.$$

Or, n croissant, t_n croît, mais t_n reste constamment inférieur à s; donc, en vertu d'un principe bien connu, t_n a une limite; donc la série (2) est convergente.

C. Q. F. D.

Théorème IV. — *Une série à termes positifs et négatifs est convergente lorsque la série des valeurs absolues de ses termes est convergente.*

En effet, considérons à part les séries des termes positifs et des termes négatifs pris dans l'ordre dans lequel ils se succèdent dans la série proposée.

Soient

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_i + \ldots \tag{1}$$

la série des termes positifs, et

$$b_0 + b_1 + \ldots + b_k + \ldots \tag{2}$$

celle des termes négatifs pris chacun en valeur absolue.

Soient x_i la somme des i premiers termes de la série (1), y_k la somme des k premiers termes de la série (2), et s_n la somme des n premiers termes de la série proposée. Nous pouvons toujours supposer que $a_0, a_1, \ldots, a_i$ soient les termes positifs de s_n et $b_0, b_1, \ldots, b_k$ les termes négatifs; alors on a, en appelant s'_n la somme des n premiers termes de la série proposée rendus positifs,

$$s'_n = x_i + y_k, \tag{3}$$

$$s_n = x_i - y_k. \tag{4}$$

L'équation (3) montre que s'_n est plus grand que x_i et que y_k; donc *à fortiori* la limite de s'_n, qui par hypothèse existe, est supérieure à x_i et à y_k. Or x_i et y_k sont des nombres croissant avec i et k, mais constamment inférieurs à la limite de s'_n; donc ils ont une limite chacun; donc les séries (1) et (2) sont convergentes. L'équation (4) montre que s_n a une limite égale à la différence des limites de x_i et y_k, c'est-à-dire que la série proposée est convergente et a une valeur égale à la différence des valeurs des séries de ses termes positifs et de ses termes négatifs.

Théorème V. — *Quand une série ne perd pas sa convergence lorsque l'on rend tous ses termes positifs, on peut, sans altérer sa valeur, intervertir l'ordre de ses termes.*

En effet, considérons d'abord une série convergente à termes positifs,

$$(1) \qquad s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_m + \ldots.$$

Intervertissons l'ordre de ses termes, et soit

$$(2) \qquad v_0 + v_1 + \ldots + v_n$$

la nouvelle série obtenue après ce changement. Soient s'_n la somme des n premiers termes de la série (2), s_m la somme des m premiers termes de la série proposée; on pourra toujours choisir m de telle sorte que tous les termes de s'_n soient contenus dans les m premiers termes de la série (1). On aura alors

$$s'_n \leqq s_m \quad \text{et} \quad s'_n < \lim s_m \quad \text{ou} \quad < s.$$

Nous voyons par là :

1° Que la série (2) est convergente, puisque s'_n croît avec n sans dépasser s;

2° Que la valeur $s' = \lim s'_n$ de la série (2) ne saurait surpasser s. Or, on démontrerait de la même manière que la valeur s de la série (1) ne saurait surpasser s'; donc on doit avoir

$$s = s',$$

donc la série (1) n'a pas changé de valeur. C. Q. F. D.

Supposons actuellement la série

$$(1) \qquad s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n \ldots,$$

à termes quelconques.

Soient

$$(3) \qquad a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_i + \ldots$$

la série de ses termes positifs, pris dans le même ordre que dans la série (1);

$$(4) \qquad b_0 + b_1 + \ldots + b_k + \ldots$$

la série de ses termes négatifs également pris dans l'ordre où ils se trouvent dans l'équation (1). Supposons que la série (1) conserve sa convergence quand on rend ses termes positifs. Les séries (3) et (4) sont convergentes, et si x et y désignent les valeurs respectives de ces séries, on a

$$(5) \qquad s = x - y.$$

Cela posé, changeons l'ordre des termes de la série (1); la série de ses termes positifs sera encore la série (3), à l'ordre des termes près. Or, cette série est à termes positifs; donc elle conserve sa valeur. Même observation pour la série des termes négatifs et pour la série des valeurs absolues des termes de la série (1). Il en résulte, d'après le théorème IV, que la valeur de la série (1) transformée est encore $x - y$; donc la série (1) ne change pas de valeur quand on change l'ordre de ses termes. C. Q. F. D.

Remarque. — Toute cette démonstration repose sur l'égalité (5); lors donc que x ou y n'existeront pas, c'est-à-dire quand dans la série proposée les termes positifs et négatifs ne formeront pas des séries convergentes, la démonstration précédente tombera en défaut. Il est facile, du reste, de donner un exemple dans lequel on voit une série changer de valeur quand on change l'ordre de ses termes.

Considérons, par exemple, la série convergente

$$(1)\quad \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots\pm\frac{1}{n}\mp\frac{1}{n+1}\pm\ldots.$$

Remarquons que la série des valeurs absolues de ses termes est identique avec la série harmonique qui est divergente.

Posons

$$f(n)=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2n},$$

et considérons la série

$$(2)\quad \frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{2n}+\ldots.$$

Arrêtons-nous au terme $\frac{1}{2n}$; cette série, comme on voit, renferme les mêmes termes que la série proposée; leur ordre est différent, et l'on prend d'abord deux termes positifs, puis un terme négatif, puis deux termes positifs, puis un terme négatif, etc.; nous aurons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{2n}\\ &=f(n)+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\ldots+\frac{1}{4n+1}.\end{aligned}\right.$$

La quantité qui suit $f(n)$ composée de n termes est évidemment plus grande que $n \times \frac{1}{4n+1}$ ou que $\frac{1}{4+\frac{1}{n}}$. On a donc

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{2n}>f(n)+\frac{1}{4+\frac{1}{n}}.$$

Si nous supposons que n devienne infini, le premier membre de cette inégalité ou la valeur de la série (2) différera de $\lim f(n)$ ou de la valeur de la série (1) de plus de $\frac{1}{4}$; donc évidemment la série (2) a une valeur toute différente de la série (1).

Jusqu'ici nous n'avons guère parlé que de séries à termes réels; mais on fait un fréquent usage en analyse de séries à termes imaginaires.

Une série à termes imaginaires peut se mettre sous la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l}(u_0+v_0\sqrt{-1})+(u_1+v_1\sqrt{-1})+(u_2+v_2\sqrt{-1})+\ldots\\ \qquad +(u_n+v_n\sqrt{-1})+\ldots.\end{array}\right.$$

Cette série sera convergente si les deux séries

$$(2)\qquad u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots,$$
$$(3)\qquad v_0+v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots,$$

formées des parties réelles et des coefficients de $\sqrt{-1}$ dans tous ses termes, sont toutes deux convergentes.

En effet, soit s_n la somme des n premiers termes de la série (1), σ_n et τ_n les sommes des n premiers termes des séries (2) et (3), on a

$$s_n=\sigma_n+\tau_n\sqrt{-1}.$$

En passant aux limites et en désignant par σ et τ les valeurs des séries (2) et (3), on voit que

$$\lim s_n = \sigma + \tau\sqrt{-1};$$

donc la série (1) est convergente. C. Q. F. D.

Remarque. — Il est clair que si l'une des séries (2) et (3) eût été divergente, la série (1) l'eût été pareillement.

Théorème VI. — *Dans une série à termes imaginaires, si la série des modules des différents termes est convergente, on peut, sans altérer sa convergence, intervertir l'ordre des termes.*

En effet, considérons la série (1). Les séries de ses termes réels et des coefficients de $\sqrt{-1}$ sont convergentes indépendamment des signes de leurs termes, car ceux-ci sont respectivement plus petits que ceux de la série des modules qui est à termes positifs. On peut donc changer l'ordre des termes de ces séries sans en altérer la valeur, ce qui revient à dire que l'on peut changer l'ordre des termes de la série proposée elle-même.

C. Q. F. D.

III. — Des calculs que l'on peut effectuer sur les séries.

Théorème I. — *Si l'on considère les séries convergentes*

$$A = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots,$$
$$B = b_0 + b_1 + \ldots + b_n + \ldots,$$
$$C = c_0 + c_1 + \ldots + c_n + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

la série dont le terme général est $u_n = \pm a_n \pm b_n \pm c_n \ldots$ *est convergente et a pour valeur* $\pm A \pm B \pm C \ldots$

En effet, on a

$$\sum_0^n u = \pm \sum_0^n a \pm \sum_0^n b \pm \sum_0^n c \ldots .$$

Si l'on suppose que n augmente indéfiniment, on voit que $\sum_0^n u$ a une limite égale à $\pm A \pm B \pm C \ldots$, ce qui démontre le théorème énoncé.

Théorème II. — *Si la série*

$$s = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente et a pour valeur s,

$$au_0 + au_1 + \ldots + au_n + \ldots$$

sera convergente et aura pour valeur as.

En effet,

$$\sum_0^n (au) = a \sum_0^n u.$$

Donc, si n augmente indéfiniment, $\sum_0^n (au)$ a une limite égale à $a \lim \sum_0^n u$ ou à as. C. Q. F. D.

Théorème III. — *Si la série*

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

est convergente et a tous ses termes positifs; si, de plus, $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *sont des nombres positifs qui ne croissent pas au delà de toute limite,*

$$a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n + \ldots$$

sera convergente.

En effet, en désignant par A un nombre plus grand que $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, cette série a ses termes respectivement plus petits que ceux de la série convergente

$$As = Au_0 + Au_1 + \ldots + Au_n + \ldots,$$

qui est aussi à termes positifs. Abel a démontré que le théorème précédent était encore vrai pour une série quelconque, si les nombres $a_0, a_1, a_2, \ldots$ allaient constamment en décroissant; on a en effet dans cette hypothèse, en posant

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + \ldots + u_n = s_n,$$

$$(2) \qquad a_0 u_0 + a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n = t_n,$$

les relations suivantes :

$$u_0 = s_0, \quad u_1 = s_1 - s_0, \ldots, \quad u_n = s_n - s_{n-1}, \ldots,$$

et par conséquent, en portant ces valeurs dans l'équation (2),

$$t_n = a_0 s_0 + a_1(s_1 - s_0) + \ldots + a_n(s_n - s_{n-1}),$$

ce que l'on peut écrire ainsi :

$$(3) \qquad t_n = (a_0 - a_1)s_0 + (a_1 - a_2)s_1 + \ldots + a_n s_n.$$

Dans cette équation, les coefficients de $s_0, s_1, \ldots$ sont tous positifs, car $a_0, a_1, \ldots$ vont en décroissant; mais si θ désigne une moyenne entre les quantités $s_0, s_1, \ldots, s_n$, on aura

$$t_n = \theta[(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \ldots + a_n] = a_0\theta.$$

Or, n augmentant indéfiniment, θ conserve une valeur finie; donc t_n conserve une valeur finie. Supposons alors $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$ positives (s'il n'en était pas ainsi, on augmenterait convenablement u_0), t_n croît, en vertu de l'équation (3), avec n sans devenir infini; il a donc une limite; par suite, la série (2) est convergente.

C. Q. F. D.

Théorème IV. — *Si les séries*

$$(1)\qquad s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots + \ldots,$$

$$(2)\qquad t = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots + \ldots,$$

sont convergentes, la série dont le terme général est

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \ldots + u_n v_0$$

est convergente et a pour valeur st dans certains cas que nous allons examiner.

1° Supposons d'abord les séries (1) et (2) à termes positifs; nous aurons

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_0^n u \,.\, \sum_0^n v = \sum_0^n w + u_1 \times v_n + u_2(v_{n-1} + v_n) + \ldots \\ + u_n(v_1 + v_2 + \ldots + v_n). \end{aligned} \right.$$

Considérons maintenant le produit $\sum_0^m u \,.\, \sum_0^m v$. Le terme de ce produit dans lequel la somme des indices est la plus élevée est $2m$. Si donc $2m$ est moindre que $n+1$, ou si m est le plus grand entier contenu dans $\frac{n+1}{2}$, tous les termes de $\sum_0^m u \,.\, \sum_0^m v$ se trouvent compris dans $\sum_0^n w$. On a donc

$$\sum_0^n w > \sum_0^m u \,.\, \sum_n^m v.$$

Or, en vertu de l'égalité (3),

$$\sum_0^n w < \sum_0^n u \,.\, \sum_0^n v.$$

Mais si l'on suppose que m et n augmentent indéfiniment, $\sum_0^n u \,.\, \sum_0^n v$ et $\sum_0^m u \,.\, \sum_0^m v$ tendront tous deux vers st. Alors $\sum_0^n w$, qui reste compris constamment entre ces deux produits, tendra aussi vers la limite st. Le théorème qui nous occupe est donc démontré pour le cas où les séries (1) et (2) sont à termes positifs.

2° Supposons que les séries (1) et (2) ne perdent pas leur convergence quand on rend leurs termes positifs. Considérons d'abord les termes des séries (1) et (2) en valeur absolue. Tout ce qui dans l'égalité (3) suit $\sum_0^n w$ a pour limite zéro, car $\sum_0^n u . \sum_0^n v$ et $\sum_0^n w$ ont même limite, d'après ce que nous venons de voir tout à l'heure. Il en sera encore de même *à fortiori* quand on aura rendu aux termes des séries (1) et (2) leurs signes respectifs. Par conséquent, si dans l'égalité (3) nous supposons que n augmente indéfiniment, il vient, en passant aux limites,

$$st = \lim \sum_0^n w,$$

ce qui démontre que le théorème est encore applicable dans le cas où les séries ne perdent pas leur convergence quand on rend leurs termes respectifs.

3° Considérons enfin le cas où les séries (1) et (2) seraient à termes imaginaires. Nous supposerons les séries des modules de leurs termes convergentes, et nous poserons en général

$$u_n = p_n(\cos\alpha_n + \sqrt{-1}\sin\alpha_n),$$
$$v_n = q_n(\cos\beta_n + \sqrt{-1}\sin\beta_n).$$

Alors, en vertu de ce que nous avons examiné dans le premier cas, la différence

$$\sum_0^n p \sum_0^n q - \sum_0^n pq = p_1 q_n + p_2(q_{n-1} + q_n) + \ldots$$
$$+ p_n(q_1 + q_2 + \ldots + q_n)$$

aura pour limite zéro; il en sera de même *à fortiori* de la quantité

$$p_1\left(\cos\alpha_1+\sqrt{-1}\sin\alpha_1\right)\times q_n\left(\cos\alpha_n+\sqrt{-1}\sin\alpha_n\right)$$
$$+p_2'\left(\cos\alpha_2+\sqrt{-1}\sin\alpha_2\right)\left[q_{n-1}\left(\cos\alpha_{n-1}\sqrt{-1}\sin\alpha_{n-1}\right)+\ldots\right]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

qui n'est autre chose que $u_1 v_2 + u_2(v_{n-1} + v_n) + \ldots$. L'égalité (3), en passant aux limites, fournira donc encore

$$st = \lim \sum_0^u w,$$

et le théorème est encore vrai dans ce dernier cas.

IV. — Règles de convergence.

Théorème I. — *Toute progression géométrique décroissante est une série convergente.*

En effet, soit la progression

$$\div a : ax : ax^2 : ax^3 : \ldots : ax^{n-1} : \ldots ;$$

la somme des n premiers termes est

$$a\,\frac{1-x^n}{1-x} = a\left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}\right).$$

Si x est plus petit que 1, le terme $\frac{x^n}{1+x}$ tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, et par conséquent la somme des n premiers termes de la progression a pour limite $\frac{1}{1-x}$; donc cette progression est convergente.

Dans le cas où x serait égal à 1 ou plus grand que 1, il est clair que la progression serait une série divergente.

THÉORÈME II. — *Si l'on a deux séries à termes positifs, l'une convergente,*

$$(1) \qquad s = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots,$$

et l'autre

$$(2) \qquad b_0 + b_1 + \ldots + b_n + b_{n+1} + \ldots,$$

telle, que le rapport d'un terme au précédent, $\frac{b_{n+1}}{b_n}$, *soit constamment inférieur au rapport correspondant* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *dans la première, cette dernière est convergente.*

En effet, la série (1) étant convergente, la suivante le sera aussi :

$$b_0 + \frac{b_0}{a_0} a_1 + \frac{b_0}{a_0} a_2 + \ldots + \frac{b_0}{a_0} a_n + \frac{b_0}{a_0} a_{n+1} + \ldots,$$

cette série peut s'écrire ainsi

$$(3) \qquad b_0 + b_0 \frac{b_0}{a_0} + b_0 \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_0} + \ldots + b_0 \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_1}{a_0} + \ldots.$$

Mais la série (2) peut se mettre sous la forme

$$b_0 + b_0 \frac{b_1}{b_0} + b_0 \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_1}{b_0} + \ldots + b_0 \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_1}{b_0} + \ldots;$$

or cette série a, en vertu de notre hypothèse, ses termes respectivement moindres que ceux de la série (3), qui est convergente; donc la série (2) est elle-même convergente. C. Q. F. D.

Il est facile de déduire de là le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Si, dans une série, le module du rapport d'un terme au précédent finit par rester moindre qu'un nombre fixe* $\alpha < 1$, *cette série est convergente.*

En effet, considérons la série

(1) $$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + u_{n+1} \ldots;$$

soit

(2) $$a_0 + a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots$$

la série des modules de ses termes : si cette série est convergente, la précédente le sera aussi. Or, supposer

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha, \quad \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} < \alpha, \ldots,$$

cela revient à supposer le rapport d'un terme au précédent moindre que le rapport correspondant dans une progression géométrique décroissante dont la raison serait α ; donc la série (2), et par suite (1), sont convergentes.

Corollaire. — *Si, dans une série, la limite du module du rapport d'un terme au précédent est inférieur à* 1, *cette série est convergente.*

En effet, alors le module du rapport en question finira par approcher assez de sa limite pour rester constamment inférieur à un nombre compris entre 1 et sa limite, c'est-à-dire finira par rester inférieur à un nombre moindre que 1.

Remarque I.— *Si, dans une série, la limite du module du rapport d'un terme au précédent est supérieure à* 1, *cette série est divergente.*

En effet, alors les modules des termes vont en croissant.

Remarque II. — *Si la limite du module du rapport d'un terme au précédent est égale à* 1, *il y a doute sur la convergence de la série; toutefois, si le module en question reste toujours plus grand que* 1, *il est clair que la série est divergente.*

Remarque III. — *Lorsque, dans une série à termes réels, le rapport d'un terme au précédent reste inférieur à une quantité α moindre que 1, il est facile de trouver une limite de l'erreur commise, en remplaçant cette série par ses n premiers termes; en effet, dans la série* (2), *par exemple, on a*

$$a_{n+1} < \alpha a_n,\ a_{n+2} < \alpha a_{n+2},\quad \text{ou}\quad < \alpha^2 a_n \ldots,\ a_{n+i} < \alpha^i a_n;$$

donc

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots < a_n(1 + \alpha + \alpha^2 \ldots),$$

ou

$$< \frac{a_n}{1-\alpha}.$$

Ainsi, l'erreur est moindre que le premier terme négligé divisé par $1 - \alpha$.

Théorème IV. — *La série*

$$(1)\qquad \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots + \frac{1}{n^k} + \frac{1}{(n+1)^k} + \ldots$$

est convergente ou divergente, selon que k est plus grand ou plus petit que 1.

En effet, supposons d'abord k plus grand que 1, la série précédente peut s'écrire, en groupant les termes (ce qui n'altère pas la convergence ou la divergence de la série, puisqu'elle a ses termes positifs), de la manière suivante :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \left(\frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k}\right) + \ldots \\ &\quad + \left[\frac{1}{(2^n+1)^k} + \frac{1}{(2^n+2)^k} + \ldots + \frac{1}{(2^{n+1})^k}\right] + \ldots \end{aligned}\right.$$

Si l'on suppose $k > 1$, le terme général de la nouvelle série est moindre que $\frac{1}{2^{nk}}$ répété 2^n fois, c'est-à-dire moindre que $\frac{1}{2^{n(k-1)}}$; les termes de cette série sont donc moindres que ceux de la progression géométrique décroissante

$$\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{(2^{k-1})^2}+\ldots+\frac{1}{(2^{k-1})^n}+\ldots;$$

elle est par conséquent convergente.

Si au contraire $k<1$, alors la série (2) a ses termes plus grands respectivement que ceux de la série harmonique; elle est donc divergente dans ce cas.

Dans la série (1) le rapport d'un terme au précédent est de la forme

$$\frac{1}{(n+1)^k}:\frac{1}{n^k}=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^k$$

si k est plus grand que 1, cette quantité est évidemment moindre que $\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$. On peut donc énoncer le théorème suivant.

Théorème V. — *Si, dans une série, le rapport d'un terme au précédent ayant pour limite l'unité peut se mettre sous la forme* $\frac{1}{1+\alpha}$, *et si* $n\alpha$ *tend vers une limite* k *plus grande que* 1, *cette série sera convergente.*

Les règles de convergence que nous venons de donner suffisent dans la plupart des cas; nous y ajouterons les suivantes, que nous proposons au lecteur comme exercices et qui sont ordonnées d'après leur utilité.

1° Si $f(x)$ désigne une fonction constamment décroissante depuis o jusqu'à ∞, et si l'aire de la courbe représentée par l'équation

$$y = f(x),$$

comprise entre l'axe des x et une parallèle à l'axe des y menée entre l'origine et le point dont l'abscisse est 1, est finie, la série

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$$

est convergente; elle est divergente dans le cas contraire (CAUCHY) (*).

2° Si, dans la série à termes positifs

$$u_1 + u_2 + u_3, \ldots u_n + \ldots$$

$\sqrt[n]{u_n}$ a une limite moindre que 1, la série est convergente; si la limite de $\sqrt[n]{u_n}$ est plus grande que 1, la série est divergente. Il y a doute si la limite est 1.

3° Supposons que l'on ait

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\lambda + An^{\lambda-1} + Bn^{\lambda-2} \ldots}{n^\lambda + an^{\lambda-1} + bn^{\lambda-2} \ldots};$$

si la première des différences $A - a$, $B - b, \ldots$, qui ne s'évanouit pas, est positive, la série est divergente.

En second lieu, la série sera convergente ou divergente, selon que $A - a + 1$ sera négatif ou positif.

4° Si l'on a

$$\lim \frac{\log\left(\frac{1}{u_n}\right)}{\log n} > 1,$$

(*) Ce théorème, pour les personnes qui connaissent le calcul intégral, revient au suivant : *La série dont le terme général est $f(x)$ est convergente si l'intégrale $\int_1^\infty f(x)\,dx$ est finie; elle est divergente dans le cas contraire.*

la série est convergente; elle est divergente si l'on a

$$\lim \frac{\log\left(\frac{1}{u_n}\right)}{\log n} < 1.$$

5° Les séries

$$r_0 + r_1 \cos\theta + r_2 \cos 2\theta + \ldots + r_n \cos n\theta + \ldots$$
$$r_1 \sin\theta + r_2 \sin 2\theta + \ldots + r_n \sin n\theta + \ldots$$

dans lesquelles r_1, r_2, ... r_n sont des nombres qui décroissent indéfiniment, sont convergentes pour toutes les valeurs réelles de θ qui ne sont pas des multiples exacts du quadrant.

6° La série

$$r_0 + r_1\alpha + r_2\alpha^2 + r_3\alpha^3 + \ldots + r_n\alpha^n + \ldots,$$

dans laquelle r_0, r_1... sont des nombres indéfiniment décroissants et dans laquelle α est une racine carrée, cubique, quatrième, etc., imaginaire de l'unité, est convergente.

7° La série

$$\frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots + \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_{n+2}} + \ldots$$

est convergente si la quantité

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$$

est constante ou croissante.

(Ce curieux théorème m'a été communiqué par M. Lemoine, ancien élève de l'École Polytechnique.)

V. — Théorème d'Abel.

Lemme. — *Si une série ordonnée par rapport aux puissances croissantes d'une même lettre x est conver-*

gente pour le module R *de* x, *elle l'est encore pour tout module moindre. Si elle est divergente pour le module* R *de* x, *elle l'est encore pour un module plus grand.*

En effet, considérons la série

(1) $$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Le module du rapport d'un terme au précédent a pour expression générale

$$\frac{\operatorname{mod} a_{n+1}}{\operatorname{mod} a_n} \operatorname{mod} x.$$

Lorsque le module de x est égal à R, cette quantité a pour limite 1 au plus, en supposant la série (1) convergente; donc, pour tout module de x moindre que R, on aura

$$\frac{\operatorname{mod} a_{n+1}}{\operatorname{mod} a_n} \operatorname{mod} x < 1,$$

c'est-à-dire que la série sera convergente. La seconde partie du lemme se démontre de la même façon.

Corollaire. — Il résulte de là qu'il existe un module R de x tel, que pour tout module moindre la série (1) est convergente, pour tout module plus grand elle est divergente; ce module s'appelle le *rayon de convergence* de la série. En représentant les imaginaires par des points, conformément aux méthodes de Cauchy, on voit que la série (1) est convergente pour toutes les valeurs de x contenues à l'intérieur d'un cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon égal au *rayon de convergence*. Ce cercle est ce que l'on appelle le *cercle de convergence de la série*.

Théorème. — *Une série convergente ordonnée par rapport aux puissances croissantes d'une même variable* x *représente une fonction continue de cette variable pour toutes les valeurs du module de* x *inférieures au rayon de convergence.*

Pour démontrer cette proposition, considérons la série (1), désignons par $f(x)$ sa valeur, nous aurons

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Soit R le rayon de convergence, et supposons le module de x inférieur à R. En donnant un accroissement h assez voisin de zéro à x, $x+h$ aura un module moindre que R. et l'on pourra encore écrire

$$(2) \quad f(x+h) = a_0 + a_1(x+h) + \ldots + a_n(x+h)^n + \ldots,$$

d'où l'on conclut

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x+h) - f(x) = a_1 h + a_2[(x+h)^2 - x^2] + \ldots \\ \qquad + a_n[(x-h)^n - x^n] + \ldots; \end{array} \right.$$

or, si nous posons

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \ldots,$$
$$\psi(x) = a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \ldots,$$

on pourra toujours choisir n assez grand pour que $\psi(x+h)$ ait et conserve un module moindre qu'une quantité donnée α lorsque h tend vers zéro; en effet, pour cela il suffit de prendre n assez grand pour que

$$\mathrm{R}^{n+1} \bmod a_{n+1} + \mathrm{R}^{n+2} \bmod a_{n+2} + \ldots$$

soit inférieur à α, R désignant toujours le rayon de convergence. Mais alors $\psi(x+h) - \psi(x)$ aura et conservera un module moindre que 2α (*). Ceci posé, revenons à la formule (3); elle peut s'écrire

$$f(x+h) - f(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x) + \psi(x+h) - \psi(x);$$

mais, en faisant tendre h vers zéro, $\varphi(x+h) - \varphi(x)$

(*) Parce que le module d'une somme est moindre que la somme des modules de ses parties.

tend vers zéro, car $\varphi(x)$ est une somme d'un nombre limité de fonctions continues de x (p. 213); on peut donc prendre le module de $\varphi(x+h)-\varphi(x)$ moindre que α; et comme $\psi(x+h)-\psi(x)$ conserve un module moindre que 2α quand h tend vers zéro, la formule précédente fournira la relation

$$\operatorname{mod}[f(x+h)-f(x)]<3\alpha.$$

Ainsi le module de l'accroissement de $f(x)$, correspondant à l'accroissement h de x, peut être pris moindre que toute quantité donnée, ce qui revient à dire que $f(x)$ est continue. C. Q. F. D.

Les géomètres avaient, longtemps avant Abel, admis tacitement qu'une série dont les différents termes étaient des fonctions continues de x avait pour valeur une fonction continue de cette variable, assimilant ainsi une série à un véritable polynôme. Cette assimilation n'est pas légitime : on conçoit, en effet, qu'à un accroissement infiniment petit de x puissent correspondre une infinité d'accroissements infiniment petits pour les termes de la série, et dont la somme puisse donner un accroissement fini. Abel se plaint, dans une de ses lettres à Holmboë, du manque de rigueur qui existait sur ce point. Il y a deux ans, je me suis occupé de cette question, et j'ai prouvé que la plupart des séries que l'on rencontre en analyse représentent des fonctions continues. J'ai montré dans quels cas ce théorème tombe en défaut, mais l'énumération de ces cas ne peut pas être faite dans un ouvrage élémentaire, et je renverrai le lecteur, curieux d'approfondir cette question, à ma *Théorie des résidus* (p. 97).

VI. — Sur un problème d'analyse dont on fait usage dans la théorie des suites infinies.

Problème. — *Déterminer une fonction continue φ qui satisfasse à la formule*

$$(1) \qquad \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y).$$

Avant de résoudre ce problème, nous ferons observer que la fonction φ jouit de toutes les propriétés des fonctions exponentielles. Ainsi, en posant

$$a^x = \varphi(x),$$

la relation (1) se trouve satisfaite; de plus, l'équation (1) devient, en changeant y en $-y$,

$$(2) \qquad \varphi(x)\varphi(-y) = \varphi(x-y).$$

Si l'on fait $y=0$ dans cette formule, on en déduit $\varphi(0) = 1$, relation à laquelle on satisfait encore en prenant $a^x = \varphi(x)$; en prenant alors dans la formule (2) $x=y$, on a

$$\varphi(x)\varphi(-x) = \varphi(0) = 1,$$

ou bien

$$(3) \qquad \varphi(-x) = \frac{1}{\varphi(x)}.$$

Cette équation traduit encore une propriété des exponentielles. Changeons maintenant y en $y+z$, l'équation (1) devient

$$\varphi(x)\varphi(y+z) = \varphi(x+y+z),$$

ou bien

$$\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z) = \varphi(x+y+z);$$

en changeant z en $z+u$, on trouverait de même

$$\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)\varphi(u) = \varphi(x+y+z+u),$$

et ainsi de suite. La fonction a^x jouit encore de la propriété exprimée par cette équation. Faisons $x=y=z,\ldots$, la formule précédente deviendra (*)

$$\varphi^n(x)=\varphi(nx). \tag{4}$$

De cette équation on tire, en changeant x en $\frac{x}{q}$ et n en q, q désignant un entier quelconque,

$$\varphi^q\left(\frac{x}{q}\right)=\varphi(x),$$

ou bien

$$\varphi\left(\frac{x}{q}\right)=\varphi^{\frac{1}{q}}(x);$$

en élevant à la puissance entière p, on a

$$\varphi\left(\frac{px}{q}\right)=\varphi^{\frac{p}{q}}(x). \tag{5}$$

Cette équation montre que la formule (4) a encore lieu pour les valeurs fractionnaires de n. Si nous faisons maintenant tendre $\frac{p}{q}$ vers un nombre incommensurable n, les deux membres de l'équation (5) tendront vers des limites égales; ces limites seront précisément $\varphi(nx)$ et $\varphi^n(x)$, *en vertu de la continuité de la fonction* φ (**); la formule (4) est donc démontrée par les valeurs incommensurables de n, et par suite pour toutes les valeurs positives de n.

(*) Nous employons la notation $\varphi^n(x)$ pour exprimer la $n^{ième}$ puissance de $\varphi(x)$, absolument comme $\sin^n x$ désigne la $n^{ième}$ puissance de $\sin x$.

(**) Cette remarque essentielle est souvent omise dans les ouvrages qui ont traité de la question qui nous occupe; Cauchy a bien soin de supposer la fonction φ continue dans son *Analyse algébrique*.

Si nous élevons à la puissance m les deux membres de l'équation (3), m désignant un nombre positif quelconque, il vient

$$\varphi(-mx) = \left[\frac{1}{\varphi(x)}\right]^m,$$

ou bien

$$\varphi(-mx) = \varphi^{-m}(x);$$

la formule (4) est ainsi établie pour toutes les valeurs possibles de n, et nous ferons encore observer que cette formule est satisfaite en prenant $\varphi(x)$ égal à a^x. Procédons maintenant à la détermination de la fonction φ. A cet effet, supposons d'abord x réel; si dans l'équation (4) on change n en x et x en n, il vient

$$\varphi^x(n) = \varphi(xn);$$

en comparant cette formule avec (4), on trouve

$$\varphi^n(x) = \varphi^x(n);$$

si l'on fait $n = 1$ dans cette formule, on a

$$\varphi(x) = \varphi^x(1).$$

$\varphi(1)$ est une constante; en désignant cette constante par la lettre a, on a alors

$$\varphi(x) = a^x. \tag{6}$$

Supposons maintenant x imaginaire; si nous le remplaçons par $x + y\sqrt{-1}$, il vient

$$\varphi(x + y\sqrt{-1}) = \varphi(x)\,\varphi(y\sqrt{-1}); \tag{7}$$

or, en vertu de l'équation (4), on a

$$\varphi^n(y\sqrt{-1}) = \varphi(ny\sqrt{-1}),$$
$$\varphi^y(n\sqrt{-1}) = \varphi(ny\sqrt{-1});$$

d'où l'on conclut

$$\varphi^n(y\sqrt{-1}) = \varphi^y(n\sqrt{-1}).$$

Si l'on fait $n=1$ dans cette formule, il vient

$$\varphi(y\sqrt{-1}) = \varphi^y(\sqrt{-1}).$$

$\varphi(\sqrt{-1})$ est une constante que l'on peut désigner par $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$; l'équation précédente devient alors

$$\varphi(y\sqrt{-1}) = r^y(\cos\theta y + \sqrt{-1}\sin\theta y).$$

Cette équation, combinée avec (6) et (7), donne alors finalement

$$\varphi(x+y\sqrt{-1}) = a^x r^y(\cos\theta y + \sqrt{-1}\sin\theta y).$$

Telle est la fonction qui satisfait à la formule (1).

VII. — Binôme de Newton.

Lorsque, dans la formule

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n + \ldots,$$

démontrée pour toutes les valeurs entières et positives de m, on vient à donner une valeur quelconque à m, le second membre devient une série, et il paraît naturel de se demander si, dans ce cas, la formule précédente est encore exacte.

Si, dans la série qui forme le second membre de la formule précédente, on prend le rapport d'un terme au précédent, on trouve, pour expression générale de ce rapport,

$$\frac{m-n+1}{n}x \quad \text{ou} \quad \left(\frac{m+1}{n}-1\right)x,$$

et la limite de cette quantité est $-x$; si donc le module de x est moindre que 1, la série en question sera convergente, elle sera divergente dans le cas contraire; enfin, il y aura doute dans le cas où le module de x est 1. Nous supposerons donc le module de x moindre que 1 (p. 294), et nous poserons

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(m) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots \\ + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n + \ldots. \end{aligned}\right.$$

En changeant m en μ, on trouve

$$\begin{aligned} \varphi(\mu) = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \ldots \\ + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n + \ldots. \end{aligned}$$

Si nous multiplions ces deux formules membre à membre, nous obtenons (en suivant la règle donnée théorème IV, p. 291),

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(m)\varphi(\mu) = 1 + \frac{m+\mu}{1}x \\ + \left[\frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m}{1}\frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2.3}\right]x^2 + \ldots \\ + \left[\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}\right. \\ + \frac{\mu}{1}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} + \ldots \\ \left. + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}\right]x^n + \ldots. \end{aligned}\right.$$

20.

Or, si m et μ étaient entiers, $\varphi(m)$ et $\varphi(\mu)$ représenteraient $(1+x)^m$ et $(1+x)^\mu$, $\varphi(m)\,\varphi(\mu)$ représenterait donc $(1+x)^{m+\mu}$, et par conséquent on aurait

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(m)\varphi(\mu) &= 1+\frac{m+\mu}{1}x+\frac{(m+\mu)(m+\mu-1)}{1.2}x^2+\ldots \\ &+\frac{(m+\mu)(m+\mu-1)\ldots(m+\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n+\ldots \end{aligned}\right.$$

Mais les formules (2) et (3) devant avoir lieu quel que soit x, on en conclurait (première Partie, Chapitre III, p. 52)

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}+\frac{\mu}{1}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}+\ldots \\ &\quad+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n} \\ &=\frac{(m+\mu)(m+\mu-1)\ldots(m+\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}. \end{aligned}\right.$$

Or, cette dernière formule a lieu pour toutes les valeurs entières de m et μ; nous avons donc deux polynômes entiers en m égaux pour une infinité de valeurs de m, c'est-à-dire pour un nombre de valeurs de m supérieur à leurs degrés; ils sont donc égaux pour toutes les valeurs de m, μ prenant des valeurs entières. Donnons alors à m une valeur quelconque; les deux polynômes en question étant égaux pour un nombre de valeurs de μ supérieur à leur degré le seront encore pour une valeur quelconque de μ : il en résulte que la formule (4) se trouve vérifiée pour deux valeurs quelconques de m et de μ. On peut donc à la formule (2) substituer la formule (3), lors même que m et μ ne sont plus des nombres entiers. Or, la formule (3) peut s'écrire comme il suit :

$$(5)\qquad \varphi(m)\varphi(\mu)=\varphi(m+\mu).$$

Si nous supposons μ très-petit, $\varphi(\mu)$ se réduira sensiblement à l'unité; en effet, on peut écrire

$$\varphi(\mu) = 1 + \mu\left[x + \frac{(\mu-1)}{1.2}x^2 + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1\ 2.3}x^3 + \ldots\right];$$

mais la série qui entre dans les crochets est convergente, quelque petit que soit μ, car le rapport d'un terme au précédent a pour limite x, dont nous avons supposé le module moindre que 1; donc, en faisant tendre μ vers zéro, on a

$$\lim \varphi(\mu) = 1;$$

on peut donc écrire

$$\varphi(\mu) = 1 + \omega,$$

ω désignant une quantité qui a pour limite zéro. La formule (5) donne alors

$$\varphi(m) + \omega\varphi(m) = \varphi(m+\mu),$$

ou bien

$$\varphi(m+\mu) - \varphi(m) = \omega\varphi(m),$$

c'est-à-dire, en faisant tendre μ vers zéro,

$$\lim[\varphi(m+\mu) - \varphi(m)] = 0.$$

La fonction $\varphi(m)$ est donc continue, et l'équation (5) montre que l'on a pour toutes les valeurs réelles de m

$$\varphi(m) = a^m,$$

a désignant une constante (*voyez* p. 303). Pour déterminer cette constante, reportons-nous à l'équation (1); faisons $m = 1$, nous trouvons

$$\varphi(1) \quad \text{ou} \quad a = 1 + x;$$

$\varphi(m)$ est donc égal à $(1+x)^m$. On a donc, pour toutes les valeurs réelles de m et pour les valeurs de x dont le module est inférieur à 1,

$$(6)\quad \begin{cases} (1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{1.2}x^2 \\ \qquad + \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots . \end{cases}$$

Il est bien entendu que, dans cette formule, le premier membre, qui, en apparence, possède plusieurs valeurs, devra toujours être pris avec son petit argument positif; en effet, nous avons vu que le second membre était une fonction continue de m; or, toutes les fois que x est réel, il faut évidemment prendre $(1+x)^m$ réel, c'est-à-dire avec son plus petit argument positif; si l'on fait alors varier x en laissant son module inférieur à 1, l'argument de $1+x$ ne varie pas de 2π (*); donc l'argument de $(1+x)^m$, qui doit être une fonction continue de x (p. 274), ne varie pas de $2m\pi$, c'est-à-dire doit être pris avec sa plus petite valeur positive, quel que soit x.

Nous n'examinerons pas le cas où m est imaginaire : ce cas a été étudié par Abel dans un beau Mémoire inséré dans la collection de ses *Œuvres complètes* publiées par Holmboë.

Si dans la formule (6) on pose $x = \dfrac{b}{a}$, et si l'on multiplie les deux membres par a^m, on trouve :

$$(7)\quad \begin{cases} (a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \dfrac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 \\ \qquad + \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \ldots ; \end{cases}$$

(*) On peut s'en assurer directement, mais il vaut mieux remarquer que si du point 1 comme centre on décrit un cercle avec un rayon égal au module de x, le point $1+x$ restera sur ce cercle; or, mod. x étant plus mais cette formule ayant été déduite de (6) dans l'hypothèse mod. $x < 1$, elle n'aura lieu que pour les valeurs de a et de b satisfaisant à la formule

$$\text{mod. } a > \text{mod. } b.$$

Première application. — Les formules (6) et (7) sont souvent utiles pour l'extraction des racines; ainsi l'on a, par exemple,

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 + \frac{1.3}{2.4.6}x^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^4 + \ldots;$$

si x est suffisamment petit, on peut poser

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2};$$

l'erreur est égale à

$$\frac{1}{2.4}x^2 - \frac{1.3}{2.4.6}x^3 \ldots \pm \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}x^{n+1} \mp \ldots;$$

si x est positif et moindre que 1, les termes de cette série sont alternativement positifs et négatifs, l'erreur commise est donc (p. 282) moindre que $\frac{1}{2.4}x^2$, c'est-à-dire que $\frac{x^2}{8}$; si au contraire x est négatif, l'erreur est moindre que

$$\xi^2 + \xi^3 + \ldots + \xi^{n+1} \ldots,$$

ξ désignant la valeur absolue de x, c'est-à-dire moindre

---

petit que 1, ce cercle ne contiendra pas l'origine, et par suite l'argument de $1+x$ ne variera pas de 2π, puisque le point $1+x$ ne peut pas décrire un cercle complet autour de l'origine.

que $\frac{\xi^2}{1-\xi}$; c'est ainsi que

$$\sqrt{1,004} = 1,002 \text{ à } \frac{1}{8}(0,002)^2 = 0,0000005 \text{ près.}$$

Deuxième application. — Si l'on veut résoudre l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

on fait usage de la formule

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - c} = -\frac{b}{2a}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}\right];$$

si a est très-petit, on a alors

$$x = -\frac{b}{2a}\left[1 \pm \left(1 - \frac{2ac}{b^2} - \frac{8a^2c^2}{b^4} - \ldots\right)\right].$$

Cette formule est identique aux formules trouvées (première Partie, Chapitre VI, p. 153).

VIII. — Limite de $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ pour $m = \infty$.

Nous avons déjà rencontré un cas particulier de cette expression, celui où l'on a $x = 1$, et nous avons vu que $\lim\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ représentait la base des logarithmes népériens; nous aurons souvent l'occasion de nous servir de cette quantité : aussi allons-nous donner un moyen de la calculer.

