opis: 46608

Einführung

in die

höhere Mathematik

für Studierende und zum Selbststudium

von

Dr. Hans von Mangoldt,

Geh. Reg.-Rat und Professor der Mathematik an der Kgl. Techn. Hochschule zu Danzig.

Dritter Band:

Integralrechnung.

Mit 111 Figuren im Text.

Leipzig
Verlag von S. Hirzel
1914.

Warszawa
1915.

Vorwort.

Bei der Abgrenzung des Stoffes für den meine Einführung in die höhere Mathematik abschließenden dritten Band hat mich die Erwägung geleitet, daß das Gesamtwerk nur eine Einführung sein, aber dabei auch für das Studium der Mechanik und der mathematischen Physik eine sichere Grundlage liefern soll. Schon die notwendige Beschränkung des Umfangs machte es erforderlich, derartig weit ausgedehnte Gebiete wie die Lehre von den elliptischen und den Abelschen Funktionen, die Variationsrechnung und die Lehre von den partiellen Differentialgleichungen vollständig auszuschließen. Aus dem gleichen Grunde konnten auch aus der Lehre von den totalen Differentialgleichungen nur die einfachsten Teile behandelt werden. Wohl aber habe ich neben der eigentlichen Integralrechnung im engeren Sinne auch einen Teil der durch den letzten Abschnitt des zweiten Bandes bereits eingeleiteten Lehre von den Funktionen einer komplexen Veränderlichen aufgenommen, und zwar bis zu dem grundlegenden Integralsatz von Cauchy nebst dem daraus fließenden Beweise für die allgemeine Darstellbarkeit differenzierbarer Funktionen komplexen Argumentes durch Potenzreihen. Ferner hat es sich ermöglichen lassen, die praktisch so wichtige Vektoranalysis wenigstens teilweise zu behandeln und dabei bis zum Beweise des in der Physik so oft gebrauchten Satzes von Stokes einschließlich zu gehen. Dagegen habe ich mich hinsichtlich der Fourierschen Reihen darauf beschränken müssen, die Hauptschwierigkeiten, die einem Eindringen in dieses Gebiet entgegenstehen, durch den Beweis des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung, durch die Feststellung von hinreichenden Bedingungen für die gliedweise Differenzier- und Integrierbarkeit einer unendlichen Reihe und durch die Ermittelung des Integrales $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ aus dem Wege zu räumen.

Mit Rücksicht darauf, daß ein Buch wesentlich andere Aufgaben hat als eine Vorlesung und daher gelegentlich weiter gehen soll und darf als eine solche, habe ich es für richtig gehalten, für die grundlegenden Sätze der Integralrechnung vollständige und mit möglichst wenig Voraussetzungen auskommende Beweise zu erbringen. Dagegen sind selbstverständlich bei den Anwendungen und Beispielen solche Voraussetzungen, die praktisch regelmäßig erfüllt zu sein pflegen, ohne jedes Bedenken gemacht worden, sobald sie zur Vereinfachung und Erleichterung der Betrachtungen etwas beitragen konnten.

Am Schluß des Bandes ist eine Formeltabelle zugefügt, doch habe ich dieselbe zur Erleichterung der Übersicht möglichst kurz gehalten und daher die jedem Kenner der Integralrechnung geläufigen Grundformeln nicht mit aufgenommen.

Bei der Anfertigung der Figuren habe ich mich wieder der bewährten Hilfe des Herrn Kandidat des höheren Schulamts K. Göringer zu erfreuen gehabt, und beim Lesen der Korrekturen haben mich die Herren Dr. A. Lauth und Dr. H. Vermeil in bereitwilligster Weise unterstützt. Herzlichster Dank sei ihnen dafür ausgesprochen. Ganz besonders aber danke ich Herrn Professor Dr. J. Sommer, der sich der großen Mühe unterzogen hat, das ganze Manuskript durchzulesen, für so manchen wertvollen Rat, mit dem er meine Arbeit gefördert hat. Endlich möchte ich auch der Verlagsbuchhandlung nun beim Abschluß des Gesamtwerkes für ihr bereitwilliges Eingehen auf alle meine Wünsche an dieser Stelle nochmals meinen verbindlichsten Dank abstatten.