Lemme. — *Si $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \omega$ représentent des nombres positifs et tels que l'on ait*

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \omega < 1,$$

on aura

$$1 > (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\ldots(1-\omega) > 1-(\alpha+\beta+\ldots+\omega).$$

En effet, on a évidemment

$$1 > (1-\alpha)(1-\beta) > 1-(\alpha+\beta),$$

et, en multipliant de part et d'autre par $1-\gamma$,

$$(1-\gamma) > (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) > [1-(\alpha+\beta)](1-\gamma),$$

et *à fortiori*

$$1 > (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) > 1-(\alpha+\beta+\gamma),$$

et ainsi de suite. C. Q. F. D.

Ceci posé on a, en supposant m entier (formule du binôme),

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1+x+\frac{m-1}{1.2}\frac{x^2}{m}+\ldots$$
$$+\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}\frac{x^n}{m^{n-1}}+\ldots,$$

ou bien

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m &= 1+x+\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{x^2}{1.2}+\ldots\\ &+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\ldots.\end{aligned}\right.$$

Supposons actuellement que m augmente au delà de toute limite, et que x, dans cette circonstance, tende vers la limite ξ. Si l'on remplaçait dans le second membre de l'équation (1) chaque terme par sa limite, on s'exposerait à trouver un résultat différent de la limite cherchée de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$, car le second membre de l'équation (1) se compose d'une infinité de parties, et dans ce cas, comme on sait, les théorèmes sur les limites ne sont plus applicables (p. 128).

Or on a, en vertu du lemme,

$$1 > \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{m}\right)$$
$$> 1 - \frac{1}{m}(1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1),$$

c'est-à-dire

$$1 > \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{m}\right) > 1 - \frac{n(n-1)}{2m}.$$

On a donc, en désignant par θ_{n-2} un nombre compris entre zéro et 1,

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{m}\right) = 1 - \theta_{n-2}\frac{n(n-1)}{2m}.$$

L'équation (1) peut alors s'écrire comme il suit :

$$(2) \qquad \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = \alpha - \beta,$$

formule dans laquelle on a posé, pour abréger,

$$\alpha = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^m}{1.2.3\ldots m},$$
$$\beta = \frac{x^2}{2m}\left[1 + \frac{\theta_1 x}{1} + \frac{\theta_2 x^2}{1.2} + \ldots + \frac{\theta_{m-2}\, x^{m-2}}{1.2.3\ldots m-2}\right].$$

Or on a

$$(3) \quad \alpha = \varphi(x) - \left[\frac{x^{m+1}}{1.2.3\ldots(m+1)} + \frac{x^{m+2}}{1.2.3\ldots(m+2)} + \ldots\right],$$

en désignant par $\varphi(x)$ la valeur de la série convergente

$$(4) \quad \varphi(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots.$$

Cette série est convergente, car le rapport d'un terme au précédent a pour expression générale $\frac{x}{n}$, dont la limite est zéro (p. 295); de plus, $\varphi(x)$ représente une fonction continue de x (p. 300), en sorte que la limite de $\varphi(x)$ est $\varphi(\xi)$. En second lieu, les termes qui, dans la formule (3), suivent $\varphi(x)$, ont pour somme une quantité dont le module est inférieur à

$$\frac{R^{m+1}}{1.2.3\ldots(m+1)}+\frac{R^{m+2}}{1.2.3\ldots(m+2)}+\ldots,$$

R désignant une quantité qui reste plus grande que le module de x. Or cette dernière quantité est le reste de la série convergente $\varphi(R)$; elle a donc pour limite zéro; donc *à fortiori* les termes qui, dans l'équation (3), suivent $\varphi(x)$, ont pour limite zéro, et l'on a

$$\lim \alpha=\varphi(\xi).$$

La quantité β, abstraction faite du facteur $\frac{x^2}{2m}$, qui a pour limite zéro, a un module qui reste inférieur à $\varphi(R)$; donc la limite de β est zéro. L'équation (2) devient alors, en passant aux limites,

$$(5)\qquad \lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=\varphi(\xi).$$

Nous avons supposé que m passait uniquement par des valeurs entières : faisons-le maintenant passer par des valeurs quelconques, et soit μ l'entier le plus voisin de m. La différence entre $\frac{\mu}{m}$ et 1 est $\pm\frac{(\mu-m)}{m}$; elle est donc inférieure à $\frac{1}{m}$, c'est-à-dire a pour limite zéro; par suite, $\frac{\mu}{m}$ a pour limite l'unité, et $\frac{x\mu}{m}$ a pour limite ξ. Ceci posé, on a

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \lim\left(1+\frac{\frac{\mu}{m}x}{\mu}\right)^{\mu} \lim\left(1+\frac{\frac{\mu}{m}x}{m}\right)^{m-\mu}$$
$$= \lim\left(1+\frac{\frac{\mu}{m}x}{\mu}\right)^{\mu} = \varphi(\xi).$$

Enfin on a

$$\left(1-\frac{x}{m}\right)^m \times \left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \left(1+\frac{-x^2:m}{m}\right)^m,$$

c'est-à-dire, pour $m=\infty$,

$$\lim\left(1-\frac{x}{m}\right)^m \times \varphi(\xi) = \varphi(0) = 1,$$

d'où l'on conclut

$$\varphi(\xi) = \lim\left(1+\frac{x}{-m}\right)^{-m}.$$

La formule (5) est donc démontrée, de quelque manière que l'on fasse croître la valeur absolue de m. Si l'on suppose que x reste constant, on aura $\xi = x$, et la formule (5) deviendra, en remplaçant $\varphi(\xi)$ ou $\varphi(x)$ par sa valeur (4),

$$(6)\quad \lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\ldots.$$

Si l'on pose

$$e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}+\ldots,$$

la formule (6) donne pour $x=1$ la valeur de la base des logarithmes népériens,

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e;$$

par suite, pour les valeurs réelles de x,

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \lim\left[\left(1+\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}\right]^x = e^x,$$

et la formule (6) devient

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots.$$

Nous allons étudier cette série plus complétement.

IX. — Séries exponentielles et circulaires.

Reprenons la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots.$$

Cette série, qu'il est tout naturel d'étudier après les progressions géométriques et après la formule du binôme, est toujours convergente, quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire donnée à x. En effet, dans cette série, le rapport d'un terme au précédent a pour expression générale $\frac{x}{n}$, quantité dont la limite est zéro (p. 295). Si nous désignons alors par $\varphi(x)$ la valeur de cette série, il vient

$$(1)\quad \varphi(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots.$$

On aurait de même

$$\varphi(y) = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \ldots + \frac{y^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots;$$

de là on tire, en vertu de la règle donnée p. 291,

$$\varphi(x)\varphi(y) = 1 + \frac{x+y}{1} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \frac{y}{1}\,\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\right.$$
$$\left. + \frac{y^2}{1.2}\,\frac{x^{n-2}}{1.2.3\ldots n-2} + \ldots + \frac{y^n}{1.2.3\ldots n}\right) + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\varphi(x)\varphi(y) = 1 + \frac{x+y}{1} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(x^n + \frac{n}{1}yx^{n-1}\right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2}y^2x^{n-2} + \ldots + y^n\right) + \ldots,$$

ou bien

$$\varphi(x)\varphi(y) = 1 + \frac{x+y}{1} + \ldots + \frac{(x+y)^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots.$$

Or cette formule peut évidemment s'écrire comme il suit :

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y).$$

Mais la fonction $\varphi(x)$ est évidemment continue (p. 300); donc, en vertu du théorème démontré p. 303, on a

$$\varphi(x) = a^x$$

pour toutes les valeurs réelles de x. L'équation (1) devient alors

$$a^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots;$$

pour $x = 1$, cette formule devient

$$a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

et fait connaître la valeur de la constante a. Nous avons désigné cette valeur par la lettre e, en sorte que l'on a

$$(2)\qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

Lorsque la variable est imaginaire, on a (p. 305)

$$\varphi(x + y\sqrt{-1}) = a^x r^y (\cos\theta y + \sqrt{-1}\sin\theta y),$$

et en particulier

$$\varphi(y\sqrt{-1}) = r^y(\cos\theta y + \sqrt{-1}\sin\theta y),$$

en sorte que

$$r^y(\cos\theta y + \sqrt{-1}\sin\theta y) = 1 + \frac{y\sqrt{-1}}{1} - \frac{y^2}{1.2} - \frac{y^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \frac{y^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5}\ldots$$

Cette formule peut être remplacée par les deux suivantes :

$$(3)\left\{\begin{aligned} r^y\cos\theta y &= 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{y^{2n}}{1.2.3\ldots 2n} \mp \ldots,\\ r^y\sin\theta y &= \frac{y}{1} - \frac{y^3}{1.2.3} - \ldots \pm \frac{y^{2n+1}}{1.2.3\ldots 2n+1} \mp \ldots \end{aligned}\right.$$

Or la première de ces deux formules devant subsister quand on y change y en $-y$, on en déduit

$$r^y = r^{-y}, \quad \text{d'où} \quad r = 1;$$

par suite, la seconde devient

$$\sin\theta y = \frac{y}{1} - \frac{y^3}{1.2.3} + \ldots;$$

d'où l'on déduit

$$(4)\qquad \frac{\sin\theta y}{y} = 1 - \frac{y^2}{1.2.3} + \ldots$$

Cette formule ayant lieu quel que soit y, faisons tendre cette variable vers zéro. Le second membre (p. 295) est une fonction continue de y; donc sa limite pour $y=0$ est 1. On a ensuite

$$\frac{\sin\theta y}{y}=\theta\,\frac{\sin\theta y}{\theta y}.$$

Or, pour $y=0$, la limite de $\frac{\sin\theta y}{\theta y}$ est l'unité; il en résulte que le premier membre de l'équation (4) se réduit à θ pour $y=0$. On a donc $\theta=1$, et par suite les formules (3) deviennent

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}\cos y&=1-\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^4}{1.2.3.4}-\frac{y^6}{1.2.3.4.5.6}-\ldots\\&\quad\pm\frac{y^{2n}}{1.2.3\ldots2n}\mp\ldots,\\\sin y&=\frac{y}{1}-\frac{y^3}{1.2.3}+\frac{y^5}{1.2.3.4.5}-\ldots\\&\quad\pm\frac{y^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)}\mp\ldots\end{aligned}\right.$$

Nous avons donc en résumé

$$\varphi(x)=e^x,\quad \varphi(y\sqrt{-1})=\cos y+\sqrt{-1}\sin y,$$
$$\varphi(x+y\sqrt{-1})=\varphi(x)\,\varphi(y\sqrt{-1})=e^x(\cos y+\sqrt{-1}\sin y).$$

X. — Usage des formules précédentes.

Le nombre que nous avons désigné par e dans le paragraphe précédent est, ainsi que nous l'avons vu, la base des logarithmes népériens. Pour calculer ce nombre, on part de la série

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}+\ldots.$$

Il est facile de calculer une limite de l'erreur commise en arrêtant la série au terme $\frac{1}{1.2.3\ldots n}$; mais, pour plus de généralité, nous considérerons la formule

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots.$$

Si nous arrêtons la série au $n+1^{ième}$ terme, l'erreur sera

$$\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\left[1 + \frac{x}{n+2} + \frac{x^2}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right],$$

c'est-à-dire, si x est positif, inférieure à

$$\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\left[1 + \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)^2} + \ldots\right],$$

c'est-à-dire à

$$\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\,\frac{1}{1-\frac{x}{n+1}}.$$

Si l'on suppose x moindre que n, cette quantité est évidemment moindre que

$$\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n}.$$

Lorsque x est négatif, $\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}$ est une limite de l'erreur.

Le nombre e est incommensurable et égal à

$$2,718281828459045\ldots.$$

Pour démontrer l'incommensurabilité du nombre e, il suffit d'observer que si l'on pouvait avoir

$$(1)\quad \frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots q} + \ldots,$$

p et q désignant deux entiers, on en déduirait, en multipliant par $1.2.3\ldots q$,

$$1.2.3\ldots(q-1).p = 1.2.3\ldots q + 2.3\ldots q + 3.4\ldots q + \ldots$$
$$+1+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\ldots.$$

Or cette égalité est absurde. En effet, le premier membre est entier; quant au second, il est évidemment fractionnaire, car

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\ldots<\frac{1}{(q+1)}+\frac{1}{(q+1)^2}+\ldots,$$

c'est-à-dire

$$<\frac{1}{q+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{q+1}},$$

ou bien

$$<\frac{1}{q}.$$

La formule (1) est donc absurde et le nombre e incommensurable. C. Q. F. D.

Les formules

$$\cos y = 1-\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^4}{1.2.3.4}-\ldots,$$

$$\sin y = y-\frac{y^3}{1.2.3}+\frac{y^5}{1.2.3.4.5}-\ldots,$$

sont les plus commodes que l'on puisse employer dans le calcul des lignes trigonométriques d'un arc donné; elles sont très-convergentes lorsque l'arc y est petit : la limite de l'erreur dans ces séries est égale au premier terme négligé.

La formule

$$e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\ldots$$

devient, en remplaçant x par xla, la caractéristique l servant à désigner un logarithme pris dans la base e,

$$a^x = 1 + \frac{xla}{1} + \frac{x^2 l^2 a}{1.2} + \ldots + \frac{x^n l^n a}{1.2.3\ldots n} + \ldots,$$

et cette formule peut servir au calcul de a^x.

XI. — Théorie des exponentielles imaginaires.

La fonction $\varphi(z)$, définie par la formule

$$\varphi(z) = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \ldots + \frac{z^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots,$$

jouit, comme nous avons vu (p. 317), de toutes les propriétés de la fonction exponentielle : elle se réduit pour les valeurs réelles de z à e^z; il est donc naturel de la désigner par le symbole e^z lorsque z devient imaginaire. Or nous avons trouvé (p. 320)

$$\varphi(x + y\sqrt{-1}) = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y);$$

il en résulte

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y),$$

et en particulier, pour $x = 0$,

$$(1) \qquad e^{y\sqrt{-1}} = \cos y + \sqrt{-1}\sin y.$$

Telle est la formule trouvée par Euler et qui lie les exponentielles aux lignes trigonométriques : cette formule ne constitue pas, à proprement parler, un théorème; elle renferme au contraire une définition, celle du symbole $e^{y\sqrt{-1}}$.

Nous définirons le symbole a^x par la formule

$$a^x = e^{x la},$$

démontrée dans le cas où x est réel.

Nous appellerons *logarithme* de x dans la base a la quantité z qui satisfait à la formule

$$a^z = x \quad \text{ou} \quad e^{z la} = x.$$

Si l'on remplace x par $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ et z par $u + v\sqrt{-1}$, il vient

$$e^{u la + v\sqrt{-1}\, la} = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

c'est-à-dire, en vertu de la formule (1),

$$e^{u la}[\cos(v la) + \sqrt{-1}\sin(v la)] = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta).$$

On déduit de là

$$e^{u la} = r, \quad v la = 2k\pi + \theta,$$

c'est-à-dire

$$u = \frac{lr}{la}, \quad v = \frac{1}{la}(2k\pi + \theta).$$

On a donc finalement

$$\log[r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)] = \frac{1}{la}\left[lr + (2k\pi + \theta)\sqrt{-1}\right].$$

Si dans cette formule on suppose θ égal à zéro, on trouve

$$\log r = \frac{1}{la}(lr + 2k\pi\sqrt{-1}).$$

Cette formule montre que les quantités positives, outre leur logarithme réel, ont encore une infinité de logarithmes imaginaires; si l'on y fait $r = 1$, on trouve

$$\log 1 = \frac{1}{la} 2k\pi\sqrt{-1}.$$

Cette formule fait connaître les logarithmes imaginaires de l'unité.

Il va sans dire que les formules

$$lab = la + lb, \quad l\frac{a}{b} = la - lb, \ldots,$$

s'appliquent aux logarithmes des quantités imaginaires comme à ceux des quantités réelles, avec certaines restrictions analogues à celles que nous avons rencontrées dans le calcul des radicaux.

XII. — Généralisation des formules trigonométriques.

Si l'on reprend les formules

$$(1) \quad \begin{cases} \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{1.2} + \dfrac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots, \\ \sin x = x - \dfrac{x^3}{1.2.3} + \dfrac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots, \end{cases}$$

et si l'on observe que les seconds membres restent convergents quand on suppose x imaginaire, on pourra regarder ces formules comme définissant, dans tous les cas possibles, les fonctions $\sin x$ et $\cos x$. Nous définirons les autres lignes trigonométriques à l'aide des formules

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cot x}, \quad \operatorname{séc} x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{coséc} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Des formules (1) on tire identiquement

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = e^{x\sqrt{-1}}.$$

C'est la formule d'Euler déjà démontrée plus haut; on en déduit, par le changement de x en $-x$,

$$\cos x - \sqrt{-1}\sin x = e^{-x\sqrt{-1}},$$

et par suite

$$(2)\qquad \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ces formules peuvent servir à vérifier toutes les formules de la Trigonométrie; ainsi on en déduit

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} + e^{-2x\sqrt{-1}} + 2}{4} - \frac{e^{2x\sqrt{-1}} + e^{-2x\sqrt{-1}} - 2}{4} = 1,$$

. . . .

Les formules (2) montrent que les fonctions $\cos\left(x\sqrt{-1}\right)$ et $\sqrt{-1}\sin\left(x\sqrt{-1}\right)$ sont réelles. On leur a donné les noms de cosinus et de sinus hyperboliques. Cf. Serret, 5e

Les fonctions $\text{arc}\sin x$, $\text{arc}\cos x$, $\text{arc tang}\, x$, etc., seront définies par les formules

$$\sin(\text{arc}\sin x) = x, \ldots.$$

Calculons, par exemple, $\text{arc tang}\left(y\sqrt{-1}\right)$; on a

$$\text{tang}\, x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}\,\frac{1}{\sqrt{-1}},$$

ou bien

$$\text{tang}\, x = \frac{1 - e^{2x\sqrt{-1}}}{1 + e^{2x\sqrt{-1}}}\sqrt{-1}.$$

Si l'on pose dans cette formule $\text{tang}\, x = u$, on en déduit

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1} - u}{\sqrt{-1} + u},$$

et par suite

$$2x\sqrt{-1} = l\,\frac{\sqrt{-1} - u}{\sqrt{-1} + u},$$

l désignant un logarithme pris dans la base e. Si l'on change dans cette formule u en $y\sqrt{-1}$, on a

$$2\sqrt{-1}\ \text{arc tang}(y\sqrt{-1}) = l\,\frac{1-y}{1+y},$$

ou bien

$$\text{arc tang}(y\sqrt{-1}) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\,l\,\frac{1-y}{1+y}.$$

Pour plus de détails, on peut consulter divers Mémoires de Cauchy dans les *Nouveaux Exercices de Mathématiques*, t. IV.

XIII. — Des fonctions transcendantes considérées comme limites de fonctions algébriques.

Reprenons la formule

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x, \tag{1}$$

démontrée p. 312; pour $x=1$ elle devient

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e.$$

Si dans la formule (1) on pose $m = \frac{1}{\alpha}$, on a

$$\lim(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = e^x \quad \text{pour} \quad \alpha = 0,$$

et pour $x = 1$,

$$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \quad \text{pour} \quad \alpha = 0.$$

La formule (1) donne, en changeant x en $\pm x\sqrt{-1}$,

$$\lim\left(1+\frac{\pm x\sqrt{-1}}{m}\right)^m = e^{\pm x\sqrt{-1}};$$

donc, en vertu des formules démontrées p. 326,

$$\frac{1}{2}\lim\left[\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{m}\right)^m+\left(1-\frac{x\sqrt{-1}}{m}\right)^m\right]=\cos x,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\lim\left[\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{m}\right)^m-\left(1-\frac{x\sqrt{-1}}{m}\right)^m\right]=\sin x.$$

Si dans la formule (1) nous posons $x=lz$, il vient

$$\lim\left(1+\frac{lz}{m}\right)^m=z;$$

si l'on avait rigoureusement

$$\left(1+\frac{lz}{m}\right)^m=z,$$

on déduirait de cette formule

$$lz=\left(z^{\frac{1}{m}}-1\right)m,$$

Tout porte donc à penser que la limite de l'expression

$$(2)\qquad \left(z^{\frac{1}{m}}-1\right)m,$$

pour $m=\infty$, est égale à lz. Posons

$$z^{\frac{1}{m}}=1+\alpha,$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{m}lz=l(1+\alpha)\quad\text{ou}\quad m=\frac{lz}{l(1+\alpha)};$$

l'expression (2) deviendra

$$\frac{lz}{l(1+\alpha)}\alpha\quad\text{ou}\quad\frac{lz}{l(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}};$$

mais quand on passe aux limites, $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ a pour limite e, et par suite l'expression (2) a pour limite lz. On a donc

$$\lim\left(z^{\frac{1}{m}}-1\right)m = lz \quad \text{pour} \quad m=\infty,$$

ou bien

$$\text{(3)} \qquad \lim\frac{z^\alpha - 1}{\alpha} = lz \quad \text{pour} \quad \alpha = 0.$$

Comme on peut faire $z=e$ dans cette formule, on a

$$\lim\frac{e^\alpha - 1}{\alpha} = 1;$$

donc

$$\lim\frac{z^\alpha - 1}{e^\alpha - 1} = lz.$$

XIV. — Séries logarithmiques.

Si dans la formule

$$lz = \lim\frac{z^\alpha - 1}{\alpha} \quad \text{pour} \quad \alpha = 0,$$

on pose $z=(1+x)$, on a

$$l(1+x) = \lim\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha},$$

en supposant $\operatorname{mod} x < 1$, la formule du binôme donne

$$l(1+x) = \lim\left[x + \frac{\alpha-1}{2}x^2 + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2.3}x^3 + \ldots\right],$$

ou

$$\text{(1)} \quad l(1+x) = \lim\left[x - (1-\alpha)\frac{x^2}{2} + (1-\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{x^3}{3} - \ldots\right].$$

Or, si nous désignons par R une quantité plus grande que le module de x, mais plus petite que 1, la série

$$R + \frac{R^2}{2} + \frac{R^3}{3} + \ldots + \frac{R^n}{n} + \ldots$$

sera convergente, comme ayant ses termes respectivement plus petits que ceux de la progression géométrique décroissante

$$R + R^2 + R^3 + \ldots + R^n + \ldots.$$

On pourra donc toujours prendre n assez grand pour que

$$\frac{R^{n+1}}{n+1} + \frac{R^{n+2}}{n+2} + \ldots < \delta,$$

et *à fortiori* pour que

$$\begin{aligned}\text{mod}\Big[&(1-\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}\\ &-(1-\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)\frac{x^{n+2}}{n+2}+\ldots\Big] < \delta,\end{aligned}$$

quelque petit que soit α. Or on peut toujours prendre α assez petit pour que

$$x - (1-\alpha)\frac{x^2}{2} + \ldots \pm (1-\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)\frac{x^n}{n}$$

diffère de

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots \pm \frac{x^n}{n}$$

d'une quantité dont le module soit inférieur à δ; en sorte que la formule (1) peut s'écrire

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots \pm \frac{x^n}{n} + \Omega,$$

Ω désignant une quantité dont le module reste inférieur à 2δ lorsque l'on fait diminuer indéfiniment α. Or δ

étant aussi petit que l'on veut, on aura rigoureusement

$$(2)\qquad l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\pm\frac{x^n}{n}\mp\ldots.$$

Mais cette formule n'est démontrée que pour les valeurs de x dont le module est *inférieur à* x; il ne faudrait donc pas en conclure

$$(3)\quad l(1+1)=l2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\pm\frac{1}{n}\mp\ldots$$

en passant aux limites, car la valeur de cette série n'est peut-être pas continue pour $x=1$. Pour faire sentir tout ce que ce raisonnement a de vicieux, observons que l'on peut intervertir les termes de la série (2), puisque cette série ne perd pas sa convergence quand on réduit ses termes à leur module, et l'on a ainsi

$$l(1+x)=x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^9}{9}+\frac{x^{11}}{11}-\ldots.$$

Si l'on en concluait

$$l(1+1)=l2=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\ldots,$$

la formule (3) donnerait

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$$
$$=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\ldots,$$

formule que nous avons reconnue inexacte p. 286.

Si dans la formule (3) on change x en $-x$, et si l'on retranche l'équation ainsi obtenue de l'équation (3), on trouve

$$l(1+x)-l(1-x)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right),$$

et en changeant x en $\frac{1}{z}$,

$$(4)\quad l(z+1)-l(z-1)=2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{3z^3}+\frac{1}{5z^5}+\ldots\right).$$

Posons maintenant

$$\frac{z+1}{z-1}=\frac{N+1}{N}\quad \text{ou}\quad l(z+1)-l(z-1)=l(N+1)-lN;$$

on en tire

$$z=2N+1,$$

et la formule (4) devient

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} & l(N+1) \\ & = lN+2\left(\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3(2N+1)^3}+\frac{1}{5(2N+1)^5}+\ldots\right). \end{aligned}\right.$$

Telle est la formule que l'on emploie quand on veut effectuer le calcul des logarithmes des nombres; en y faisant $N=1,\ 2,\ 3,\ldots$, on trouve

$$l2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.5^5}+\ldots\right),$$

$$l3=l2+2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}+\ldots\right),$$

....

On arrive ainsi à $l10$. En désignant alors par M le module des logarithmes vulgaires, on a

$$M=\log e=\frac{1}{l10},$$

et par conséquent la formule (6) donnera

$$\log(N+1)=\log N+2M\left(\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3(2N+1)^3}+\ldots\right).$$

On pourra faire $N = 1000$ dans cette formule, et elle fera connaître le logarithme de 1001, puis celui de 1002, etc. On a proposé d'autres formules encore plus expéditives; nous renverrons le lecteur curieux d'approfondir cette question à l'excellent ouvrage que M. Koraleck a publié sur ce sujet.

XV. — Calcul du nombre π.

Reprenons la formule

$$\frac{1}{2}[l(1+x) - l(1-x)] = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots,$$

Si l'on y fait $x = y\sqrt{-1}$, on a

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[l\left(1+y\sqrt{-1}\right) - l\left(1-y\sqrt{-1}\right)\right] \\ &\quad = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Or on a (p. 324)

$$l\left(1+y\sqrt{-1}\right) = \frac{1}{2}l(1+y^2) + (\operatorname{arc\,tang} y + 2k\pi)\sqrt{-1},$$

$$l\left(1-y\sqrt{-1}\right) = \frac{1}{2}l(1+y^2) - (\operatorname{arc\,tang} y + 2k\pi)\sqrt{-1}.$$

La formule (1) devient alors, en observant que k n'a pas forcément la même valeur dans ces deux formules,

$$\operatorname{arc\,tang} y + 2k\pi = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \ldots.$$

Pour $y = 0$, le second membre de cette équation s'annule; il doit donc en être de même du premier; donc

$k=0$; donc enfin

$$\operatorname{arc\,tang} y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \ldots,$$

et cette formule est démontrée pour toutes les valeurs de y comprises entre $+1$ et -1.

Il est aisé de vérifier la formule

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{239};$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \ldots\right),$$

Cette formule est éminemment propre au calcul de π.

EXERCICES.

1. Les séries

$$x\cos x + x^2\cos 2x + x^3\cos 3x + \ldots + x^n\cos nx + \ldots,$$
$$x\sin x + x^2\sin 2x + x^3\sin 3x + \ldots + x^n\sin nx + \ldots,$$

sont-elles convergentes? Trouver leurs valeurs.

2. Trouver les valeurs des séries

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots + nx^n + \ldots,$$
$$1 + x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + \ldots + n^2x^n + \ldots,$$
$$1 + x + 2^\mu x^2 + 3^\mu x^3 + 4^\mu x^4 + \ldots + n^\mu x^n + \ldots,$$
$$1 + r\cos\theta + 2^\mu r^2\cos 2\theta + \ldots + n^\mu r^n\cos n\theta + \ldots,$$
$$1 + r\sin\theta + 2^\mu r^2\sin 2\theta + \ldots + n^\mu r^n\sin n\theta + \ldots;$$

entre quelles limites ces séries sont-elles convergentes?

3. Démontrer les formules

$$\cos nx = \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1.2}\cos^{n-2}x\sin^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}x\sin^4 x - \ldots,$$

$$\sin nx = n\cos^{n-1}\sin x - \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}x\sin^3 x + \ldots;$$

entre quelles limites restent-elles exactes lorsque n n'est pas un nombre entier?

Lorsque l'on y fait $nx = z$, et que l'on y fait $n = \infty$, on en déduit

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots;$$

on propose de rendre ce raisonnement rigoureux.

4. Convergence et divergence de la formule du binôme, lorsque l'on suppose la lettre ordonnatrice égale à 1.

5. Démontrer les formules

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots,$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z(z+1)} + \frac{1}{(z+1)(z+2)} + \ldots + \frac{1}{(z+n)(z+n+1)} + \ldots,$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{x^4+1} + \ldots + \frac{2^n}{x^{2^n}+1} + \ldots.$$

6. On admettra que les fonctions $\tang x$ et $x\cot x$ soient développables en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de leurs variables; on emploiera la méthode des coefficients indéterminés pour trouver les différents termes de ces séries.

7. La fonction $\log x$ ne saurait coïncider avec aucune fonction rationnelle de x.

8. Mettre les expressions $\operatorname{arc\,tang}(x+y\sqrt{-1})$, $l\dfrac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$, et $\operatorname{arc\,cos}(x+y\sqrt{-1})$ sous la forme $a+b\sqrt{-1}$.

9. Développer en série ordonnée suivant les puissances croissantes de x les expressions suivantes :

$$l(a+bx+cx^2),$$

$$l\frac{x^2+px+q}{x^2+p'x+q'},$$

$$\frac{1}{x^2+2x\cos\omega+1}.$$

10. Démontrer les formules

$$1=\frac{1}{1.2}+\frac{2}{1.2.3}+\frac{3}{1.2.3.4}+\ldots+\frac{n}{1.2\ldots(n+1)}+\ldots,$$

$$2e=1+\frac{2}{1}+\frac{3}{1.2}+\frac{4}{1.2.3}+\ldots+\frac{n+1}{1.2.3\ldots n}.$$

CHAPITRE V.

SUR LES EXPRESSIONS CONTINUES.

I. — Des séries doubles.

Concevons qu'à l'intérieur d'un angle droit on mène une série illimitée de lignes équidistantes parallèles à chacun des côtés; on formera ainsi une sorte de quadrillage. Supposons maintenant qu'à l'intérieur de chacun des petits carrés ainsi formés on inscrive une quantité réelle ou imaginaire, on obtiendra ce que l'on appelle une *série double*; pour simplifier le langage, nous supposerons toujours l'un des côtés de l'angle droit vertical et l'autre horizontal.

Une série double est *convergente* lorsqu'en prenant n_1 termes dans la première rangée horizontale, n_2 dans la seconde, etc., n_m dans la $m^{ième}$, et en faisant la somme ainsi obtenue, cette somme tend vers une limite fixe appelée *valeur de la série*; lorsque les nombres m, n_1, $n_2, \ldots$, n_m augmentent indéfiniment, quelle que soit du reste la loi d'après laquelle ces nombres grandissent. Une série double qui n'est pas convergente est *divergente*.

Cauchy a étudié les séries doubles dans son *Analyse algébrique* et dans ses *Résumés analytiques*; mais il faut avouer que ses arguments n'ont pas toujours toute la rigueur que l'on exige dans l'étude des sciences exactes. Il y a entre les séries doubles et les séries ordinaires une analogie de propriétés semblable à celle que l'on rencontre dans l'étude de la Géométrie plane et de la Géométrie dans l'espace; c'est ce que l'on peut reconnaître dans l'énoncé des propositions suivantes, dont nous laisserons la démonstration aux soins du lecteur.

1° Pour qu'une série double soit convergente, il faut que les termes tendent vers zéro à mesure que l'on s'éloigne du sommet de l'angle droit.

2° Lorsqu'une série double a ses termes positifs et moindres respectivement que ceux d'une autre série à termes positifs et convergente, elle est elle-même convergente.

3° On n'altère pas la convergence d'une série double en changeant les signes de quelques termes.

4° Une série double à termes imaginaires est convergente si la série des modules de ses termes l'est elle-même.

5° Lorsqu'une série double ne perd pas sa convergence quand on réduit les termes à leur module, on peut sans inconvénient intervertir l'ordre de ses termes.

6° La somme des valeurs de deux séries doubles convergentes est une série ayant pour termes la somme des termes correspondants des séries proposées.

7° La série

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{1^\mu}\frac{1}{1^\mu}+\frac{1}{1^\mu}\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{1^\mu}\frac{1}{3^\mu}+\frac{1}{1^\mu}\frac{1}{4^\mu}+\ldots\\
\frac{1}{2^\mu}\frac{1}{1^\mu}+\frac{1}{2^\mu}\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{2^\mu}\frac{1}{3^\mu}+\frac{1}{2^\mu}\frac{1}{4^\mu}+\ldots\\
\frac{1}{3^\mu}\frac{1}{1^\mu}+\frac{1}{3^\mu}\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}\frac{1}{3^\mu}+\frac{1}{3^\mu}\frac{1}{4^\mu}+\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

est convergente pour $\mu > 1$.

II. — Des produits d'un nombre infini de facteurs.

Si l'on considère des facteurs en nombre illimité mais dans un ordre déterminé, on dit que leur produit est *convergent* si le produit des n premiers tend vers une limite déterminée différente de zéro, lorsque n augmente indéfiniment.

Théorème I. — *Un produit quelconque peut se mettre sous la forme*

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)(1+\alpha_{n+1})+\ldots,$$

et, pour qu'il soit convergent, il faut que α_n tende vers zéro.

En effet, en appelant P_n le produit des n premiers facteurs, on a

$$\frac{P_n}{P_{n-1}}=1+\alpha_n.$$

Or la limite de P_n, si le produit en question est convergent, doit être la même que celle de P_{n-1}; donc α_n doit avoir pour limite zéro.

Théorème II. — *Le produit suivant, dans lequel α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont positifs,*

$$(1)\qquad (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)\ldots,$$

est convergent ou divergent en même temps que la série

$$(2)\qquad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n\ldots.$$

En effet, on a

$$P_n \quad \text{ou} \quad (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)>1+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n.$$

Si donc la série (2) diverge, $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ augmente indéfiniment; donc P_n augmente indéfiniment avec n et le produit (1) est divergent.

D'un autre côté, on a

$$1+\alpha_1 < e^{\alpha_1}, \quad 1+\alpha_2 < e^{\alpha_2}, \ldots, \quad 1+\alpha_n < e^{\alpha_n}, \ldots;$$

donc

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n) < e^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}.$$

Si donc la série (1) est convergente, P_n aura une limite pour $n=\infty$, et par suite le produit (1) sera convergent.

Théorème III. — *Lorsque le produit*

$$(1) \qquad (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)\ldots$$

est convergent, la série

$$(2) \qquad l(1+\alpha_1)+l(1+\alpha_2)+\ldots$$

l'est aussi.

Théorème IV. — *Si le produit* (1) *devient convergent quand on remplace* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ *par leurs modules, il l'était primitivement.*

En effet, considérons la série (2); si l'on désigne en général par ρ_n le module de α_n, on pourra poser

$$l(1+\alpha_n)=\alpha_n+\theta\rho_n^2,$$

θ désignant une quantité dont le module est inférieur à 1 (*). Mais par hypothèse le produit

$$(1+\rho_1)(1+\rho_2)\ldots(1+\rho_n)+\ldots$$

(*) On sait, en effet, que le logarithme népérien de $1+\alpha_n$ est $\alpha_n-\frac{\alpha_n^2}{2}+\frac{\alpha_n^3}{3}-\ldots$, c'est-à-dire égal à α_n plus une quantité dont le module est convergent; donc la série dont le terme général est ρ_n est convergente (théorème II); donc *à fortiori* celles dont les termes généraux sont α_n et $\theta\rho_n^2$; donc enfin la série (2) est elle-même convergente. C. Q. F. D.

III. — Des fractions continues.

On appelle *fraction continue* une expression de la forme

$$a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots}}}$$

dans laquelle les quantités $a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots$ peuvent être en nombre illimité. Dans ce dernier cas, il est indispensable de définir ce que l'on appelle *valeur* de la fraction continue.

Lorsque l'expression

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a^2}{b_2 + \cdots + \cfrac{a_n}{b_n}}},$$

---

est inférieur à $\frac{1}{2}(\rho_n^2 + \rho_n^3 + \ldots)$ ou à $\frac{1}{2}\frac{\rho_n^2}{1-\rho_n}$. Or on peut supposer ρ_n inférieur à $\frac{1}{2}$, alors le module de la quantité négligée, en prenant $l(1+\alpha_n)$ égal à α_n, sera inférieur à ρ_n^2; cette quantité elle-même pourra donc être représentée par $\theta\rho^2$, θ désignant une quantité dont le module est inférieur à 1.

que nous désignerons par le symbole $\mathfrak{F}_1^n \frac{a}{b}$, tend vers une limite finie quand n croît indéfiniment, la fraction continue est dite *convergente*, et la limite de $\mathfrak{F}_1^n \frac{a}{b}$ ou $\mathfrak{F}_1^\infty \frac{a}{b}$ est ce que l'on appelle la valeur de la fraction continue; dans le cas où $\mathfrak{F}_1^n \frac{a}{b}$ ne tend vers aucune limite, la fraction est *divergente*.

La valeur de $\mathfrak{F}_1^n \frac{a}{b}$ est ce que l'on appelle la $n^{\text{ième}}$ *réduite*; $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots$ sont ce que l'on appelle les *fractions intégrantes*.

Occupons-nous de la formation des réduites. On a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{F}_1^1 \frac{a}{b} &= \frac{a_1}{b_1}, \\ \mathfrak{F}_1^2 \frac{a}{b} &= \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2}, \\ \mathfrak{F}_1^3 \frac{a}{b} &= \frac{a_1 b_2 b_3 + a_1 a_3}{b_1 b_2 b_3 + a_2 b_3 + b_1 a_3}. \end{aligned}\right.$$

La loi de formation de ces réduites est exprimée par la formule suivante :

$$(2)\qquad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n b_{n+1} + P_{n-1} a_{n+1}}{Q_n b_{n+1} + Q_{n-1} a_{n+1}},$$

dans laquelle P_i désigne d'une manière générale le numérateur et Q_i le dénominateur de la $i^{\text{ième}}$ réduite. Pour démontrer la formule (2), admettons qu'elle se vérifie jusqu'à une certaine valeur m de n, changeons m en $m+1$; nous allons voir qu'elle subsiste pour la nouvelle valeur de n. En effet, pour passer de la $m+1^{\text{ième}}$ réduite à la $m+2^{\text{ième}}$, il suffit de changer b_{m+1} en $b_{m+1} + \frac{a_{m+2}}{b_{m+2}}$; il vient alors

$$\frac{P_{m+2}}{Q_{m+2}} = \frac{(P_m b_{m+1} + P_{m-1} a_{m+1}) b_{m+2} + P_m a_{m+2}}{(Q_m b_{m+1} + Q_{m-1} a_{m+1}) b_{m+2} + Q_m a_{m+2}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{P_{m+2}}{Q_{m+2}} = \frac{P_{m+1} b_{m+2} + P_m a_{m+2}}{Q_{m+1} b_{m+2} + Q_m a_{m+2}}.$$

La formule (2) est donc vérifiée pour $n = m + 1$; or elle est satisfaite pour $n = 2$, comme le prouve la relation (1); elle l'est donc pour $n = 3$, par suite pour $n = 4, \ldots$; donc elle est générale. C. Q. F. D.

Les numérateurs et les dénominateurs des réduites peuvent se mettre sous la forme de déterminants; ainsi on a généralement :

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} P_n &= a_1 \begin{vmatrix} b_2, & -1, & 0, & 0, \ldots & & \\ a_3, & b_3, & -1, & 0, \ldots & & \\ 0, & a_4, & b_4, & -1, \ldots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & & a_n, & b_n \end{vmatrix}, \\ Q_n &= \begin{vmatrix} b_1, & -1, & 0, & 0, \ldots & & \\ a_2, & b_2, & -1, & 0, \ldots & & \\ 0, & a_3, & b_3, & -1, \ldots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & & a_n, & b_n \end{vmatrix}. \end{aligned} \right.$$

Ces deux formules remarquables peuvent, comme la précédente, se découvrir par voie d'induction; elles se vérifient directement pour $n = 1, 2, 3$: en admettant qu'elles se vérifient pour $n = m$, il est facile de voir qu'elles se vérifient encore pour $n = m + 1$, et par suite, comme elles ont été vérifiées pour $n = 3$, elles le sont pour $n = 4, 5, 6, \ldots$. En effet, pour passer de P_m à P_{m+1}, il faut avoir recours à la formule

$$P_{m+1} = P_m b_{m+1} + P_{m-1} a_{m+1};$$

or, si l'on ordonne le déterminant

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2, & -1, & 0, & 0, & 0, \ldots \\ a_3, & b_3, & -1, & 0, & 0, \ldots \\ 0, & a_4, & b_4, & -1 & 0, \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & a_{m+1}, & b_{m+1} \end{vmatrix}$$

par rapport aux éléments de la dernière ligne, on trouve qu'il est précisément égal à $P_m b_{m+1} + P_{m-1} a_{m+1}$. Donc, etc. C. Q. F. D.

IV. — Conversion des fractions continues en séries.

Lemme. — *Le déterminant* $P_{n+1} Q_n - Q_{n+1} P_n$ *a pour expression*

$$(-1)^{n+1} a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n+1}.$$

En effet, en remplaçant P_{n+1} et Q_{n+1} par leurs valeurs, on a

$$P_{n+1} Q_n - Q_{n+1} P_n = (P_n b_{n+1} + P_{n-1} a_{n+1}) Q_n - (Q_n b_{n+1} + Q_{n-1} a_{n+1}) P_n$$

ou

$$P_{n+1} Q_n - Q_{n+1} P_n = - a_{n+1} (P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}).$$

Si l'on transforme le second membre de cette formule comme on a transformé le premier, et ainsi de suite, on tombe finalement sur la formule

$$P_{n+1} Q_n - Q_{n+1} P_n = (-1)^{n+1} a_1 a_2 \ldots a_{n+1}.$$

C. Q. F. D.

La différence entre deux réduites consécutives est donnée par la formule

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n+1} Q_n - Q_{n+1} P_n}{Q_{n+1} Q_n},$$

c'est-à-dire, en vertu du lemme précédent,

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = (-1)^n \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}{Q_n Q_{n+1}}.$$

Ceci posé, on a identiquement

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_1}{Q_1} + \left(\frac{P_2}{Q^2} - \frac{P_1}{Q_1}\right) + \left(\frac{P_3}{Q_3} - \frac{P_2}{Q_2}\right) + \ldots + \left(\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1 a_2}{Q_1 Q_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{Q_2 Q_3} + \ldots + (-1) \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}{Q_n Q_{n+1}}.$$

Cette formule montre que $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ tend vers une limite finie ou indéterminée pour $n = \infty$, selon que le second membre tend aussi vers une limite finie ou indéterminée pour $n = \infty$; en d'autres termes, la fraction continue $\mathfrak{F}_1^\infty \frac{a}{b}$ est convergente ou divergente en même temps que la série

$$(4) \qquad \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1 a_2}{Q_1 Q_2} + \ldots \pm \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}{Q_n Q_{n+1}} \mp \ldots,$$

et de plus est égale à la valeur de cette série lorsqu'elle est convergente.