Danzig-Langfuhr, im Mai 1914.

H. v. Mangoldt.

Inhaltsverzeichnis des dritten Bandes.

Sechzehnter Abschnitt.

Einfache Integrale.

Bestimmte und unbestimmte Integrale.

Grundregeln zur Berechnung unbestimmter Integrale.

Übersicht über die wichtigsten Arten von Funktionen, deren Integrale in geschlossener Form darstellbar sind.

Achtzehnter Abschnitt.

Bestimmte Integrale mit komplexen Grenzen.

Neunzehnter Abschnitt.

Mehrfache Integrale.

Differentiation und Integration eines bestimmten Integrales in bezug auf einen Parameter.

Flächen- und Raumintegrale.

Zwanzigster Abschnitt.

Anwendungen mehrfacher Integrale.

Volumenberechnung.

Inhaltsberechnung krummer Flächenstücke.

Schwerpunkte, Trägheitsmomente, Potentiale.

Integration vollständiger Differentiale.

Einundzwanzigster Abschnitt.

Die Integralsätze von Gauß, Green und Stokes.

Zweiundzwanzigster Abschnitt.

Uneigentliche Integrale.

Dreiundzwanzigster Abschnitt.

Differentialgleichungen.

Erklärungen und allgemeine Sätze.

Differentialgleichungen erster Ordnung.

Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Sechzehnter Abschnitt.

Einfache Integrale.

Bestimmte und unbestimmte Integrale.

418. Flächeninhalt eines ebenen Bereiches. — Wie in der elementaren Planimetrie gezeigt wird, kann die Fläche eines jeden ebenen Vielecks[1]) in mannigfach verschiedener Weise durch eine endliche Anzahl gerader Schnitte so in Teile zerlegt werden, daß diese Teile, passend aneinandergefügt, die Fläche eines Rechtecks decken, dessen eine Seite der Längeneinheit gleichkommt. Bei allen diesen Zerlegungen und Wiederzusammenfügungen erhält aber die zweite Seite des Rechtecks die nämliche Länge[2]). Die Zahl, welche diese Länge mißt, heißt der **Flächeninhalt** oder kurz der **Inhalt** des gegebenen Vielecks, da sie Aufschluß darüber gibt, wie viel Einheitsquadrate man mit Teilen der Fläche des gegebenen Vielecks bedecken kann, oder umgekehrt, wie viel Einheitsquadrate man braucht, wenn man mit ihnen oder ihren Teilen die Fläche des gegebenen Vielecks bedecken will.

Der Inhalt eines beliebigen Vielecks $\mathfrak{V}$ ist stets größer als der Inhalt eines jeden von $\mathfrak{V}$ verschiedenen Vielecks, welches in $\mathfrak{V}$ als Teil enthalten ist.

Es liegt nahe, den zunächst nur für Vielecke festgestellten Begriff des Flächeninhalts auf andere ebene Bereiche auszudehnen.

1) Unter einem Vieleck schlechthin ist hier stets ein einfaches Vieleck zu verstehen, d. h. ein solches, bei dem zwei nicht benachbarte Kanten niemals einen Punkt gemein haben. Ob man der Fläche eines solchen Vielecks nur die im Innern liegenden Punkte, oder auch Punkte des Umfangs zurechnet, ist für die hier anzustellenden Betrachtungen gleichgültig.

2) Eine eingehende Darstellung verschiedener Beweise dieser Behauptung nebst Literaturnachweisungen gibt W. Killing und H. Hovestadt, Handbuch des mathematischen Unterrichts, I, Leipzig und Berlin 1910, S. 75—98.

Dabei empfiehlt es sich, neben dem Begriff eines Vielecks auch noch einen allgemeineren Begriff zu benutzen, der als geradlinig begrenzter Bereich bezeichnet werden und die folgenden Arten von Bereichen umfassen soll:

1. Jede Innenfläche eines ebenen Vielecks,
2. jede Fläche, die dadurch erzeugt werden kann, daß man aus der Fläche eines ebenen Vielecks eine endliche Anzahl von Flächen ebener Vielecke herausschneidet,
3. jede Mehrheit von endlich vielen in der gleichen Ebene liegenden Bereichen der unter 1 oder 2 erwähnten Art, von denen keine zwei einen inneren Punkt gemein haben.

Man gelangt dann folgendermaßen zum Ziel: Ist in einer Ebene ein endlicher zweifach ausgedehnter Bereich $\mathfrak{B}$ gegeben, so gibt es einerseits eingeschlossene geradlinig begrenzte Bereiche, d. h. solche, deren innere Punkte sämtlich zu $\mathfrak{B}$ gehören, und andererseits umschließende geradlinig begrenzte Bereiche, d. h. solche, die jeden Punkt des Bereiches $\mathfrak{B}$ im Innern oder auf dem Umfang enthalten. Ferner kann der Inhalt eines eingeschlossenen geradlinig begrenzten Bereiches niemals größer sein als der eines umschließenden. Daher hat die Menge aller Inhalte von eingeschlossenen geradlinig begrenzten Bereichen eine endliche obere Grenze g und die Menge der Inhalte aller umschließenden geradlinig begrenzten Bereiche eine endliche untere Grenze G, und es ist immer $g \leqq G$.

Ist nun $g = G$, so schreibt man auch dem Bereich $\mathfrak{B}$ selbst einen **Flächeninhalt** zu und versteht darunter den gemeinsamen Wert der Grenzen g und G. Man sagt dann auch kurz, der Bereich $\mathfrak{B}$ sei **meßbar**. Ist dagegen $g < G$, so kann bei dem Bereich $\mathfrak{B}$ von einem Inhalt schlechthin nicht mehr die Rede sein. Jedoch wird dann zuweilen die Grenze g als der innere Inhalt und die Grenze G als der äußere Inhalt des Bereiches $\mathfrak{B}$ bezeichnet.

Fig. 1.

Ein einfaches Beispiel eines Bereiches, bei welchem der innere Inhalt vom äußeren verschieden ist, erhält man, wenn man (Fig. 1) auf der einen Seite eines Quadrates von der Seitenlänge Eins in jedem Punkte, dessen Abstände von den Endpunkten dieser Seite rational sind, nach außen ein Lot von der Länge Eins errichtet und nun dem Bereich alle diejenigen, aber auch nur diejenigen Punkte zurechnet, die im Innern oder auf dem Umfang des ursprünglich angenommenen Quadrates oder auf einem der erwähnten Lote liegen. Der so erklärte Bereich hat nämlich offenbar den inneren Inhalt 1, dagegen den äußeren Inhalt 2.[1])

Ist in einer orientierten Ebene $\mathfrak{E}$ ein zweifach ausgedehnter Bereich $\mathfrak{B}$, der nach der eben aufgestellten Erklärung meßbar ist, durch eine einfache geschlossene Linie $\mathfrak{l}$ abgegrenzt, und ist dieser Grenzlinie eine bestimmte Durchlaufungsrichtung beigelegt, so ist es sehr oft zweckmäßig, unter dem Inhalt des Bereiches $\mathfrak{B}$ diejenige positive oder negative Zahl zu verstehen, deren absoluter Wert den Inhalt in dem zuvor erklärten Sinne angibt und deren Vorzeichen + oder − ist, je nachdem der Sinn, in welchem ein die Randlinie in der vorgeschriebenen Richtung durchlaufender Punkt die inneren Punkte des Bereiches $\mathfrak{B}$ umläuft[2]), mit dem positiven Drehungssinn der Ebene $\mathfrak{E}$ übereinstimmt oder nicht.

Wird ein Bereich $\mathfrak{B}$ der eben betrachteten Art senkrecht auf eine zweite orientierte Ebene $\mathfrak{E}'$ projiziert, so kommt auch seiner Projektion $\mathfrak{B}'$ ein Inhalt zu. Legt man ferner die positiven Normalenrichtungen n, n' der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$ gegen deren positive Drehungsrichtungen in übereinstimmender Weise fest (vgl. Nr. **123**) und schreibt man zugleich der Grenzlinie von $\mathfrak{B}'$ diejenige Durchlaufungsrichtung zu, die sich aus der Durchlaufungsrichtung von $\mathfrak{l}$ durch Projektion ergibt, so besteht zwischen den positiven oder negativen Zahlen J, J', welche bei der soeben erwähnten Festsetzung die Inhalte der Bereiche $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ messen, immer die Gleichung