V. — Règles de convergence des fractions continues.

Les règles de convergence encore peu nombreuses et peu étudiées des fractions continues se déduisent de la considération de la série (4).

THÉORÈME I. — *Si les quantités $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ sont toutes positives et si le produit $b_1 b_2 \ldots b_n$ augmente indéfiniment avec n, la fraction continue $\mathfrak{F}_1^\infty \frac{1}{b}$ sera convergente.*

En effet, les déterminants (3) montrent que Q_n est supérieur au produit $b b_2 b_3 \ldots b_n$, et par suite la série (4), dans le cas que nous examinons, a ses termes alternativement positifs et négatifs et indéfiniment décroissants; elle est donc convergente, et par suite la fraction $\mathfrak{F}_1^\infty \frac{1}{b}$ l'est également. C. Q. F. D.

Le second déterminant (3) peut encore s'écrire :

$$Q_n = a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_n \begin{vmatrix} \frac{b_1}{a_1}, & -\frac{1}{a_1}, & 0\ldots & & \\ 1, & \frac{b_2}{a_2}, & -\frac{1}{a_2}, & 0\ldots & \\ 0, & 1, & \frac{b_3}{a_3}, & -\frac{1}{a_3}, & 0\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix};$$

on en déduit, en supposant $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ positifs,

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}{(a_1 a_2 \ldots a_n)^2 a_{n+1} \left(\frac{b_1}{a_1} \cdots \frac{b_n}{a_n}\right)^2 \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}},$$

ou bien

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}{Q_{n+1} Q_{n+1}} < \frac{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n+1}}{b_1^2 b_2^2 b_3^2 \ldots b_n^2 b_{n+1}}.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME II. — *Si le produit*

$$\frac{a_1}{b_1^2} \frac{a_2}{b_2^2} \frac{a_3}{b_3^2} \cdots \frac{a_n}{b_n^2} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$$

a pour limite zéro quand n augmente indéfiniment, la fraction $\mathfrak{F}_1^\infty \frac{a}{b}$ *est convergente.*

VI. — Conversion des séries en fractions continues

Reprenons la formule (4)

$$(4)\quad \mathfrak{F}_1^\infty \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1 a_2}{b_1(b_1 b_2 + a_2)} + \ldots \pm \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}{Q_n Q_{n+1}} \mp \ldots;$$

posons

$$(5)\quad \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}{Q_n Q_{n+1}} = u_{n+1},$$

nous aurons

$$u_n - u_{n+1} = \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}{Q_{n-1} Q_n Q_{n+1}} (Q_{n+1} - a_{n+1} Q_{n-1}).$$

Si l'on observe alors que

$$Q_{n+1} = Q_n b_{n+1} + a_{n+1} Q_{n-1},$$

cette formule devient

$$u_n - u_{n+1} = \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}{Q_{n-1} Q_{n+1}} b_{n+1};$$

d'où l'on conclut

$$(u_{n-1} - u_n)(u_n - u_{n+1}) = \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}{Q_{n-2} Q_{n-1}} \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{Q_n Q_{n+1}} b_n b_{n+1},$$

c'est-à-dire, en vertu de l'équation (5),

$$(u_{n-1} - u_n)(u_n - u_{n+1}) = \frac{b_n b_{n+1}}{a_{n+1}} u_{n-1} u_{n+1};$$

d'où l'on tire

$$(6)\quad a_{n+1} = \frac{b_n b_{n+1} u_{n-1} u_{n+1}}{(u_{n-1} - u_n)(u_n - u_{n+1})}.$$

Lorsqu'on se sera donné $b_1 b_2 \ldots$, ainsi que $u_1 u_2 \ldots$, les valeurs de $a_1 a_2 \ldots$ en résulteront immédiatement par la formule précédente. Or on peut choisir

$$b_{n+1} = u_n - u_{n+1},$$

et l'on aura

$$a_{n+1} = u_{n-1} . u_{n+1};$$

d'où résultera la formule suivante, en choisissant $b_1 = 1$,

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots$$
$$= \mathfrak{F}_1^\infty \frac{a}{b} = \cfrac{u_1}{1 + \cfrac{u_2}{u_1 - u_2 + \cfrac{u_1 u_2}{u_2 - u_3 + \cfrac{u_2 u_4}{u_3 - u_4 + \cdots}}}}.$$

Cette formule peut s'écrire comme il suit :

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots = \cfrac{1}{\cfrac{1}{u_1} + \cfrac{\cfrac{1}{u_1^2}}{\cfrac{1}{u_2} - \cfrac{1}{u_1} + \cfrac{\cfrac{1}{u_2^2}}{\cfrac{1}{u_3} - \cfrac{1}{u_2} + \cdots}}},$$

c'est-à-dire, en posant $\frac{1}{u_n} = v_n$,

$$\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} - \ldots = \cfrac{1}{v_1 + \cfrac{v_1^2}{v_2 - v_1 + \cfrac{v_2^2}{v_3 - v_2 + \cdots}}}.$$

EXEMPLE :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \cfrac{1}{1 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cdots}}}$$

Cette formule est due à mylord Brounker, créateur de la théorie des fractions continues.

Dans la formule (6) remplaçons u_n par $\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n}$, il vient

$$a_{n+1} = \frac{b_{n+1}\, b_n\, \lambda_n}{(\lambda_{n+1} - 1)(\lambda_n - 1)}.$$

Or nous pouvons prendre

$$b_{n+1} = \lambda_{n+1} - 1, \quad a_{n+1} = \lambda_n;$$

alors, en observant que la formule (6) ne s'applique pas au cas de $n = 0$, et que a_1 et b_1 doivent être déterminés directement à l'aide des relations

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{\lambda_1},$$

nous aurons

$$\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} - \ldots = \cfrac{1}{\lambda_1 + \cfrac{\lambda_1}{\lambda_2 - 1 + \cfrac{\lambda_2}{\lambda_3 - 1 + \cdots}}}$$

On trouve ainsi

$$1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \ldots = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cdots}}},$$

ou bien

$$\frac{1}{e-1} = \cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cdots}}}$$

VII. — Applications de la théorie des fractions continues a l'analyse numérique.

Lorsqu'on veut démontrer l'incommensurabilité de certaines transcendantes, un excellent moyen consiste à les développer, si l'on peut, en fractions continues, et le théorème suivant permet alors, dans un grand nombre de cas, de trancher la question.

Théorème I. — *Si les fractions* $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots$ *sont toutes en valeur absolue moindres que* 1, *la fraction* $\mathfrak{F}_1^\infty \frac{a}{b}$ *représentera un nombre incommensurable, pourvu que l'on n'ait pas, quel que soit* n, $b_n = a_n + 1$.

Nous supposerons $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ entiers, mais du reste quelconques, positifs ou négatifs. On aura d'abord en valeur absolue

$$\frac{a_1}{b_1} < 1;$$

mais $\frac{a_2}{b_2}$ étant inférieur à l'unité, $b_1 + \frac{a_2}{b_2}$ sera encore plus grand que a_1, car la différence entre a_1 et b_1 est au moins d'une unité, en sorte que quand même $\frac{a_2}{b_2}$ serait de signe contraire à b_1, on aurait toujours

$$\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} < 1.$$

En continuant ce raisonnement, on voit que $\mathfrak{F}_1^n \frac{a}{b}$, n étant un nombre fini, sera moindre que 1; mais on ne peut pas affirmer *à priori* que $\mathfrak{F}_1^\infty \frac{a}{b}$ soit moindre que 1. Tout ce que l'on peut dire, c'est que la limite de $\mathfrak{F}_1^n \frac{a}{b}$ est au plus égale à 1. Mais pour que $\mathfrak{F}_1^\infty \frac{a}{b} = 1$, il faudrait que b_1 différât de a_1 d'une unité et que l'on eût $\mathfrak{F}_2^\infty \frac{a}{b} = 1$, c'est-à-dire que b_2 différât de a_2 d'une unité, etc.; en sorte que l'on aura $\mathfrak{F}_1^\infty \frac{a}{b} = 1$ dans un seul cas représenté par la formule

$$\mathfrak{F}_1^\infty \frac{(-1)^{n-1} a}{a+1} = 1.$$

Ce cas est le cas d'exception signalé dans notre énoncé. Posons alors

$$\frac{B}{A} = \mathfrak{F}_1^\infty \frac{a}{b}, \quad \frac{C}{B} = \mathfrak{F}_2^\infty \frac{a}{b}, \quad \frac{D}{C} = \mathfrak{F}_3^\infty \frac{a}{b}, \ldots,$$

on aura

$$\frac{B}{A} = \frac{a_1}{b_1 + C:B},$$

c'est-à-dire

$$Bb_1 + C = a_1 A \quad \text{ou} \quad C = a_1 A - b_1 B.$$

Si donc B et A sont entiers, C le sera aussi, et ainsi de suite. Or si $\mathfrak{F}_1^\infty \frac{a}{b}$ est commensurable, on peut supposer A et B entiers; mais on a

$$\frac{B}{A} < 1, \quad \frac{C}{B} < 1, \ldots,$$

c'est-à-dire

$$A > B > C > D, \ldots.$$

Ainsi A, B, C, ... seraient des nombres entiers indéfiniment décroissants, ce qui est absurde; donc $\mathfrak{F}_1^\infty \frac{a}{b}$ est incommensurable. C. Q. F. D.

Première application. — La fraction $\mathfrak{F}_1^\infty \frac{1}{a}$, dans laquelle a est un entier, est incommensurable. Supposons cet entier constant, et soit z la valeur de la fraction, on aura

$$z = \frac{1}{a+z},$$

c'est-à-dire

$$z^2 + az - 1 = 0,$$

ou bien

$$z = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+4}}{2}.$$

$\sqrt{a^2+4}$ est donc toujours incommensurable; donc enfin a^2+4 n'est jamais un carré parfait si l'on a $a > 1$, ce qu'il est facile d'établir directement.

Deuxième application. — Posons

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(z) &= 1 + \frac{1}{1}\frac{x}{z} + \frac{1}{1.2}\frac{x^2}{z(z+1)} + \ldots \\ &\quad + \frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{x^n}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}. \end{aligned} \right.$$

Le second membre de cette formule est une série convergente, car le rapport d'un terme au précédent a pour expression générale $\frac{x}{n(z+n-1)}$, quantité qui a pour limite zéro pour $n = \infty$. On a, en changeant z en $z+1$,

$$\varphi(z+1) = 1 + \frac{1}{1}\frac{x}{z+1} + \frac{1}{1.2}\frac{x^2}{(z+1)(z+2)} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{x^n}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} \ldots;$$

d'où l'on tire aisément

$$\varphi(z) - \varphi(z+1) = \frac{x}{z(z+1)}\,\varphi(z+2),$$

ou, en multipliant par $\frac{z}{\varphi(z+1)}$,

$$\frac{z\varphi(z)}{\varphi(z+1)} = z + \frac{x\varphi(z+2)}{(z+1)\,\varphi(z+1)}.$$

Si l'on pose alors

$$\psi(z) = \frac{x\varphi(z+1)}{z\varphi(z)}, \tag{2}$$

on pourra écrire l'équation précédente comme il suit :

$$\frac{x}{\psi(x)} = z + \psi(z+1),$$

ou bien

$$\psi(z) = \frac{x}{z + \psi(z+1)}.$$

En changeant z en $z+1$, $z+2, \ldots$, on a

$$\psi(z+1) = \frac{x}{z+1+\psi(z+2)},$$

$$\psi(z+2) = \frac{x}{z+2+\psi(z+3)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et par conséquent

$$\psi(z) = \cfrac{x}{z + \cfrac{x}{z+1+\cfrac{x}{z+2+\cdots}}} \cdots + \frac{x}{z+i-1+\psi(z+i)}. \tag{3}$$

Or si l'on fait $z=\frac{1}{2}$, on a, en vertu de l'équation (2),

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=2x\frac{\varphi\left(\frac{3}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$=2x\frac{1+\frac{4x}{1.2.3}+\frac{4^2x^2}{1.2.3.4.5}+\ldots+\frac{4^nx^n}{1.2.3\ldots(2n+1)}}{1+\frac{4x}{1.2}+\frac{4^2x^2}{1.2.3.4}+\frac{4^4x^4}{1.2.3.4.5.6}+\ldots+\frac{4^nx^n}{1.2.3\ldots2n}}.$$

Cette équation peut encore s'écrire (p. 319)

$$(4)\qquad \psi\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{x}\,\frac{e^{2\sqrt{x}}-e^{-2\sqrt{x}}}{e^{2\sqrt{x}}+e^{-2\sqrt{x}}}.$$

En second lieu, la fonction $\psi(z)$ peut se mettre sous la forme

$$\psi(z)=\frac{x}{z}\,\frac{1+\frac{1}{1}\,\frac{x}{z+1}+\frac{1}{1.2}\,\frac{x^2}{(z+1)(z+2)+\ldots}}{1+\frac{1}{1}\,\frac{x}{z}+\frac{1}{1.2}\,\frac{x^2}{z(z+1)}+\ldots},$$

et si l'on fait augmenter i indéfiniment, $\psi(z+i)$ tend évidemment vers zéro, en sorte que pour $z=\frac{1}{2}$ l'équation (3) devient

$$2\sqrt{x}\,\frac{e^{2\sqrt{x}}-e^{-2\sqrt{x}}}{e^{2\sqrt{x}}+e^{-2\sqrt{x}}}=\cfrac{4x}{1+\cfrac{4x}{3+\cfrac{4x}{5+\cdots}}}.$$

Changeons x en $\frac{x^2}{4}$, nous aurons

$$(5) \qquad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \cdots}}}$$

Quel que soit x, les fractions $\frac{x^2}{3}, \frac{x^2}{5}, \frac{x^2}{7}, \ldots$ finissent par devenir moindres que 1. Si donc nous supposons x entier, nous voyons que $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est une quantité incommensurable en vertu du théorème précédent; donc e^x est aussi incommensurable. Ainsi :

THÉORÈME II. — *Les puissances entières du nombre e sont incommensurables.*

Dans la formule (5) changeons x en $x\sqrt{-1}$, nous aurons

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} = \cfrac{x\sqrt{-1}}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cdots}},$$

c'est-à-dire (p. 326), en vertu des relations connues,

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin x, \qquad \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \cos x,$$

$$\tang x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cdots}}}$$

ou bien, en changeant x en $\frac{p}{q}$,

$$\tang \frac{p}{q} = \cfrac{p}{q - \cfrac{p^2}{3q - \cfrac{p^2}{5q - \cdots}}}$$

On voit donc que si un arc $\frac{p}{q}$ est commensurable, sa tangente ne l'est pas, car les fractions $\frac{p^2}{3q}, \frac{p^2}{5q}, \frac{p^2}{7q}, \ldots$ finissent par devenir moindres que l'unité; il en résulte que le nombre $\frac{\pi}{4}$ est incommensurable, car s'il était commensurable, sa tangente, qui est 1, serait incommensurable. On en conclut le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *La circonférence d'un cercle est incommensurable avec son rayon.*

VIII. — APPLICATION DE LA THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES A LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES DU PREMIER DEGRÉ.

Considérons l'équation

$$ax + by = c,$$

dans laquelle nous supposerons a, b, c entiers; réduisons $\frac{a}{b}$ en fraction continue, et, à cet effet, soit a_0 le plus grand entier contenu dans $\frac{a}{b}\cdot$ Posons

$$\frac{a}{b} = b_0 + \frac{1}{z_1};$$

on déduit de là

$$z_1 = \frac{b}{a - b_0 b}.$$

On peut poser

$$z_1 = b_1 + \frac{1}{z_2},$$

et ainsi de suite; on a alors

$$\frac{a}{b} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cdots + \cfrac{1}{b_n}}}.$$

Cette fraction est forcément limitée, sans quoi (p. 350) le second membre ne saurait représenter un nombre commensurable.

Soit $\frac{a'}{b'}$ l'avant-dernière réduite, $\frac{a''}{b''}$ la dernière, on a (p. 344) pour deux réduites consécutives quelconques la relation

$$a'' b' - b'' a' = \pm 1;$$

de là on peut conclure que les réduites sont des fractions irréductibles. En effet, si a' et b' avaient un facteur commun, il devrait diviser ± 1, ce qui est absurde; ceci posé, $\frac{a''}{b''}$ est égal à $\frac{a}{b}$. Supposons que a et b soient premiers entre eux, on aura alors $a'' = a$, $b'' = b$ et

$$ab' - ba' = \pm 1;$$

d'où l'on tire

$$a(b'c) + b(-a'c) = \pm c.$$

On satisfera donc à l'équation proposée en prenant

$$x = \pm b' c, \quad y = \mp a' c.$$

Connaissant une solution, on connaît facilement toutes les autres. En effet, soit (x_0, y_0) une solution, on aura

$$ax_0 + by_0 = c;$$

on déduira de cette équation et de la proposée

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

et cette équation peut remplacer la proposée; on en déduit

$$y = a\frac{x_0 - x}{b} + y_0.$$

Or a et b étant premiers entre eux, pour que y soit une solution entière, il faut et il suffit que $\frac{x_0 - x}{b}$ soit un entier, et l'on a alors, pour satisfaire à la question, les systèmes de valeurs suivantes :

$$\begin{cases} x = x_0 \pm b, \\ y = y_0 \mp a, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm 2b, \\ y = y_0 \mp 2a, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm 3b, \ldots, \\ y = \mp 3a, \ldots, \end{cases}$$

Nous avons supposé a et b premiers entre eux; s'ils ne l'étaient pas et si du reste a, b, c n'avaient plus de diviseur commun, il est facile de voir que l'équation

$$ax + by = c$$

n'aurait pas de solutions entières, sans quoi le plus grand commun diviseur de a et b diviserait le premier membre de l'équation sans diviser le second.

Si a, b, c avaient un facteur commun, il faudrait le supprimer, après quoi on rentrerait dans le cas que nous venons de traiter.

EXERCICES.

1. On a :

$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots \\ +\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots \\ +\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots \end{array}\right| = 1.$$

2. Démontrer que π^2 est un nombre incommensurable.

3. Trouver la valeur de la fraction

$$\cfrac{x}{y+\cfrac{x}{y+\cfrac{x}{y+\cfrac{x}{y+\ddots}}}}$$

4. Développer le nombre π en fraction continue, de telle sorte que les numérateurs soient l'unité (du moins, trouver les premiers termes de la fraction continue); former les réduites successives.

5. Étant donnée l'équation

$$a^x = \mathrm{N},$$

dans laquelle a et N sont deux entiers, on propose de développer x en fraction continue dont les numérateurs soient l'unité et dont les dénominateurs soient entiers (trouver seulement les premiers termes); former les réduites.

6. Démontrer les formules

$$x \sin x = \cos\frac{1}{2}x \cos\frac{1}{4}x \cos\frac{1}{3}x \ldots \cos\frac{2}{2^n}\ldots$$

$$\frac{1}{1-x} = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n})\ldots.$$

CHAPITRE VI.

THÉORIE DES FONCTIONS ENTIÈRES.

I. — Rappel de quelques notions fondamentales.

Théorème I. — *Lorsqu'un polynôme entier* $F(x)$ *s'annule pour* $x = a$, *il est divisible par* $x - a$.

Théorème II. — *Lorsqu'un polynôme entier* $F(x)$ *s'annule pour* $x = a$, $x = b, \ldots,$ $x = l$, *il peut se mettre sous la forme*

$$F(x) = \varphi(x)(x-a)(x-b)\ldots(x-l),$$

$\varphi(x)$ *désignant un autre polynôme entier.*

Théorème III. — *Un polynôme entier* $F(x)$ *ne peut s'annuler pour plus de valeurs de sa variable qu'il n'y a d'unités dans son degré.*

Théorème IV. — *Deux polynômes entiers* $F(x)$ *et* $f(x)$, *dont les degrés sont au plus égaux à* m, *ne peuvent être égaux pour plus de* m *valeurs de* x *sans être identiques, c'est-à-dire sans avoir leurs coefficients égaux chacun à chacun.*

Théorème V. — *Deux polynômes* $F(x, y, z, \ldots)$, $f(x, y, z, \ldots)$ *du degré* m *au plus par rapport à* x, *du degré* n *au plus par rapport à* y, *etc., ne sauraient être égaux pour plus de* m *systèmes de valeurs de leurs variables sans être identiques, c'est-à-dire sans avoir leurs* *coefficients égaux deux à deux, si l'on a*

$$m > n > \ldots$$

La démonstration de ces théorèmes a déjà été donnée dans la première Partie de cet ouvrage, en supposant les fonctions et les variables réelles ; mais il est facile de voir que cette hypothèse n'empêche pas la généralité des résultats.

II. — Des fonctions dérivées.

Problème. — *Étant donné un polynôme entier*

$$(1) \qquad F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

on demande d'effectuer le développement de $F(x+h)$ *suivant les puissances de la quantité arbitraire* h.

La solution de ce problème sera pour nous d'une extrême importance, comme nous le verrons dans la suite. En changeant dans la formule (1) x en $x+h$, on a

$$F(x+h) = a_0 + a_1(x+h) + a_2(x+h)^2 + \ldots + a_n(x+h)^n.$$

Pour effectuer le développement de $F(x+h)$, il suffit évidemment d'appliquer la formule du binôme à chacune des quantités $(x+h)$, $(x+h)^2, \ldots, (x+h)^n$ qui entrent dans l'équation précédente et d'effectuer la réduction des termes semblables. En procédant ainsi, on voit que le coefficient de h^i dans le résultat se composera de la somme algébrique des coefficients de h^i dans $(x+h)^0$, $(x+h)^1$, $(x+h)^2, \ldots, (x+h)^n$, respectivement multipliés par $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Sa valeur sera donc

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{1.2.3\ldots i}\big[i(i-1)\ldots 2.1.a_i + \ldots \\ &\qquad\qquad + n(n-1)\ldots(n-i+1)a_n x^{n-i}\big]. \end{aligned} \right.$$

En désignant par $F^{(i)}(x)$ le polynôme entre crochets, on a donc

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} F(x+h) = F(x) &+ \frac{h}{1}F'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots \\ &+ \frac{h^i}{1.2.3\ldots i}F^{(i)}(x) + \ldots + a_n h^n. \end{aligned} \right.$$

$F'(x)$ est ce que l'on appelle la *dérivée* de $F(x)$; sa valeur s'obtient en faisant $i=1$ dans la formule (2), et l'on a

$$F'(x) = a_1 + 2ax + 3ax^2 + \ldots + na_n x^{n-1};$$

sa valeur se déduit, comme on voit, de $F(x)$ en multipliant chaque terme par l'exposant de x dans ce terme et en diminuant cet exposant d'une unité. En faisant $i=2$, on a

$$F''(x) = 2a + 3.2ax + \ldots + n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

$F''(x)$ se déduit de $F'(x)$ comme $F'(x)$ se déduisait de $F(x)$, en sorte que $F''(x)$ est la *dérivée* de $F'(x)$ ou encore la *dérivée seconde* de $F(x)$; $F'''(x)$ est la dérivée de $F''(x)$ ou la *dérivée troisième* de $F(x)$, etc. On voit que la $n+1^{ième}$ dérivée de $F(x)$ est nulle.

Remarque. — Le développement de $F(x+h)$ ordonné suivant les puissances de h ne peut être effectué que d'une seule manière, en vertu du théorème IV, p. 360; on peut donc définir la dérivée d'un polynôme comme il suit :

La dérivée d'un polynôme $F(x)$ est le coefficient de h dans le développement de $F(x+h)$ ordonné suivant les puissances entières et positives de h.

Théorème I. — *La dérivée d'une fonction entière* $F(x)$ *est la limite vers laquelle tend le rapport de l'accroissement* $F(x+h) - F(x)$ *que prend cette fonc-*

tion, pour un accroissement h de sa variable, à l'accroissement de cette variable lorsque ce dernier tend vers zéro.

En effet, en vertu de la formule (3), on a

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \ldots;$$

on en déduit

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x) + \frac{h}{1.2} F''(x) + \ldots.$$

Si l'on fait tendre h vers zéro, les termes qui contiennent h en facteur dans le second membre s'évanouissent et l'on a

$$(4) \qquad \lim \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x),$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Corollaire. — Nous avions déjà démontré la continuité de la fonction x^m, celle de la fonction entière s'en déduit immédiatement; toutefois la formule (4) conduit simplement au même résultat. En effet, si à l'accroissement infiniment petit h de la variable x ne correspondait pas un accroissement infiniment petit $F(x+h) - F(x)$ de la fonction, le rapport $\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ n'aurait pas de limite.

Théorème II. — *Lorsque la dérivée d'un polynôme $F(x)$ est positive, le polynôme croît en même temps que x; lorsque cette dérivée est négative, le polynôme décroît quand on fait croître x.*

En effet, puisque l'on a

$$\lim \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x) \quad \text{pour} \quad h = 0,$$

on peut écrire

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=F'(x)+\varepsilon,$$

ε désignant une quantité qui tend vers zéro avec h et dont l'expression est du reste donnée par la formule (3); on en conclut

$$F(x+h)-F(x)=h[F'(x)+\varepsilon].$$

Si donc $F'(x)$ est positif, on voit que l'on pourra toujours prendre ε assez petit pour que $F'(x)$ donne son signe au second membre de l'équation précédente, pourvu que h soit positif, et alors $F(x+h)-F(x)$ sera de même signe que $F'(x)$ pour les petites valeurs de h, ce qui revient à dire que $F(x)$ croît avec x si $F'(x)$ est positif, et décroît dans le cas contraire.

Nous terminerons ces considérations en montrant comment on peut, dans certains cas, simplifier la recherche de la dérivée d'un polynôme. Soient $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$,..., $F_i(x)$ des polynômes entiers; proposons-nous de calculer la dérivée de leur produit.

Désignons le produit en question par $f(x)$, sa dérivée est le coefficient de h dans $f(x+h)$; or, on a

$$f(x+h)=F_1(x+h).F_2(x+h)\ldots F_i(x+h),$$

c'est-à-dire, en désignant par $F'_1(x)$, $F'_2(x)$,... les dérivées de $F_1(x)$, $F_2(x)$,...,

$$f(x+h)=[F_1(x)+hF'_1(x)+\ldots][F_2(x)+hF'_2(x)+\ldots]\ldots$$

Or, il est aisé de voir que le coefficient de h, dans le second membre de cette équation, est égal à

$$F'_1(x)F_2(x)\ldots F_i(x)+F'_2(x)F_1(x)F_3(a)\ldots F_i(x)+\ldots.$$

Ainsi, on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *La dérivée d'un produit de plusieurs polynômes est égale à la somme des résultats obtenus en multipliant la dérivée de chacun d'eux par le produit des autres.*

COROLLAIRE I. — On en déduit facilement la formule suivante :

$$(5)\qquad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{F'_1(x)}{F(x)} + \frac{F'_2(x)}{F_2(x)} + \ldots + \frac{F'_i(x)}{F_i(x)},$$

qui nous sera fort utile dans la suite.

COROLLAIRE II. — Si l'on suppose

$$F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_i(x),$$

on trouve, pour la dérivée de $[F(x)]^i$,

$$i\,F'(x)[F(x)]^{i-1}.$$

III. — THÉORÈME DE D'ALEMBERT.

Toute équation de la forme

$$F(z) = 0$$

dans laquelle $F(z)$ *représente un polynôme entier à coefficients réels ou imaginaires de la forme* $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, *admet nécessairement une racine de la même forme.*

Ce théorème est souvent attribué à Cauchy. Voici comment Gauss s'exprime à ce sujet dans un Mémoire publié en 1799 (*) :

« Prima theorematis demonstratio illustri geometræ d'Alembert debetur (*Recherches sur le calcul intégral, Histoire de l'Académie de Berlin,* année 1746, p. 182

(*) Cauchy, né vers 1789, n'avait donc guère plus de dix ans.

et suiv.). Eadem exstat in Bougainville (*Traité de Calcul intégral*; Paris, 1754, p. 47 et suiv.). »

Gauss, dans le Mémoire en question, discute successivement plusieurs démonstrations données par d'Alembert, Euler, Foncenex et Lagrange; enfin il propose la sienne, qui, extrêmement remarquable en elle-même, prête cependant à des objections sérieuses sur la continuité des fonctions.

La démonstration que l'on va lire est au fond celle que Cauchy a donnée à l'aide de considérations géométriques et infinitésimales dans le tome IV (p. 169) des *Nouveaux Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*.

Soit ζ la valeur de z pour laquelle $F(z)$ a le plus petit module; nous allons montrer que ce module minimum est zéro. A cet effet, supposons-le différent de zéro : soit h une quantité quelconque, on aura

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} F(\zeta+h) = F(\zeta) &+ \frac{h^i}{1.2\ldots i}F^i(\zeta)\\ &+ \frac{h^{i+1}}{1.2\ldots(i+1)}F^{i+1}(\zeta)+\ldots,\end{aligned}\right.$$

i désignant l'ordre de la première dérivée de $F(z)$ qui ne s'annule pas pour $z=\zeta$. Nous ferons observer que toutes ces dérivées ne sauraient être nulles à la fois, sans quoi l'on aurait, quel que soit h,

$$F(\zeta+h)=F(\zeta),$$

et $F(z)$ serait constant. Posons

$$\begin{aligned} F(\zeta+h) &= M(\cos\Omega+\sqrt{-1}\sin\Omega),\\ F(\zeta) &= \rho(\cos\omega+\sqrt{-1}\sin\omega),\\ \frac{F^k(\zeta)}{1.2.3\ldots k} &= \rho_k(\cos\omega_k+\sqrt{-1}\sin\omega_k),\\ h &= r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta).\end{aligned}$$

La formule (1) se réduira aux deux suivantes (p. 261) :

$$(2)\quad \begin{cases} M\cos\Omega = \rho\cos\omega + r^i\rho_i\cos(\omega_i + i\theta) \\ \qquad\qquad + r^{i+1}\rho_{i+1}\cos\left(\omega_{i+1} + \overline{i+1}\,\theta\right) + \ldots, \\ M\sin\Omega = \rho\sin\omega + r^i\rho_i\sin(\omega_i + i\theta) \\ \qquad\qquad + r^{i+1}\rho_{i+1}\sin\left(\omega_{i+1} + \overline{i+1}\,\theta\right) + \ldots. \end{cases}$$

Or, dans la première de ces deux équations, les termes du second membre, à partir de $r^{i+1}\rho_{i+1}\cos\left(\omega_{i+1} + \overline{i+1}\,\theta\right)$, ont une somme moindre que

$$r^{i+1}P(1 + r + r^2 + \ldots),$$

P désignant la plus grande des quantités $\rho_{i+1}, \rho_{i+2}, \ldots,$ c'est-à-dire en supposant $r < 1$ moindre que

$$\frac{r^{i+1}P}{1-r};$$

on peut donc écrire la première équation (2) ainsi qu'il suit :

$$(3)\qquad M\cos\Omega = \rho\cos\omega + r^i\rho_i\cos(\omega_i + i\theta) + r^{i+1}\varepsilon,$$

ε désignant une quantité inférieure à $\frac{P}{1-r}$, c'est-à-dire qui reste inférieure à une quantité déterminée quand r diminue depuis une limite $r_0 < 1$ jusqu'à zéro. En désignant par η une quantité définie comme ε, on arrive de même à la formule

$$(4)\qquad M\sin\Omega = \rho\sin\omega + r^i\rho_i\sin(\omega_i + i\theta) + r^{i+1}\eta.$$

Ceci posé, choisissons θ de telle sorte, que l'on ait :

$$\sin(\omega_i + i\theta) = -\sin\omega,\quad \cos(\omega_i + i\theta) = -\cos\omega;$$

ajoutons les équations (3) et (4) ; après avoir multiplié la seconde par $\sqrt{-1}$, il vient

$$M\left(\cos\Omega + \sqrt{-1}\sin\Omega\right)$$
$$= (\rho - r^i\rho_i)\left(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega\right) + r^{i+1}\left(\varepsilon + \eta\sqrt{-1}\right).$$

En observant alors que le module d'une somme est moindre que la somme des modules de ses parties, cette formule donne, en prenant r assez petit pour que $r^i \rho_i$ soit moindre que ρ,

$$M < \rho - r^i \rho_i + r^{i+1}\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2}.$$

Or, ε et η restant inférieurs à une quantité déterminée quand r tend vers zéro, il en sera de même de $\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2}$, et par suite on pourra toujours prendre

$$r^{i+1}\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2} < r^i \rho_i.$$

et, par conséquent,

$$M < \rho;$$

donc, quelle que soit la valeur du module ρ de $F(\zeta)$, on pourra toujours trouver une valeur $F(\zeta + h)$ ayant un module moindre ; donc il y a absurdité à supposer le minimum du module ρ de $F(z)$ différent de zéro ; donc enfin $F(z)$ passe au moins une fois par zéro pour une valeur réelle ou imaginaire de sa variable. C. Q. F. D.

Corollaire I. — *Tout polynôme* $F(z)$ *du degré* n *peut se mettre sous la forme*

$$F(z) = F_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n),$$

F_n *désignant une constante.*

En effet, si nous posons

$$F(z) = 0,$$

l'équation ainsi obtenue a une racine. Soit α_1 cette racine, $F(z)$ s'annulant pour $z = \alpha_1$ est divisible par $z - \alpha_1$; on peut donc poser

$$F(z) = F_1(z)(z-\alpha_1), \tag{1}$$

$F_1(z)$ désignant un polynôme du degré $n-1$. Mais on trouvera de la même façon

$$(2) \qquad F_1(z) = F_2(z)(z - \alpha_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(n) \qquad F_{n-1}(z) = F_n(z - \alpha_n),$$

F_n désignant une constante, F_{n-1} un polynôme du premier degré, F_{n-2} un polynôme du second degré, etc. En multipliant les équations (1), (2),..., (n) membre à membre, on a

$$F(z) = F_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n).$$

C. Q. F. D.

Corollaire II. — Si donc on pose

$$F(z) = 0,$$

l'équation ainsi obtenue peut se mettre sous la forme

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n) = 0,$$

à laquelle on peut satisfaire en posant $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; donc *toute équation du degré n a en général n racines.* Il pourrait se faire que quelques-uns des facteurs $z - \alpha_1$, $z - \alpha_2, \ldots$ fussent égaux, et alors l'équation

$$F(z) = 0$$

n'aurait pas n racines; mais alors on considère comme racines doubles, triples, etc., celles qui correspondent aux facteurs binômes qui entrent deux, trois, etc., fois dans F(z). A l'aide de cette convention, on peut énoncer ce théorème général :

Toute équation du degré n a n racines.

Corollaire III. — *Supposons le polynôme* F(z) *à coefficients réels; si l'équation* F(z) = 0 *admet pour racine* $\mu + \nu\sqrt{-1}$, *elle admettra un nombre égal de fois pour racine* $\mu - \nu\sqrt{-1}$.

En effet, décomposons $F(z)$ en facteurs linéaires, nous aurons

$$F(z) = F_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n).$$

Ce polynôme ayant ses coefficients réels ne doit pas changer quand on change $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$, z restant réel; en désignant alors par $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots$ ce que deviennent $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ par ce changement, on a

$$(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n) = (z-\alpha'_1)\ldots(z-\alpha'_n).$$

Or nous avons vu (p. 360) que lorsque deux polynômes étaient égaux pour un nombre de valeurs supérieur à leur degré, ils étaient identiques; comme de plus un polynôme de degré n ne peut s'annuler pour plus de n valeurs de sa variable, il en résulte que les quantités α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$ sont égales deux à deux; donc $\mu + \nu\sqrt{-1}$ sera aussi souvent racine que $\mu - \nu\sqrt{-1}$.

C. Q. F. D.

Corollaire IV. — *Un polynôme réel est décomposable en un produit de facteurs réels du premier et du second degré.*

En effet, considérons toujours la formule

$$F(z) = F_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n).$$

Si l'on considère deux facteurs binômes correspondants à deux racines conjuguées $\mu + \nu\sqrt{-1}$, $\mu - \nu\sqrt{-1}$, leur produit

$$(z-\mu-\nu\sqrt{-1})(z-\mu+\nu\sqrt{-1}) = z^2 - 2\mu z + \mu^2 + \nu^2$$

se réduit à un trinôme réel du second degré. Or les racines imaginaires étant conjuguées deux à deux, il en résulte que $F(z)$ se réduit, comme nous l'avions annoncé, à un produit de facteurs réels du premier et du second degré.

Ce corollaire est le théorème que Gauss substitue au théorème de d'Alembert, tel que nous l'avons énoncé, dans son Mémoire publié en 1799; la démonstration de Gauss est très-curieuse, car il ne se sert pas des quantités imaginaires.

IV. — Relations entre les coefficients et les racines d'une équation algébrique.

Théorème I. — *Si l'on désigne par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ les racines de l'équation*

$$(1)\quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n = 0,$$

on aura les relations

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} a_{n-1} = -\sum \alpha = -(\alpha + \beta + \ldots + \lambda), \\ a_{n-2} = \sum \alpha\beta = \alpha\beta + \alpha\gamma + \ldots + \beta\gamma + \ldots, \\ a_{n-3} = -\sum \alpha\beta\gamma, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 = \pm \alpha\beta\gamma \ldots \lambda. \end{array}\right.$$

En effet, le premier membre de l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda).$$

Or, nous avons appris (p. 185) à former ce produit. Le coefficient de x^n est 1, celui de x^{n-1} s'obtient en prenant le second terme dans chacun des facteurs binômes et en ajoutant les résultats; celui de x^{n-2} s'obtient en multipliant entre eux les seconds termes de deux facteurs pris

24.

de toutes les manières possibles, etc., ce qui fournit les relations (2).

Remarque. — Puisque le théorème précédent fournit m relations entre les racines, il semble que l'on pourrait profiter de ces relations pour résoudre l'équation (1); effectivement, ces relations peuvent être utiles dans certains cas, mais on peut montrer qu'en cherchant à éliminer β, γ, ..., λ, l'équation en α que l'on obtient ainsi ne diffère pas de (1). En effet, si l'on multiplie par α^{n-1} la première des équations (2), par α^{n-2} la seconde, et ainsi de suite; si l'on ajoute les résultats, on trouve, réductions faites,

$$a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \ldots + a_0 = -\alpha^n,$$

équation identique avec (1). On aurait pu écrire cette formule *à priori*, en observant que le résultat obtenu en éliminant $n-1$ quelconques des n racines devait être toujours le même à cause de la symétrie des formules (2); le résultat de l'élimination devait donc admettre pour racines α, β,..., λ, c'est-à-dire être identique avec l'équation (1).

On appelle *fonction symétrique* de plusieurs quantités une expression qui ne change pas de valeur quand on échange entre elles deux de ces quantités; ainsi, abc est une fonction symétrique de a, b, c, et, en vertu du théorème précédent, les coefficients d'une équation sont des fonctions symétriques des racines. Nous allons apprendre à calculer les fonctions symétriques rationnelles des racines d'une équation.

Théorème II. — *Les sommes des puissances semblables des racines d'une équation algébrique s'expriment rationnellement en fonction des coefficients.*

Conservons les mêmes notations que plus haut, et posons de plus

$$\sum \alpha^i = s_i;$$

en désignant par $f'(x)$ la dérivée de $f(x)$, et en observant que

$$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\lambda),$$

on a, en vertu du théorème (p. 365),

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \ldots + \frac{1}{x-\lambda} = \sum \frac{1}{x-\alpha},$$

d'où l'on déduit, en désignant par i un exposant entier et positif,

$$\frac{x^{i+1} f'(x)}{f(x)} = \sum \frac{x^{i+1}}{x-\alpha}:$$

effectuons la division dans le second membre, et arrêtons-nous dès que nous trouverons un reste de degré inférieur au diviseur, nous aurons

$$\frac{x^{i+1} f'(x)}{f(x)} = mx^i + s_1 x^{i-1} + s_2 x^{i-2} + \ldots + s_i + \sum \frac{\alpha^{i+1}}{x-\alpha};$$

chassons le dénominateur $f(x)$, le second membre ne contiendra plus de dénominateurs, car $f(x)$ est divisible par $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2$, ... et $x^{i+1}f'(x)$ va pouvoir se mettre sous la forme

$$x^{i+1} f'(x) = f(x)\,[mx^i + s_1 x^{i-1} + \ldots + s^i] + \psi(x),$$

$\psi(x)$ désignant une quantité de degré inférieur à $f(x)$. Ceci prouve que le polynôme écrit entre crochets est le quotient de la division de $x^{i+1}f'(x)$ par $f(x)$, et que $\psi(x)$ en est le reste (*voir* p. 55, première Partie). On voit donc que s_n est le coefficient de x^{i-n} dans le quotient de la division de $x^{i-1}f'(x)$ par $f(x)$, ou, ce qui revient au même,

s_n est le coefficient de $\frac{1}{x^{n+1}}$ dans le quotient de la division de $f'(x)$ par *$f(x)$, ordonné par rapport aux puissances négatives de x.*

On prouverait de la même manière que

— s_{-n} est le coefficient de x^{n-1} dans le quotient de la division de $f'(x)$ par $f(x)$, ordonné par rapport aux puissances croissantes de x.