$$J' = J\cos(n, n').$$

---

1) Bei diesem Beispiel beruht die in Rede stehende Eigentümlichkeit des betrachteten Bereiches wesentlich darauf, daß derselbe neben inneren Punkten auch Grenzpunkte enthält. Aber der innere Inhalt kann vom äußeren auch bei solchen Bereichen verschieden sein, die nur aus inneren Punkten bestehen. Ein Beispiel gab W. F. Osgood, A Jordan curve of positive area, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 4, 1903, S. 107—112.

2) Da die angegebene Vorzeichenregel nur in solchen Fällen zur Anwendung kommen wird, wo es keine Schwierigkeit hat, zu entscheiden, ob ein die Randlinie in vorgeschriebener Richtung durchlaufender Punkt die inneren Punkte im positiven oder negativen Sinne umläuft, kann hier von der nicht ohne Umständlichkeit durchzuführenden Angabe einer ganz allgemeinen Regel für jene Entscheidung abgesehen werden.

Der Beweis ergibt sich leicht durch wiederholte Anwendung des entsprechenden Satzes für Dreiecke, der in Nr. **125** bewiesen wurde.

419. Zusammenhang der Begriffe Flächeninhalt und Integral. — In der allgemeinen Aufgabe der Inhaltsberechnung eines ebenen Bereiches ist als ein besonderer Fall, der aber deswegen wichtig ist, weil manche verwickeltere Fälle auf ihn zurückgeführt werden können, die folgende Aufgabe enthalten:

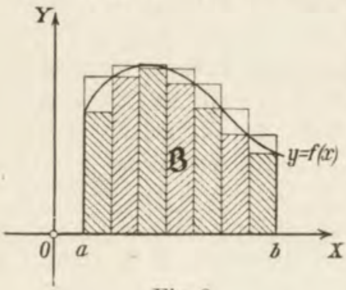


Fig. 2.

Nachdem für ein abgeschlossenes Intervall, dessen untere Grenze a und dessen obere Grenze b heißen möge, eine daselbst nirgends negative Funktion $f(x)$ mit endlicher oberer Grenze erklärt ist, sei in einer Ebene mit einem System rechtwinkeliger Koordinaten x, y ein Bereich $\mathfrak{B}$ (Fig. 2) durch die Ungleichungen

$$a \leqq x \leqq b; \qquad 0 \leqq y \leqq f(x)$$

abgegrenzt, d. h. geometrisch durch die Festsetzung, daß er alle diejenigen Punkte enthalten soll, die einerseits zwischen den zu den Abszissen a und b gehörenden Parallelen zur Ordinatenachse und andererseits zwischen der Abszissenachse und dem geometrischen Bilde der Funktion $f(x)$ liegen, einschließlich der Punkte dieses geometrischen Bildes selbst, sowie derjenigen Strecken, welche links, rechts und unten die Grenze bilden. Man soll entscheiden, ob diesem Bereich ein Inhalt zukommt, und gegebenenfalls diesen Inhalt ermitteln.

Es liegt nahe, zur Lösung dieser Aufgabe das in die x-Achse fallende Stück der Begrenzung von $\mathfrak{B}$ in Teile zu zerlegen, sodann über jeden Teil als Grundlinie zwei Rechtecke zu stellen, von denen das eine nur Punkte von $\mathfrak{B}$ umfaßt, aber dabei doch möglichst hoch ist, während das andere alle senkrecht über seiner Grundlinie liegenden Punkte von $\mathfrak{B}$ enthält, aber dabei doch möglichst niedrig ist, und hierauf zu fragen, wann man den Inhalt des durch Zusammenfassung der kleineren Rechtecke entstehenden eingeschlossenen (in Fig. 2 schraffierten) Vielecks und den Inhalt des durch Zusammenfassung der größeren Rechtecke entstehenden umschließenden Vielecks durch Verfeinerung der Teilung des Intervalles $(a \cdots b)$ einander beliebig nähern kann. Dadurch wird man zu dem Begriff eines bestimmten Integrales geführt, und in der Tat haben Überlegungen dieser Art auch geschichtlich bei der Entwicklung des Integralbegriffs eine Rolle gespielt.

420. Begriff eines bestimmten Integrales. — Im Anschluß an die eben angedeuteten geometrischen Betrachtungen, aber ohne Benutzung geometrischer Sätze oder Wendungen, gelangt man zu dem Begriff eines bestimmten Integrales durch den folgenden Gedankengang:

Für ein endliches (abgeschlossenes oder nicht abgeschlossenes) Intervall, dessen untere Grenze a und dessen obere Grenze b heißen möge, sei eine reellwertige Funktion $f(x)$ eines reellen Argumentes x gegeben, die daselbst **beschränkt** ist, d. h. zwischen endlichen Grenzen enthalten bleibt. Ferner sei das Intervall $(a \cdots b)$ nach willkürlicher Annahme einer oberhalb 1 liegenden ganzen Zahl n durch Einschaltung von $(n-1)$ Konstanten $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$, die der Umgleichung

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$$

genügen, in n Teile zerlegt und zum Zweck einer gleichmäßigen Bezeichnung

$$a = x_0 \qquad \text{und} \qquad b = x_n$$

gesetzt. Endlich sei festgesetzt, daß für $\lambda = 1, 2, \cdots n$ jedesmal g_λ die untere und G_λ die obere Grenze der Funktion $f(x)$ für das λ-te Teilintervall, d. h. für die nicht außerhalb der Grenzen $x_{\lambda-1}$ und x_λ liegenden Werte von x bedeuten soll.

Denkt man sich dann einerseits die Summe

$$E = \sum_{\lambda=1}^{n} g_\lambda (x_\lambda - x_{\lambda-1}) \tag{1115}$$

und andererseits die Summe

$$U = \sum_{\lambda=1}^{n} G_\lambda (x_\lambda - x_{\lambda-1}) \tag{1116}$$

gebildet, so gelten folgende Sätze:

1. — *Es ist immer*

$$E \leq U.$$

2. — *Wenn man die Teilung des Intervalles $(a \cdots b)$ dadurch verfeinert, daß man zu den bereits vorhandenen Teilpunkten*

$x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ noch einen oder mehrere neue Teilpunkte hinzunimmt, so kann an die Stelle der Summe E niemals eine kleinere und an die Stelle der Summe U niemals eine größere Zahl treten.

Hat man nämlich zwischen zwei benachbarte Teilpunkte $x_{\varkappa-1}, x_\varkappa$ der ursprünglichen Teilung einen neuen Teilpunkt ξ eingeschaltet und sind $g_{\varkappa 1}$ und $g_{\varkappa 2}$ diejenigen Zahlen, die für die beiden Teilintervalle $(x_{\varkappa-1} \cdots \xi)$ und $(\xi \cdots x_\varkappa)$ die gleiche Bedeutung haben wie $g_\varkappa$ für das Intervall $(x_{\varkappa-1} \cdots x_\varkappa)$ so hat man, um die entsprechende Änderung der Summe E zu bewirken, an die Stelle des Summanden $g_\varkappa(x_\varkappa - x_{\varkappa-1})$ die Summe

$$g_{\varkappa 1}(\xi - x_{\varkappa-1}) + g_{\varkappa 2}(x_\varkappa - \xi)$$

zu setzen. Nun ist aber sowohl

$$g_{\varkappa 1} \geqq g_\varkappa \qquad \text{als auch} \qquad g_{\varkappa 2} \geqq g_\varkappa.$$

Für den abzuändernden Summanden tritt daher sicher kein kleinerer Wert ein. Das nämliche gilt für die Summe E selbst und bleibt erst recht bestehen, wenn mehrere neue Teilpunkte nacheinander oder auch gleichzeitig zu den bereits vorhandenen Teilpunkten hinzugenommen werden. Ganz ähnlich kann man für die Summe U die entsprechende Behauptung begründen.