Théorème III. — *Toute fonction symétrique rationnelle des racines d'une équation algébrique s'exprime rationnellement à l'aide des coefficients de cette équation.*

Il suffit évidemment d'établir ce théorème pour les fonctions symétriques entières; or, toute fonction entière de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ est une somme de termes de la forme $A\alpha^i\beta^j\ldots$; si cette fonction est symétrique, elle sera la somme de termes de la forme

$$\sum A\alpha^i\beta^j\ldots.$$

Si donc nous prouvons que cette expression s'exprime rationnellement en fonction des coefficients de l'équation, le théorème sera démontré. Or on a, pour $i \gtrless j$,

$$\sum \alpha^i\beta^j = s_i s_j - s_{i+j},$$

et, dans le cas où $i = j$,

$$2\sum \alpha^i\beta^i - s_i^2 - s_{2i}.$$

On aurait de même, en supposant $i \gtrless j \gtrless k$,

$$\sum \alpha^i\beta^j\gamma^k = s_k\sum \alpha^i\beta^j - \sum \alpha^{i+k}\beta^j - \sum \alpha^i\beta^{j+k},$$

et ainsi de suite. Donc, etc. C. Q. F. D.

V. — Des diviseurs algébriques.

Si l'on désigne par $F(x)$ un polynôme du degré m, nous avons vu que ce polynôme s'annule en général pour m valeurs réelles ou imaginaires de sa variable x, ou, pour parler plus exactement, nous avons vu que tout polynôme $F(x)$ du degré m pouvait être mis sous la forme d'un produit de m facteurs linéaires multipliés par une quantité indépendante de x. Cette décomposition ne peut évidemment se faire que d'une seule manière; en effet, si l'on pouvait avoir à la fois

$$F(x) = A\,(x-\alpha)^{\mu}\,(x-\beta)^{\nu}\ldots,$$
$$F(x) = A'(x-\alpha')^{\mu'}(x-\beta')^{\nu'}\ldots,$$

A et A′ désignant des quantités indépendantes de x, on en conclurait

$$A\,(x-\alpha)^{\mu}(x-\beta)^{\nu} = \ldots = A'(x-\alpha')^{\mu'}\,(x-\beta')^{\nu'}\ldots.$$

Or, le premier membre s'annulant pour $x=\alpha, \beta, \ldots$ et seulement pour ces valeurs de x, il doit en être de même du second, ce qui ne peut avoir lieu que si les quantités $\alpha', \beta', \ldots$ sont respectivement égales à α, $\beta, \ldots$; en outre, je dis que $\mu = \mu'$. En effet, si l'on supposait, par exemple, $\mu > \mu'$, en divisant les deux membres de l'équation précédente par $(x-\alpha)^{\mu'}$, le premier membre s'annulerait encore pour $x = \alpha$, tandis que le second serait essentiellement différent de zéro. On a donc $\mu = \mu'$, $\nu = \nu', \ldots$ et par suite $A = A'$; les facteurs linéaires d'un polynôme jouent donc le même rôle que les nombres premiers en arithmétique.

On appelle *plus grand commun diviseur entre deux polynômes* P *et* Q le produit des facteurs linéaires communs à ces deux polynômes multiplié ou non par un facteur constant.

Problème. — *Trouver le plus grand commun diviseur entre deux polynômes* U *et* V.

Pour résoudre ce problème, nous suivrons une marche analogue à celle que l'on suit en Arithmétique pour trouver le plus grand commun diviseur entre deux nombres; nous diviserons U par V en supposant le degré de U égal ou supérieur à celui de V. Si V divise U, il sera le plus grand commun diviseur cherché; sinon, en désignant par Q le quotient et par R le reste, nous aurons

$$U = VQ + R.$$

Or R, en vertu de cette formule, est identique à $U - VQ$; il doit donc forcément admettre les facteurs linéaires communs à U et V; donc le plus grand commun diviseur entre V et R contient les mêmes facteurs que celui qui existe entre U et V. De même, U admettant les facteurs linéaires communs à V et à R, le plus grand commun diviseur de U et V contient les mêmes facteurs que celui de V et R; donc enfin les deux plus grands communs diviseurs en question, se composant des mêmes facteurs linéaires, sont égaux, à un facteur constant près, c'est-à-dire sont les mêmes puisque nous faisons abstraction des facteurs constants. Mais R est de degré inférieur à V; donc la recherche du plus grand commun diviseur de V et R est plus simple que celle du plus grand commun diviseur de U et V.

Divisons V par R; si la division se fait exactement, R sera le plus grand commun diviseur cherché; sinon, en appelant Q′ le quotient et R′ le reste, on aura

$$V = RQ' + R'.$$

Un raisonnement semblable à celui que nous venons de faire nous conduit à diviser R par R'; si la division se fait exactement, R' sera le plus grand commun diviseur cherché; sinon on posera

$$R = R'Q'' + R'',$$

et l'on divisera R' par R'', et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on tombe sur un reste divisant le précédent (et dans ce cas ce reste est le plus grand commun diviseur cherché), ou bien jusqu'à ce que l'on tombe sur un reste indépendant de x, et dans ce cas il n'existe pas de diviseur commun entre U et V.

Remarque. — On n'altère évidemment pas les facteurs linéaires du reste d'une division algébrique en multipliant chaque dividende partiel par une quantité indépendante de la lettre ordonnatrice x; car cette multiplication n'introduit dans le reste que des facteurs indépendants de x. On pourra donc, pour éviter les dénominateurs, multiplier par des facteurs convenables les dividendes partiels que l'on rencontre dans la recherche des restes successifs dont le dernier doit être le plus grand commun diviseur. A la fin de ce paragraphe, nous trouverons quelques applications de la recherche du plus grand commun diviseur.

Théorème I. — *Pour que le polynôme* $F(x)$ *admette* n *fois le facteur* $x-\alpha$, *il faut et il suffit que ce polynôme s'annule pour* $x=\alpha$, *ainsi que ses* $n-1$ *premières dérivées.*

En d'autres termes :

Pour que l'équation $F(x)=0$ *admette* m *fois la racine* α, *il faut et il suffit que* $F(x)$ *s'annule pour* $x=\alpha$ *ainsi que ses* $n-1$ *premières dérivées.*

En effet, on a identiquement

$$F(x) = F(\alpha + x - \alpha),$$

et par suite, en posant dans la formule (3), p. 362, $x = \alpha$, $h = x - \alpha$, il vient

$$F(x) = F(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1} F'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{1.2} F''(\alpha) + \ldots$$
$$+ \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{1.2.3\ldots n-1} F^{n-1}(\alpha) + \Omega,$$

Ω désignant un ensemble de termes qui contiennent tous le facteur $(x-\alpha)^n$; les termes qui précèdent Ω étant de degré inférieur à $(x-\alpha)^n$ représentent le reste de la division de $F(x)$ par $(x-\alpha)^n$, et pour que $F(x)$ soit divisible par $(x-\alpha)^n$, il faut que ce reste soit nul quel que soit x, et par suite, quel que soit $x-\alpha$; on devra donc avoir

$$F(\alpha) = 0, \quad F'(\alpha) = 0, \quad F''(\alpha) = 0, \ldots, \quad F^{n-1}(\alpha) = 0.$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, il est bien évident que $F(x)$ sera divisible par $(x-\alpha)^n$.

C. Q. F. D.

THÉORÈME II. — *Le plus grand commun diviseur entre* $F(x)$ *et* $F'(x)$ *se compose de tous les facteurs linéaires multiples de* $F(x)$ *élevés chacun à une puissance égale à leur ordre de multiplicité diminué de* 1.

En effet, soit

$$F(x) = A(x-\alpha)^\mu (x-\beta)^\nu \ldots,$$

on aura (p. 365)

$$F'(x) = A\mu(x-\alpha)^{\mu-1}(x-\beta)^\nu + \ldots$$
$$+ A\nu(x-\alpha)^\mu (x-\beta)^{\nu-1} + \ldots.$$

Les seuls facteurs linéaires communs entre $F(x)$ et $F'(x)$ sont $x-\alpha$, $x-\beta,\ldots$, et $x-\alpha$ n'entre que $\mu-1$ fois dans la dérivée, $(x-\beta)$, $\nu-1$ fois, etc.; le plus grand commun diviseur entre $F(x)$ et $F'(x)$ est donc

$$(x-\alpha)^{\mu-1}(x-\beta)^{\nu-1}\ldots.$$

On verrait de même que le plus grand commun diviseur entre $F(x)$ et $F''(x)$ est

$$(x-\alpha)^{\mu-2}(x-\beta)^{\nu-2}\ldots,$$

et ainsi de suite. C. Q. F. D.

Applications. — 1° x^m-1 a pour dérivée mx^{m-1}; si l'on divise $x^{m-1}-1$ par mx^{m-1}, ou, pour éviter les dénominateurs, si l'on divise mx^m-m par mx^{m-1}, on trouve pour reste $-m$; x^m-1 n'a donc jamais de diviseur commun avec sa dérivée; donc $x^m-1=0$ n'a pas de racines égales.

2° Cherchons le plus grand commun diviseur entre

$$x^3+px^2+qx+r=U$$

et sa dérivée

$$3x^2+2px+q=U';$$

le reste de la division de U par U′ est

$$(6q-2p^2)x+9r-pq,$$

à un facteur constant près. En divisant $U'=3x^2+2px+q$ par ce reste, on trouve à un facteur constant près, pour nouveau reste,

$$3(9r-pq)^2+2p(6q-2p^2)(9r-pq)+q(6q-2p^2)^2;$$

en égalant ce reste à zéro, l'équation proposée acquiert deux racines égales.

La méthode du plus grand commun diviseur est bien simple en théorie, mais d'une complication inouïe dès que l'on entre dans le domaine des applications; on cache cette difficulté aux élèves en leur donnant des exemples choisis d'avance et pour lesquels les calculs se font avec facilité. Si le lecteur veut se convaincre du fait que j'avance, il n'a qu'à chercher les conditions pour qu'une équation du quatrième degré

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

ait ses racines égales deux à deux. On doit exprimer que le plus grand commun diviseur est du second degré; les calculs sont fort longs, et l'on arrive aux conditions bien simples

$$p^2 s - r^2 = 0, \quad (4q - p^2)^2 = 4s,$$

si faciles à obtenir en exprimant que le premier membre de l'équation est un carré parfait.

VI. — Transformation des équations.

On appelle *transformée* d'une équation une seconde équation dont les racines soient des fonctions données des racines de la proposée.

Problème I. — *Soient* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ *les racines d'une équation* $F(x) = 0$; *on propose de former une équation admettant pour racines* $\varphi(\alpha), \varphi(\beta), \ldots, \varphi(\lambda)$, *sans résoudre l'équation donnée.*

Voici une solution, et la seule qu'il soit utile de mentionner. Posons

(1) $$\varphi(x) = z;$$

en résolvant cette équation, on en déduit

(2) $$x = \psi(z).$$

Si l'on forme alors l'équation

$$(3) \qquad F[\psi(x)] = 0,$$

il est clair que cette dernière sera satisfaite quand on y remplacera x par $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta), \ldots, \varphi(\lambda)$. En effet, des équations (1) et (2) on tire

$$x = \psi(z) = \psi[\varphi(x)],$$

et par suite

$$\alpha = \psi[\varphi(\alpha)], \quad \beta = \psi[\varphi(\beta)], \ldots;$$

donc

$$F(\alpha) = F\{\psi[\varphi(\alpha)]\} = 0, \quad F(\beta) = F\{\psi[\varphi(\beta)]\} = 0, \ldots;$$

donc enfin l'équation (3) est bien la transformée demandée.

Première application. — *Changer les signes des racines de l'équation* $F(x) = 0$.

On a

$$\varphi(x) = -x, \quad \psi(x) = -x, \quad F[\psi(x)] = F(-x).$$

L'équation qui satisfait à la question est donc

$$F(-x) = 0;$$

elle porte le nom de *transformée en* $-x$.

Deuxième application. — On verrait de même que

$$\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

a pour racines les inverses des racines de l'équation $F(x) = 0$; c'est la *transformée en* $\frac{1}{x}$ de cette équation.

Troisième application. — *Augmenter d'une quantité* h *toutes les racines de l'équation* $F(x) = 0$.

On a

$$\varphi(x) = x + h, \quad \psi(x) = x - h;$$

la transformée est ici

$$F(x - h) = 0,$$

c'est-à-dire

$$F(x) - \frac{h}{1} F'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) - \ldots = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$F(-h) + \frac{x}{1} F'(-h) + \frac{x^2}{1.2} F''(-h) \ldots = 0.$$

Remarque. — En augmentant d'une quantité convenable les racines d'une équation, on obtient une équation transformée de même degré que la proposée. Supposons que l'équation proposée soit du degré n; si l'on pose alors

$$F^i(-h) = 0,$$

le terme en x^i disparaîtra de l'équation transformée, et l'on voit que pour faire disparaître ce terme il faudra résoudre l'équation précédente qui est de degré $n - i$. Les solutions feront alors connaître les quantités dont il faut augmenter les racines de l'équation proposée pour faire disparaître le terme en x^i de la transformée. On voit que pour faire disparaître le terme indépendant de x il faudrait résoudre l'équation

$$F(-h) = 0,$$

ce qui revient au fond à résoudre l'équation proposée. On conçoit, en effet, que la transformée ayant alors une racine égale à zéro, il faille diminuer chaque racine de la proposée d'une quantité égale à l'une d'elles, ce qui suppose que l'on sache résoudre celle-ci.

L'évanouissement du terme en x^{n-1} dépend de la résolution d'une équation du premier degré

$$F^{n-1}(-h) = 0.$$

Si l'on a

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

l'équation précédente pourra s'écrire

$$-n a_n h + a_{n-1} = 0;$$

d'où l'on déduira

$$h = \frac{a_{n-1}}{n a_n},$$

et l'équation

$$F\left(x - \frac{a_{n-1}}{n a_n}\right) = 0$$

ne contiendra pas de terme en x^{n-1}.

Par exemple, l'équation générale du troisième degré

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

pourra toujours se ramener à la forme

$$x^3 + px + q = 0.$$

A cet effet, il suffira de remplacer x par $x - \frac{b}{3a}$ et de diviser le résultat par le coefficient de x^3 dans la transformée; l'équation du second degré

$$x^2 + px + q = 0$$

se ramènera à la forme

$$x^2 + q - \frac{p^2}{4} = 0.$$

En remplaçant x par $x - \frac{p}{2}$, les racines de la transformée sont

$$x = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

celles de la proposée sont donc

$$x = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - \frac{p}{2}.$$

Problème II. — *En désignant toujours par $\alpha, \beta, \ldots, \theta, \ldots, \lambda$ les racines de l'équation $F(x) = 0$, on demande de former une équation dont les racines soient $\varphi(\alpha, \beta, \ldots, \theta)$, et les résultats obtenus en permutant les lettres qui entrent dans cette expression avec toutes les racines de $F(x) = 0$ de toutes les manières possibles.*

Soient $u, v, w, \ldots$ les racines de la transformée; les quantités $\sum u$, $\sum uv$, $\sum uvw, \ldots, uvw\ldots$ seront des fonctions symétriques des racines $\alpha, \beta, \ldots$; ces fonctions pourront donc se calculer par les moyens indiqués p. 374. Or ces quantités sont au signe près les coefficients de la transformée que l'on cherche; le problème est donc résolu au point de vue théorique.

Application. — *Former l'équation aux carrés des différences de l'équation*

$$(1) \qquad x^3 + px + q = 0,$$

c'est-à-dire former une équation dont les racines soient les carrés des différences de l'équation proposée.

En désignant par α, β, γ les racines de l'équation (1), celles de l'équation transformée seront

$$(\alpha - \beta)^2, \quad (\beta - \gamma)^2, \quad (\alpha - \gamma)^2;$$

cette équation sera donc du troisième degré.

Si l'on observe alors que

$$(2) \quad \alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = p, \quad \alpha\beta\gamma = -q,$$

on a

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma = 0,$$

et par suite

(3) $$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)=-2p;$$

on en conclut

(4) $$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2=4p^2.$$

Or des équations (2) on tire

$$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2+2(\alpha+\beta+\gamma)\alpha\beta\gamma=p^2,$$

c'est-à-dire

(5) $$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2=p^2;$$

la formule (4) devient alors

(6) $$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2p^2.$$

Ceci posé, dans l'équation transformée que nous cherchons le coefficient de x^2 est

$$\begin{aligned}&-(\alpha-\beta)^2-(\alpha-\gamma)^2-(\beta-\gamma)^2\\&\quad=-2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma),\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en vertu de l'équation (3), $6p$; le coefficient de x est

$$\begin{aligned}&(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2+\ldots\\&=(\alpha\beta+\beta\gamma-\alpha\gamma-\beta^2)^2+\ldots\\&=[\beta(\alpha+\gamma-\beta)-\alpha\gamma]^2+\ldots\\&=(2\beta^2+\alpha\gamma)^2+\ldots\\&=4(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)+4\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2,\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en vertu des formules (2), (5), (6), $9p^2$. Enfin le terme indépendant de x est (p. 113),

$$-(\alpha-\beta)^2\times(\beta-\gamma)^2\times(\alpha-\gamma)^2=-\begin{vmatrix}1, & 1, & 1\\ \alpha, & \beta, & \gamma\\ \alpha^2, & \beta^2, & \gamma^2\end{vmatrix}^2,$$

c'est-à-dire

$$(7)\qquad -\begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix},$$

s_0, s_1, s_2, s_3 et s_4 désignant les sommes des puissances 0, 1, 2, 3, 4 de α, β, γ. Nous connaissons s_0, s_1, s_2, s_4, reste à calculer s_3. Or on a, en multipliant s_1 par s_2,

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + \ldots = 0;$$

d'un autre côté, en multipliant $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma$ par $\alpha + \beta + \gamma$, on trouve

$$\alpha^2\beta + \beta^2\alpha + \ldots + 3\alpha\beta\gamma = 0.$$

De ces deux formules on déduit, en observant que $-\alpha\beta\gamma = q$,

$$s_3 = 3q;$$

l'expression (7) devient donc

$$-\begin{vmatrix} 3, & 0, & -2p \\ 0, & -2p, & 3q \\ -2p, & 3q, & 2p^2 \end{vmatrix} = 4p^3 + 27q^2,$$

et l'on a finalement pour l'équation cherchée

$$x^3 + 6px^2 + 9p^2x + 4p^3 + 27q^2 = 0.$$

On voit donc que si $4p^3 + 27q^2 = 0$, l'équation aux carrés des différences aura une racine nulle, et par suite l'équation proposée aura deux racines égales.

On appelle *équations réciproques* les équations dans lesquelles les coefficients des termes également éloignés des extrêmes sont égaux.

THÉORÈME. — *Une équation réciproque de degré pair peut se ramener à une équation de degré moitié moindre.*

Considérons par exemple l'équation

$$x^{2m} + Px^{2m-1} + Qx^{2m-2} + \ldots + Sx^m + \ldots + Px + 1 = 0,$$

elle peut s'écrire comme il suit, en divisant par x^m,

$$(1) \qquad \left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + P\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) + \ldots + S = 0.$$

En posant alors

$$(2) \qquad x + \frac{1}{x} = z,$$

on a, en élevant à la puissance i les deux membres,

$$\left(x^i + \frac{1}{x^i}\right) + i\left(x^{i-2} + \frac{1}{x^{i-2}}\right) + \ldots = z^i.$$

Cette formule permet, en faisant $i = 1, 2, 3, \ldots$, de calculer successivement les valeurs de $x^i + \frac{1}{x^i}$ pour toutes les valeurs de i; en portant ces valeurs dans l'équation (1), cette formule prend la forme

$$Az^m + Bz^{m-1} + \ldots = 0.$$

Lorsque cette équation sera résolue, on en déduira la valeur de x par la formule (2).

EXERCICES.

1. Si $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ désignent les m racines de l'équation $F(x) = 0$ et a_m le coefficient de x^m dans $F(x)$, on aura

$$\frac{1}{F'(\alpha)} + \frac{1}{F'(\beta)} + \ldots + \frac{1}{F'(\lambda)} = 0,$$
$$\frac{\alpha}{F'(\alpha)} + \frac{\beta}{F'(\beta)} + \ldots + \frac{\lambda}{F'(\lambda)} = 0,$$

$$\frac{\alpha^{m-1}}{F'(\alpha)} + \frac{\beta^{m-1}}{F'(\beta)} + \ldots + \frac{\lambda^{m-1}}{F'(\lambda)} = 0,$$

$$\frac{\alpha^{m}}{F'(\alpha)} + \frac{\beta^{m}}{F'(\beta)} + \ldots + \frac{\lambda^{m}}{F'(\lambda)} = a_m.$$

(CAUCHY.)

2. Si dans un polynôme entier $F(z)$ on pose $z = x + y\sqrt{-1}$, et si on le met sous la forme $\varphi(x, y) + \sqrt{-1}\,\psi(x, y)$, la dérivée de $\varphi(x, y)$ prise par rapport à y sera identique à la dérivée de φ prise par rapport à x, et la dérivée de φ prise par rapport à x sera égale et de signe contraire à la dérivée de ψ prise par rapport à y.

3. Développer en série ordonnée par rapport aux puissances croissantes de x le logarithme d'un polynôme; trouver la loi des coefficients de cette série.

4. Si U et V désignent des polynômes entiers en x, et s'il existe une quantité α indépendante de x telle, que l'équation

$$U - \alpha V = 0$$

admette une racine double ω, cette racine satisfera à l'équation

$$VU' - UV' = 0,$$

dans laquelle U' et V' sont les dérivées de U et V. (JACOBI.)

5. Une équation à coefficients commensurables qui admet une fois la racine $a + \sqrt{b}$, a et b désignant des nombres rationnels et $\sqrt{b}$ un nombre irrationnel, admet aussi la racine $a - \sqrt{b}$.

CHAPITRE VII.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

I. — Marche a suivre dans la résolution d'une équation de degré supérieur au second.

Les efforts que les géomètres ont faits pour arriver à la résolution des équations de tous les degrés les ont conduits à cette conclusion, qui est un des plus beaux titres de l'illustre Abel : *Les équations du cinquième degré et en général des équations de degré supérieur au cinquième ne sauraient être résolues à l'aide de fonctions algébriques de leurs coefficients.*

Il ne s'agit ici que d'équations générales, c'est-à-dire dans lesquelles on n'a donné aucune valeur particulière aux coefficients ; ainsi nous verrons plus loin que l'équation $x^5 - 1 = 0$ se résout algébriquement avec la plus grande facilité.

La démonstration du théorème d'Abel touche à des considérations d'un ordre trop élevé pour trouver place dans un ouvrage tel que celui-ci. (Pour plus de détails, *voir* le tome II de l'*Algèbre supérieure* de M. Serret.)

Lagrange, Laplace, Cauchy, Paoli ont fait connaître diverses formules qui permettent de développer en série les racines des équations. Dans ces derniers temps, M. Tetmayer s'est occupé d'un semblable mode de résolution des équations ; moi-même j'ai fait connaître, il y a quelque temps, une formule du même genre. Malheureusement, les séries que l'on obtient ainsi ne sont pas convergentes pour toutes les valeurs des coefficients de l'équation que l'on veut résoudre, et en général ces séries ne développent qu'une seule racine.

Cauchy, en s'aidant du calcul des résidus dont il est le créateur, est arrivé à donner une expression, sous une forme transcendante, des racines d'une équation ; mais les fonctions transcendantes dont il fait usage sont discontinues, en sorte que si l'on fait varier les coefficients de l'équation, au bout d'un certain temps la fonction qui représentait une racine change brusquement et représente alors la somme de deux ou d'un plus grand nombre de racines. Ces résultats sont extrêmement curieux, mais se prêtent difficilement au calcul numérique.

L'usage des séries est sans contredit le procédé le plus rapide pour le calcul des racines d'une équation : nous n'avons pas à le faire connaître ici ; du reste, pour l'appliquer avec succès, il faut commencer par faire subir à l'équation une suite de modifications que nous allons étudier.

Lorsque l'on veut résoudre une équation, on commence par limiter les racines, c'est-à-dire par resserrer autant que possible l'espace dans lequel elles se trouvent renfermées ; la recherche des racines imaginaires se ramenant à celle des racines réelles, nous nous occuperons d'abord de celles-ci.

Lorsque l'on connaît une limite supérieure et une limite inférieure des racines réelles, on procède en général à la recherche des racines commensurables (cette recherche, comme nous le verrons, est assez simple) ; ces racines une fois calculées, on en débarrasse l'équation en divisant son premier membre par un facteur convenable.

On remplace ensuite, s'il y a lieu, l'équation simplifiée par la suppression des racines commensurables par une ou par plusieurs autres qui n'admettent que des racines simples appartenant à la proposée en qualité de racines simples ou multiples.

On est ainsi ramené à la résolution d'une équation qui ne contient plus ni racines commensurables ni racines égales ; on procède alors à la *séparation des racines*. C'est l'opération la plus délicate de toute cette théorie : elle a pour but de déterminer pour chaque racine deux nombres qui la comprennent à l'exclusion de toutes les autres.

Dès qu'une racine est *séparée*, on peut lui appliquer, soit le développement en série, soit les méthodes d'approximation dont nous parlerons plus loin.

II. — Propriétés fondamentales des équations.

Nous allons avoir souvent besoin de former la valeur d'un polynôme donné pour une valeur donnée de sa variable : voici le moyen le plus expéditif d'arriver au résultat.

Soient m la plus haute puissance de x, a_i le coefficient de x^i, s la valeur numérique attribuée à x; après avoir formé le produit sa_m, on y ajoute a_{m-1} et l'on multiplie le résultat par s. On ajoute a_{m-2} au produit et l'on multiplie ce nouveau résultat par s, et ainsi de suite. Cette règle n'a pas besoin d'être démontrée.

Théorème. — *Désignons par* $F(x)$ *un polynôme entier en* x *à coefficients réels.*

1° *Si* $F(a)$ *et* $F(b)$ *sont de signe contraire, l'équation*

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

admettra au moins une racine réelle comprise entre a *et* b*, et en tout cas un nombre impair de racines comprises entre ces limites.*

2° *Si* $F(a)$ *et* $F(b)$ *sont de même signe, l'équa-*

tion (1) *n'aura pas de racines comprises entre a et b, ou bien on en aura un nombre pair.*

En effet, la fonction $F(x)$ étant continue entre les limites a et b, si $F(a)$ et $F(b)$ sont l'un positif, l'autre négatif, zéro sera une valeur intermédiaire par laquelle $F(x)$ devra passer; en second lieu, je dis qu'entre a et b il existe forcément un nombre impair de racines. Pour le démontrer, désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ les racines comprises entre a et b; plusieurs d'entre elles pouvant être égales, on aura

$$(2)\quad F(x) = \varphi(x)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda),$$

$\varphi(x)$ désignant le produit des facteurs binômes de $F(x)$ correspondant aux racines non comprises entre a et b. $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ sont deux quantités de même signe, sans quoi $\varphi(x)$ pourrait s'annuler entre les limites a et b, serait par conséquent divisible par un facteur tel que $x-\omega$ et pourrait se mettre sous la forme

$$\varphi(x) = \psi(x)(x-\omega);$$

par suite, on aurait

$$F(x) = \psi(x)(x-\omega)(x-\alpha)\ldots(x-\lambda),$$

et $F(x)$ s'annulerait pour $x=\omega$; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ ne seraient donc pas les seules racines comprises entre a et b.

Ceci posé, si l'on fait successivement $x=a$, $x=b$ dans l'équation (2), le premier membre prend des valeurs de signe contraire; il doit donc en être de même du second. Or $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ sont de même signe; donc

$$(3)\quad (a-\alpha)(a-\beta)\ldots(a-\lambda)$$

et

$$(4)\quad (b-\alpha)(b-\beta)\ldots(b-\lambda)$$

sont de signe contraire, ce qui ne peut avoir lieu que si les facteurs $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$,..., $(x-\lambda)$ sont en nombre impair, car $a-\alpha$ et $b-\alpha$, $a-\beta$ et $b-\beta$, . . . sont de signes contraires, et par suite le nombre des racines α, β, . . . , λ est impair. Si au contraire $F(a)$ et $F(b)$ étaient de même signe, α, β, . . . , λ devraient être en nombre pair ou nul. C. Q. F. D.

Corollaire I. — *Toute équation* $F(z)=0$ *de degré impair à coefficients réels admet au moins une racine réelle et toujours un nombre impair de racines réelles.*

Car le premier membre prend les valeurs $+\infty$ et $-\infty$ quand on y fait $x=\pm\infty$ et $x=\mp\infty$.

Corollaire II. — *Toute équation* $F(z)=0$ *de degré pair à coefficients réels admet un nombre pair de racines réelles, ce nombre pouvant du reste se réduire à zéro.*

Car son premier membre a le même signe pour $x=+\infty$ et $x=-\infty$.

Corollaire III. — *Toute équation* $F(x)=0$ *de degré pair, dans laquelle le premier terme et le dernier sont de signe contraire, a au moins deux racines réelles.*

En effet, $F(0)$ et $F(+\infty)$ sont de signes contraires, $F(0)$ et $F(-\infty)$ aussi.

III. — Limites des racines.

On appelle *limite supérieure* (ou *limite inférieure*) des racines d'une équation un nombre supérieur (ou inférieur) à la plus grande (ou à la plus petite) des racines de cette équation.

Une limite supérieure des racines d'une équation $F(x)=0$ est un nombre qui, substitué à la place de l'inconnue x, fait acquérir au premier membre un signe qu'il ne perd plus pour des valeurs supérieures de x.

Soit, en effet, λ une limite supérieure des racines positives de $F(x) = 0$ et supposons $F(\lambda)$ positif; si l'on avait, pour une valeur α de x supérieure à λ, $F(\lambda) < 0$, il y aurait une racine de $F(x) = 0$ entre λ et α, ce qui est impossible, puisque λ est plus grand que la plus grande racine de $F(x) = 0$.

Une remarque analogue pourrait être faite sur la limite inférieure des racines positives et sur chacune des limites des racines négatives.

Réciproquement, si pour $x \geqq \lambda$, $F(x)$ conserve toujours le même signe, λ est une limite supérieure des racines; si, au contraire, pour $x \leqq \lambda$, $F(x)$ conserve toujours le même signe, λ est une limite inférieure des racines.

C'est sur ce principe que nous allons nous appuyer dans la recherche des limites des racines; nous indiquerons seulement le moyen de trouver une limite supérieure des racines positives. En effet, la limite inférieure des racines positives de $F(x) = 0$ est égale à la limite supérieure des racines positives de $F\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ que l'on peut ramener à la forme $f(x) = 0$, f désignant un polynôme entier en x, en chassant les dénominateurs; de même, la limite supérieure des racines négatives de $F(x) = 0$ est égale à la limite supérieure des racines positives de $F(-x) = 0$. Enfin la limite inférieure des racines négatives n'est autre chose que la limite supérieure des racines positives de $F\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$.

Première méthode. — Considérons l'équation

$$F(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_i x^i + \ldots + a_0.$$

En supposant $x > 0$, en désignant par F la valeur du plus grand coefficient négatif et par $a_i x^i$ le premier terme négatif, on a

$$F(x) > x^n - N(x^i + x^{i-1} + \ldots + 1),$$

ou bien

$$F(x) > x^n - N\frac{x^{i+1} - 1}{x - 1},$$

c'est-à-dire

$$F(x) > \frac{x^n(x-1) - Nx^{i+1} + N}{x - 1},$$

et *à fortiori*

$$F(x) > \frac{x^n(x-1) - Nx^{i+1}}{x - 1}.$$

On rendra donc F (x) positif en prenant à la fois

$$x > 1, \quad x^n(x-1) - Nx^{i+1} > 0.$$

La seconde formule peut s'écrire comme il suit :

$$x^{n-i-1}(x-1) - N > 0,$$

et elle sera satisfaite *à fortiori* si l'on prend

$$(x-1)^{n-i} - N > 0,$$

ou

$$x > 1 + \sqrt[n-i]{N};$$

$1 + \sqrt[n-i]{N}$ est donc une limite supérieure des racines positives.

Seconde méthode, dite de Newton. — Si λ est une valeur de x qui rende positive le polynôme $F(x)$ et toutes ses dérivées, λ est une limite supérieure des racines positives de $F(x) = 0$.

En effet, on a, en désignant par h une quantité positive (p. 362),

$$F(\lambda + h) = F(\lambda) + hF'(\lambda) + \frac{h^2}{1.2}F''(\lambda) + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(\lambda) + \ldots.$$

Si donc $F(\lambda)$, $F'(\lambda)$,... sont positives ainsi que h, $F(\lambda + h)$ le sera aussi quelle que soit la quantité positive h; ce qui revient à dire que λ est une limite supérieure des racines positives.

Troisième méthode, dite du groupement des termes. — On trouve souvent une limite supérieure des racines en groupant les termes de l'équation de telle sorte que chaque groupe conserve toujours le même signe pour les valeurs de l'inconnue supérieures à une certaine quantité.

Considérons par exemple l'équation

$$F(x) = x^6 - 3x^4 + 8x^2 - 7x - 8 = 0.$$

En disposant cette équation comme il suit :

$$(x^6 - 3x^4) + (8x^2 - 7x - 8) = 0,$$

on voit que le premier groupe reste positif pour les valeurs de x supérieures à $\sqrt{3}$. En effet, il peut s'écrire

$$x^4\left[x^2 - (\sqrt{3})^2\right].$$

Quant au second groupe, on peut l'écrire

$$8x\left(x - \frac{7}{8}\right) - 8,$$

et l'on voit que si l'on prend $x - \frac{7}{8} > 1$, c'est-à-dire $x > 1\frac{7}{8}$, on rendra ce groupe positif; or, dans cette hypothèse, le premier l'est déjà; donc $1\frac{7}{8}$ est une limite supérieure des racines positives.

La première méthode donne pour limite supérieure

$$1+\sqrt[2]{8}.$$

La seconde méthode donne

$$F(x)=x^6-3x^4+8x^2-7x-8,$$

$$\frac{1}{1}F'(x)=6x^5-12x^3+16x-7,$$

$$\frac{1}{2}F''(x)=15x^4-18x^2+8,$$

$$\frac{1}{1.2.3}F'''(x)=20x^3-12x,$$

$$\frac{1}{1.2.3.4}F^{\text{IV}}(x)=15x^2-3.$$

F^{V} et F^{VI} sont positives toutes les fois que x l'est, F^{IV} est positif pour $x>\sqrt{\frac{1}{5}}$; pour $x=1$, F''' est positif; donc il l'est pour les valeurs plus grandes. En effet, F^{IV} est positive pour $x>\sqrt{\frac{1}{5}}$, et par suite pour $x>1$; donc F''' croît pour $x>1$ (*), et comme F''' est >0 pour $x=1$, il sera *à fortiori* >0 pour $x>1$; pour $x=1$, $F''(x)$ est positif. En répétant le raisonnement qui vient d'être fait sur $F'''(x)$, on voit que $F''(x)$ reste positif pour $x>1$, $F'(x)$ aussi. Or, pour $x=\sqrt{3}$, $F(x)$ est

(*) Pour bien comprendre ce mode de raisonnement qui est souvent usité, il faut se rappeler que F^{IV} est la dérivée de F''' et que toute fonction dont la dérivée est positive croît tant que cette dérivée reste positive; alors $F^{\text{IV}}(x)$ restant positive entre $+1$ et $+\infty$, $F'''(x)$ ira en croissant dans cet intervalle. Si donc $F'''(1)$ est positif, $F'''(1+\ldots)$ le sera aussi *à fortiori*.

positif; donc il est positif pour $x > \sqrt{3}$; donc $\sqrt{3}$ est une limite supérieure des racines de $F(x) = 0$.

IV. — Recherche des racines commensurables.

Nous avons dit qu'après avoir déterminé les limites des racines il fallait procéder à la recherche des racines commensurables; nous allons voir, en effet, que cette recherche est fort simple.

Théorème I. — *Une équation de la forme*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

dans laquelle le coefficient de la plus haute puissance de x est l'unité et dans laquelle les autres coefficients sont entiers, ne saurait avoir de racines fractionnaires.

En effet, si $x = \frac{p}{q}$ satisfaisait à cette équation, p et q désignant des entiers premiers entre eux, on aurait

$$\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0,$$

ou bien, en multipliant par q^{n-1},

$$\frac{p^n}{q} + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 pq^{n-2} + a_0 q^{n-1} = 0,$$

et l'on déduirait de là pour $\frac{p^n}{q}$ une valeur entière, ce qui est absurde puisque p^n et q sont premiers entre eux. (On sait, en effet, que si p et q sont premiers entre eux, p^n et q le sont également.)

Si l'on donne une équation à coefficients entiers de la forme

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

et si l'on change x en $\frac{x}{a^n}$, cette équation prend la forme

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}a_n x^{n-2} + \ldots + a_1 a_n^{n-2} x + a_0 a_n^{n-1} = 0.$$

Ses racines ont été multipliées par a_n, mais, en vertu du théorème précédent, elle ne contient plus de racines fractionnaires; la recherche des racines commensurables se ramène donc en dernière analyse à la recherche des racines entières.

Théorème II. — *Les racines entières de l'équation à coefficients entiers*

$$F(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

ne peuvent se trouver que parmi les diviseurs de son dernier terme.

Soit, en effet, ω une racine entière de cette équation, $F(x)$ devra être divisible par $x - \omega$ (p. 49); or, d'après la manière même dont se forment les différents termes du quotient (p. 57), on voit que ces termes auront des coefficients entiers. Or, de quelque manière que l'on opère la division, on doit toujours trouver pour quotient le même polynôme. Nous allons alors ordonner par rapport aux puissances décroissantes de x et nous diviserons $F(x)$ par $\omega - x$, ce qui ne fait que changer le signe du quotient; les coefficients devant être entiers, $a_0 : \omega$, premier terme du quotient, devra donc être un nombre entier, ce qui démontre notre théorème.

En poursuivant le raisonnement précédent, il est facile de constater si le nombre ω, diviseur de a_0, est une racine de $F(x) = 0$. Achevons la division : si dans le courant de l'opération nous rencontrons un coefficient fractionnaire, nous nous arrêterons, car ω ne sera pas racine. Cette méthode a l'avantage de fournir immédiatement une équation débarrassée de la racine ω, de degré inférieur à $F(x)$, partant plus facile à résoudre et admettant du reste toutes les autres racines de $F(x)$.

Pour bien faire saisir l'esprit de la méthode précédente, nous l'appliquerons à l'équation

$$x^5 - 8x^4 + 7x^3 + 74x^2 - 160x + 32 = 0;$$

$x^5 - 8x^4$ est positif pour $x > 8$, $74x^2 - 160x$ est positif pour $x > 3$; donc 8 est une limite supérieure des racines positives, et s'il en existe d'autres entières, elles doivent être comprises parmi les diviseurs de 32 inférieurs à 8; ces diviseurs sont ± 1, ± 2 et ± 4 : on reconnaît immédiatement que ± 1 n'est pas racine.

Si l'on essaye le diviseur 2 et si l'on divise

$$32 - 160x + 74x^2 + 7x^3 - 8x^4 + x^5$$

par $2 - x$, on trouve pour quotient

$$16 - 72x + x^2 - 3x^3 - \frac{11}{2}x^4 \ldots,$$

on est conduit à un coefficient fractionnaire; donc 2 n'est pas racine : c'est du reste ce qu'indique la suite de la division. Si l'on divise par $4 - x$, on trouve au contraire pour quotient exact

$$8 - 38x + 9x^2 + 4x^3 - x^4.$$

En divisant de nouveau par $4 - x$, on reconnaît que 4 est encore racine, et l'on trouve pour quotient

$$2 - 9x + x^3.$$

On est ainsi ramené à chercher les racines de l'équation

$$x^3 - 9x + 2 = 0,$$

qui n'admet pas de racines entières. (La seule racine admissible est -2, qui ne satisfait évidemment pas à l'équation.

V. — Recherche des racines égales.

La recherche des racines égales est une opération longue et pénible, et, avant de pouvoir leur appliquer les calculs d'approximation, il est indispensable de réduire à l'unité leur degré de multiplicité.

Soit $F(x) = 0$ une équation algébrique : pour reconnaître si cette équation a des racines égales, il suffit de chercher le plus grand commun diviseur entre $F(x)$ et sa dérivée $F'(x)$; si ce plus grand commun diviseur est une quantité indépendante de x, l'équation $F(x) = 0$ n'a pas de racines égales (p. 377). Si au contraire il existe entre $F(x)$ et $F'(x)$ un plus grand commun diviseur, il est de la forme

$$(x-\alpha)^{m-1}(x-\beta)^{n-1}(x-\gamma)^{p-1}\ldots,$$

abstraction faite d'un facteur numérique qui est le coefficient de la plus haute puissance de x dans $F(x)$ (du reste, la recherche des racines entières a déjà obligé le calculateur de réduire ce coefficient à l'unité). Si donc on désigne d'une manière générale par V_i le produit des facteurs binômes de $F(x)$ correspondant aux racines dont l'ordre de multiplicité est i, et par D_1 le plus grand commun diviseur entre $F(x)$ et $F'(x)$, on pourra écrire

$$F(x) = V_1 V_2^2 V_3^3 \ldots V_i^i \ldots,$$

$$D_1 = V_2 V_3^2 \ldots V_i^{i-1} \ldots, \tag{1}$$

et par suite

$$\frac{F(x)}{D_1} = V_1 V_2 V_3 \ldots V_i. \tag{2}$$

On est ainsi ramené à une équation

$$\frac{F(x)}{D_1} = 0$$

qui ne contient plus que des racines simples, à savoir les racines de $F(x) = 0$ dont le degré de multiplicité aurait été réduit à l'unité. Mais on peut calculer séparément $V_1, V_2, \ldots, V_i, \ldots$ et abaisser considérablement le degré de l'équation à résoudre en procédant comme il suit.

Soit D_2 le plus grand commun diviseur entre D_1 et sa dérivée, l'équation (1) donnera

$$D_2 = V_3 V_4^2 \ldots V_i^{i-2} \ldots,$$

et par suite

$$(3) \qquad \frac{D_1}{D_2} = V_2 V_3 \ldots V_i \ldots;$$

les équations (2) et (3) donnent alors

$$\frac{F(x)}{D_1} : \frac{D_1}{D_2} = V_1.$$

On calculerait $V_2, V_3, \ldots, V_i$ d'une manière analogue, ainsi, en appelant D_3 le plus grand commun diviseur entre D_2 et sa dérivée, on trouve

$$\frac{D_1}{D_2} : \frac{D_2}{D_3} = V_2, \ldots.$$

VI. — Séparation des racines. Substitutions successives.

Toutes les formules d'approximation connues jusqu'ici exigent, pour être employées avec succès, que les racines soient déjà connues avec un certain degré d'exactitude, ou au moins soient *séparées*; en d'autres termes, il faut connaître deux limites comprenant la racine que l'on veut calculer et ne comprenant que celle-là.

La première idée qui se présente est de substituer à la place de l'inconnue, dans le premier membre de l'équation mise sous la forme $F(x) = 0$, différents nombres; lorsque deux nombres suffisamment rapprochés donneront au premier membre des valeurs de signes contraires, ils comprendront au moins une racine (p. 391). En substituant des nombres intermédiaires, on pourra ainsi resserrer indéfiniment l'espace comprenant une racine; on pourra donc ainsi calculer les racines réelles avec une approximation qui ne peut être limitée que par la patience du calculateur.

Cependant, pour peu que l'on réfléchisse à cette manière de procéder, dite *méthode des substitutions successives,* on lui reconnaîtra de graves inconvénients.

Il peut se faire que deux racines soient peu différentes, et alors on sera exposé à faire un nombre très-considérable de substitutions avant de soupçonner l'existence d'une racine dans un intervalle déterminé. Lagrange, à la vérité, a proposé de former l'équation aux carrés des différences. Soit λ une limite inférieure des racines positives de cette équation; si, à partir de la limite inférieure Λ des racines de l'équation proposée, on substitue des nombres Λ, $\Lambda + \lambda$, $\Lambda + 2\lambda, \ldots$, jusqu'à ce que l'un d'eux, $\Lambda + n\lambda$, devienne égal à la limite supérieure des racines de l'équation proposée, on est sûr que l'on aura ainsi séparé toutes les racines, et deux valeurs consécutives $\Lambda + i\lambda$ et $\Lambda + (i+1)\lambda$, qui donneront des résultats de signes contraires, comprendront une racine de l'équation proposée et une seule. Si les valeurs $\Lambda + i\lambda$ et $\Lambda + (i+1)\lambda$ donnaient des résultats de même signe, ces quantités ne comprendraient pas de racine de l'équation proposée; mais la méthode de Lagrange est encore

26.

très-difficile à appliquer, car la formation de l'équation aux carrés des différences est une opération très-pénible : en outre, on peut encore être conduit à un nombre très-considérable de substitutions.

Quoi qu'il en soit, la méthode des substitutions successives ne doit pas être complétement bannie et, dans un grand nombre de cas, elle sera encore bien plus avantageuse que les méthodes dont la perfection théorique ne laisse rien à désirer. Nous allons, dans les paragraphes suivants, faire connaître divers théorèmes qui conduisent aux méthodes de séparation le plus fréquemment en usage.

VII. — Premier théorème, du a Descartes.

Deux termes consécutifs d'une équation forment une *permanence* lorsqu'ils sont de même signe et une *variation* lorsqu'ils sont de signes contraires; ceci posé, voici en quoi consiste le théorème de Descartes.

Théorème I. — *Si* $F(x) = 0$ *désigne une équation algébrique dans laquelle* $F(x)$ *représente un polynôme ordonné par rapport aux puissances de* x, *le nombre des racines positives de* $F(x) = 0$ *ne pourra jamais surpasser le nombre des variations de la même équation, et la différence entre ces deux nombres, si elle n'est pas nulle, est toujours paire.*

Pour démontrer cette proposition, considérons un polynôme ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x

$$(1) \qquad Ax^m + \ldots - Bx^n - \ldots + Cx^p + \ldots \pm Sx^u.$$

Le signe de chaque terme ayant été mis en évidence, nous supposerons que de Ax^m à $-Bx^n$ exclusivement il n'y ait que des termes positifs, de $-Bx^n$ à $+Cx^p$ exclusivement il n'y ait que des termes négatifs, etc., le signe du dernier terme Sx^u pouvant être quelconque.

Multiplions ce polynôme par $x-a$, a désignant une quantité positive; le résultat de cette multiplication pourra s'écrire comme il suit, en plaçant l'un au-dessous de l'autre les coefficients des mêmes puissances de x provenant des produits partiels du polynôme par x et par $-a$:

$$\begin{array}{l|l|l|l}
Ax^{m+1}+\ldots-B & x^{n+1}+\ldots+C & x^{p+1}+\ldots\pm S & x^{u+1} \\
\ldots\ldots\ldots- & \ldots\ldots\ldots+ & \ldots\ldots\ldots\pm & \qquad\mp Sax^u.
\end{array}$$

Dans la première ligne, les coefficients des différents termes sont identiques aux coefficients de même rang dans le polynôme (1); dans la seconde ligne, les termes, à partir du premier jusqu'au terme en x^{n+1} exclusivement, ont le signe $-$; ces termes pourront se réduire avec certains termes de la première ligne, mais, en tout cas, le terme Ax^{m+1} de la première ligne ne se réduira avec aucun autre. Quant au terme en x^{n+1}, il a encore le signe $-$, puisqu'il provient du produit par $-a$ du terme en x^{n+1} dans le polynôme (1), terme positif par hypothèse; en se réduisant avec le terme immédiatement supérieur dans la première ligne, il fournira un terme négatif en x^{n+1} au produit total. Le même raisonnement prouve qu'au produit total le terme en x^{p+1} a le signe $+$, et ainsi de suite, en sorte que les termes en x^{m+1}, x^{n+1}, x^{p+1},... du produit cherché ont les mêmes signes que les termes en x^m, x^n, x^p,... du multiplicande (1); donc, jusqu'au terme en x^{u+1}, le produit présente au moins autant de variations que le multiplicande. J'ajoute que si ce nombre n'est pas le même au multiplicande et au produit, la différence est nécessairement un nombre pair; en effet :

Si l'on considère deux termes présentant des signes contraires, pour passer de l'un à l'autre il a fallu changer de signe un nombre impair de fois; chaque changement de signe représentant une variation, ils comprennent un nombre impair de variations. Si l'on considère alors les termes en x^{m+1} et en x^{n+1} du produit, on voit qu'ils comprennent un nombre impair de variations; les termes en x^m et en x^n au multiplicande en comprenaient une, la différence est un nombre pair. Ce qui vient d'être dit de l'intervalle compris entre les termes en x^m et x^n pourrait se répéter pour les autres intervalles qui correspondent à une variation du multiplicande; en sorte que r désignant l'exposant du terme à partir duquel le multiplicande ne présente plus que des permanences, depuis le terme en x^{m+1} jusqu'au terme en x^{r+1} inclusivement, le produit possède un nombre pair de variations de plus que le multiplicande.

Mais le dernier terme $\mp Sax^u$ du produit est évidemment de signe contraire au terme en x^{r+1} : il y a donc là une variation qui n'a pas sa correspondante au multiplicande; donc le produit présente au moins une variation de plus que le multiplicande, et la différence devient alors impaire.

En résumé, *si l'on multiplie par $x-a$ un polynôme à coefficients réels, le produit présente un nombre impair de variations de plus que le multiplicande.*

Ceci posé, considérons une équation algébrique à coefficients réels

$$F(x) = 0. \tag{2}$$

Appelons X le quotient de $F(x)$ par le produit de ses facteurs linéaires correspondant aux racines positives de l'équation (2); si X n'est pas une quantité indépendante de x, ce sera un polynôme qui pour $x=0$ et $x=\infty$

conservera le même signe, et dont le premier et le dernier terme seront par conséquent de mêmes signes : il présentera par conséquent un nombre pair de variations. Si nous multiplions alors X successivement par chacun des facteurs linéaires de $F(x)$ correspondant à ses racines positives, on introduira à chaque opération un nombre impair de variations. Soit alors p le nombre des racines positives de $F(x)$, le nombre de variations de $F(x)$ sera un nombre pair augmenté de p nombres impairs, c'est-à-dire un nombre pair plus p. C. Q. F. D.

Corollaire I. — Considérons une équation à coefficients réels $F(x) = 0$ et *sa transformée en* $-x$, $F(-x) = 0$, le nombre des racines négatives de $F(x) = 0$ ne pourra pas surpasser le nombre des variations de la transformée en $-x$.

Il résulte de là que si une équation algébrique est *complète*, c'est-à-dire si aucun des coefficients n'est égal à zéro, le nombre des racines négatives ne peut surpasser le nombre des permanences; en effet, le nombre des permanences est alors égal à celui des variations de la transformée en $-x$.

Corollaire II. — *Si une équation algébrique a toutes ses racines réelles, le nombre des racines positives est égal au nombre des variations, et le nombre des racines négatives est égal au nombre des variations de la transformée en* $-x$.

En effet, soient m le degré de l'équation, ν le nombre des variations, ν' le nombre des variations de la transformée en $-x$, p le nombre des racines positives, n celui des racines négatives. Soient Gx^{μ} et Hx^{ν} deux termes consécutifs quelconques de l'équation. Si ν est égal à $\mu + 1$, il est évident que si ces termes présentent une variation, les termes correspondants de la transformée en $-x$ n'en présenteront pas, et *vice versâ*. Il résulte de là que, relativement aux deux termes Gx^{μ}, Hx^{ν}, la somme des variations de l'équation proposée et de sa transformée en $-x$ est au plus égale à 1, si $\mu-\nu$ est égal à 1, et au plus égal à 2 dans les autres cas. Donc cette somme est toujours égale ou inférieure à $\mu-\nu$. On a donc

$$v+v' \leqq \sum(\mu-\nu),$$

c'est-à-dire

(3) $$v+v' \leqq m.$$

Mais on a

(4) $$p \leqq v, \quad n \leqq v',$$

ou

$$p+n \leqq v+v'.$$

Mais, puisque l'équation a toutes ses racines réelles,

$$p+n=m;$$

on a donc

$$m \leqq v+v'.$$

En comparant cette formule avec (3), on en conclut

$$m=v+v',$$

ou bien

$$p+n=v+v'.$$

Les formules (4) donnent alors

$$p=v, \quad n=v'.$$

C. Q. F. D.

VIII. — Second théorème, du a Budan et a Fourier.

Lemme. — *Si une fonction entière de* x, $F(x)$, *s'annule pour* $x=\lambda$, *si* $F^{n}(x)$ *désigne la première dérivée* *de* $F(x)$, *qui ne s'annule pas pour* $x = \lambda$, *si enfin* ε *désigne un nombre positif suffisamment petit,* $F(\lambda \pm \varepsilon)$ *sera de même signe que* $(\pm 1)^n F^n(\lambda)$.

En effet, d'après la formule de Taylor, on a

$$F(\lambda \pm \varepsilon) = F(\lambda) \pm \frac{\varepsilon}{1} F'(\lambda) + \ldots$$
$$+ (\pm 1)^n \frac{\varepsilon^n}{1.2\ldots n} F^n(\lambda) + \ldots,$$

c'est-à-dire, en observant que

$$F(\lambda) = F'(\lambda) = \ldots = F^{n-1}(\lambda) = 0,$$

$$F(\lambda \pm \varepsilon) = \frac{(\pm \varepsilon)^n}{1.2.3\ldots n}\left[F^n(\lambda) \pm \frac{\varepsilon}{n+1} F^{n+1}(\lambda) + \ldots\right];$$

mais lorsque ε est suffisamment petit, $F^n(\lambda)$ est plus grand en valeur absolue que la somme des termes qui le suivent et qui contiennent tous ε en facteur, en sorte que $(\pm 1)^n F^n(\lambda)$ va donner son signe au second membre de la formule précédente, et par suite à $F(\lambda \pm \varepsilon)$.

Théorème. — *Soit* $F(x) = 0$ *une équation algébrique, si l'on considère la suite*

$$(1) \qquad F(x),\quad F'(x),\quad F''(x),\ldots,\quad F^m(x),$$

formée de la fonction $F(x)$ *et de ses dérivées, et les deux suivantes :*

$$(2) \qquad F(\alpha),\quad F'(\alpha),\quad F''(\alpha),\ldots,\quad F^m(\alpha),$$
$$(3) \qquad F(\beta),\quad F'(\beta),\quad F''(\beta),\ldots,\quad F^m(\beta),$$

dans lesquelles α *représente un nombre inférieur à* β ; *si, de plus, on désigne par* ν *le nombre des variations de la suite* (2) *et par* ν' *le nombre des variations de la suite* (3), 1° *On aura toujours*

$$\nu \geqq \nu';$$

2° *Si l'on désigne par* N *le nombre des racines de* $F(x) = 0$ *comprises entre* α *et* β, *on aura*

$$N \leqq \nu - \nu',$$

3° *Enfin, la différence* $(\nu - \nu') - N$ *sera toujours un nombre pair.*

Pour démontrer ce théorème, observons d'abord que le nombre des variations de la suite (1) ne peut changer que si l'un des termes passe par zéro; le dernier terme étant indépendant de x, nous n'aurons que deux cas à examiner.

1° Le premier terme de la suite (1) passe par zéro pour $x = \lambda$; soit $F^{\mu}(x)$ la première dérivée de $F(x)$ qui ne s'annule pas pour $x = \lambda$; $F(\lambda + \varepsilon)$, $F'(\lambda + \varepsilon), \ldots$, seront de même signe que $F^{\mu}(\lambda)$; quant à $F(\lambda - \varepsilon)$, $F'(\lambda - \varepsilon), \ldots$, ils seront alternativement de même signe et de signe contraire à $F^{\mu}(\lambda)$, en sorte que le passage par λ fera perdre à la suite (1) μ variations. Or, nous avons vu, p. 377, que si $F^{\mu}(x)$ était la première dérivée de $F(x)$ qui ne s'annulait pas pour $x = \lambda$, $F(x) = 0$ avait μ racines égales à λ; on peut donc dire que toutes les fois que x passe par une racine de $F(x) = 0$, la suite (1) perd une variation, une racine multiple d'ordre μ étant considérée comme jouant le même rôle que μ racines simples.

2° Si l'un des termes $F^{i}(x)$ de la suite (1) passe par zéro pour $x = \lambda$, $F(\lambda)$ étant censé différent de zéro, nous supposerons $F^{i-1}(\lambda)$ différent de zéro. Soit alors $F^{j}(x)$ la première dérivée de $F^{i}(x)$ qui ne s'annule pas pour $x = \lambda$; $F^{i}(\lambda + \varepsilon)$, $F^{i+1}(\lambda + \varepsilon), \ldots$ seront de même signe que $F^i(\lambda)$, et $F^i(\lambda-\varepsilon)$, $F^{i+1}(\lambda-\varepsilon)$,... seront alternativement de même signe et de signe contraire à $F^i(\lambda)$. Le passage par λ a donc fait perdre à la suite (1) un certain nombre de variations, et comme $F^{i-1}(x)$ et $F^i(x)$ n'ont pas changé de signe, le nombre des variations comprises entre ces termes n'a pas changé de parité.

En résumé, x variant de α à β, la suite (1) a perdu un nombre pair de variations (ou zéro variations) par ses termes intermédiaires, et un nombre de variations égal à N par son premier terme ; on a donc

$$v - v' = \mathrm{N} + \text{un nombre pair.}$$

C. Q. F. D.

IX. — Troisième théorème, du a Rolle.

Théorème. — *Deux racines réelles consécutives de l'équation* $F(x) = 0$ *comprennent au moins une racine réelle de l'équation* $F'(x) = 0$, *en sorte que les racines de l'équation* $F'(x) = 0$ *séparent les racines de* $F(x) = 0$.

Pour démontrer ce théorème, désignons par α et β deux racines consécutives de $F(x) = 0$; si nous supposons que nous fassions varier x entre α et β, $F(x)$ conservera constamment le même signe dans cet intervalle ; supposons que ce soit le signe + pour des valeurs de x un peu plus grandes que α, $F(x)$ ira alors en croissant, puisqu'il passe de zéro au positif ; pour des valeurs de x un peu plus petites que β, il ira en décroissant : sa dérivée $F'(x)$ est donc, d'après ce que nous avons vu p. 363, positive pour des valeurs de x un peu plus grandes que α et négative pour des valeurs de x un peu plus petites que β. Il résulte de là que $F'(x)$ a au moins une racine réelle comprise entre α et β, et en tout cas un nombre impair de racines réelles comprises dans cet intervalle.

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Si* $F(x) = 0$ *a toutes ses racines réelles*, $F'(x) = 0$ *a aussi toutes ses racines réelles.*

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ les racines de $F(x) = 0$; dans chacun des intervalles $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3, \ldots$ se trouve comprise une racine de $F'(x) = 0$. Si donc les racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sont toutes simples, $F'(x)$ aura précisément $m - 1$ racines réelles, c'est-à-dire aura toutes ses racines réelles; supposons que α_i soit une racine multiple d'ordre μ, α_i sera $\mu - 1$ fois racine de $F'(x) = 0$, et par suite $F'(x) = 0$ aura $m - 1 + \mu - 1$ racines réelles, $F(x) = 0$ en a $m + \mu - 1$; donc $F'(x) = 0$ a toutes ses racines réelles. Le même raisonnement peut évidemment se répéter sur deux ou un plus grand nombre de racines multiples, ce qui démontre la proposition que nous venons d'énoncer.

X. — Quatrième théorème, du a Sturm.

Aucun des théorèmes précédents ne peut servir à séparer à coup sûr les racines d'une équation, ils suffisent dans la plupart des cas; ajoutons même que le théorème de Budan n'est plus guère aujourd'hui qu'un objet de curiosité. Au contraire, le théorème que l'on va démontrer permet de décider combien il existe de racines réelles d'une équation algébrique comprises entre deux limites données : il est à regretter que ce théorème soit d'une application aussi pénible.

Théorème. — *Soient* V *un polynôme entier en* x, V_1 *sa dérivée; divisons* V *par* V_1; *soient* Q_1 *le quotient et* $-V_2$ *le reste; divisons* V_1 *par* V_2; *soient* Q_2 *le quotient et* $-V_3$ *le reste, et ainsi de suite. Supposons que l'é-*

quation $V = 0$ n'ait pas de racines égales (et l'on peut toujours faire en sorte qu'il en soit ainsi), on finira par tomber sur un reste numérique différent de zéro que nous désignerons par $-V_n$; ceci posé, le nombre des racines réelles comprises entre deux limites données α et β est égal au nombre de variations que perd la suite

$$(1) \qquad V, V_1, V_2, \ldots, V_n$$

quand x varie de α à β.

D'après la définition des quantités $V, V_1, \ldots, V_n$, $Q_1, Q_2, \ldots$, on doit avoir

$$\begin{aligned}
V &= V_1 Q_1 - V_2,\\
V_1 &= V_2 Q_2 - V_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
V_{i-1} &= V_i Q_i - V_{i+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
V_{n-2} &= V_{n-1} Q_{n-1} - V_n.
\end{aligned}$$

Or, 1° deux fonctions V_{i-1}, V_i consécutives de la suite (1) ne peuvent s'annuler à la fois, sans quoi de

$$(2) \qquad V_{i-1} = V_i - Q_i - V_{i+1}$$

on déduirait $V_{i+1} = 0$ et par suite $V_{i+2} = 0$, etc., enfin $V_n = 0$, ce qui est contre notre hypothèse, V_n étant supposé indépendant de x; 2° si l'une des quantités $V, V_1, V_2, \ldots$ s'annule, celle qui la précède et celle qui la suit immédiatement sont de signes contraires; si, en effet, dans l'équation (2) on fait $V_i = 0$, on a $V_{i-1} = -V_{i+1}$.

Il résulte de là que le passage par zéro d'une des fonctions $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}$ n'altère pas le nombre des variations de la suite (1). En effet, V_{i-1} et V_{i+1} ne pouvant s'annuler avec V_i conservent leur signe quand V_i change de signe; or V_{i-1} et V_{i+1} étant de signes contraires, on ne peut avoir avant et après le passage de V_i par zéro que les combinaisons de signe suivantes :

Pour V_{i-1}	$+\ +$	$+\ +$	$-\ -$	$-\ -$
Pour V_i	$+\ -$	$-\ +$	$+\ -$	$-\ +$
Pour V_{i+1}	$-\ -$	$-\ -$	$+\ +$	$+\ +$

qui présentent constamment une seule variation; mais quand V passe par zéro, d'après ce que nous avons vu p. 408, lemme, il est d'abord de signe contraire à V_1, puis, après le passage, de même signe que V_1; la suite (1) perd donc une variation, et à chaque racine de $V=0$ correspond ainsi une variation perdue; donc enfin le nombre total de variations perdues par la suite (1), quand x varie de α à β, est bien égal au nombre des racines de $V=0$ comprises dans cet intervalle.

C. Q. F. D.

Remarque I. — Au théorème de Sturm on substitue quelquefois le suivant :

Soient $V_1, V_2, \ldots, V_n$ *des fonctions de* x *formant avec* V *une suite telle,* 1° *que deux fonctions consécutives ne s'annulent pas à la fois;* 2° *que l'une d'elles s'annulant, celle qui la précède et celle qui la suit soient de signes contraires;* 3° *que* V_n *ne s'annule jamais pour les valeurs de* x *comprises entre* α *et* β; 4° *que* V_1 *soit de même signe que* V *pour les valeurs de* x *immédiatement supérieures à celles qui annulent* V. *Le nombre des variations perdues par la suite* $V, V_1, V_2, \ldots, V_n$, *lorsque* x *varie de* α *à* β, *est égal au nombre des racines de* $V=0$ *comprises entre* α *et* β.

Ce théorème se démontre comme le précédent.

Remarque II. — Supposons que $V=0$ ait des racines égales; soient V_1 sa dérivée et V_n le plus grand commun diviseur entre V et V_1, soit

$$\frac{V}{V_n}=U,\quad \frac{V_1}{V_n}=U_1.$$

Divisons U par U_1 ; soient Q_1 le quotient, $-U_2$ le reste, etc., on aura

$$\begin{aligned} U &= U_1 Q_1 - U_2, \\ U_1 &= U_2 Q_2 - U_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ U_{n-2} &= U_{n-1} Q_{n-1} - U_n, \end{aligned}$$

et U, U_1, $U_2, \ldots$, U_n seront respectivement égaux à V, V_1, $V_2, \ldots$, V_n divisés par V_n, comme il est facile de s'assurer en multipliant chacune des égalités précédentes par V_n. De la première on tire

$$V = V_1 Q_1 - U_2 V_n;$$

donc $U_2 V_n = V_2$, et ainsi de suite. Or on a

$$\frac{U_1}{U} = \frac{V_1}{V},$$

et si l'on pose

$$V = (x-a)^m (x-b)^n \ldots,$$

on en déduit (p. 365)

$$\frac{V_1}{V} = \frac{m}{x-a} + \frac{n}{x-b} + \ldots = \frac{U_1}{U};$$

donc, quand x passe par la racine a, $\frac{U_1}{U}$ passe par ∞ et change de signe en passant du négatif au positif. Ainsi les fonctions U, U_1, $U_2, \ldots$, U_n jouissent des mêmes propriétés que les fonctions V, V_1, $V_2, \ldots$ dont il a été question dans la remarque précédente; donc enfin le nombre des racines de $U = 0$ ou de $V = 0$, abstraction faite de leur ordre de multiplicité, comprises entre α et β, est égal au nombre de variations perdues par la suite U, $U_1, \ldots$, U_n quand x varie de α à β. Mais comme cette suite ne diffère de V, $V_1, \ldots$, V_n que par un facteur constant V_n, on peut dire que le théorème de Sturm s'applique encore aux équations qui ont des racines égales; mais il ne fait pas connaître l'ordre de multiplicité de ces racines.

XI. — Méthodes d'approximation.

Première méthode, dite de Newton, rectifiée par Fourier. — Désignons par $F(x)$ une fonction entière de x à coefficients réels, et par h un accroissement réel donné à x; posons

$$(1) \qquad F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{2}R.$$

R désigne dans cette formule une fonction entière de x et de h. Si l'on considère alors la fonction de z

$$F(x+z) - F(x) - zF'(x) - \frac{z^2}{2}R,$$

on voit qu'elle s'annule pour $z=0$, et aussi, en vertu de la formule (1), pour $z=h$; en vertu du théorème de Rolle (p. 411), sa dérivée, prise en regardant z comme la variable, doit donc s'annuler pour une valeur h' de z comprise entre zéro et h. Or cette dérivée est (*)

$$F'(x+z) - F'(x) - zR.$$

Cette fonction entière s'annule encore pour $z=0$ et de plus pour $z=h'$; sa dérivée, prise en regardant z comme la variable, doit donc s'annuler pour une valeur h'' de z comprise entre zéro et h'. Or cette dérivée est

$$F''(x+z) - R;$$

(*) La dérivée de $F(x+z)$ est le coefficient de h dans le développement de $F(x+z+h)$, et ce coefficient est $F'(x+z)$.

on a donc

$$F''(x+h'')-R=0,$$

c'est-à-dire

$$R=F''(x+h''),$$

h'' désignant une quantité comprise entre zéro et h. Cette quantité se désigne ordinairement par θh; θ désigne alors un nombre compris entre zéro et l'unité, et l'on a

$$R=F''(x+\theta h);$$

par suite, la formule (1) devient

$$(2)\qquad F(x+h)=F(x)+hF'(x)+\frac{h^2}{2}F''(x+\theta h).$$

Concevons actuellement que, ayant convenablement séparé les racines d'une équation algébrique

$$F(x)=0,$$

on ait substitué à la place de x deux nombres a et $b>a$ peu différents l'un de l'autre, donnant à $F(x)$ des valeurs de signe contraire et comprenant par conséquent une racine, mais une seule. On arrivera toujours à ce résultat après un nombre plus ou moins considérable d'essais; si dans la formule (2) on remplace alors x par a et si l'on suppose que $a+h$ désigne la racine cherchée, on aura

$$F(a+h),\quad \text{c'est-à-dire}\quad 0=F(a)+hF'(a)+\frac{h^2}{2}F''(a+\theta h).$$

On tire de cette formule

$$(3)\qquad h=-\frac{F(a)}{F'(a)}-\frac{h^2}{2}\frac{F''(a+\theta h)}{F'(a)}.$$

En partant au contraire de la valeur approchée b, en désignant par $b-k$ la racine exacte et par λ un nombre compris entre o et 1, on trouve de la même façon

$$0 = F(b) - kF'(b) + \frac{k^2}{2}F''(b - \lambda k),$$

et par suite

$$(4) \qquad k = \frac{F(b)}{F'(b)} + \frac{k^2}{2}\frac{F''(b - \lambda k)}{F'(b)}.$$

Si les quantités k et h sont suffisamment petites, on peut négliger leurs carrés et prendre

$$h = -\frac{F(a)}{F'(a)}, \quad k = \frac{F(b)}{F'(b)}.$$

Telle est la méthode indiquée par Newton pour l'approximation des racines des équations; elle est peu sûre, comme on voit, et, pour qu'elle puisse être appliquée avec succès, en un mot pour approcher de la racine à l'aide des *termes de correction* $-\frac{F(a)}{F'(a)}$ et $\frac{F(b)}{F'(b)}$, il faut être sûr qu'ils sont positifs; il faut ensuite, en vertu des formules (3) et (4), que les quantités $-\frac{h^2}{2}\frac{F''(a + \theta h)}{F'(a)}$ et $\frac{k^2}{2}\frac{F''(b - \lambda k)}{F'(b)}$ soient positives, car alors seulement on sera sûr que $a - \frac{F(a)}{F'(a)}$ et $b - \frac{F(b)}{F'(b)}$ sont plus approchés que a et b.

Nous supposerons les limites a et b assez resserrées pour que, dans l'intervalle, $F'(x)$ et $F''(x)$ n'aient pas de racines, ce qui sera toujours possible si les équations $F(x) = 0$, $F'(x) = 0$ et $F''(x) = 0$ n'ont pas les mêmes racines (on voit ici l'utilité de la théorie des racines égales).

Alors : 1° je dis que $-\frac{F(a)}{F'(a)}$ et $\frac{F(b)}{F'(b)}$ sont positifs; en effet, si $F(a)$ est négatif, par exemple, $F(x)$ devenant positif pour $x = b$, croît dans l'intervalle a, b, et $F'(x)$ est positif; donc $-\frac{F(a)}{F'(a)}$ est positif, et il en est de même de $\frac{F(b)}{F'(b)}$; si, au contraire, $F(a)$ était positif, $F(x)$ serait décroissant, $F'(x)$ négatif, et on arriverait toujours aux mêmes conclusions.

2° Puisque $F''(x)$ et $F'(x)$ n'ont pas de racines dans l'intervalle a, b, $F''(a+\theta h)$ et $F''(b-\lambda k)$ auront les mêmes signes, $F'(a)$ et $F'(b)$ aussi, et alors l'une des quantités

$$-\frac{h^2}{2}\frac{F''(a+\theta h)}{F'(a)}, \quad \frac{k^2}{2}\frac{F''(b-\lambda k)}{F'(b)}$$

sera positive.

Donc, pourvu que $F'(x)$ et $F''(x)$ ne s'annulent pas entre a et b, l'un des termes de correction de Newton donnera toujours une valeur plus approchée de la racine cherchée, et le terme qu'il faudra employer sera $-\frac{F'(a)}{F(a)}$ si $F''(x)$ et $F'(x)$ sont de signes contraires, et $\frac{F'(b)}{F(b)}$ si $F''(x)$ et $F'(x)$ sont de même signe. Mais nous venons de voir que $-\frac{F(a)}{F'(a)}$ et que $\frac{F(b)}{F'(b)}$ étaient positifs; si donc $F''(a)$ et $F'(a)$ sont de signes contraires, $F(a)$ et $F''(a)$ seront de même signe; si $F''(b)$ et $F'(b)$ sont de même signe, $F(b)$ et $F''(b)$ le seront aussi. De cette petite discussion il résulte que :

Le terme de correction à employer est celui pour lequel $F(x)$ et $F''(x)$ *sont de même signe.*

Cette proposition est due à Fourier; si l'on veut avoir une limite de l'erreur commise en employant le terme de correction, il suffit de considérer le terme complémentaire

$$-\frac{h^2}{2}\frac{F''(a+\theta h)}{F'(a)} \quad \text{ou} \quad \frac{k^2}{2}\frac{F''(b-\lambda k)}{F'(b)},$$

et d'y remplacer k ou h par $b-a$, et $F''(b-\lambda k)$ par le maximum M de $F''(x)$ dans l'intervalle a, b; on a ainsi

$$\text{erreur} < \frac{(b-a)^2}{F'(a)}\frac{M}{2}.$$

XII. — Sur diverses méthodes d'approximation.

La méthode de Newton est sans contredit la plus avantageuse après la méthode du développement en série que nous n'avons pas à exposer ici; cette dernière méthode, du reste, se rapproche beaucoup de celle de Newton, en ce sens que la série donnée par Cauchy a pour premier terme le terme de correction de Newton. La série que j'ai fait connaître a pour premier terme un terme de correction donné par une méthode que nous allons développer et que l'on appelle la *méthode de fausse position;* cette dernière méthode devra être préférée à celle de Newton, lorsque, dans le voisinage de la racine cherchée, on aura $F''(x)=0$, ou $F'(x)=0$ (nous conservons ici les notations adoptées p. 417). Voici en quoi consiste la méthode de fausse position : on suppose la quantité $x-a$, dont varie x entre a et b, proportionnelle à la quantité $F(x)-F(a)$ dont varie $F(x)$ dans l'intervalle correspondant. Si $b-a$ est assez petit, cette hypothèse est assez exacte, et l'on a

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=\frac{F(a+h)-F(a)}{h},$$

d'où l'on tire, en faisant $F(a+h)=0$,

$$h=\frac{-(b-a)F(a)}{F(b)-F(a)};$$

de même ou aurait

$$k=\frac{(b-a)F(b)}{F(b)-F(a)}.$$

Lagrange, pour obvier aux inconvénients que présentait la méthode de Newton avant Fourier, avait imaginé une méthode qui consistait à développer la racine cherchée en fraction continue, mais qui ne doit pas être employée aujourd'hui.

Soit a la valeur approchée d'une racine de $F(x)=0$; si l'on pose $x=a+\frac{1}{y}$, l'équation proposée devient

$$F\left(a+\frac{1}{y}\right)=0;$$

en chassant les dénominateurs, cette équation prend la forme

$$f(y)=0.$$

f désignant un polynôme algébrique. On calculera approximativement la plus petite racine de cette équation, et en désignant par a_1 une valeur approchée, on posera

$$x=a_1+\frac{1}{y_1},$$

et ainsi de suite; on aura ainsi

$$x=a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2\ldots}}$$

En général, on choisit pour les valeurs $a, a_1, a_2, \ldots,$ des nombres entiers. Nous n'insistons pas davantage sur cette méthode, parce qu'elle conduit à des calculs plus compliqués que celle de Newton, bien que, au point de vue théorique, elle paraisse plus simple.

Lorsqu'une équation peut se mettre sous la forme

$$x = \varphi(x),$$

il est souvent avantageux de procéder comme il suit : soit a une valeur approchée, on aura une valeur encore plus approchée en prenant

$$x = \varphi(a);$$

en désignant par a_1 cette nouvelle valeur, on en obtient une encore plus approchée par la formule

$$x = \varphi(a_1),$$

et ainsi de suite. Cette méthode est celle que l'on applique à l'équation $ax^2 + bx + c = 0$; lorsque a est très-petit (p. 153), pour que cette méthode puisse s'appliquer avec succès, il faut que, si α désigne la racine cherchée, l'on ait

$$\text{mod.}\,(a - \alpha) < \text{mod.}\,(a_1 - \alpha),$$

ou

$$\text{mod.}\,(a - \alpha) < \text{mod.}\,[\varphi(a) - \varphi(\alpha)],$$

ou

$$(1) \qquad \text{mod.}\,\frac{\varphi(a) - \varphi(\alpha)}{a - \alpha} > 1;$$

or, si l'on pose

$$(2) \qquad \varphi(a) - \varphi(\alpha) - (a - \alpha)\,\mathrm{R} = 0,$$

la quantité

$$\varphi(a) - \varphi(x) - (a - x)\,\mathrm{R}$$

s'annulera pour $x = \alpha$ et pour $x = a$; sa dérivée, en vertu du théorème de Rolle, s'annulera pour une valeur X de x comprise entre a et α, et l'on aura en conséquence

$$\varphi'(X) = R;$$

la formule (2) devient alors

$$\varphi(a) - \varphi(\alpha) - (a - \alpha)\varphi'(X) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\varphi(a) - \varphi(\alpha)}{a - \alpha} = \varphi'(X),$$

et en vertu de (1)

$$\text{mod. } \varphi'(X) > 1.$$

XIII. — Application des principes précédents.

Nous allons nous proposer de résoudre l'équation

(1) $$F(x) = x^5 + 2x - 7 = 0.$$

Cherchons d'abord une limite supérieure des racines. A cet effet, formons les dérivées de $F(x)$; on a

$$F'(x) = 5x^4 + 2, \quad F''(x) = 20x^3.$$

Sans aller plus loin, on voit que toutes les dérivées de $F(x)$ sont positives avec x; donc tout nombre positif qui, mis à la place de x dans $F(x)$, rendra cette fonction positive, sera une limite supérieure des racines positives; 2 jouit de cette propriété, 2 est donc une limite supérieure des racines. Or, $F'(x)$ restant toujours positif, $F(x)$ croît constamment avec x, et par suite ne peut s'annuler qu'une fois; et comme on a $F(0) = -7$, on en conclut que la racine unique de $F(x) = 0$ est comprise entre 0 et 2.

Nous pourrions déjà appliquer la méthode de Newton en prenant 2 comme première valeur approchée; nous serions sûrs, par ce moyen, de trouver une valeur plus approchée, car $F(2)$ et $F''(2)$ sont de même signe; mais il vaut mieux appliquer la méthode des substitutions successives jusqu'à ce que nous ayons trouvé une valeur approchée à $\frac{1}{10}$ près : le signe de $F(1,5)$ est évidemment $+$, et l'on a

$$F(1,4) = 1,17824,\quad F'(1,4) = 21,2080,\quad F''(1,4) = 43,94,$$
$$F(1,3) = -1,68707.$$

Le terme de correction sera

$$-\frac{F(1,4)}{F'(1,4)} = -0,055;$$

l'erreur sera moindre que

$$\frac{1}{2}\frac{F''(1,4)}{F'(1,4)}\,0,01.$$

Cette quantité diffère peu de $\frac{1}{100}$, en sorte que nous prendrons pour valeur approchée de la racine $1,34$, et nous trouverons

$$F(1,34) = 0,0004,\quad F'(1,34) = 18,1205.$$

En prenant pour terme de correction $-\frac{F(1,34)}{F'(1,34)}$, l'erreur est au plus de

$$\frac{1}{2}\frac{F''(1,34)}{F'(1,34)}(0,01)^2,$$

c'est-à-dire inférieure à $\frac{1}{1000}$; mais le terme de correction étant lui-même inférieur à $\frac{1}{1000}$, on en conclut que $1,340$ est une valeur approchée à moins de $\frac{1}{1000}$ près.

Cela étant, on est sûr que l'erreur est inférieure à

$$\frac{1}{2}\frac{F''(1,340)}{F'(1,340)}(0,001)^2,$$

c'est-à-dire à $\frac{1}{100000}$; le terme de correction, calculé à $\frac{1}{100000}$ près, est égal à 0,00002; on a donc, pour valeur approchée de la racine,

$$1,34 - 0,00002 = 1,33998;$$

on a ensuite

$$F(1,33998) = 0,000043,\quad F'(1,33998) = 20,1160.$$

Le nouveau terme de correction est

$$\frac{0,000043}{20,1160} = 0,000002137,$$

et l'erreur est inférieure à $\frac{1}{1000000000}$; on a ainsi

$$x = 1,33998 - 0,00000 2137 = 1,339977863.$$

EXERCICES.

1. Démontrer que, si l'on divise le polynôme $F'(x)$ par $F(x)$, dont il est la dérivée, en ordonnant le quotient par rapport aux puissances croissantes de x, le rapport d'un terme au suivant dans la série ainsi obtenue a pour limite celle des racines de $F(x) = 0$, dont le module est le plus grand. (Bernoulli.)

2. Si l'équation $f(x) = 0$ du degré m n'a pas de racines réelles, l'équation suivante, dans laquelle h est positif,

$$f(x) + hf'(x) + h^2 f''(x) + \ldots + h^m f^m(x) = 0,$$

n'en a pas non plus; il résulte de là que

$$f(x) + xf'(x) + x^2 f''(x) + \ldots + x^m f^m(x) = 0$$

n'a pas de racines positives.

3. Si l'on met les fractions

$$\frac{1}{1-x}, \quad \frac{1}{1-\dfrac{x}{1-x}}, \quad \frac{1}{1-\dfrac{x}{1-\dfrac{x}{1-x}}}, \ldots,$$

sous la forme $\frac{1}{u_0}, \frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, \ldots$, u_0, u_1, u_2 désignant des polynômes entiers, l'équation $u_n = 0$ aura toutes ses racines réelles et positives.

4. Toute racine d'une équation à coefficients entiers qui est seule de son degré de multiplicité est commensurable.

5. Si l'on égale à zéro la $n^{\text{ième}}$ dérivée de $(x^2-1)^n$, l'équation ainsi obtenue aura toutes ses racines réelles.

6. Soit D le plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$; soit, de plus,

$$\frac{f(x)}{D} = P, \quad \frac{f'(x)}{D} = Q,$$

le produit des facteurs de $f(x)$ dont le degré de multiplicité est n est le plus grand commun diviseur entre P et $Q - nP'$, P' désignant la dérivée de P. (OSTROGRADSKY.)

CHAPITRE VIII.

DE L'ÉLIMINATION.

I. — Des dérivées partielles.

Lorsque l'on considère un polynôme entier $F(x, y, z, \ldots)$ en x, y, $z \ldots$, on peut le supposer ordonné par rapport à x, et l'on peut prendre alors sa dérivée par rapport à la lettre x, plusieurs fois de suite, μ fois, par exemple; mais on conçoit que l'on aurait pu effectuer la même opération par rapport à y. Ainsi, par exemple, la dérivée seconde de $x^4 y^5$, prise par rapport à x, est $12x^2y^5$; sa dérivée quatrième, par rapport à y, est $120x^4y$. Il est bon de pouvoir distinguer par une notation la lettre par rapport à laquelle on prend la dérivée d'un polynôme :

$$F^n_{x^n}(x, y \ldots)$$

représentera pour nous la $n^{\text{ième}}$ dérivée de $F(x, y, z)$ prise par rapport à x;

$$F^{m+n}_{x^m y^n}(x, y, z)$$

sera le résultat obtenu en prenant m fois la dérivée de F par rapport à x, et n fois la dérivée du résultat par rapport à y, etc.

Théorème. — 1° *On peut, sans changer la valeur d'une dérivée, intervertir l'ordre des dérivations.*

Ainsi, je dis que l'on aura par exemple

$$F^{m+n+p}_{x^m,y^n,x^p} = F^{m+p+n}_{x^{m+p},y^n}.$$

Il suffit évidemment de démontrer que l'on peut intervertir l'ordre de deux dérivations successives; or, F est un polynôme de la forme

$$F = \sum A x^p y^q,$$

et l'on a

$$F_{xy} = \sum qp\,A\,x^{p-1}y^{q-1} = \sum pq\,A\,x^{p-1}y^{q-1} = F_{yx};$$

le théorème se trouve donc démontré.

Théorème II. — *On a, en désignant par h, k, l,... des quantités arbitraires,*

$$F(x+h, y+k, z+l,\ldots)$$
$$= F(x,y,z,\ldots) + \sum \frac{h^\mu}{1.2.3\ldots\mu}\frac{k^\nu}{1.2.3\ldots\nu}\cdots F^{\mu+\nu\ldots}_{x^\mu,y^\nu\ldots}(x,y,z,\ldots);$$

μ, ν,... désignant des quantités susceptibles de prendre toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à l'infini, en sous-entendant que $\frac{1}{1.2.3\ldots n} = 1$ pour $n = 0$.

En effet, nous avons vu, p. 362, que

$$F(x+h, y+k, z+l,\ldots)$$
$$= F(x, y+k,\ldots) + \sum \frac{h^\mu}{1.2.3\ldots\mu} F^{\mu}_{x^\mu}(x, y+k, z+l,\ldots);$$

en développant chaque terme du second membre par rapport aux puissances de k, on a

$$F(x+h, y+k,\ldots)$$
$$= F(x,y,z+l\ldots) + \sum \frac{h^\mu k^\nu}{1.2.3\ldots\mu.1.2.3\ldots\nu} F^{\mu+\nu}_{x^\mu,y^\nu}(x,y,z+l,\ldots),$$

et ainsi de suite. C. Q. F. D.