3. — *Ist außer der bisher vorausgesetzten Teilung des Intervalles $(a \cdots b)$ noch irgend eine andere Teilung dieses Intervalles gegeben und sind E' und U' diejenigen Summen, welche für diese zweite Teilung die gleiche Bedeutung haben wie die Summen E und U für die erste, so ist immer*

$$E \leqq U' \qquad \textit{und} \qquad E' \leqq U.$$

Aus der ersten (in Fig. 3ᵃ durch Punkte dargestellten) Teilung und aus der zweiten (in Fig. 3ᵇ durch Striche dargestellten) Teilung des Intervalles $(a \cdots b)$ erhält man nämlich durch Übereinanderlegung eine dritte Teilung (Fig. 3ᶜ), die aus jeder der beiden ursprünglich gegebenen Teilungen durch Hinzunahme neuer Teilpunkte entsteht, und wenn nun E'' und U'' diejenigen Summen bedeuten, die für diese dritte Teilung die gleiche Bedeutung haben wie E und U für die erste, so ist nach den vorangehenden Sätzen

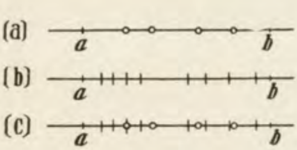


Fig. 3.

$$E \leqq E'' \leqq U'' \leqq U' \qquad \text{und} \qquad E' \leqq E'' \leqq U'' \leqq U,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Hiernach kann also keiner der Werte, welche die Summe E bei verschiedenen Teilungen anzunehmen vermag, jemals größer sein als irgend einer der Werte, deren die Summe U fähig ist, und zwar gilt dies auch dann, wenn die verglichenen Werte von E und U sich auf verschiedene Teilungen beziehen. Daraus folgt

4. — *Die Menge aller Werte, deren die Summe E fähig ist, hat eine endliche obere Grenze E^*, und die Menge aller Werte, deren die Summe U fähig ist, hat eine endliche untere Grenze U^*, und es ist immer*

$$E^* \leqq U^* .$$

Dieses Ergebnis berechtigt nun zur Aufstellung der folgenden

Erklärung: *Wenn die Funktion $f(x)$ in dem Intervall $(a \cdots b)$ beschränkt und so beschaffen ist, daß die eben erklärten Grenzen E^* und U^* einander gleich sind, so sagt man, sie sei über dieses Intervall* **integrierbar.** *Zugleich nennt man dann den gemeinsamen Wert von E^* und U^* das von a bis b erstreckte* **Integral** *der Funktion $f(x)$ und bezeichnet dasselbe unter Benutzung des Integralzeichens $\int$, welches als eine Verzerrung des auf eine Summe hinweisenden Buchstabens S anzusehen ist, durch*

$$\int_a^b f(x)\,dx .$$

Die Voraussetzung, daß eine Funktion über ein endliches Intervall integrierbar sei, schließt immer zugleich die andere ein, daß die Funktion in diesem Intervall beschränkt sei, so daß diese letztere Voraussetzung neben der ersteren nicht noch besonders erwähnt zu werden braucht.

Der Bedingung für die Integrierbarkeit einer Funktion kann man eine kürzere Fassung geben, wenn man zuvor den Begriff der größten Schwankung einführt. Dies geschieht durch die folgende

Erklärung: *Wenn eine Funktion von einer oder auch mehreren Veränderlichen in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ zwischen endlichen Grenzen enthalten bleibt, so versteht man unter ihrer* **größten Schwankung** *in diesem Bereiche den Unterschied zwischen ihrer oberen und ihrer unteren Grenze für den Bereich $\mathfrak{B}$.*

Unter Benutzung dieses Begriffes kann man nun folgenden Satz aussprechen:

Dafür, daß eine Funktion $f(x)$, welche in einem endlichen Intervall beschränkt ist, auch über dieses Intervall integrierbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß man nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen positiven Konstanten ε stets eine Teilung des Intervalles angeben kann, bei welcher die aus den Längen

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3, \cdots \delta_n$$

der einzelnen Teilintervalle und den zugehörigen größten Schwankungen

$$s_1,\ s_2,\ s_3, \cdots s_n$$

der Funktion $f(x)$ durch Multiplikation und nachfolgende Addition gebildete Summe $\sum_{\lambda=1}^{n} s_\lambda \delta_\lambda$ kleiner als ε ausfällt.