II. — Résultante de plusieurs équations.

Éliminer une inconnue entre m équations, c'est, comme on sait, trouver $m-1$ équations qui ne contiennent plus cette inconnue et qui soient satisfaites pour tous les systèmes de valeurs des autres inconnues qui satisfont aux équations proposées, mais qui ne soient satisfaites que pour les systèmes de valeurs en question.

La *résultante* de m équations à m inconnues est le résultat de l'élimination de $m-1$ inconnues entre ces m équations.

La recherche de la résultante de plusieurs équations est une opération très-simple en théorie, mais d'une complication effrayante dès que l'on entre dans le domaine des applications.

Première méthode. — Soient

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0$$

deux équations à deux inconnues; soient $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les racines de la première,

$$\psi(x_1, y)\,\psi(x_2, y)\ldots\psi(x_n, y) = 0 \tag{1}$$

sera la résultante de ces deux équations. En effet, cette équation est satisfaite pour les valeurs de y qui satisfont aux proposées et ne contient plus x; or le premier membre de l'équation (1) est une fonction symétrique entière des racines de $\varphi(x, y) = 0$: il s'exprimera donc rationnellement à l'aide de formules connues (p. 374) en fonction des coefficients de cette équation.

Si l'on avait plus de deux équations, on commencerait par éliminer une inconnue entre ces équations en les prenant deux à deux de $m-1$ manières différentes; on éliminerait une seconde inconnue de la même façon, et ainsi de suite. Toutefois, il est bon de faire observer que si $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$ représentent les solutions communes aux équations

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \chi(x, y, z) = 0,$$

la résultante de

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \chi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0$$

sera

$$\psi(x_1, y_1, z)\,\psi(x_2, y_2, z)\ldots = 0.$$

Deuxième méthode. — Euler et Bezout ont fait connaître une méthode qui permet d'écrire sous forme de déterminant la résultante de deux équations

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m = 0,$$
$$b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n = 0.$$

En multipliant la première par $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$, la seconde par $1, x, x^2, \ldots, x^{m-1}$, on forme $m+n$ équations dans lesquelles on peut considérer $x, x^2, \ldots, x^{m+n-1}$ comme autant d'inconnues entrant au premier degré; le résultat de l'élimination peut alors s'écrire et se former d'après les règles indiquées p. 107.

Troisième méthode. — Cauchy, M. Sylvester et M. Cayley ont perfectionné la méthode précédente, mais sans en faire disparaître toutes les longueurs : voici l'exposé d'une méthode dont le principe est dû, je crois, à M. Cayley.

Soient

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x) = 0$$

les équations proposées; l'équation

$$\varphi(x)\,\psi(a) - \varphi(a)\,\psi(x) = 0$$

peut remplacer l'une quelconque des proposées, et cela quel que soit a, son premier membre étant divisible par $x - a$, puisqu'elle est satisfaite en prenant $x = a$, on peut supprimer ce facteur et abaisser son degré au-dessous du plus grand des degrés des équations proposées. On obtient ainsi une équation

$$F(x, a) = 0,$$

qui doit avoir lieu pour toutes les valeurs de x satisfaisant à la fois aux proposées et pour toutes les valeurs imaginables de a; les coefficients des diverses puissances de a doivent donc être identiquement nuls lorsque l'on donne à x une valeur satisfaisant aux équations proposées. Ainsi, en annulant ces diverses puissances de a, on obtient des équations qui sont des conséquences des proposées et qui seront en nombre supérieur d'une unité à l'exposant de la plus haute puissance de x; on pourra donc considérer ces puissances comme des inconnues entrant au premier degré et diriger le calcul comme dans le cas précédent. Cette méthode a sur la précédente l'avantage de ramener le problème à la résolution d'un nombre moins considérable d'équations du premier degré.

III. — Théorème de Bezout.

Théorème. — *La résultante de plusieurs équations algébriques est d'un degré au plus égal au produit des degrés de ces équations.*

En effet, ne considérons d'abord que deux équations

$$(1) \qquad \varphi(x, t) = 0,$$

$$(2) \qquad \chi(x, t) = 0.$$

Soient m le degré de la première, n le degré de la seconde; décomposons la fonction φ en groupes de fonctions homogènes $F(x, t)$, $\Phi(x, t)$,..., nous pourrons écrire la formule (1) comme il suit :

$$F(x, t) + \Phi(x, t) + \ldots = 0,$$

ou bien, en supposant F du degré m, Φ du degré $m-1$, etc.,

$$t^m F\left(\frac{x}{t}, 1\right) + t^{m-1}\Phi\left(\frac{x}{t}, 1\right) + \ldots = 0,$$

ou bien encore

$$F\left(\frac{x}{t}, 1\right) + \frac{1}{t}\Phi\left(\frac{x}{t}, 1\right) + \ldots = 0.$$

Les m racines de cette équation se confondent pour $t = \infty$ avec les m racines de l'équation

$$F(\alpha, 1) = 0.$$

En désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ces racines, on pourra mettre les racines de l'équation (1) sous la forme

$$t(\alpha_1 + \varepsilon_1), \quad t(\alpha_2 + \varepsilon_2), \ldots, \quad t(\alpha_m + \varepsilon_m),$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ étant des quantités nulles pour $t = \infty$. Or, d'après ce que nous avons vu p. 430 (première méthode), le résultat de l'élimination de x entre (1) et (2) est

$$(3) \qquad \chi(t\overline{\alpha_1 + \varepsilon_1}, t)\,\chi(t\overline{\alpha_2 + \varepsilon_2}, t)\ldots = 0;$$

or on peut mettre la fonction χ sous la même forme que φ, et poser

$$\chi(x, t) = t^n\left[F_1\left(\frac{x}{t}, 1\right) + \frac{1}{t}\Phi_1\left(\frac{x}{t}, 1\right)\ldots\right],$$

$F_1, \Phi_1, \ldots$ désignant des fonctions homogènes de degré n,

$n-1,\ldots$ On a alors

$$\chi(\overline{t\alpha_1+\varepsilon_1}, t) = t^n\left[F_1(\alpha_1+\varepsilon_1, 1) + \frac{1}{t}\Phi_1(\alpha_1+\varepsilon_1, 1)\ldots\right].$$

Si l'on développe le second membre par rapport aux puissances de ε_1 et si l'on désigne par ω_1 une quantité qui s'annule pour $t=\infty$, l'équation précédente s'écrira

$$\chi(\overline{t\alpha_1+\varepsilon}, t) = t^n[F_1(\alpha_1)+\omega_1],$$

et, par suite, le premier membre de (3) prendra la forme

$$t^{mn}[F_1(\alpha_1)F_1(\alpha_2)\ldots F_1(\alpha_m)+\Omega],$$

Ω désignant une quantité qui s'annule pour $t=\infty$; mn est donc le plus fort exposant de t dans la résultante des équations (1) et (2), ce qui démontre le théorème de Bezout pour le cas de deux équations.

Passons maintenant au cas de trois équations. Si l'on suppose les premiers membres de ces équations décomposés en groupes homogènes, elles pourront se mettre sous la forme

$$(1)\qquad t^m F\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, 1\right) + t^{m-1}\Phi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, 1\right) + \ldots = 0,$$

$$(2)\qquad t^n F_1\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, 1\right) + t^{n-1}\Phi_1\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, 1\right) + \ldots = 0,$$

$$(3)\qquad t^p F_2\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, 1\right) + t^{p-1}\Phi_2\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, 1\right) + \ldots = 0.$$

Si l'on divise la première par t^m, la seconde par t^n, et si l'on résout ces équations par rapport à x et à y, on en déduira, d'après ce que nous avons vu tout à l'heure, mn valeurs pour x et mn valeurs correspondantes pour y; ces valeurs se réduiront pour $t=\infty$ aux solutions du système

$$F(\alpha, \beta, 1) = 0,$$
$$F_1(\alpha, \beta, 1) = 0,$$

multipliées par t. Si l'on désigne par (α_1, β_1), (α_2, β_2),..., $(\alpha_{mn}, \beta_{mn})$ les solutions de ce système, les solutions du système (1), (2) pourront s'écrire sous la forme

$$[t(\alpha_1 + \varepsilon_1), t(\beta_1 + \varepsilon'_1)], \quad [t(\alpha_2 + \varepsilon_2), t(\beta_2 + \varepsilon'_2)], \ldots,$$

ε_1, ε'_1, etc., désignant des quantités qui s'annulent pour $t = \infty$; or le résultat de l'élimination de x et de y entre (1), (2) et (3) est

$$\prod_{i=1}^{i=mn} [t^p F_2(\alpha_i + \varepsilon_i, \beta_i + \varepsilon'_i, 1) + t^{p-1}\Phi_2(\alpha_i + \varepsilon_i, \beta_i + \varepsilon'_i, 1)\ldots] = 0,$$

ou bien, en développant par rapport aux puissances de ε_i et ε'_i et en désignant par ω_i une quantité qui s'annule pour $t = \infty$,

$$\prod_{i=1}^{i=mn} [t^p F_2(\alpha_i, \beta_i, 1) + t^p \omega_i] = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$t^{mnp} \prod_{i=1}^{i=mn} F_2(\alpha_i, \beta_i, 1) + t^{mnp}\Omega = 0,$$

Ω désignant une quantité nulle pour $t = \infty$; donc mnp est le degré de la résultante des équations (1), (2), (3). Le théorème de Bezout est donc démontré pour le cas de trois équations, et l'on voit sans peine comment on passerait de là au cas d'un plus grand nombre d'équations.

La démonstration que nous venons d'exposer est extraite d'un Mémoire de M. Liouville; elle nous a paru plus simple que les autres démonstrations données jusqu'ici du même théorème.

Remarque. — Nous avons supposé les équations proposées tout à fait générales; et nous n'avons pas eu égard à certains cas particuliers qui auraient pu faire baisser le degré de l'équation résultante, aussi ne devrons-nous point nous étonner si le degré de cette résultante devient, dans certains cas, inférieur à mnp. Ainsi, par exemple, lorsque nous avons traité le cas de trois équations, nous avons admis que le système (1), (2) admettait mn solutions; s'il en admettait moins, le degré de la résultante baisserait; il baisserait encore si l'une des quantités $F(\alpha_i, \beta_i, 1)$ était nulle.

IV. — Usages de l'élimination. — Recherche des racines imaginaires des équations. — Évanouissement des radicaux.

L'élimination a des usages très-variés dans toutes les branches de l'analyse.

Si dans une équation algébrique à une inconnue on remplace l'inconnue par $x + y\sqrt{-1}$, elle prend la forme

$$\varphi(x, y) + \psi(x, y)\sqrt{-1} = 0.$$

Cette équation se décompose en deux :

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0.$$

En éliminant alors successivement x et y, on aura deux équations à coefficients réels dont les racines convenablement discutées feront connaître les racines imaginaires de l'équation proposée.

Dans certaines recherches, on est conduit à des équations contenant des radicaux; ces équations, lorsqu'elles ne contiennent pas de signes transcendants, se ramènent toujours à la forme ordinaire sous laquelle nous sommes accoutumés à considérer les équations algébriques. En effet, observons d'abord que, après avoir chassé les dénominateurs, les deux membres de l'équation seront deux fonctions entières des variables et des radicaux; considérons, par exemple, l'équation

$$(1)\quad \sqrt[2]{x+1}\,\sqrt[3]{x+\sqrt[2]{x+1}}-\sqrt[3]{x-\sqrt{x+1}}+x-1=0.$$

Si nous posons alors

$$(2)\qquad \sqrt[2]{x+1}=y,\quad \sqrt[3]{x+y}=z,\quad \sqrt[3]{x-y}=t,$$

nous aurons

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} yz-t+x-1&=0,\\ y^2-x-1&=0,\\ z^3-x-y&=0,\\ t^3-x+y&=0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on élimine alors y, z, t, l'équation résultante ne contiendra plus de radicaux et pourra remplacer (1), à la condition, toutefois, que les radicaux, dans cette équation, seront pris avec leurs valeurs multiples; en effet, les équations (3) ne remplaceront les équations (1) et (2) qu'à cette condition.

Ainsi, par exemple, l'équation

$$\sqrt{2x}+\sqrt{x^2+1}=0$$

n'a pas de solution, tandis que

$$x^2-2x+1=0,$$

obtenue en chassant les radicaux, admet la racine $x=1$. Quoi qu'il en soit, l'équation résultante, obtenue par la méthode que nous venons d'indiquer, contient toujours les solutions de l'équation proposée, quand elle en a, de sorte qu'une discussion facile fait connaître les solutions à rejeter.

EXERCICES.

1. Résoudre l'équation

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-7}-\sqrt[3]{3x-3}=0;$$

$x=8$ est une solution de cette équation.

2. Résoudre les équations :

$$\begin{aligned} x+y+\ldots+z&=s_0,\\ ax+by+\ldots+lz&=s_1,\\ a^2x+b^2y+\ldots+l^2z&=s_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ a^{n-1}x+b^{n-1}y+\ldots+l^{n-1}z&=s_{n-1}.\end{aligned}$$

3. Former la résultante des équations

$$\begin{aligned} ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f&=0,\\ a'x^2+b'xy+c'y^2+d'x+e'y+f&=0.\end{aligned}$$

CHAPITRE IX.

ÉTUDE SPÉCIALE DE QUELQUES ÉQUATIONS.

I. — Equations binômes.

On donne le nom d'*équations binômes* aux équations de la forme

$$x^m \pm A = 0.$$

Ces équations, comme on sait, se ramènent à la forme

$$x^m \pm 1 = 0.$$

Les racines de l'équation

$$x^m - 1 = 0 \tag{1}$$

sont données, comme on l'a vu (p. 263), par la formule

$$x = \cos\frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m};$$

en sorte que le calcul de $\sin\frac{2k\pi}{m}$ et de $\cos\frac{2k\pi}{m}$ se ramène à la résolution de l'équation (1). Le côté du polygone régulier de m côtés est égal à $2\sin\frac{2k\pi}{2m}$; je laisse à dessein le facteur k sous le signe sin, parce que, outre le polygone régulier ordinaire de m côtés, il existe encore dans la plupart des cas des polygones *étoilés* obtenus en joignant les sommets du polygone ordinaire de deux en deux, de trois en trois, etc. En procédant ainsi, on ne forme pas nécessairement un polygone de m côtés; pour que ce polygone existe il faut que l'on ne revienne au sommet dont on est parti sur le polygone *convexe* qu'après avoir traversé tous les autres sommets. Supposons que l'on ait joint les sommets du polygone convexe de k en k; si l'on revient au point de départ avant d'avoir passé par tous les autres sommets, c'est que n fois k forme un multiple de m; en d'autres termes, m et k ont un diviseur; réciproquement, si m et k ont pour diviseur commun δ, en joignant les sommets du polygone convexe de k en k, quand on aura passé par δ sommets, on sera revenu au point de départ; on n'aura donc décrit qu'un polygone de δ côtés. Ainsi :

La condition nécessaire et suffisante pour obtenir un polygone étoilé de m côtés, en joignant de k en k les sommets du polygone convexe, est que m et k soient premiers entre eux.

Nous venons de dire que $2 \sin \frac{2k\pi}{2m}$ représentait le côté du polygone régulier de m côtés, polygone convexe si $k = 1$, étoilé si k et m sont premiers entre eux; or $\sin \frac{2k\pi}{2m}$ est le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans les racines de l'équation

$$x^{2m} - 1 = 0.$$

Ainsi on voit que la résolution de l'équation binôme a une liaison intime avec l'inscription des polygones réguliers convexes ou étoilés.

Remarque. — Si l'on représente par α la racine de l'équation (1), qui a le plus petit argument positif, les autres racines de cette équation pourront être représentées par $\alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^{n-1}, \alpha^n = 1$: cette remarque nous sera utile plus tard.

RÉSOLUTION DE $x^4 - 1 = 0$. — Cette équation se décompose en deux autres :

$$x^2 - 1 = 0, \quad x^2 + 1 = 0.$$

Les quatre racines de l'équation proposée sont donc données par les formules

$$x = \pm 1, \quad x = \pm\sqrt{-1},$$

et comme on doit avoir

$$x = \cos\frac{2k\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{4},$$

on en conclut, après une discussion facile,

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos\pi = -1, \quad \cos\frac{3\pi}{2} = 0, \quad \cos 2\pi = 1,$$

$$\sin\frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin\pi = 0, \quad \cos\frac{3\pi}{2} = -1, \quad \sin 2\pi = 0.$$

RÉSOLUTION DE $x^8 - 1 = 0$. — Cette équation se décompose en deux autres

$$x^4 - 1 = 0, \text{ déjà résolue, } \quad \text{et} \quad x^4 + 1 = 0;$$

la seconde donne

$$x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{-1}},$$

ou bien, en appliquant la formule identique,

$$(2) \quad \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}},$$

démontrée (p. 160),

$$x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{-1}} = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-1}\right);$$

on a donc

$$\cos\frac{2k\pi}{8}+\sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{8}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-1}.$$

Dans cette formule, on doit supposer k impair; on en déduit

$$\cos\frac{2k\pi}{8}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\frac{2k\pi}{8}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Le plus petit arc compris dans la formule $\frac{2k\pi}{2m}$ ayant son sinus et son cosinus positifs, on a

$$\cos\frac{2k}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{2\pi}{8}.$$

Le côté du polygone régulier de quatre côtés est $2\sin\frac{2\pi}{8}$, c'est-à-dire $\sqrt{2}$, comme on le savait.

Résolution de $x^{16}-1$. — Cette équation se décompose en

$$x^8-1=0 \text{ déjà résolue} \quad \text{et} \quad x^8+1=0;$$

cette dernière donne

$$x=\pm\sqrt{\pm\sqrt{\pm\sqrt{-1}}},$$

c'est-à-dire

$$x=\pm\sqrt{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\sqrt{\frac{-1}{2}}}.$$

En appliquant encore ici la formule (2), on a

$$x=\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)}\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)}\right].$$

Si l'on veut calculer $\sin\frac{2\pi}{16}$, il faudra prendre la combinaison de signes qui fournira la plus petite valeur possible du coefficient de $\sqrt{-1}$; cette valeur est

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)};$$

le côté de l'octogone régulier est donc

$$2\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Le côté de l'octogone étoilé obtenu en joignant les sommets du précédent de trois en trois sera donné par la formule

$$\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

On voit sans peine comment on passerait de là aux équations $x^{32}-1=0$, $x^{64}-1=0$, etc.

Résolution de $x^3-1=0$. — Cette équation admet la racine $x=1$; elle se décompose donc en deux autres

$$x-1=0,\quad x^2+x+1=0.$$

Cette dernière donne

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2};$$

on en déduit

$$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2},\quad \cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2},$$

$$\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Résolution de $x^6-1=0$. — Cette équation se décompose en deux autres

$$x^3-1=0 \text{ déjà résolue} \quad\text{et}\quad x^3+1=0.$$

Or $x^3+1=0$ se décompose en

$$x+1=0 \quad \text{et} \quad x^2-x+1=0.$$

Cette dernière a pour racines

$$x=\frac{1\pm\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2};$$

d'où l'on déduit

$$\cos\frac{2\pi}{6}=\frac{1}{2}, \qquad \cos\frac{10\pi}{6}=\frac{1}{2},$$

$$\sin\frac{2\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\frac{10\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le côté du polygone régulier de trois côtés est donc $\sqrt{3}$, ainsi qu'on l'a vu en Géométrie.

On passerait de là aux équations $x^{12}-1=0$, $x^{24}-1=0$, etc., en faisant usage de la formule (2).

Résolution de $x^5-1=0$. — Cette équation se décompose en deux autres

$$x-1=0 \quad \text{et} \quad x^4+x^3+x^2+x+1=0.$$

Cette dernière est une équation réciproque; elle peut s'écrire

(3) $$x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0.$$

En posant alors

(4) $$x+\frac{1}{x}=z,$$

et en observant que

$$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2,$$

l'équation (3) devient

$$z^2+z-1=0;$$

d'où l'on tire

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Mais l'équation (4) donne

$$x = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2};$$

on a donc finalement

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{(-1 \pm \sqrt{5})^2 - 16},$$

ou bien

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}\sqrt{-1}.$$

En discutant convenablement cette formule, on trouve

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \quad \cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4},$$

$$\cos\frac{6\pi}{5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}, \quad \cos\frac{8\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4},$$

$$\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \quad \sin\frac{4\pi}{5} = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{6\pi}{5} = -\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad \sin\frac{8\pi}{5} = -\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Résolution de $x^{10} - 1 = 0$. — Cette équation se décompose en deux autres :

$$x^5 - 1 = 0 \text{ déjà résolue} \quad \text{et} \quad x^5 + 1 = 0.$$

Mais cette dernière a évidemment ses racines égales et de signe contraire à celles de la première; on a donc, en particulier,

$$\sin\frac{2\pi}{10} = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad \sin\frac{3\pi}{10} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}};$$

les doubles de ces quantités représentent les côtés du pentagone régulier ordinaire et étoilé.

Résolution de $x^{20} - 1 = 0$. — Cette équation se décompose en deux autres

$$x^{10} - 1 = 0 \text{ déjà résolue} \quad \text{et} \quad x^{10} + 1 = 0.$$

Mais si dans la première on change x en $x\sqrt{-1}$, elle se transforme dans la seconde; on conclut de là la valeur du côté du décagone ordinaire et du décagone étoilé :

$$\text{Côté du décagone ordinaire} = 2\sin\frac{2\pi}{20} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

$$\text{Côté du décagone étoilé} = 2\sin\frac{6\pi}{20} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2};$$

la différence des côtés de ces polygones est donc égale au rayon.

Résolution de $x^{15} - 1 = 0$. — On reconnaît immédiatement que son premier membre est divisible par $x^5 - 1$ et par $x^3 - 1$; en supprimant d'abord le premier facteur, il vient

$$(5) \qquad x^{10} + x^5 + 1 = 0.$$

Le premier membre de cette équation n'est plus divisible par $x^3 - 1$, mais il l'est encore par $\frac{x^3 - 1}{x - 1}$ ou par $x^2 + x + 1$; en supprimant ce facteur, on a

$$x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1 = 0.$$

Cette équation est réciproque et son degré s'abaisserait en posant $x + \frac{1}{x} = z$, mais il vaut mieux chercher à résoudre l'équation (5); celle-ci se déduit de l'équation

(6) $$x^2 + x + 1 = 0,$$

en y remplaçant x par x^5; en sorte que, j désignant une racine de l'équation précédente, les racines de l'équation (5) sont données par la formule

$$x^5 - j = 0.$$

Les racines de l'équation (5) sont donc les racines cinquièmes des racines de l'équation (6); on les obtiendra en multipliant les racines de l'équation (6) par les racines cinquièmes de l'unité : on trouve ainsi

$$x = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}\sqrt{-1}}\right)\frac{-1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}.$$

II. — Théorèmes de Moivre et de Cotes.

Si l'on désigne par α la quantité

$$\cos\frac{2\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{m},$$

on aura

(1) $$(x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^2)\ldots(x-\alpha^{m-1}) = x^m - 1.$$

Si l'on représente alors les imaginaires à la manière de M. Mourey, au moyen d'une droite égale au module, faisant avec un axe fixe OX, dans un plan fixe, un angle égal à l'argument, les quantités $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{m-1}$ pourront être représentées par les rayons d'un cercle décrit du point O comme centre et faisant avec l'axe OX des angles égaux à $0, \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}$, etc., ou, si l'on veut, par les rayons d'un polygone régulier de m côtés ayant son centre et l'un de ses sommets sur OX. Si l'on désigne alors par A_0, A_1, $A_2, \ldots, A_{m-1}$ les sommets de ce polygone, et si OM représente la quantité x, en vertu du théorème démontré (p. 260), $x - \alpha^i$ sera représenté par $A_i M$, et par suite le module de $x - \alpha^i$ sera $A_i M$. En prenant alors les modules des deux membres dans la formule (1), on aura

$$A_0 M . A_1 M . A_2 M \ldots A_{m-1} M = \text{mod.}\,(x^m - 1),$$

ou si l'on pose $x = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$

$$A_0 M . A_1 M \ldots A_{m-1} M = \sqrt{r^{2m} - 2r^m \cos m\theta + 1};$$

c'est dans cette égalité que consiste le *théorème de Moivre*. Si l'on fait $\theta = 0$, le second membre devient $r^m - 1$ et l'on a le *théorème de Côtes*.

Corollaire. — Si l'on divise les deux membres de la formule précédente par $A_0 M = r - 1$ dans l'hypothèse où $\theta = 0$, on a

$$A_1 M . A_2 M \ldots A_{m-1} M = r^{m-1} + r^{m-2} + \ldots + 1.$$

Si l'on fait tendre r vers l'unité, il vient alors

$$A_1 M . A_2 M \ldots A_{m-1} M = m.$$

Cette formule exprime que le produit des diagonales d'un polygone régulier de m côtés issues d'un même point, par le carré du côté de ce polygone, est égal à m fois la $m-1^{ième}$ puissance du rayon du cercle circonscrit.

III. — Équations du troisième degré.

Nous avons vu que, en augmentant toutes les racines d'une même quantité facile à déterminer, on pouvait toujours faire disparaître la $m-1^{ième}$ puissance de l'inconnue dans toute équation du degré m; nous pouvons donc considérer l'équation du troisième degré sous la forme

$$x^3 + px + q = 0. \tag{1}$$

Pour résoudre cette équation, nous poserons

$$x = y + z; \tag{2}$$

elle deviendra alors

$$y^3 + z^3 + (y + z)(3yz + p) + q = 0.$$

Nous pouvons profiter de l'indétermination de y et de z pour poser

$$3yz + p = 0; \tag{3}$$

l'équation précédente pourra alors être remplacée par celle-ci :

$$y^3 + z^3 + q = 0. \tag{4}$$

Les équations (3) et (4) déterminent entièrement y et z et par suite x; de l'équation (3) on tire

$$y^3 z^3 = -\frac{p^3}{27}. \tag{5}$$

Les équations (4) et (5) font connaître la somme et le produit de y^3 et z^3; ces deux quantités sont racines de l'équation

$$u^2 + qu - \frac{p^3}{27} = 0;$$

d'où l'on tire

$$u = \frac{y^3}{z^3} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

et par suite

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} x = y + z = & \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ & + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \end{aligned} \right.$$

Chacun des radicaux qui figure dans cette formule a trois valeurs, de sorte que x paraît susceptible de neuf valeurs, quoique nous sachions cependant que l'équation (1) n'a que trois racines distinctes. Ce paradoxe s'explique facilement en observant que les équations (4) et (5), qui nous ont servi à déterminer z et y, sont plus générales que les équations (3) et (4) auxquelles y et z sont assujettis à satisfaire; aussi ne devrons-nous prendre que les valeurs de y et z dont le produit fait $-\frac{p}{3}$. Soient y_1 et z_1 des valeurs de y et de z satisfaisant à cette condition, 1, et j^2 les racines cubiques de l'unité, les valeurs de y sont y_1, jy_1, $j^2 y_1$; celles de z seront z_1, jz_1, $j^2 z_1$.

Ceci posé, avec z_1 on ne pourra combiner que y_1, car les autres valeurs de y ne donneraient pas $yz_1 = -\frac{p}{3}$; avec jz_1 on ne pourra combiner que $j^2 y_1$, et avec $j^2 z_1$ on ne pourra combiner que jz_1, en sorte que les racines de l'équation (1) seront

$$x_1 = y_1 + z_1, \quad x_2 = jy_1 + j^2 z_1, \quad x_3 = j^2 y_1 + jz_1;$$

dans tout ce qui suit, nous supposerons p et q réels.

La formule (6) est très-incommode pour le calcul des racines de l'équation (3); lorsque la quantité $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ est positive, on voit clairement que l'équation (1) a deux de ses racines imaginaires. Mais lorsque $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ est négatif, les racines sont compliquées de radicaux, et il n'est pas possible de décider immédiatement si elles sont réelles ou imaginaires.

Si nous supposons $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$, l'équation (1) acquiert manifestement deux racines égales.

Voici maintenant un moyen de calculer les racines de l'équation (1) au moyen des tables de logarithmes.

1° Supposons d'abord $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$, on pourra poser

$$-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=r\left(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta\right);$$

on en déduira

$$(7)\qquad r=\sqrt{\frac{-p^3}{27}},\quad \cos\theta=\sqrt{\frac{-27q^2}{4p^3}};$$

la formule (6) deviendra alors

$$x=\alpha r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{3}\right)+\beta r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3}-\sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{3}\right),$$

α et β désignant deux racines cubiques de l'unité dont le produit fasse 1. Si l'on prend alors $\alpha=1$ et $\beta=1$, on a

$$x_1=2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta}{3};$$

en prenant $\alpha=\cos\frac{2\pi}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}$, il faudra prendre $\beta=\alpha^2=\cos\frac{2\pi}{3}-\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}$, ce qui donnera

$$x_2=2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{2\pi+\theta}{3}:$$

en prenant $\alpha = \cos\frac{4\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{3}$, il faudra prendre

$\beta = \alpha^2 = \cos\frac{4\pi}{3} - \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{3}$, ce qui donnera

$$x_3 = 2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{4\pi+\theta}{3} = -2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\pi+\theta}{3}.$$

Ces formules, jointes aux formules (7), montrent que les racines de l'équation (1) sont réelles et permettent d'effectuer par logarithmes le calcul de ces racines.

2° Supposons $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$. Si l'on observe que le produit des radicaux cubiques qui entrent dans la formule (6) doit faire $-\frac{p}{3}$, on sera porté à représenter l'un par $\alpha\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{tang}\varphi$ et l'autre par $-\beta\sqrt{\frac{p}{3}}\cot\varphi$, si p est positif, α et β représentant des racines cubiques de l'unité, telles que $\alpha\beta = 1$. On trouve alors, si $\alpha = \beta = 1$,

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}(\cot\varphi - \operatorname{tang}\varphi) = \sqrt{\frac{p}{3}}\frac{\cos 2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cot 2\varphi.$$

Si l'on suppose

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}, \quad \beta = \cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1},$$

on en conclut

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\left[\cos\frac{2\pi}{3}(\cot\varphi - \operatorname{tang}\varphi) + \sin\frac{2\pi}{3}(\cot\varphi + \operatorname{tang}\varphi)\sqrt{-1}\right],$$

ou

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\cot 2\varphi + \sin\frac{2\pi}{3}\frac{\sqrt{-1}}{\sin 2\varphi}\right).$$

Le cas où l'on supposerait $\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} - \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}$, $\beta = \cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}$ n'offre pas plus de difficulté. Enfin, si, au lieu de supposer p positif, on le supposait négatif, on poserait l'un des radicaux égal à $\alpha\sqrt{-\frac{p}{3}}\operatorname{tang}\varphi$ et l'autre égal à $\beta\sqrt{-\frac{p}{3}}\cot\varphi$; x pourra donc être calculé par logarithmes lorsqu'on aura calculé l'angle φ (ou du moins la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ sont calculables par logarithmes).

Voici maintenant comment on pourra calculer l'angle φ. On observera que si p est positif,

$$\sqrt{\frac{p^3}{27}}(\cot^3\varphi - \operatorname{tang}^3\varphi) = -q,$$

et si p est négatif,

$$\sqrt{-\frac{p^3}{27}}(\cot^3\varphi + \operatorname{tang}^3\varphi) = -q;$$

en posant alors

$$\operatorname{tang}^3\varphi = \operatorname{tang}\psi,\quad \cot^3\varphi = \cot\psi,$$

l'angle ψ sera déterminé par la formule

$$\cot 2\psi = -\frac{q}{2}:\sqrt{\frac{p^3}{27}} \quad \text{si} \quad p > 0,$$

$$\sin 2\psi = -\sqrt{-\frac{p^3}{27}}:\frac{q}{2} \quad \text{si} \quad p < 0.$$

Toutes ces formules, comme on voit, sont calculables par logarithmes. Nous n'avons pas considéré le cas où $p=0$, parce que l'équation se ramène alors à

$$x^3-q=0,$$

et x est immédiatement calculable par logarithmes.

De la discussion précédente, il résulte que si $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ est positif, l'équation (1) a deux de ses racines imaginaires; si cette quantité est négative, les racines sont toutes réelles; enfin, si elle est nulle, l'équation a deux racines égales. On peut retrouver ces résultats sans résoudre l'équation.

Reprenons, en effet, l'équation (1)

$$x^3+px+q=0;$$

sa dérivée est

$$3x^2+p=0. \tag{8}$$

En vertu du théorème de Rolle, si l'équation (1) a toutes ses racines réelles, l'équation (8) aura ses racines réelles aussi. Il faut donc que p soit négatif pour que l'équation (1) ait toutes ses racines réelles; mais il faut en outre, et il suffit, que les racines de l'équation (8), substituées à la place de x dans l'équation (1), fournissent, la première un résultat positif, la seconde un résultat négatif. Les racines de l'équation (8) sont $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$; en substituant ces valeurs dans l'équation (1), on a

$$\mp\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\pm p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q;$$

en prenant le signe —, on devra donc avoir

$$\sqrt{-\frac{p^3}{27}}-p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q>0, \tag{9}$$

ou bien

$$-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+q>0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}<0;$$

en prenant le signe $+$ devant le radical, on aura au contraire

$$(10)\qquad -\sqrt{-\frac{p^3}{27}}+p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q<0.$$

Cette formule est identique à celle que l'on vient d'obtenir avec l'autre signe; ainsi $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}<0$ est la condition de réalité des racines. Si l'on veut savoir dans quel cas les racines sont égales, il suffit d'exprimer que les équations (1) et (8) ont une racine commune : le résultat auquel on arrive ainsi est l'une des formules (9) ou (10), dans laquelle on remplacerait le signe $>$ ou $<$ par $=$. On est donc conduit à l'équation de condition

$$\frac{p^2}{27}+\frac{q^2}{4}=0.$$

Pour que l'équation (1) ait ses trois racines égales, en d'autres termes, pour que x^3+px+q soit un cube parfait, il faut que l'équation (8) ait deux racines égales, ce qui ne peut avoir lieu que si $p=0$; mais alors l'équation (1) se réduit à

$$x^3+q=0.$$

Pour que cette équation ait ses racines égales, il faut que $q=0$. Du reste, $x=0$ satisfaisant à l'équation dérivée, $x=0$ devait satisfaire à l'équation (1), ce qui exigeait que l'on eût $p=q=0$.

IV. — Équations du quatrième degré.

Considérons l'équation

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0.$$

On peut la mettre sous la forme

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}px\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)x^2 + rx + s = 0,$$

ou bien

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}px\right)^2 = \left(\frac{p^2}{4} - q\right)x^2 - rs - s.$$

Si le second membre de cette équation était un carré parfait, on pourrait regarder l'équation comme résolue; mais en ajoutant aux deux membres $2\left(x^2 + \frac{1}{2}px\right)y + y^2$, le premier reste un carré, quel que soit y; quant au second, il devient

$$\left(\frac{p^2}{4} - q + 2y\right)x^2 + (py - r)x + y^2 - s,$$

et il sera un carré parfait si l'on détermine y par la condition

$$(py - r)^2 - 4\left(\frac{p^2}{4} - q + 2y\right)(y^2 - s) = 0.$$

Cette équation est du troisième degré en y. Lorsqu'elle aura été résolue, l'équation proposée s'abaissera au second degré.

Exemple. — Proposons-nous de résoudre l'équation

$$x^4 - 2x^3 - 6x + 3 = 0;$$

on l'écrira comme il suit :

$$(x^2 - x)^2 = x^2 + 6x - 3;$$

puis, en désignant par y une indéterminée,

$$(1) \quad (x^2-x)^2+2(x^2-x)y+y^2=2(x^2-x)y+y^2+x^2+6x-3.$$

On disposera alors de y de manière que le second membre soit un carré parfait, ce qui fournit la relation

$$(6-2y)^2 - 4(2y+1)(y^2-3) = 0,$$

ou, en développant,

$$-8y^3 + 36 + 12 = 0,$$

c'est-à-dire

$$y^3 = 6, \quad y = \sqrt[3]{6}.$$

L'équation (1) devient alors

$$(x^2 - x + \sqrt[3]{6})^2 = \left(\sqrt{2\sqrt[3]{6}+1}\, x + \sqrt{\sqrt[3]{6}-3}\right)^2;$$

d'où l'on tire

$$x^2 - x + \sqrt[3]{6} = \pm\left(\sqrt{2\sqrt[3]{6}+1}\, x + \sqrt{\sqrt[3]{6}-3}\right).$$

La question est ainsi ramenée à la résolution d'une équation du second degré. Cet exemple simple montre qu'il vaut encore mieux avoir recours aux méthodes d'approximation exposées plus haut qu'aux formules algébriques, surtout si l'on observe que l'équation du troisième degré en y que nous avons rencontrée aurait pu être complète, et par suite beaucoup plus difficile à résoudre.

CHAPITRE X.

ÉTUDE DES FRACTIONS RATIONNELLES.

I. — Formule de Lagrange.

Problème. — *Trouver une fonction $f(x)$ entière de x qui prenne pour $x = \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ des valeurs données $a, b, c, \ldots, l$ en nombre n.*

Nous pouvons choisir cette fonction du degré $n-1$ et poser

$$(1) \qquad f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1},$$

nous aurons alors la suite d'égalités que voici :

$$(2) \qquad \begin{cases} a = A_0 + A_1 \alpha + A_2 \alpha^2 + \ldots + A_{n-1} \alpha^{n-1}, \\ b = A_0 + A_1 \beta + A_2 \beta^2 + \ldots + A_{n-1} \beta^{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

en nombre n; en les résolvant par rapport à A_0, $A_1, \ldots, A_{n-1}$, la fonction $f(x)$ se trouvera complétement déterminée. L'existence d'une fonction $f(x)$, du degré $n-1$, satisfaisant à la question, est donc démontrée. On pourrait cependant craindre que le déterminant du système (2) soit nul; mais ce déterminant a été calculé page 113, et nous avons vu qu'il était égal au produit de toutes les différences que l'on peut former avec α, β, $\gamma, \ldots, \lambda$. Or ces quantités étant distinctes par hypothèse, le produit de leurs différences ne saurait être nul. Le système (2) est donc compatible et donne, pour A_0,

$A_1, \ldots, A_{n-1}$, des fonctions linéaires de $a, b, c, \ldots, l$ (p. 103); en substituant ces valeurs dans (1), le second membre de cette formule devient lui-même une fonction linéaire de $a, b, \ldots, l$, et nous pourrons écrire

$$(3) \qquad f(x) = \mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c + \ldots + \mathrm{L}l.$$

Le second membre de cette équation devant se réduire à $a, b, \ldots, l$ pour $x = \alpha, \beta, \ldots, \lambda$, on satisfera évidemment à la question en prenant pour A une fonction qui s'annule pour $x = b, c, \ldots, l$, et qui, pour $x = \alpha$, se réduise à 1, et en choisissant B, C, ..., L d'une manière analogue, il faudra donc poser

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda),$$

et, en faisant $x = \alpha$,

$$1 = \mathrm{P}(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\ldots(\alpha-\lambda).$$

En divisant ces relations membre à membre, on trouve

$$\mathrm{A} = \frac{(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\ldots(\alpha-\lambda)};$$

on trouverait B, C, ..., L d'une façon tout à fait semblable. La formule (3) devient alors

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) = a\,&\frac{(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\ldots(\alpha-\lambda)} \\ &+ b\,\frac{(x-\alpha)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)\ldots(\beta-\lambda)} + \ldots \end{aligned} \right.$$

Telle est la formule connue sous le nom de *formule d'interpolation de Lagrange*.

La formule (4) peut s'écrire d'une manière un peu plus simple en posant

$$\mathrm{F}(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\lambda).$$

On déduit de là, en prenant la dérivée de cette expression,

$$F'(x) = (x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda) + (x-\alpha)(x-\gamma)(x-\lambda)\ldots,$$

et par suite, pour $x=\alpha$,

$$F'(\alpha) = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\ldots(\alpha-\lambda),$$

de même

$$F'(\beta) = (\beta-\alpha)(\beta-\gamma)\ldots(\beta-\lambda),$$

et ainsi de suite; la formule (4) devient alors

$$f(x) = a\frac{F(x)}{F'(\alpha)}\frac{1}{x-\alpha} + b\frac{F(x)}{F'(\beta)}\frac{1}{x-\beta} + \ldots.$$

II. — Décomposition des fractions rationnelles en fractions simples.

Étant donnée une fonction rationnelle, on peut toujours la mettre sous la forme $\frac{\varphi(x)}{F(x)}$, $\varphi(x)$ et $F(x)$ désignant deux polynômes entiers; en effectuant la division et en désignant par $E(x)$ le quotient, par $f(x)$ le reste, on a

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)} = E(x) + \frac{f(x)}{F(x)},$$

$f(x)$ étant de degré inférieur à $F(x)$.

Une fonction rationnelle telle que $\frac{f(x)}{F(x)}$, dans laquelle $f(x)$ est de degré inférieur à $F(x)$, est ce que l'on appelle proprement une *fraction rationnelle*.

Théorème I. — *Toute fraction rationnelle peut se décomposer en une somme de fractions plus simples de la forme* $\frac{A}{(x-\alpha)^m}$, *A et α désignant des quantités indépendantes de x, et m un entier.*

En effet, reprenons la formule de Lagrange

$$f(x) = a\frac{F(x)}{F'(\alpha)}\frac{1}{x-\alpha} + b\frac{F(x)}{F'(\beta)}\frac{1}{x-\beta} + \ldots,$$

dans laquelle $f(x)$ est une fonction qui, pour $x = \alpha$, $\beta, \ldots, \lambda$, se réduit à $a, b, \ldots, l$, et dans laquelle $F(x)$ désigne un polynôme de la forme

$$P(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\lambda).$$

On peut écrire cette formule comme il suit :

$$(1) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}\frac{1}{x-\alpha} + \frac{f(\beta)}{F'(\beta)}\frac{1}{x-\beta} + \ldots;$$

elle a lieu quels que soient $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, f(\alpha), f(\beta), \ldots, f(\lambda)$, et quel que soit x ; ceci revient à dire qu'elle a lieu quel que soit $F(x)$, $\alpha, \beta, \ldots$, λ désignant les racines de $F(x) = 0$, et quelle que soit la fonction $f(x)$ de degré inférieur à $F(x)$. En effet, la fonction $f(x)$ n'a été assujettie qu'à être de degré inférieur à $F(x)$, et à devenir $f(\alpha)$ pour $x = \alpha$, $f(\beta)$ pour $x = \beta \ldots$; et comme $f(\alpha)$, $f(\beta), \ldots$ sont arbitraires, $f(x)$ est une fonction arbitraire de degré inférieur à $F(x)$. Le problème général de l'interpolation, dont nous n'avons du reste pas à nous occuper ici, consiste à déterminer une fonction quelconque qui admette n valeurs données pour n valeurs données de sa variable.

Ainsi, en supposant $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ différents, on peut poser

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \ldots + \frac{L}{x+\lambda},$$

A, B, L, . . . , L désignant des quantités indépendantes de x. Si le degré de $f(x)$ égalait ou surpassait celui de $F(x)$, il faudrait compléter cette formule par l'introduction d'une fonction entière $E(x)$, et l'on aurait

$$\frac{f(x)}{F(x)} = E(x) + \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \ldots.$$

Multiplions par $\frac{1}{x-\alpha}$ les deux membres de cette formule, elle devient

$$\frac{f(x)}{F(x)(x-\alpha)} = \frac{E(x)}{x-\alpha} + \frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{(x-\alpha)(x-\beta)} + \ldots.$$

D'après ce que nous venons de voir, tous les termes du second membre de cette équation, à partir du troisième, pourront se décomposer en fractions plus simples, et l'on aura un résultat de la forme

$$\frac{f(x)}{F(x)(x-\alpha)} = E_1(x) + \frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \ldots;$$

$E_1(x)$ désignant une nouvelle fonction entière de x quotient de $E(x)$ par $x-\alpha$, et $A_1, B_1, \ldots$ désignant de nouveaux coefficients constants, en multipliant par $\frac{1}{x-\alpha}$ les deux membres de cette nouvelle équation, on a

$$\frac{f(x)}{F(x)(x-\alpha)^2} = \frac{E_1(x)}{x-\alpha} + \frac{A}{(x-\alpha)^3} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^2} + \frac{B_1}{(x-\alpha)(x-\beta)} + \ldots;$$

par une transformation analogue à celle de tout à l'heure, on arrive à la formule

$$\frac{f(x)}{F(x)(x-\alpha)^2} = E_2(x) + \frac{A}{(x-\alpha)^3} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_2}{x-\alpha} + \frac{B_2}{x-\beta} + \ldots,$$

et ainsi de suite; on trouve alors

$$\frac{f(x)}{F(x)(x-\alpha)^{n-1}} = E_{m-1}(x) + \frac{A}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{m-1}} + \ldots$$
$$+ \frac{A_{m-1}}{x-\alpha} + \frac{B_{m-1}}{x-\beta} + \ldots.$$

On peut maintenant multiplier les deux membres par $\frac{1}{x-\beta}$ $n-1$ fois de suite, par $\frac{1}{x-\gamma}$ $p-1$ fois de suite, etc, et l'on arrivera alors à cette conclusion, que *toute fonction rationnelle est décomposable en un polynôme entier plus une série de fractions simples de la forme* $\frac{A}{(x-\omega)^i}$, ω *désignant une racine du dénominateur égale à zéro, et* i *désignant un exposant égal ou inférieur au degré de multiplicité de cette racine.*

C. Q. F. D.

$\frac{A}{(x-\omega)^i}$ est ce que l'on appelle une *fraction simple.*

Théorème II. — *Une fraction rationnelle ne peut se décomposer que d'une seule manière en un polynôme entier et une somme de fractions simples.*

En effet, si l'on pouvait avoir à la fois

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_m}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)^{m-1}} + \ldots$$
$$+ \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{B_n}{(n-\beta)^n} + \ldots + E(x),$$

et

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{a_{m'}}{(x-\alpha')^{m'}} + \frac{a_{m'-1}}{(x-\alpha')^{m'-1}} + \ldots$$
$$+ \frac{a_1}{x-\alpha'} + \frac{b_n}{(x-\beta')^{n'}} + \ldots + E'(x),$$

on en conclurait

$$(6)\qquad \frac{A_m}{(x-\alpha)^m}+\ldots=\frac{a_{m'}}{(x-\alpha')^{m'}}+\ldots.$$

Or, si l'on fait $x=\alpha$, le premier membre de cette formule devient infini; le second doit donc le devenir aussi, ce qui exige que l'un des binômes $x-\alpha'$, $x-\beta'$,... soit nul pour $x=\alpha$, ou que l'une des quantités α', β',... soit égale à α. Nous supposerons $\alpha'=\alpha$; mais alors il est bien clair que $m=m'$. En effet, si l'on avait $m'<m$, en multipliant les deux membres de la formule (6) par $(x-a)^{m'}$, le premier membre serait encore infini pour $x=\alpha$, et le second serait fini. On verrait de même que l'hypothèse $m'>m$ est inadmissible; donc $m=m'$. Si l'on multiplie alors par $(x-a)^m$ et si l'on fait $x=\alpha$, il reste $A_m=A_{m'}$, en supprimant alors les premiers termes des deux membres de la formule (6) qui sont égaux, on procédera sur la nouvelle ainsi obtenue comme sur l'ancienne, et l'on démontrera, comme tout à l'heure, l'égalité de deux nouveaux termes, et ainsi de suite.

C. Q. F. D.

III. — Sur la manière de diriger le calcul des fractions simples.

Dans le cas où le dénominateur de la fraction à décomposer ne contient que des facteurs simples, on peut faire usage de la formule

$$(1)\qquad \frac{f(x)}{F(x)}=\sum\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}\,\frac{1}{x-\alpha};$$

mais on peut aussi faire usage de la méthode des coefficients indéterminés et poser

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\ldots$$

On déduit de là

$$f(x) = \frac{\mathrm{AF}(x)}{x - \alpha} + \frac{\mathrm{BF}(x)}{x - \beta} + \ldots;$$

on en conclut, pour $x = \alpha$,

$$f(\alpha) = \mathrm{A} \lim \frac{\mathrm{F}(x)}{x - \alpha} = \mathrm{A} \lim \frac{\mathrm{F}(\alpha + h) - \mathrm{F}(\alpha)}{h} = \mathrm{A}' \mathrm{F}'(\alpha);$$

on retrouve ainsi

$$\mathrm{A} = \frac{f(\alpha)}{\mathrm{F}'(\alpha)},$$

et par suite

$$f(x) = \sum \mathrm{F}(x) \frac{f(\alpha)}{\mathrm{F}'(\alpha)} \frac{1}{x - \alpha}.$$

Cette égalité ayant lieu pour $x = \alpha, \beta, \ldots, \lambda$, c'est-à-dire pour plus de valeurs de x qu'il n'y a d'unités dans le degré de $f(x)$, est une identité; en divisant alors par $\mathrm{F}(x)$, on retrouve la formule (1).

Première application. — Soit à décomposer

$$\frac{x}{(x+1)(x-1)}.$$

En posant

$$\frac{x}{(x+1)(x+1)} = \frac{\mathrm{A}}{x-1} + \frac{\mathrm{B}}{x+1},$$

on en conclut

$$x = \mathrm{A}(x+1) + \mathrm{B}(x-1);$$

en faisant $x = 1$, on a

$$1 = 2a, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{A} = \frac{1}{2};$$

en faisant $x = -1$, on a au contraire

$$-1 = -2\beta \quad \text{ou} \quad \mathrm{B} = \frac{1}{2},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right);$$

du reste, l'application de la formule (1) aurait donné, en posant $x^2 - 1 = \mathrm{F}(x)$,

$$\mathrm{A} = \frac{f(1)}{\mathrm{F}'(1)} = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{B} = \frac{f(-1)}{\mathrm{F}'(-1)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Deuxième application. — La méthode des coefficients indéterminés s'applique encore dans le cas où le dénominateur a des facteurs multiples; ainsi, par exemple, considérons la fraction

$$\frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)};$$

elle se développera de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)} &= \frac{\mathrm{A}}{(x-1)^3} + \frac{\mathrm{A}'}{(x-1)^2} + \frac{\mathrm{A}''}{x-1} \\ &\quad + \frac{\mathrm{B}}{(x+1)^2} + \frac{\mathrm{B}'}{x-1} + \frac{\mathrm{C}}{x-2}.\end{aligned}$$

En chassant les dénominateurs, on a

$$\begin{aligned}x^2 - x + 1 = {} & \mathrm{A}(x+1)^2(x-2) + \mathrm{A}'(x-1)(x+1)^2(x-2) \\ & + \mathrm{A}''(x-1)^2(x+1)^2(x-2) + \mathrm{B}(x-1)^3(x-2) \\ & + \mathrm{B}'(x+1)(x-1)^3(x-2) + \mathrm{C}(x-1)^3(x+1)^2.\end{aligned}$$

Si l'on fait $x = 1$, on a

$$1 = -4\mathrm{A}; \quad \text{d'où} \quad \mathrm{A} = -\frac{1}{4}.$$

En faisant $x = -1$, on a

$$3 = +24\mathrm{B}; \quad \text{d'où} \quad \mathrm{B} = \frac{1}{8}.$$

En faisant $x=2$, on a

$$3=9C;\quad \text{d'où}\quad C=\frac{1}{3}.$$

Si l'on remplace A, B, C par leurs valeurs, il vient, réductions faites,

$$\begin{aligned}&-8x^5+8x^4+16x^3-16x^2-8x+8\\ &\quad=24A'(x-1)(x+1)^2(x-2)+24A''(x-1)^2(x+1)^2(x-2)\\ &\quad\quad+24B'(x+1)(x-1)^3(x-2),\end{aligned}$$

et en divisant par $(x-1)(x+1)(x-2)$,

$$\begin{aligned}&-8x^2-11x+7\\ &\quad=24A'(x+1)+24A''(x-1)(x+1)+24B'(x-1)^2.\end{aligned}$$

Si l'on fait alors $x=1$, on a

$$-12=48A',\quad A'=-\frac{1}{4}.$$

Si l'on fait $x=-1$, on a

$$10=96B',\quad B'=\frac{5}{48}.$$

Si enfin on fait $x=0$, en tenant compte des valeurs déjà trouvées, on a

$$7=-6-24A''+\frac{5}{2};\quad \text{d'où}\quad A''=-\frac{21}{48},$$

et par suite

$$\begin{aligned}\frac{x^2-x+1}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}&=-\frac{1}{4(x-1)^3}-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{21}{48(x-1)}\\ &\quad+\frac{1}{8(x+1)^2}+\frac{5}{48(x+1)}+\frac{1}{3(x-2)}.\end{aligned}$$

On peut quelquefois abréger les calculs comme il suit :

considérons la fraction

$$\frac{f(x)}{(x-\alpha)^m\,\varphi(x)} = \frac{A_m}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-\alpha} + \psi(x).$$

La fonction $\psi(x)$ est une fonction rationnelle qui a pour dénominateur $\varphi(x)$; quant à son numérateur, il est évidemment de degré inférieur à $\varphi(x)$, en sorte que si l'on change x en $z+\alpha$ et si l'on multiplie par z^m, on a

$$\frac{f(z+\alpha)}{\varphi(z+\alpha)} = A_m + A_{m-1}\,z + \ldots + A_1\,z^{m-1} + \psi(z+\alpha)\,z^m;$$

A_m, A_{m-1}, ... sont donc les termes du quotient de $\dfrac{f(z+\alpha)}{\varphi(z+\alpha)}$ ordonné par rapport aux puissantes croissantes de z.

Troisième application. — Lorsque le dénominateur d'une fraction contient des facteurs imaginaires, la règle à suivre est toujours la même. Toutefois, il est bon d'observer que si ces facteurs sont conjugués deux à deux, on peut faire disparaître les imaginaires en adoptant une nouvelle espèce de fractions simples.

Considérons, par exemple, la fraction réelle

$$\frac{f(x)}{(x-\alpha-\alpha'\sqrt{-1})(x-\alpha+\alpha'\sqrt{-1})\ldots} = \frac{f(x)}{F(x)};$$

elle se décomposera de la manière suivante :

$$\frac{A+A'\sqrt{-1}}{x-\alpha-\alpha'\sqrt{-1}} + \frac{B+B'\sqrt{-1}}{x-\alpha+\alpha'\sqrt{-1}} + \ldots$$

Or $A+A'\sqrt{-1}$ est égal à $\dfrac{f(\alpha+\alpha'\sqrt{-1})}{F'(\alpha+\alpha'\sqrt{-1})}$, $B+B'\sqrt{-1}$ est égal à $\dfrac{f(\alpha-\alpha'\sqrt{-1})}{F'(\alpha-\alpha'\sqrt{-1})}$; ces deux quantités ne diffèrent donc que par le signe de $\sqrt{-1}$, et l'on a

$$\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{A}'\sqrt{-1}}{x-\alpha-\alpha'\sqrt{-1}} + \frac{\mathrm{A}-\mathrm{A}'\sqrt{-1}}{x-\alpha+\alpha'\sqrt{-1}} + \ldots,$$

c'est-à-dire, en réduisant les deux fractions écrites au même dénominateur,

$$\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{2\mathrm{A}(x-\alpha)+2\mathrm{A}'\alpha'}{(x-\alpha)^2+\alpha'^2} + \ldots.$$

On voit que deux facteurs imaginaires conjugués donnent lieu à une fraction simple réelle de la forme $\frac{\mathrm{M}x+\mathrm{N}}{x^2+px+q}$; en suivant le même mode de raisonnement que plus haut, on verrait que si le dénominateur $\mathrm{F}(x)$ possède deux facteurs imaginaires multiples d'ordre i conjugués, $\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}$ peut se mettre sous la forme

$$\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)} = \mathrm{E}(x) + \frac{\mathrm{M}_i x+\mathrm{N}_i}{(x^2+px+q)^i} + \frac{\mathrm{M}_{i-1}x+\mathrm{N}_{i-1}}{(x^2+px+q)^{i-1}} + \ldots$$
$$+ \frac{\mathrm{M}_1 x+\mathrm{N}_1}{x^2+px+q} + \ldots.$$

On peut encore ici employer la méthode des coefficients indéterminés, mais voici une méthode qui sera peut-être plus expéditive dans un certain nombre de cas.

Considérons la fraction

$$\frac{x^2+3}{(x^2+1)^3(x-1)x^2} = \frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}.$$

Nous poserons $(x-1)x^2 = \varphi(x)$ et nous écrirons

$$\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{f(x)}{(x^2+1)^3\varphi(x)} = \frac{\mathrm{M}x+\mathrm{N}}{(x^2+1)^3} + \frac{f(x)-\varphi(x)(\mathrm{M}x+\mathrm{N})}{(x^2+1)^3\varphi(x)}.$$

Nous déterminerons M et N par la condition

$$f(x) - \varphi(x)(\mathrm{M}x + \mathrm{N}) = (x^2 + 1)\psi(x);$$

en d'autres termes, nous exprimerons que le quotient $\psi(x)$ de $f(x) - \varphi(x)(\mathrm{M} + \mathrm{N})$ par $x^2 + 1$ est entier, ce qui pourra se faire en écrivant que le premier membre de l'équation précédente est nul en même temps que $x^2 + 1$, c'est-à-dire pour $x = \pm\sqrt{-1}$. Nous poserons donc

$$f(\sqrt{-1}) - \varphi(\sqrt{-1})(\mathrm{M}\sqrt{-1} + \mathrm{N}) = 0,$$

ou bien

$$2 + (\sqrt{-1} - 1)(\mathrm{M}\sqrt{-1} + \mathrm{N}) = 0.$$

Cette équation se décompose en deux autres

$$\mathrm{M} + \mathrm{N} = 2, \quad \mathrm{M} = \mathrm{N};$$

on en déduit $\mathrm{M} = \mathrm{N} = 1$, et par suite

$$\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{x+1}{(x^2+1)^3} + \frac{\psi(x)}{(x^2+1)^2\varphi(x)},$$

formule dans laquelle $\psi(x)$ est le quotient de $f(x) - \varphi(x)(x+1)$ par $x^2 + 1$ ou $-x^2 + 3$. On posera alors

$$\frac{\psi(x)}{(x^2+1)^2\varphi(x)} = \frac{\mathrm{M}x + \mathrm{N}}{(x^2+1)^2} + \frac{\psi(x) - (\mathrm{M}x + \mathrm{N})\varphi(x)}{(x^2+1)^2\varphi(x)},$$

et

$$\psi(\sqrt{-1}) - (\mathrm{M}\sqrt{-1} + \mathrm{N})\varphi(\sqrt{-1}) = 0,$$

c'est-à-dire

$$4 + (\sqrt{-1} - 1)(\mathrm{M}\sqrt{-1} + \mathrm{N}) = 0;$$

d'où l'on déduit $\mathrm{M} = \mathrm{N} = 2$. En divisant alors

$\psi(x) - (\mathrm{M}x + \mathrm{N})\varphi(x)$ par $x^2 + 1$, on trouve pour quotient $\varpi(x) = -2x^2 + 3$, par suite

$$\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{x+1}{(x^2+1)^3} + \frac{2x+2}{(x^2+1)^2} + \frac{3-2x^2}{(x^2+1)(x-1)x^2}.$$

On posera alors

$$\frac{3-2x^2}{(x^2+1)(x-1)x^2} = \frac{\mathrm{M}x+\mathrm{N}}{x^2+1} + \frac{\mathrm{A}}{x^2} + \frac{\mathrm{B}}{x} + \frac{\mathrm{C}}{x-1},$$

et l'on en déduira

$$3 - 2x^2 = (\mathrm{M}x+\mathrm{N})x^2(x-1) + \mathrm{A}(x^2+1)(x-1) + \mathrm{B}x(x^2+1)(x-1) + \mathrm{C}x^2(x^2+1).$$

Si l'on fait $x = 0$, on trouve $\mathrm{A} = -3$; en remplaçant A par cette valeur, on trouve

$$3x^2 - 5x + 3 = (\mathrm{M}x+\mathrm{N})x(x-1) + \mathrm{B}(x^2-1)(x-1) + \mathrm{C}x(x^2+1).$$

Pour $x = 0$, on a $\mathrm{B} = 3$, et par suite

$$-3x^2 + 6x - 2 = (\mathrm{M}x+\mathrm{N})(x-1) + \mathrm{C}(x^2+1).$$

Si l'on fait $x = 1$, on a

$$1 = 2\mathrm{C}, \quad \mathrm{C} = \frac{1}{2};$$

il vient alors, réductions faites,

$$2\mathrm{M}x + 2\mathrm{N} = -7x + 5, \quad \mathrm{M} = -\frac{7}{2}, \quad \mathrm{N} = \frac{5}{2}.$$

On a donc

$$\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{x+1}{(x^2+1)^3} + \frac{2x+2}{(x^2+1)^2} + \frac{-7x+5}{2(x^2+1)} - \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x} + \frac{1}{2(x-1)}.$$

EXERCICES.

1. Les fractions rationnelles décomposées en fractions simples se développent facilement en série par la formule du binôme ; ceci posé, on propose de développer en série ordonnée par rapport aux puissances de x les fonctions

$$\frac{1}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}, \quad \frac{1}{(x^2 - 2x\cos\theta + 1)^2}.$$

2. Décomposer en fractions simples les fractions

$$\frac{1}{x^m \pm 1}, \quad \frac{mx^{m-1}}{x^m \pm 1}.$$

3. Décomposer en fractions simples les fractions

$$\frac{1}{x^2 + px + q}, \quad \frac{1}{x^4 + px^2 + q}.$$

4. Trouver une fonction périodique qui, pour des valeurs α, $\beta, \ldots, \lambda$ données de sa variable, prenne des valeurs données a, $b, \ldots, l$.

5. Décomposer en fractions simples la fraction

$$\frac{1.2.3\ldots n}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}.$$

CHAPITRE XI.

THÉORIE DES FONCTIONS DÉRIVÉES.

I. — Définitions.

On appelle *dérivée* d'une fonction la limite du rapport de l'accroissement de cette fonction à l'accroissement correspondant de sa variable lorsque celui-ci tend vers zéro.

Cette définition, pour être bien comprise, exige que nous entrions dans quelques détails. Lorsqu'une fonction $f(x)$ est continue, à un accroissement infiniment petit h de sa variable x correspond toujours un accroissement infiniment petit k de la fonction $f(x)$, mais il n'est pas évident *à priori* que la limite du rapport $\frac{k}{h}$, que nous avons appelée *dérivée de la fonction*, soit finie et déterminée; en d'autres termes, il n'est pas évident que, quel que soit la manière dont h tend vers zéro, $\frac{k}{h}$ tende toujours vers la même limite.

Nous verrons dans la suite que les fonctions de variable réelle ont en général une dérivée unique et bien déterminée, et nous ne nous occuperons que de ces fonctions.

Lagrange, dans sa *Théorie des fonctions analytiques*, propose de représenter la dérivée de la fonction y par y'; y' à son tour pouvant être considéré comme fonction de la même variable que y, sa dérivée sera représentée par y'' : elle porte le nom de *dérivée seconde* de y. La dérivée de y'' sera représentée par y''' : elle porte le nom de *dérivée troisième* de y, etc. Les notations de Lagrange sont souvent incommodes; Kramp, Arbogast, Cauchy et d'autres géomètres ont employé les notations

$$Dy, \quad D^2y, \quad D^3y, \ldots$$

pour désigner les dérivées de y; Leibnitz et Newton ont employé d'autres notations dont nous n'avons pas à parler ici. Hâtons-nous cependant de dire que les notations de Leibnitz sont généralement adoptées comme se prêtant bien mieux aux calculs. Nous nous servirons dorénavant des notations de Lagrange, parce qu'elles sont plus simples, dans l'exposition des principes du calcul des dérivées, et que celles de Leibnitz sont enseignées dans les cours de calcul différentiel, identique au fond avec celui des dérivées.

II. — Propriétés des dérivées.

Théorème I. — *Soient $f(x)$ une fonction quelconque, $f'(x)$ sa dérivée, h un accroissement quelconque donné à x, on aura*

$$(1) \qquad f(x+h)-f(x)=h[f'(x)+\varepsilon],$$

ε désignant une quantité qui s'annule avec h.

En effet, d'après la définition même que nous avons donnée de la dérivée, on a

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x),$$

c'est-à-dire, en désignant par ε une quantité qui s'annule avec h,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\varepsilon;$$

d'où l'on tire la relation (1).

THÉORÈME II. — *Lorsque la dérivée $f'(x)$ d'une fonction $f(x)$ est constamment nulle entre les limites x_0 et X, cette fonction est constante entre ces limites.*

En effet, soit x une valeur comprise entre x_0 et X; partageons l'intervalle compris entre x_0 et x en n parties égales à h, en sorte que l'on ait

$$\frac{x - x_0}{n} = h, \quad \text{ou} \quad x - x_0 = nh.$$

Nous aurons, en vertu de la formule (1),

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h[f'(x_0) + \varepsilon_0],$$

ε_0 désignant une quantité qui tend vers zéro avec h. Mais comme $f'(x_0)$ est nul entre les limites x_0 et X, cette équation se réduit à

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h\varepsilon_0.$$

On trouve de même

$$f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h) = h\varepsilon_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f(x_0 + nh) - f(x_0 + \overline{n-1}\, h) = h\varepsilon_{n-1},$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}$ désignant des quantités qui tendent vers zéro avec h. Si nous ajoutons les équations précédentes, en observant que $x_0 + nh$ n'est autre chose que x, il vient

$$(2) \qquad f(x) - f(x_0) = h(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n-1}).$$

Mais en désignant par η la plus grande des quantités ε_0, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ prises en valeur absolue, on a

$$\text{val. abs.}\,(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n-1}) < n\eta,$$

c'est-à-dire, en désignant par θ un nombre compris entre -1 et $+1$,

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n-1} = n\theta\eta.$$

L'équation (2) peut alors s'écrire

$$f(x) - f(x_0) = nh\theta\eta,$$

ou bien

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\,\theta\eta.$$

Or, si l'on fait tendre h vers zéro, η tend vers zéro; il en résulte que x et x_0 restant fixes, on peut prendre $f(x) - f(x_0)$ moindre que toute quantité donnée; donc on a rigoureusement

$$f(x) - f(x_0) = 0;$$

donc, quel que soit x compris entre x_0 et X, $f(x)$ conserve une valeur constante égale à $f(x_0)$. C. Q. F. D.

Théorème III. — *La dérivée d'une fonction $f(x)$ ne saurait être constamment infinie.*

En effet, posons

(3) $$f(x) = y;$$

cette équation, résolue par rapport à x, fournira un résultat de la forme

(4) $$x = \varphi(y).$$

Les équations (3) et (4) sont identiques au fond, elles ne diffèrent absolument que par la forme, en sorte que si l'on change x en $x + h$ dans ces deux équations et si l'on désigne par $y + k$ ce que devient alors y, on en déduira pour k les mêmes valeurs dans les deux équations en question. Il résulte de là que si la limite de $\frac{k}{h}$, c'est-à-dire si la dérivée de $f(x)$ était infinie entre les limites $x = x_0$ et $x = \mathrm{X}$, la limite de $\frac{h}{k}$, c'est-à-dire la dérivée de $\varphi(y)$, serait constamment nulle entre les limites $y = f(x_0)$ et $y = f(\mathrm{X})$. $\varphi(y)$ ou x serait donc une constante entre ces limites, c'est-à-dire quand x varie lui-même entre x_0 et X, ce qui est absurde.

III. — Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient.

Théorème I. — *La dérivée d'une somme composée d'un nombre limité de parties est égale à la somme des dérivées de ses parties.*

En effet, considérons la quantité

$$(1) \qquad y = u + v - w \pm \ldots,$$

$u, v, w, \ldots$ désignant des fonctions quelconques de x *en nombre limité*; représentons par le symbole Δx un accroissement arbitraire donné à x (le signe Δ ne représentant plus ici une quantité, mais une opération). Soient Δy, Δu, Δv, $\Delta w, \ldots$ les accroissements correspondants de $y, u, v, w, \ldots$; en remplaçant dans l'équation (1) x par $x + \Delta x$, u deviendra alors $u + \Delta u$, v deviendra $v + \Delta v$, etc., et on aura

$$(2) \qquad y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - w - \Delta w \pm \ldots.$$

Si l'on retranche les équations (1) et (2) membre à membre, on a

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w \pm \ldots,$$

c'est-à-dire, en divisant par Δx,

$$(3) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x} \pm \ldots$$

Or, si l'on fait tendre Δx vers zéro, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tendra vers y' dérivée de y, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tendra vers u', etc., en sorte qu'en prenant les limites des deux membres de l'équation précédente, et en observant que dans le second membre de cette équation *le nombre des parties est limité,* on a

$$y' = u' + v' - w' + \ldots,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Remarque. — Nous avons insisté sur ce point que le nombre des parties u, v, w,... devait être limité; en effet, quand nous avons fait tendre Δx vers zéro, nous avons admis que la limite de la somme $\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}, \ldots$ était égale à la somme des limites de ses parties, ce qui cesse d'être vrai lorsque l'on suppose le nombre des parties illimité (*). Ainsi le théorème que nous venons de démontrer n'est pas applicable aux séries, ou du moins, pour qu'il devienne applicable aux séries, il faut nécessairement une nouvelle démonstration.

Théorème II. — *La dérivée d'un produit de plusieurs fonctions en nombre limité est égale à la somme des produits obtenus en multipliant la dérivée de chacune de ces fonctions par toutes les autres.*

En effet, soient u, v, w,... différentes fonctions de x en nombre limité; posons

$$y = uvw \ldots. \tag{1}$$

(*) On démontre par le calcul intégral la formule

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots \pm \frac{\sin nx}{n} \mp \ldots.$$

Si l'on prend la dérivée des deux membres de cette équation, on trouve, à l'aide de procédés qui seront expliqués plus loin, la formule

$$\frac{1}{2} = \cos x - \cos 2x + \cos 3x - \ldots \pm \cos nx, \ldots,$$

absurde, car le second membre est divergent.

Changeons dans cette formule x en $x+\Delta x$, y, u, v, w,... deviendront $y+\Delta y$, $u+\Delta u$,..., Δy, Δu,... représentant, comme plus haut, les accroissements de y, u,... correspondants à l'accroissement Δx de x. Nous aurons

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)(w+\Delta w)\ldots.$$

Or le produit des facteurs qui entrent dans le second membre de cette équation est égal à la somme des produits obtenus en prenant pour facteurs un terme dans chacun des binômes $u+\Delta u$, $v+\Delta v$,...; on aura donc

$$(2)\quad y+\Delta y=uvw\ldots+\Delta u.vw\ldots+\Delta v.uw\ldots+\omega,$$

ω désignant une somme de termes contenant en facteur au moins deux des quantités Δu, Δv, Δw,....

Or, des équations (1) et (2) on tire par soustraction

$$\Delta y=\Delta u.vw\ldots+\Delta v.uw\ldots+\Delta w.uv\ldots+\omega,$$

ou bien, en divisant par Δx,

$$(3)\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}vw\ldots+\frac{\Delta v}{\Delta x}uw\ldots+\frac{\omega}{\Delta x}.$$

Or, si l'on fait tendre Δx vers zéro, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$,... auront pour limites y', u',.... Quant à $\frac{\omega}{\Delta x}$, il se compose de termes de la forme $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}\cdot\alpha$, dans lesquels α est un produit qui contient au moins un des facteurs Δu, Δv,...; si nous supposons donc qu'aucune des dérivées u', v',... ne soit infinie, $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$ n'augmentera pas indéfiniment; d'un autre côté, α aura pour limite zéro, et par suite ω aussi; donc, si l'on suppose les facteurs u, v, w,... en nombre limité, la formule (3) donnera pour $\Delta x = 0$

(4) $$y' = u'vw \ldots + v'uw \ldots + w'uv \ldots.$$

C. Q. F. D.

Corollaire I. — Si l'on divise les équations (1) et (4) membre à membre, on trouve

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} + \ldots,$$

relation remarquable et dont on fait un fréquent usage. $\frac{y'}{y}$ est ce que l'on appelle la *dérivée logarithmique* de y; on peut donc dire que :

La dérivée logarithmique d'un produit est égale à la somme des dérivées logarithmiques de ses facteurs.

Corollaire II. — a désignant une constante, la dérivée de au sera au'; car la dérivée de a est nulle. En effet, Δa est nul, et par suite $\frac{\Delta a}{\Delta x}$ aussi, quelque petit que soit Δx; donc la limite de $\frac{\Delta a}{\Delta x}$ sera zéro. C. Q. F. D.

Théorème III. — *La dérivée d'un quotient est égale au résultat obtenu en divisant par le carré du diviseur la dérivée du dividende multipliée par le diviseur, diminuée de la dérivée du diviseur, multipliée par le dividende.*

En effet, soit

(1) $$y = \frac{u}{v}$$

le quotient des deux fonctions u et v de x. Changeons x en $x + \Delta x$; u, v, y deviendront $u + \Delta u$, $v + \Delta v$,

$y + \Delta y$, et l'on aura

$$(2) \qquad y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}.$$

Des équations (1) et (2) on tire

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v},$$

c'est-à-dire

$$\Delta y = \frac{v \Delta u - u \Delta v}{v(v + \Delta v)};$$

d'où l'on tire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \Delta v}.$$

Si l'on fait tendre Δx vers zéro, il vient alors, en observant que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ ont pour limites y', u', v',

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — La dérivée de $\frac{1}{v}$ s'obtiendra en faisant $u = 1$ dans la formule précédente, et par suite $u' = 0$. On a alors

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

IV. — Dérivées des fonctions de fonctions et des fonctions composées.

Soient v une fonction de x, w une fonction de v, y une fonction de w, y sera ce que l'on appelle une *fonction de fonction* de x.

Théorème I. — *La dérivée d'une fonction de fonction est égale au produit des dérivées des fonctions dont elle est formée.*

En effet, soit y une fonction de w, w une fonction de v, v une fonction de x, changeons x en $x+\Delta x$, y deviendra $y+\Delta y$, w deviendra $w+\Delta w$, v deviendra $v+\Delta v$, et l'on aura identiquement

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta w}\cdot\frac{\Delta w}{\Delta v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}. \tag{1}$$

Si l'on fait tendre Δx vers zéro, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ aura pour limite v'.

$\frac{\Delta w}{\Delta v}$ est le rapport de l'accroissement de w à l'accroissement correspondant de v; sa limite est donc la dérivée de w prise en considérant w uniquement comme fonction de v et non comme fonction de x : nous désignerons cette dérivée par w'_v pour ne pas la confondre avec w', qui est la dérivée de w considérée comme fonction de x. De même $\frac{\Delta y}{\Delta w}$ aura pour limite y'_w, dérivée de y prise en considérant y uniquement comme fonction de w. La formule (1) peut alors s'écrire

$$y'=y'_w w'_v v', \tag{2}$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Remarque I. — Nous avons tacitement supposé le nombre des fonctions intermédiaires w et v limité; en effet, en passant aux limites dans la formule (1), nous nous sommes appuyés sur ce principe, que la limite d'un produit était égale au produit des limites de ses facteurs : ce principe n'est pas applicable aux produits composés d'un nombre illimité de facteurs.

Remarque II. — Il ne faut pas confondre les expressions y'_w et y'; elles sont, comme on voit, essentiellement différentes et liées entre elles par la relation (2).

Soient $u, v, w, \ldots$ des fonctions de x, et $f(u, v, w, \ldots)$ une fonction de $u, v, w, \ldots, f$ sera par rapport à x ce que l'on appelle une *fonction composée.*

Théorème II. — *La dérivée d'une fonction composée est égale à la somme de ses dérivées prises par rapport à chaque fonction dont elle est composée, respectivement multipliées par les dérivées de ces fonctions elles-mêmes.*

En effet, considérons la fonction $f(u, v, w)$, u, v, w désignant ici des fonctions de x, on aura

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u, v, w)}{\Delta x},$$

Δu, Δv, Δw, Δf désignant, comme plus haut, les accroissements de u, v, w, f correspondants à l'accroissement Δx de x. Or on peut écrire comme il suit l'équation précédente :

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta x} = & \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u+\Delta u, v+\Delta v, w)}{\Delta x} \\ & + \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v, w) - f(u+\Delta u, v, w)}{\Delta x} \\ & + \frac{f(u+\Delta u, v, w) - f(u, v, w)}{\Delta x}. \end{aligned} \right.$$

Or la première partie du second membre de cette équation

$$(2)\quad \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u+\Delta u, v+\Delta v, w)}{\Delta x}$$

est l'accroissement que prend $f(u+\Delta u, v+\Delta v, w)$ quand on change w en $w+\Delta w$. Or, en appliquant ici la formule

$$f(x+h)-f(x)=h[f'(x)+\varepsilon]$$

démontrée (p. 473), nous pourrons écrire la quantité (2) ainsi qu'il suit :

$$(3) \qquad [f'_w(u+\Delta u, v+\Delta v, w)+\varepsilon]\frac{\Delta w}{\Delta x},$$

ε désignant une quantité qui s'annule avec Δw, c'est-à-dire avec Δx, et f'_w désignant une dérivée prise par rapport à w, c'est-à-dire en laissant $u+\Delta u$ et $v+\Delta v$ invariables. Or $f'_w\,(u+\Delta u,\ v+\Delta v,\ w)$ ne diffère de $f'_w\,(u,\ v,\ w)$ que d'une quantité qui s'annule avec Δu et Δv, c'est-à-dire avec Δx, en sorte que l'expression (3), ou ce qui revient au même (2), peut s'écrire

$$[f'_w(u,v,w)+\alpha]\frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

α désignant une quantité qui s'évanouit en même temps que Δx, la seconde partie du second membre de la formule (1) se mettra d'une façon analogue sous la forme

$$[f'_v\,(u,v,w)+\beta]\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

et le troisième sous la forme

$$[f'_u(u,v,w)+\gamma]\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

β et γ désignant des quantités qui s'évanouissent avec Δx, l'équation (1) peut alors s'écrire

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=[f'_w(u,v,w)+\alpha]\frac{\Delta w}{\Delta x}+[f'_v\,(u,v,w)+\beta]\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$+[f'_u\,(u,v,w)+\gamma]\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

c'est-à-dire, en passant aux limites,

$$f'_x = f'_w w'_x + f'_v v'_x + f'_u u'_x.$$

C. Q. F. D.

V. — Dérivées des fonctions implicites.

Une fonction est *implicite* lorsqu'elle est racine d'une équation non résolue; elle est *explicite* dans les autres cas.

Proposons-nous de calculer la dérivée de la fonction y de x donnée par la formule

$$f(x, y) = 0.$$

Cette formule doit se réduire à une identité toutes les fois que l'on remplace y par sa valeur exprimée en fonction de x, en sorte que $f(x, y)$, considérée comme fonction de x, est constamment nulle; sa dérivée prise par rapport à x doit donc être constamment nulle. Or $f(x, y)$ est une fonction composée, et, en lui appliquant les règles démontrées (p. 482), on a

$$f'_x x'_x + f'_y y'_x = 0,$$

ou, en observant que x'_x est égal à 1,

$$f'_x + f'_y y'_x = 0;$$

d'où l'on tire

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Supposons maintenant la fonction y définie par plusieurs équations

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi(x, y, u, v) = 0, \\ \chi(x, y, u, v) = 0, \\ \psi(x, y, u, v) = 0, \end{array}\right.$$

dans lesquelles u et v désignent d'autres fonctions de x. Si l'on pouvait résoudre ces équations, on en déduirait y, u, v en fonctions de x, et les règles ordinaires permettraient de calculer les dérivées de ces fonctions. Quoi qu'il en soit, on peut supposer dans les équations (1) y, u, v remplacées par leurs valeurs exprimées en fonctions de x, et le théorème relatif aux fonctions composées donnera

$$\varphi'_x + \varphi'_y y'_x + \varphi'_u u'_x + \varphi'_v v'_x = 0,$$

$$\chi'_x + \chi'_y y'_x + \chi'_u u'_x + \chi'_v v'_x = 0,$$

$$\psi'_x + \psi'_y y'_x + \psi'_u u'_x + \psi'_v v'_x = 0;$$

on déduit de là

$$y'_x = -\begin{vmatrix} \varphi'_x, & \varphi'_u, & \varphi'_v \\ \chi'_x, & \chi'_u, & \chi'_v \\ \psi'_x, & \psi'_u, & \psi'_v \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varphi'_y, & \varphi'_u, & \varphi'_v \\ \chi'_y, & \chi'_u, & \chi'_v \\ \psi'_y, & \psi'_u, & \psi'_v \end{vmatrix}.$$

VI. — Dérivées des fonctions simples.

Dérivée de a^x. — Posons

$$y = a^x;$$

en changeant x en $x + \Delta x$, y devient $y + \Delta y$, et l'on a

$$y + \Delta y = a^{x+\Delta x},$$

d'où l'on tire

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x,$$

ou bien

$$\Delta y = a^x [a^{\Delta x} - 1].$$

On tire de là

(1) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Si, dans cette formule, on vient à poser

$$a^{\Delta x} = 1 + \alpha, \quad \text{ou} \quad \Delta x = \frac{l(1+\alpha)}{la},$$

elle devient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x\, la}{l(1+\alpha)} \cdot \alpha,$$

ou bien

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x\, la}{l(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Si l'on fait alors tendre Δx vers zéro, α tend vers zéro, $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers e, et par conséquent on a

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = a^x\, la.$$

Le développement en série conduit plus rapidement à ce résultat, en observant que la formule (1) peut s'écrire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \left[la + \frac{\Delta x\, l^2 a}{1.2} + \frac{(\Delta x)^2\, l^3 a}{1.2.3} + \ldots \right],$$

et cette formule devient, pour $\Delta x = 0$,

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x\, la.$$

La dérivée de a^x est donc $a^x\, la$, et par suite celle de e^x est e^x.

Dérivée de $\log x$. — En posant

$$y = \log x,$$

on a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log(x+\Delta x) - \log x}{\Delta x},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \log\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}},$$

ou enfin

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}};$$

si l'on fait alors tendre Δx vers zéro, la limite de $\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$ sera $e^{\frac{1}{x}}$, et l'on aura

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \log e^{\frac{1}{x}},$$

ou bien

$$y' = \frac{1}{x}\log e.$$

Si le logarithme est un logarithme népérien, on aura simplement

$$y' = \frac{1}{x}.$$

Dérivée de x^m. — Si m est entier et positif, la dérivée de x^m est la limite vers laquelle tend le rapport

$$\frac{(x+\Delta x)^m - x^m}{\Delta x},$$

ou bien

$$mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}\Delta x + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$mx^{m-1}.$$

Si m n'est pas entier et positif, posons

$$y = x^m;$$

en prenant les logarithmes des deux membres de la formule précédente, il viendra

$$ly = mlx.$$

Les fonctions ly et lx, étant identiques, doivent avoir la même dérivée; or, la dérivée de la fonction composée ly s'obtiendra en prenant la dérivée de ly par rapport à y, et en la multipliant par celle de y prise par rapport à x; on a donc, en appliquant la règle trouvée tout à l'heure,

$$\frac{y'}{y} = \frac{m}{x}$$

ou

$$y' = m\frac{y}{x} = mx^{m-1},$$

comme dans le cas où m est entier et positif.

Corollaire I. — La dérivée de $\sqrt[m]{x}$ est égale à celle de $x^{\frac{1}{m}}$, c'est-à-dire égale à $\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}$ ou à $\frac{1}{m}\sqrt[m]{\frac{1}{x^{m-1}}}$.