Die Summe $\sum_{\lambda=1}^{n} s_\lambda \delta_\lambda$ ist nämlich nichts weiter als die Differenz der zu der fraglichen Teilung gehörenden Summen U und E. Kann sie beliebig klein gemacht werden, so lassen sich U und E beliebig nahe aneinander rücken, so daß $U^* = E^*$ sein muß. Und umgekehrt kann man, wenn die Funktion $f(x)$ über das Intervall $(a \cdots b)$ integrierbar, also $U^* = E^* = \int_a^b f(x)dx$ ist, nach willkürlicher Annahme einer positiven Konstanten ε immer sowohl eine Teilung des Intervalles $(a \cdots b)$ angeben, für welche $\int_a^b f(x)dx - E < \frac{1}{2}\varepsilon$, als auch eine Teilung, für welche $U - \int_a^b f(x)dx < \frac{1}{2}\varepsilon$ ist. Durch Übereinanderlagerung ergibt sich dann eine Teilung, für welche die Differenz der zugehörigen Summen U und E kleiner als ε ausfällt. Die angegebene Bedingung der Integrierbarkeit ist somit nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig.

Aus der hiermit gewonnenen neuen Form der Bedingung für die Integrierbarkeit folgt insbesondere: Wenn eine Funktion $f(x)$ in einem endlichen Intervall, dessen untere und obere Grenze wieder a und b heißen mögen, zwischen endlichen Grenzen enthalten, aber für die Grenzen a, b oder wenigstens eine von ihnen zunächst überhaupt nicht erklärt ist, so darf man als Erweiterung der ursprünglichen Erklärung für jede bisher ausgeschlossene

Grenze eine ganz nach Belieben angenommene Zahl als zugehörigen Funktionswert vorschreiben, ohne daß dadurch an der Integrierbarkeit oder Nichtintegrierbarkeit der Funktion $f(x)$ und im ersteren Fall an dem Wert des Integrales $\int_a^b f(x)dx$ irgend etwas geändert würde. Es kommt also bei der Erklärung des über ein endliches Intervall erstreckten Integrales einer daselbst zwischen endlichen Grenzen enthalten bleibenden Funktion nicht darauf an, ob man sich das fragliche Intervall als abgeschlossen oder nicht abgeschlossen vorstellt.

Beispiele integrierbarer Funktionen liefert der folgende

L e h r s a t z: *Wenn eine Funktion $f(x)$ in einem abgeschlossenen Intervall $(a \cdots b)$ bei wachsendem x nie zunimmt oder nie abnimmt, so ist sie auch über dieses Intervall integrierbar.*

Nimmt nämlich die Funktion $f(x)$ bei wachsendem x nie zu, so ist für jeden abgeschlossenen Teil des Intervalles $(a \cdots b)$ die zugehörige untere Grenze der Funktion $f(x)$ gleich dem Wert, den sie am Ende und die zugehörige obere Grenze gleich dem Wert, den sie am Anfang des Teiles annimmt, also

$$E = \sum_{\lambda=1}^{n} f(x_\lambda)(x_\lambda - x_{\lambda-1}); \qquad U = \sum_{\lambda=1}^{n} f(x_{\lambda-1})(x_\lambda - x_{\lambda-1}),$$

folglich

$$U - E = \sum_{\lambda=1}^{n} [f(x_{\lambda-1}) - f(x_\lambda)](x_\lambda - x_{\lambda-1}).$$

Wählt man nun die Teilpunkte $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ so, daß sie das Intervall $(a \cdots b)$ in n g l e i c h e Teile zerlegen, so wird jede der Differenzen $(x_\lambda - x_{\lambda-1})$ gleich $\frac{b-a}{n}$, also

$$\begin{aligned} U - E &= \frac{b-a}{n}\Big\{[f(a) - f(x_1)] + [f(x_1) - f(x_2)] + \cdots \\ &\qquad + [f(x_{n-1}) - f(b)]\Big\} \\ &= \frac{b-a}{n}\big[f(a) - f(b)\big]. \end{aligned}$$

Man kann daher die Differenz $(U - E)$ dadurch dem Wert 0 beliebig nahe bringen, daß man die Anzahl n hinreichend groß wählt. Folglich muß E^* mit U^* zusammenfallen, d. h. die Funktion $f(x)$ über das Intervall $(a \cdots b)$ integrierbar sein.