Corollaire II. — En particulier la dérivée de $\sqrt{x}$ sera $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Corollaire III. — Si u désigne une fonction de x, la dérivée de u^m s'obtiendra en prenant la dérivée de u^m par rapport à u, ce qui donnera mu^{m-1}, et en la multipliant par la dérivée u' de u, en sorte que (p. 481)

$$(u^m)' = mu^{m-1}u'.$$

Corollaire IV. — La dérivée de $u^{\frac{1}{2}}$ ou de $\sqrt{u}$ est

$$\frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

VII. — Dérivées des fonctions circulaires.

Dérivée du sinus. — Posons

$$y = \sin x;$$

on a, d'après la définition même de la dérivée,

$$y' = \lim \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x},$$

c'est-à-dire

$$y' = \lim \frac{2 \sin \frac{1}{2} \Delta x \cos\left(x + \frac{1}{2} \Delta x\right)}{\Delta x},$$

ou

$$y' = \lim \left[\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \cos\left(x + \frac{1}{2} \Delta x\right) \right];$$

mais si l'on observe que le rapport du sinus à l'arc a pour limite l'unité quand l'arc tend vers zéro, l'équation précédente devient, pour $\Delta x = 0$,

$$y' = \cos x.$$

Dérivée du cosinus. — La dérivée de $\cos x$ se trouve de la même manière que celle de $\sin x$; cependant on peut y arriver plus simplement en observant que

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ est une fonction de fonction. Pour obtenir sa dérivée par rapport à x, il faut d'abord la prendre par rapport à $\frac{\pi}{2} - x$, ce qui donne $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ou $\sin x$, puis multiplier ce résultat par la dérivée de la somme $\frac{\pi}{2} - x$ qui est -1 ; on a donc

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Dérivée de la tangente. — On a

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

et, par conséquent, pour trouver la dérivée de tang x, il faut prendre la dérivée d'un quotient; en appliquant la règle donnée (p. 480), on trouve

$$(\operatorname{tang} x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x},$$

c'est-à-dire

$$(\operatorname{tang} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Dérivée de la cotangente, etc. — On trouve ainsi

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\operatorname{séc} x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{coséc} x)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Dérivée de arc sin x. — Si l'on pose

$$y = \operatorname{arc} \sin x,$$

on en déduit

(1) $$\sin y = x;$$

si l'on prend les dérivées par rapport à x des deux membres de cette équation, il vient, en observant que sin y est une fonction de fonction,

$$y' \cos y = 1,$$

ou bien

$$y' = \frac{1}{\cos y},$$

et, en remplaçant $\cos y$ par sa valeur tirée de (1),

$$y' = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

le signe $+$ convient au cas où $\cos y$ est positif, et le signe $-$ au cas où il est négatif, ce qui revient à dire que l'on aura

$$y' = + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

si y est compris entre $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ et $2k\pi + \frac{\pi}{2}$;

$$y' = - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

si y est compris entre $(2k + 1)\pi - \frac{\pi}{2}$ et $(2k + 1)\pi + \frac{\pi}{2}$.

Dérivée de $\operatorname{arc} \cos x$. — On peut poser

$$\operatorname{arc} \cos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \sin x;$$

on déduit de là que les dérivées de $\operatorname{arc} \sin x$ et $\operatorname{arc} \cos x$ sont égales et de signe contraire.

Dérivée de $\operatorname{arc} \operatorname{tang} x$. — Si l'on pose

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tang} x,$$

on a

$$\operatorname{tang} y = x;$$

et, en prenant les dérivées des deux membres de cette équation,

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = 1,$$

d'où l'on tire

$$y' = \cos^2 y,$$

c'est-à-dire

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

VIII. — Application des principes précédents.

Nous pouvons maintenant prendre les dérivées de toutes les fonctions qui sont jusqu'ici entrées dans nos calculs; nous allons le montrer sur quelques exemples.

Dérivée de x^x. — La fonction x^x est composée; pour bien le comprendre, considérons la fonction u^v, u et v désignant deux fonctions de x; cette dernière expression est de la forme $f(u, v)$, sa dérivée sera donc de la forme

$$f'_u u'_x + f'_v v'_x,$$

c'est-à-dire

$$vu^{v-1} u' + u^v lu\, v';$$

si l'on prend $u = v = x$, on a la dérivée de x^x, qui est ainsi

$$x^x(1 + lx).$$

Dérivée de $\operatorname{arc\,tang} \frac{a+x}{1-ax}$. — Cette expression est une fonction de fonction; pour en obtenir la dérivée, il faut regarder $\frac{a+x}{1-ax}$ comme seule variable, prendre la dérivée dans cette hypothèse, ce qui donne

$$1 : \left[1 + \left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2\right],$$

et multiplier le résultat par la dérivée de $\frac{a+x}{1-ax}$ qui est

$$\frac{1-ax+a(a+x)}{(1-ax)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1+a^2}{(1-ax)^2};$$

on obtient alors

$$\frac{1+a^2}{(1-ax)^2} : \left[1+\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2\right],$$

ou bien

$$\frac{1+a^2}{1+a^2+x^2+a^2x^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{1+x^2},$$

résultat auquel on aurait pu arriver immédiatement en observant que

$$\text{arc tang}\,\frac{a+x}{1-ax} = \text{arc tang}\,a + \text{arc tang}\,x.$$

Dérivée de $l(x+\sqrt{1+x^2})$. — Cette fonction peut être regardée comme fonction de fonction; en regardant $x+\sqrt{1+x^2}$ comme variable, la dérivée de cette fonction est

$$\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}.$$

Mais comme x est la variable, il faut multiplier cette quantité par la dérivée de $x+\sqrt{1+x^2}$, c'est-à-dire par $1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, ce qui donne

$$\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

IX. — Propriétés des fonctions dérivées.

Théorème I. — *Toute fonction $f(x)$ réelle et continue entre les limites $x = a$ et $x = b$ de sa variable passe forcément au moins une fois par la valeur u comprise entre les valeurs $f(a)$ et $f(b)$ qu'elle prend pour les valeurs a et b de sa variable, et en particulier, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire, l'équation*

$$f(x) = 0$$

admet au moins une racine comprise entre a et b.

Ce théorème résulte évidemment de la définition que nous avons donnée de la continuité.

Théorème II. — 1° *Une fonction réelle et continue dont la dérivée est positive croît avec sa variable;* 2° *une fonction réelle et continue dont la dérivée est négative décroît lorsque sa variable croît.*

En effet, considérons la fonction réelle $f(x)$; supposons $f'(x)$ positif entre les limites a et b de la variable x, on aura en général (p. 473)

$$f(x+h) - f(x) = h[f'(x) + \varepsilon],$$

ε désignant une quantité qui tend vers zéro avec h. Or, supposons x et $x + h$ compris entre les limites a et b, ε ayant pour limite zéro pourra être pris moindre en valeur absolue que $f'(x)$. Si donc nous supposons l'accroissement h positif, le second membre de la formule précédente sera de même signe que $f'(x)$; donc enfin $f(x+h) - f(x)$ sera de même signe que $f'(x)$, ce qui revient à dire que $f(x)$ croît avec x quand sa dérivée est positive et décroît quand x croît dans le cas contraire.

C. Q. F. D.

Théorème III. — *Une fonction $f(x)$ réelle et continue passe ordinairement par un maximum ou un minimum lorsque sa dérivée s'annule.*

En effet, supposons la fonction $f(x)$ continue ainsi que ses dérivées pour $x=a$; si l'on a $f'(a)=0$, trois cas peuvent se présenter :

1° $f'(x)$ en s'annulant pour $x=a$ passe du négatif au positif; cette fonction est donc croissante; donc sa dérivée $f''(x)$ doit être positive ou nulle pour $x=a$, car si elle était négative, $f'(x)$ décroîtrait en faisant croître x (théorème II). Mais $f'(x)$ ayant changé de signe pour $x=a$, en passant du négatif au positif, $f(x)$ a dû être décroissante pour les valeurs de x moindres que a et croissante pour les valeurs de x plus grandes que a; elle a donc dû passer par un minimum pour $x=a$.

2° Si $f'(x)$ en s'annulant passe du positif au négatif, cette fonction est décroissante, et par suite sa dérivée $f''(x)$ est négative ou nulle pour $x=a$; en second lieu, $f'(x)$ passant du positif au négatif, $f(x)$ passe pour $x=a$ d'une période croissante à une période décroissante, c'est-à-dire que $f(a)$ est un maximum de $f(x)$.

3° Si $f'(x)$ ne change pas de signe en s'annulant, cette fonction croît pour décroître ensuite ou décroît pour croître ensuite lorsque x passe par la valeur a; donc alors $f''(x)$ doit changer de signe pour $x=a$; donc enfin, dans ce cas, $f''(a)$ est nul.

Ainsi, en résumé, si l'on a $f'(a)=0$ et

$$f''(a)>0 \quad f(a) \text{ est un minimum de } f(x),$$

$$f''(a)<0 \quad f(a) \text{ est un maximum de } f(x).$$

Lorsque $f'(a)$ et $f''(a)$ sont nuls à la fois, trois cas peuvent se présenter comme tout à l'heure :

1° Si $f''(x)$ passe du positif au négatif, cette fonction décroît et alors $f'''(a)$ est nul ou négatif, mais dans ce cas $f'(a)$ est un maximum de $f'(x)$ et $f(a)$ n'est ni un maximum ni un minimum; 2° si $f''(x)$ passe du négatif au positif, $f'''(a)$ est nul ou positif, $f'(a)$ est un minimum de $f'(x)$ et $f(a)$ n'est ni maximum ni minimum; 3° si $f''(x)$ conserve le même signe en s'annulant, $f'(a)$ n'est ni un maximum ni un minimum, et il peut arriver que $f(a)$ soit maximum ou minimum.

Nous ne pousserons pas plus loin cette discussion; la théorie complète des maxima et des minima fait partie des cours de calcul différentiel. Quoi qu'il en soit, il résulte de la discussion précédente que l'équation

$$f'(x) = 0 \tag{1}$$

fournira *des* valeurs de x qui rendent $f(x)$ maximum ou minimum toutes les fois que $f''(x)$ ne s'annulera pas en même temps que $f(x)$; je dis *des* valeurs, parce qu'il ne suffit pas de résoudre l'équation (1) pour en déduire tous les maxima ou minima de $f(x)$.

Théorème de Rolle. — *Si la fonction $f(x)$ s'annule pour $x = a$ et pour $x = b$ en restant réelle et continue entre les limites a et b de sa variable, si de plus sa dérivée reste finie et continue entre les mêmes limites, il existera forcément une valeur c de x comprise entre a et b satisfaisant à l'équation*

$$f'(c) = 0.$$

En effet, si l'on fait varier x entre les limites a et b, $f(x)$ variera en partant de la valeur zéro pour $x = a$ et reviendra à la même valeur zéro pour $x = b$; dans l'intervalle, elle commencera par exemple par croître, et dans ce cas sa dérivée sera positive; mais comme elle doit revenir à la valeur zéro, elle finira par décroître et dans ce cas sa dérivée deviendra négative. La dérivée en question prendra donc deux valeurs de signes contraires dans l'intervalle compris entre a et b, et, comme nous l'avons supposée continue, elle devra forcément passer par la valeur zéro. C. Q. F. D.

La fonction $1-x^{\frac{2}{3}}$ s'annule pour $x=1$ et pour $x=-1$; sa dérivée $-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ ne s'annule pas entre les limites -1 et $+1$ de la variable x : cela tient à ce que cette dérivée n'est pas continue pour $x=0$.

X. — Applications des principes précédents.

Problème. — *Discuter la fonction*

$$y=\frac{x^2+px+q}{x^2+p'x+q'}.$$

Nous nous sommes déjà occupés de cette fonction à propos des questions de maximum résolubles par les équations du second degré; la théorie des dérivées va nous conduire aux mêmes résultats. On a

$$y'=\frac{(p'-p)x^2+2(q'-q)x+pq'-qp'}{(x^2+p'x+q')^2};$$

y' est toujours de même signe que son numérateur. Nous distinguerons alors trois cas :

1° $(q'-q)^2-(p'-p)(pq'-qp')>0$. — Dans ce cas, le numérateur de y' a ses racines réelles et inégales; en les désignant par α et β, elles fourniront chacune un maximum ou un minimum, excepté toutefois si le dénominateur $(x^2+p'x+q')^2$ s'annulait aussi pour $x=\alpha$ ou pour $x=\beta$. En effet, alors le facteur $x-\alpha$ ou $x-\beta$ entrerait aux deux termes de la fraction y'; on pourrait donc le supprimer aux deux termes de y', mais il entre une fois de plus dans le dénominateur, en sorte que pour $x=\alpha$ ou $y=\beta$ on aura $y'=\infty$.

2° $(q'-q)-(p'-p)(pq'-qp')<0$. — Dans ce cas, il n'y a pas de maximum ni de minimum, car y' conserve toujours le même signe.

3° $(q'-q)-(p'-p)(pq'-qp')=0$. — Il ne peut y avoir qu'un seul maximum ou minimum. Ce cas est une limite du premier.

Une discussion complète de la fonction y nous entraînerait beaucoup plus loin qu'il n'est nécessaire pour faire comprendre l'esprit de la méthode que nous voulons développer. Nous allons nous borner à un cas particulier, celui où l'on aurait

$$y=\frac{x^2-8x+6}{x^2-4x+3};$$

on en déduit

$$y'=\frac{4x^2-6x}{(x^2-4x+3)^2},$$

ou bien

$$y'=\frac{2x(2x-3)}{(x^2-4x+3)^2}.$$

Si l'on fait $x=-\infty$, on trouve $y=1$. En effet, la valeur de y, qui prend dans l'hypothèse actuelle la forme $\frac{\infty}{\infty}$, peut s'écrire comme il suit :

$$y=\frac{1-\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}.$$

Et pour $x=\pm\infty$, on voit alors immédiatement que y se réduit à l'unité. Si l'on fait croître x à partir de $-\infty$, y' reste positif jusqu'à ce que l'on ait $x=0$. En effet, le numérateur de y' se compose de deux facteurs négatifs, et le dénominateur reste positif; donc dans cet intervalle la fonction y croît; x variant entre zéro et $\frac{3}{2}$, y' reste négatif, donc y décroît; pour $x=0$, y' s'annule; donc, pour $x=0$, y est maximum ou minimum. Mais comme nous avons vu que y allait d'abord en croissant, pour décroître ensuite, la valeur $x=0$ fournit un maximum dont la valeur est $\frac{6}{3}$ ou 2.

x variant de $\frac{3}{2}$ à $+\infty$, y' redevient positif; donc alors y croît, donc il a dû passer par un minimum pour $x=\frac{3}{2}$; la valeur de ce minimum est $y=-\frac{17}{3}$.

Quant au dénominateur de y, il s'annule pour $x=1$ et $x=3$; donc y est infini pour $x=1$ et $x=3$. La discussion de la fonction y est résumée dans le tableau suivant :

x croissant de :	y
$-\infty$ à 0.....	croît de $+1$ à $+2$
0 à $+1$.....	décroît de $+2$ à $-\infty$
$+1$ à $+\frac{3}{2}$.....	décroît de $+\infty$ à $-\frac{17}{3}$
$+\frac{3}{2}$ à $+3$.....	croît de $-\frac{17}{3}$ à $+\infty$
$+3$ à $+\infty$....	croît de $-\infty$ à $+1$

XI. — Formule de Taylor.

Lorsque $F(x)$ est une fonction entière de x, on a, d'après ce que nous avons vu,

$$F(x+h)=F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^n(x).$$

Désignons maintenant par F une fonction quelconque, mais continue, ainsi que ses $n+1$ premières dérivées pour toutes les valeurs de sa variable comprises entre x et $x+h$. Posons

$$(1)\quad \begin{cases} F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1}F'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots \\ \qquad + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^n(x) + \frac{Rh^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}. \end{cases}$$

R est une quantité qu'il s'agit de déterminer de manière à satisfaire à l'équation précédente. Posons

$$f(z) = F(x+z) - F(x) - \frac{z}{1}F'(x) - \ldots$$
$$- \frac{z^n}{1.2.3\ldots n}F^n(x) - \frac{Rz^{n+1}}{1.2.3\ldots n+1}.$$

La fonction $f(z)$ devra être nulle pour $z=h$; or elle s'annule pour $z=0$: donc sa dérivée devra, en vertu du théorème de Rolle (p. 496), s'annuler pour une valeur de z comprise entre zéro et h. Or on a

$$f'(z) = F'(x+z) - F'(x) - \ldots - \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^n(x) - R\frac{z^n}{1.2.3\ldots n}.$$

$f'(z)$ s'annule encore pour $z=0$, et nous avons reconnu qu'elle s'annulait pour une valeur de z comprise entre zéro et h; donc sa dérivée $f''(z)$ doit s'annuler entre zéro et h, et ainsi de suite. Or on a

$$f^n(z) = F^n(x+z) - F^n(x) - Rz,$$

et cette quantité f^n s'annule encore entre zéro et h. Or elle est aussi nulle pour $z=0$, en sorte que $f^{n+1}(z)$ s'annulera encore pour une valeur de z comprise entre zéro et h. En désignant par θh cette valeur, θ désignant un nombre compris entre zéro et 1, on a

$$f^{n+1}(\theta h) = 0 = F^{n+1}(x+\theta h) - R;$$

d'où l'on tire

$$R = F^{n+1}(x + \theta h),$$

et par suite la formule (1) devient

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \dots + \frac{h^{n+1}}{1.2.3\dots(n+1)}F^{n+1}(x+\theta h).$$

Telle est la formule qui porte aujourd'hui le nom de *formule de Taylor*, bien que ce géomètre ne l'ait pas présentée de la même façon. La démonstration que nous venons de donner est due à M. Hommersham Cox. Si dans cette formule on fait $x = 0$, on a la formule suivante, dite *de Mac-Laurin* :

$$F(h) = F(0) + hF'(0) + \frac{h^2}{1.2}F''(0) + \dots + \frac{h^{n+1}}{1.2\dots(n+1)}F^{n+1}(\theta h).$$

Lorsque la quantité $F^{n+1}(\theta h)\frac{h^{n+1}}{1.2.3\dots(n+1)}$ tend vers zéro pour $n = \infty$, et que la série obtenue en faisant $n = \infty$ dans le second membre est convergente, on peut écrire

$$(2)\quad F(h) = F(0) + hF'(0) + \dots + \frac{h^n}{1.2.3\dots n}F^n(0) + \dots.$$

On a fait servir cette formule au développement des fonctions en série; malheureusement elle semble peu propre à cet usage. Elle donne facilement le développement de e^x, de $\sin x$, de $\cos x$; mais la forme du reste, $F^{n+1}(\theta h)\frac{h^{n+1}}{1.2.3\dots(n+1)}$, se prête mal aux discussions. Aussi un grand nombre de géomètres se sont-ils efforcés de modifier cette forme, sans donner des résultats bien satisfaisants.

Cauchy a sauvé ces difficultés en faisant connaître un beau théorème qui permet, étant donnée une fonction $F(x)$, de décider *à priori* si cette fonction est développable en série convergente par la formule (2) de Mac-Laurin; malheureusement la démonstration de ce théorème exige des considérations trop élevées pour que nous puissions les développer ici. J'ai donné une démonstration très-simple du théorème de Cauchy dans mon ouvrage sur la *Théorie des résidus*.

XII. — Des expressions qui se présentent sous les formes $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, etc.

Certaines fonctions se présentent pour une valeur particulière de la variable sous la forme $\frac{0}{0}$; cela tient souvent à la présence d'un facteur commun qui entre au numérateur et au dénominateur de la fraction qui constitue la fonction en question, facteur qui s'annule pour la valeur particulière de la variable qui donne à la fonction la forme illusoire $\frac{0}{0}$. Tel est le cas de la fonction $\frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2}$. Cette fonction prend la forme $\frac{0}{0}$ quand on suppose $x = a$; mais comme on peut supprimer aux deux termes le facteur commun $x - a$, on a

$$\lim \frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2} = \lim \frac{x^2 + ax + a^2}{x + a} = \frac{3}{2} a.$$

$\frac{3}{2} a$ est ce qu'on appelle la *valeur* de la fonction $\frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2}$ pour $x = a$. En général, si $f(x)$ se présente sous une forme illusoire pour $x = a$, on appellera *valeur de* $f(x)$ *pour* $x = a$ et l'on désignera par la notation $f(a)$ la limite vers laquelle tend $f(x)$ lorsque x tend vers a.

Le développement en série permet souvent de trouver la vraie valeur d'une expression qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. Proposons-nous, par exemple, de trouver la vraie valeur de $\frac{e^x - e^{-x}}{x}$ pour $x = 0$: en remplaçant le numérateur par son développement, on a

$$\frac{e^x - e^{-x}}{x} = 1 + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} + \ldots;$$

en faisant $x = 0$, on a alors

$$\lim \frac{e^x - e^{-x}}{x} = 1;$$

on a de même, pour $x = 0$,

$$\lim \frac{\sin x - x}{x(1 - \cos x)} = \lim \frac{-\frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots}{\frac{x^3}{1.2} - \frac{x^5}{1.2.3.4} + \ldots}$$

$$= \lim \frac{-\frac{1}{1.2.3} + \frac{x^2}{1.2.3.4.5} - \ldots}{\frac{1}{1.2} - \frac{x^2}{1.2.3.4} + \ldots},$$

ou enfin

$$\lim \frac{\sin x - x}{x(1 - \cos x)} = -\frac{1}{6} : \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}.$$

Mais voici un moyen beaucoup plus expéditif de trouver la vraie valeur des expressions de la forme $\frac{0}{0}$, déduit de la théorie des dérivées.

On a, par la formule de Taylor (p. 501), en supposant $h = x - a$,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(a) + hf'(a + \theta h)}{\varphi(a) + h\varphi'(a + \lambda h)},$$

θ et λ désignant des nombres compris entre zéro et 1. Or si nous supposons $f(a)$ et $\varphi(a)$ nuls, il reste seulement

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\lambda h)}.$$

Supposons maintenant que x tende vers a, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ prendra la forme illusoire $\frac{0}{0}$, et l'on aura

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\lambda h)}.$$

Si $f'(a)$ et $\varphi'(a)$ sont différents de zéro, on aura donc

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)};$$

sinon, on aura, en prenant un terme de plus dans la formule de Taylor,

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f''(a+\theta h)}{\varphi''(a+\lambda h)}.$$

Si $f''(a)$ et $\varphi''(a)$ sont différents de zéro, on aura

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f''(a)}{\varphi''(a)}.$$

Sans qu'il soit nécessaire d'aller plus loin, on voit que *pour avoir la vraie valeur d'une expression* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, *qui se présente pour* $x = a$ *sous la forme* $\frac{0}{0}$, *il faut prendre la dérivée de ses deux termes et faire* $x = a$ *dans le résultat; s'il se présente encore sous la forme* $\frac{0}{0}$, *on prend* *les dérivées secondes, et ainsi de suite.* Ainsi

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Ce théorème n'a pas été démontré pour le cas où l'on a $a = \infty$; dans ce cas, on posera $x = \frac{1}{z}$ et l'on aura

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} (\text{pour } x = \infty) = \lim \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)} (\text{pour } z = 0).$$

Nous rentrons dans le cas étudié plus haut et nous avons

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \lim \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)},$$

ou bien

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)};$$

la règle démontrée plus haut subsiste donc encore dans ce cas.

Les expressions qui se présentent sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$ se ramènent immédiatement aux précédentes ; si l'on a, par exemple, $f(a) = \infty$, $\varphi(a) = \infty$, on aura

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{1 : \varphi(x)}{1 : f(x)} = \lim \frac{\varphi'(x) : [\varphi(x)]^2}{f'(x) : [f(x)]^2};$$

d'où l'on déduit

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

pourvu que $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ne soit ni nul ni infini. Supposons donc

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0,$$

on aura

$$\lim \frac{f(x) + k\varphi(x)}{\varphi(x)} = k,$$

k désignant un nombre quelconque; de cette formule on déduira

$$\lim \frac{f'(x) + k\varphi'(x)}{\varphi'(x)} = k,$$

et par suite

$$\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad = \lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

Enfin, si $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ était infini, $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ serait nul et l'on aurait

$$\lim \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = \lim \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 0;$$

d'où

$$\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty.$$

Ainsi, *pour trouver la vraie valeur d'une expression qui se présente sous la forme* $\frac{\infty}{\infty}$, *la règle à suivre est la même que si elle se présentait sous la forme* $\frac{0}{0}$.

Les expressions qui se présentent sous la forme $0 \times \infty$ se ramènent au cas précédent; ainsi, par exemple, si l'on a $f(a) = 0$, $\varphi(a) = \infty$, on aura

$$\lim f(x) \times \varphi(x) = \lim \frac{f(x)}{1 : \varphi(x)},$$

et le second membre de cette formule est de la forme $\frac{0}{0}$ pour $x = a$.

Si l'on a $f(a) = 0$, $\varphi(a) = \infty$, on aura

$$\lim\,[\varphi(x)]^{f(x)} = \lim e^{f(x)/\varphi(x)};$$

on est ainsi ramené au cas précédent. Les expressions de la forme ∞^0 se ramènent donc aux précédentes; celles-ci : 1^∞, $\infty - \infty$, etc., s'y ramènent à l'aide d'artifices analogues.

XIII. — Applications.

Problème I. — *Trouver la limite de* $\frac{F(x)}{f(x)}$ *pour* $x = \infty$, F(x) *et* $f(x)$ *désignant deux polynômes entiers.*

Soient n le degré de $F(x)$, m celui de $f(x)$; si l'on suppose $n > m$ et si l'on remplace $F(x)$ et $f(x)$ par leurs dérivées, on trouve encore $\frac{\infty}{\infty}$ si m est > 1, et, si $m = 1$, la fraction se réduit à ∞. Pour se débarrasser de la forme illusoire, on voit qu'il faudra prendre m fois la dérivée des deux termes de la fraction, et, en faisant $x = \infty$ dans le résultat, on trouvera l'∞. Si au contraire on avait eu $n = m$, la fraction se serait réduite au rapport des coefficients de x^m dans $F(x)$ et $f(x)$. Enfin si l'on avait eu $n < m$, on aurait trouvé zéro pour la limite cherchée; ces résultats pouvaient se découvrir sans le secours du calcul des dérivées. En effet, on a

$$\frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m} = \frac{\dfrac{a_0}{x^n} + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + a_n}{\dfrac{b_0}{x^n} + \dfrac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_m x^{m-n}}.$$

Si l'on fait $x = \infty$, la seconde fraction devient manifestement $\frac{a_n}{b_m}$ si $m = n$, ∞ si $n > m$ et o si $n < m$.

Problème II. — *Trouver la limite de $y = e^x + l\frac{1}{x}$ pour $x = \infty$.*

Cette expression est de la forme $\infty - \infty$; or on a

$$y = e^x\left[1 + \frac{l\frac{1}{x}}{e^x}\right].$$

Cherchons la limite de $\frac{l\frac{1}{x}}{e^x}$ ou de $-\frac{lx}{e^x}$; cette limite est égale au rapport des dérivées de lx et de e^x. On a donc

$$\lim \frac{lx}{e^x} = \lim \frac{1}{xe^x} = 0.$$

On a donc

$$\lim y = \lim e^x = \infty.$$

Problème III. — *Trouver la limite de $\frac{a^x}{x}$ pour $x = \infty$.*

Cette limite est la valeur de $\frac{a^x\,la}{1}$ pour $x = \infty$, c'est-à-dire ∞ ou o, selon que l'on aura $a > 1$ ou $a < 1$.

Problème IV. — *Trouver la limite de $y = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ pour $x = 0$.*

On a

$$y = \frac{1}{\sin x}\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right).$$

Cette expression pour $x = 0$ prend la forme $\frac{0}{0}$; si l'on prend la dérivée du dividende et du diviseur, on a

$$\lim y = \lim \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \cos x}.$$

Si l'on fait $x = 0$, on trouve encore $y = \frac{0}{0}$; prenons encore les dérivées du dividende et du diviseur, on a

$$\lim y = \lim \frac{x \sin x}{2x \cos x - x^2 \sin x}.$$

Si l'on fait $x = 0$, on trouve encore $y = \frac{0}{0}$; prenons encore les dérivées du dividende et du diviseur, il viendra

$$\lim y = \lim \frac{x \cos x + \sin x}{2 \cos x - 4x \sin x - x^2 \cos x} = 0.$$

Le développement en série aurait également répondu à la question et d'une façon bien plus rapide.

Problème V. — *Trouver la limite de* $y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - x}$ *pour* $x = 1$.

Ici le développement en série ne serait plus applicable, mais on pourrait écrire

$$y = \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - 2x + x^2}} = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}},$$

et l'on aurait

$$y = \infty \text{ pour } x = 1;$$

le calcul des dérivées donne

$$y = \lim \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}\,(1 + x)} = \infty.$$

EXERCICES.

1. Démontrer que la dérivée de la fonction $\varphi(x)$ représentée par la série convergente

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

est

$$\varphi'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots.$$

2. Trouver la fonction φ la plus générale satisfaisant à l'une des relations

$$\begin{gathered}\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x+y),\\ \varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(xy),\\ \varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x+y),\\ \varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(xy),\\ [\varphi(x)]^2 + [\varphi(a-x)]^2 = 1.\end{gathered}$$

3. Discuter les fonctions x^x, $e^{\sqrt{x}}$, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $\frac{\sin x}{x}$.

4. Prendre la dérivée de la fonction y définie par l'une des équations

$$\begin{gathered}x^y = y^x,\\ \sin(x+y) = x+y,\\ x + \operatorname{tang} y = y.\end{gathered}$$

5. On donne a francs pour retirer 1 mètre cube d'eau d'un puits cylindrique de rayon donné r; ce puits a h mètres de profondeur : combien faudra-t-il payer pour le vider tout entier?

6. On veut scier un cône suivant un plan passant par son axe; combien faudra-t-il payer l'ouvrier pour l'ouvrage tout entier, sachant qu'on lui donne a francs pour le scier sur une hauteur h? (Les dimensions du cône sont supposées données.)

7. Étant donnée une corde AB fixe dans un cercle de rayon R, trouver sur la circonférence un point C tel, que le produit de la perpendiculaire abaissée de C sur AB par la perpendiculaire abaissée de B sur AC soit maximum. Même problème, en remplaçant dans

le triangle ABC les deux hauteurs considérées par les médianes issues des mêmes sommets.

8. Considérons deux triangles, l'un fixe ABC en grandeur et en position, l'autre A'B'C' de grandeur constante, mais qui n'est assujetti qu'à avoir ses côtés respectivement parallèles à ceux de ABC.

C'B', prolongé s'il le faut, coupe AC en un point numéroté 2 et AB en un point numéroté 5.

A'C', prolongé s'il le faut, coupe AB en un point numéroté 6 et BC en un point numéroté 3.

A'B', prolongé s'il le faut, coupe AC en un point numéroté 1 et BC en un point numéroté 4.

En joignant les points 1, 3, 5, je forme un triangle, et un autre en joignant 2, 4, 6. On voit facilement que ces deux triangles sont équivalents. Cela posé, démontrer que la surface de 1, 3, 5 ou de 2, 4, 6 atteint un maximum, si AA'BB'CC' concourent au point de rencontre des médianes de ABC.

(Ce théorème m'a été communiqué par M. Lemoine, ancien élève de l'École Polytechnique.)

NOTE I.

RÈGLE EMPIRIQUE DE SARRUS POUR LA FORMATION DES DÉTERMINANTS DU TROISIÈME DEGRÉ.

Sarrus a fait connaître une règle fort simple qui permet d'écrire immédiatement la valeur d'un déterminant de neuf éléments, sans avoir recours aux déterminants mineurs. Considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix} = \mathrm{D}.$$

Si nous formons le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}$$

obtenu en écrivant au-dessous du tableau qui représente le déterminant un tableau identique, à la dernière ligne près, les termes positifs du déterminant sont les trois termes obtenus en multipliant les éléments situés sur les trois lignes diagonales inclinées dans ce sens \ ; les trois termes négatifs s'obtiennent en multipliant les éléments situés sur les trois lignes inclinées dans ce sens /. On trouve, en appliquant cette règle bien simple,

$$D = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - cb'a'' - c'b''a - c''ba'.$$

En comparant cette formule avec celle de la page 102, la règle de Sarrus se trouve démontrée; il est clair que dans les applications il ne sera pas nécessaire de former *effectivement* le tableau (1) : on y supplée mentalement avec une grande facilité.

NOTE II.

SUR L'ÉVALUATION DE QUELQUES ERREURS.

La formule de Taylor bornée à ses deux premiers termes,

$$(1) \qquad f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h),$$

permet d'évaluer l'erreur que l'on commet en admettant que dans une petite portion de leur parcours les fonctions varient proportionnellement aux accroissements de leur variable.

Lorsqu'il s'agit, par exemple, de calculer $\log(x+h)$, x désignant un grand nombre, on cherche dans la table $\log x$ et on y ajoute δh, δ désignant la différence tabulaire, en sorte que l'on admet la formule

$$\log(x+h) = \log x + \delta h,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(2) \qquad \log(x+h) = \log x + h[\log(x+1) - \log x].$$

Or la formule (1) donne

$$(3) \qquad \log(x+h) = \log x + h\frac{\log e}{x+\theta h},$$

$$\log(x+1) = \log x + \frac{\log e}{x+\theta'},$$

θ et θ' désignant des quantités comprises entre zéro et 1; la formule (2) devient alors

$$(4) \qquad \log(x+h) = \log x + h\frac{\log e}{x+\theta'};$$

l'erreur commise en calculant ainsi $\log(x+h)$ sera la différence des seconds membres des formules (3) et (4), c'est-à-dire

$$h\log e\left(\frac{1}{x+\theta h} - \frac{1}{x+\theta'}\right),$$

ou bien

$$h\log e\,\frac{\theta' - \theta h}{(x+\theta h)(x+\theta')}.$$

Dans les Tables de Callet, x est un nombre de cinq chiffres, h est au plus égal à 1, $\log e$ est moindre que 1, $\theta' - \theta h$ est moindre que 1; l'erreur commise est donc moindre que l'unité divisée par le carré d'un nombre de cinq chiffres, c'est-à-dire tout à fait négligeable.

S'agit-il d'évaluer l'erreur commise dans le calcul d'un sinus, on pose

$$\log\sin(x+h) = \log\sin x + h[\log\sin(x+10'') - \log\sin x].$$

On devrait poser en toute rigueur

$$\log\sin(x+h) = \log\sin x + h\log e\cot(x+\theta h);$$

l'erreur est

$$h\log e[\cot(x+\theta h) - \cot(x+\theta'\times 10'')],$$

ou bien

$$h\log e\,\frac{\sin(\theta'.10'' - \theta h)}{\sin(x+\theta h)\sin(x+\theta'.10'')}.$$

Cette quantité est moindre que

$$\operatorname{arc} 10''.\log e\,\frac{\sin 10''}{\sin^2 x},$$

ou, si l'on veut, que

$$\frac{(\operatorname{arc} 10'')^2}{\sin^2 x}.$$

On voit que cette erreur commence à devenir considérable lorsque x est voisin de $10''$; aussi, pour les petits angles, les tables de sinus procèdent de seconde en seconde.

NOTE III.

SUR LES CALCULS D'APPROXIMATION.

Le but de cette Note est de montrer comment on peut appliquer aux équations transcendantes les principes exposés pour la résolution des équations algébriques.

Soit

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

une équation transcendante ou algébrique; la discussion de la courbe représentée par l'équation

$$y = f(x) \tag{2}$$

fera souvent connaître avec une certaine approximation les racines de l'équation (1); d'autres fois on arrivera au même résultat par l'intersection de deux courbes. Ces procédés sont décrits dans les traités de Géométrie analytique : mon intention n'est pas de m'y arrêter, et je supposerai que l'une des racines de l'équation (1) ait été séparée; du reste, la méthode des substitutions successives s'applique aussi bien aux équations transcendantes qu'aux équations algébriques.

Soient a et $b > a$ deux nombres qui ne comprennent qu'une seule racine de l'équation (1) ; supposons qu'entre a et b, $f'(x)$ et $f''(x)$ restent continues et ne changent pas de signe.

Construisons la courbe représentée par l'équation (2) ; soient M le point où elle coupe l'axe des x, O l'origine des coordonnées. Soient de plus $\mathrm{OA}' = a$, $\mathrm{OB}' = b$, $\mathrm{AA}' = f(a)$, $\mathrm{BB}' = f(b)$; la courbe que nous avons considérée ne pourra entre a et b affecter que l'une des quatre formes suivantes ; dans les quatre figures, si l'on mène la corde AB, OD sera une valeur approchée de la racine et plus exacte que a et b. On remarquera en outre

Fig. 1.

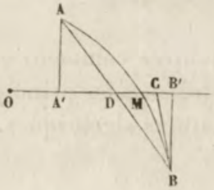


Fig. 2.

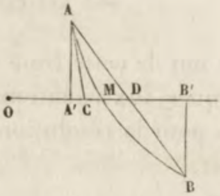


Fig. 3.

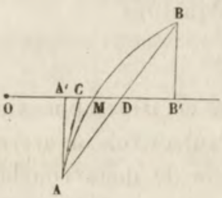
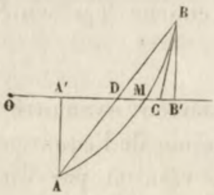


Fig. 4.



que si l'on mène en A et en B une tangente, l'une d'elles coupera l'axe des x en C ; entre la courbe et l'abscisse du point de contact, OC sera une seconde valeur approchée de la racine et, ce qui est précieux, l'approximation sera en sens contraire de celle fournie par la corde AB.

Voyons comment on doit choisir le point de contact pour que le point C remplisse la condition dont nous venons de parler. Sur la *fig.* 1 on a $f(b) < 0$, le point B' satisfait à la question, le point A n'y satisfait évidemment pas. Or on peut observer que $f'(x)$ décroît; donc $f''(x) < 0$: ainsi, au point de contact, $f''(x)$ et $f(x)$ sont de même signe. Le même fait peut se constater sur chacune des *fig.* 2, 3, 4; reste à calculer OD et OC. Nous ne ferons le calcul que pour la *fig.* 1; les autres fourniraient des résultats semblables.

L'équation de AB est

$$y - f(a) = (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a};$$

on en conclut, en faisant $y = 0$ et en résolvant par rapport à x,

$$x = \text{OD} = a + \frac{(b - a)f(a)}{f(b) - f(a)}:$$

c'est la valeur approchée donnée par la méthode de fausse position.

L'équation de la tangente en B est

$$y - f(b) = (x - b)f'(b);$$

on en conclut, pour $y = 0$,

$$x = \text{OC} = b - \frac{f(b)}{f'(b)}:$$

c'est la valeur approchée fournie par la méthode de Newton. Ainsi, en résumé :

Si $f'(x)$ et $f''(x)$ conservent le même signe entre a et b en restant continues, on aura deux valeurs approchées, l'une par excès, l'autre par défaut, en appliquant la méthode de fausse position et la méthode de Newton, pourvu qu'en appliquant cette dernière on *parte de la valeur approchée de la racine pour laquelle $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe.*

APPLICATION. — *Résoudre*

$$2x - \cos x = 0.$$

Il est facile de reconnaître que cette équation n'a qu'une racine réelle comprise entre zéro et $\frac{\pi}{2}$; si l'on pose $2x - \cos x = f(x)$, on reconnaît, après quelques essais, que

$$f(25^\circ) = -0{,}0237,$$
$$f(26^\circ) = 0{,}0088.$$

Entre 25° et 26°, $f''(x)$ est positif; nous partirons donc de $f(26^\circ)$, et la méthode de Newton fournira

$$x = \text{arc } 26^\circ - \frac{0{,}0088}{2{,}4384} = 0{,}4502 = 25^\circ\, 47'\, 40''.$$

La méthode de fausse position donne

$$x = \text{arc } 26^\circ - \frac{0{,}0088 \times 0{,}0175}{0{,}0325} = 0{,}4490 = 25^\circ\, 43'\, 32''.$$

Or on a

$$f(25^\circ\, 43'\, 32'') = -0{,}0028833,$$
$$f(25^\circ\, 47'\, 40'') = 0{,}0005578.$$

Les termes de correction sont :

$$(\text{Newton})\ -\frac{0{,}0005578}{2{,}4351438} = -3'\, 45'',6,$$

$$(\text{fausse position})\ -\frac{0{,}0005578 \times 0{,}0012}{0{,}0034411} = -3'\, 45'',4;$$

on en conclut, à une seconde près,

$$x = 25^\circ\, 43'\, 55''.$$

Le théorème de Fourier, celui de Sturm et surtout celui de Rolle s'appliquent aux fonctions transcendantes comme aux fonctions algébriques et peuvent souvent servir à la séparation des racines des équations transcendantes; toutefois ces théorèmes supposent la continuité des fonctions et de leurs dérivées.

Considérons, par exemple, la série de fonctions définies par les relations

$$V_{n+1} = V_n x - V_{n-1}, \quad V_1 = e^x - 2, \quad V_0 = e^x;$$

l'équation $V_i = 0$ aura i ou $\frac{i-1}{2}$ racines positives. En effet, les fonctions $V_0, V_1, \ldots, V_n$ satisfont aux conditions imposées par le théorème de Sturm : elles sont continues lorsque l'une d'elles s'annule; la précédente et la suivante sont de signes contraires; deux quelconques d'entre elles ne peuvent s'annuler à la fois; enfin V_0 reste positif pour les valeurs positives de x. Mais pour $x = 0$ on a

$$V_0 = +1, \quad V_1 = -\ldots, \quad V_2 = -\ldots, \quad V_3 = +\ldots, \quad V_4 = +\ldots;$$

pour $x = \infty$, on a

$$V_0 = +\infty, \quad V_1 = +\infty, \quad V_2 = +\infty, \ldots.$$

Le nombre des variations perdues de V_0 à V_i est donc $\frac{i}{2}$ ou $\frac{i-1}{2}$; donc V_i a $\frac{i}{2}$ ou $\frac{i-1}{2}$ racines positives.

Le théorème de Fourier repose sur ce que la dernière dérivée d'une fonction entière ne change pas de signe; si l'on reconnaît qu'une dérivée d'une fonction transcendante ne change pas de signe dans un certain intervalle, on pourra la considérer comme constante dans cet intervalle et appliquer le théorème de Fourier à la fonction, comme si cette dérivée était la dernière d'une fonction entière, etc.

FIN.

ERRATA.

Page 99, ligne 19; *au lieu de* f, et μ, *lisez* f, ou μ.

Page 108, ligne 12; au lieu de *inégalités* symboliques, lisez *égalités* symboliques.

Page 108, ligne 5; *au lieu de* il y a 20 ans, *lisez* il y a 12 ans.

Page 251, ligne 15; *au lieu de* ambiguïté, *lisez* absurdité.

Page 366, ligne 15; *après* ce module minimum est zéro, *ajoutez* le module minimum existe évidemment puisque, pour des valeurs infinies de z, $F(z)$ est infini.

Page 399, ligne 1; *au lieu de* $\frac{x}{a^n}$, *lisez* $\frac{x}{a_n}$.

Page 437, ligne 7; l'équation doit être

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-7}-\sqrt[3]{3x+3}=0.$$

Page 464, ligne 16, *au lieu de*

$$\frac{x}{(x+1)(x+1)}=\ldots, \text{ lisez } \frac{x}{(x+1)(x-1)}=\ldots.$$

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine Saint-Germain, 10, près l'Institut.

Laurent

ALGÈBRE