Ganz ähnlich kann der Beweis geführt werden, wenn die Funktion $f(x)$ in dem abgeschlossenen Intervall $(a \cdots b)$ bei wachsendem x niemals abnimmt.

Bei der Erklärung des Zeichens $\int_a^b f(x)dx$ war bisher vorausgesetzt worden, daß $a < b$ sei. Von dieser Einschränkung befreit man sich nachträglich durch die folgenden Festsetzungen:

1. — *Für jede beliebige in einem Intervall erklärte Funktion $f(x)$ und für jede diesem Intervall angehörende Konstante a ist immer*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{1117}$$

zu setzen.

2. — *Wenn eine Funktion $f(x)$ über ein endliches Intervall integrierbar ist und a die obere und b die untere Grenze dieses Intervalles bedeutet, so ist unter $\int_a^b f(x)dx$ der entgegengesetzte Wert des Integrales $\int_b^a f(x)dx$ zu verstehen, so daß immer die Gleichung*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{1118}$$

besteht.

Diese Festsetzung wird durch die vorangehenden Betrachtungen nahe gelegt. Denn wenn man in dem Fall, daß $a > b$ ist, unter $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ ebenso wie früher Zahlen versteht, die zwischen a und b liegen und im Sinne von a gegen b aufeinander folgen, so haben die durch die Gleichungen (1115) und (1116) erklärten Summen E und U gerade die entgegengesetzten Werte wie die entsprechenden Summen, die für die gleiche Teilung des Intervalles $(a \cdots b)$ bei der Erklärung des Integrales $\int_b^a f(x)dx$ zu betrachten wären.

Zum Unterschied von dem später zu erklärenden Begriff eines unbestimmten Integrales heißt jeder Ausdruck von der Form $\int_a^b f(x)dx$, wo a und b zwei Konstante und $f(x)$ eine über das Intervall $(a \cdots b)$ integrierbare Funktion bedeuten, ein **bestimmtes Integral.** Die Konstanten a und b heißen die **Grenzen** dieses

Integrales, und zwar die unten am Integralzeichen angegebene Konstante a immer die **untere Integrationsgrenze** und die oben am Integralzeichen angegebene Konstante b immer die **obere Integrationsgrenze,** auch wenn $b < a$ ist. Das von den Integrationsgrenzen begrenzte Intervall heißt das **Integrationsintervall,** und das in diesem Intervall frei veränderliche Argument der zu integrierenden Funktion heißt die **Integrationsveränderliche.**

Schließlich möge noch erwähnt werden, daß man in einem bestimmten Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ stets die Bezeichnung der Integrationsveränderlichen nach Belieben abändern darf, ohne daß dadurch die Bedeutung des Integrales eine andere würde. Es ist also immer

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b f(u)\,du = \cdots.$$

421. Das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe. — Unter Beibehaltung der in der vorigen Nummer eingeführten Bezeichnungen und Voraussetzungen, aber unter Aufhebung der Beschränkung, daß $a < b$ sein soll, seien $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ wie bisher irgend welche voneinander verschiedene zwischen a und b liegende und im Sinne von a gegen b aufeinander folgende Zahlen, und es sei auch wieder $x_0 = a$ und $x_n = b$ gesetzt. Zugleich seien

$$\xi_1, \ \xi_2, \cdots \xi_n$$

irgend welche Werte des Argumentes x, die beziehentlich den abgeschlossenen Intervallen

$$(a \cdots x_1), \ (x_1 \cdots x_2), \cdots (x_{n-1} \cdots b)$$

angehören. Dann liegt die Summe

$$S = \sum_{\lambda=1}^{n} f(\xi_\lambda)(x_\lambda - x_{\lambda-1}) \tag{1119}$$

niemals außerhalb der Grenzen E und U. Für verschiedene Teilungen und verschiedene Verfügungen über die Auswahl der Zahlen $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ in den einzelnen Teilintervallen können die Grenzen E und U und die Summe S verschiedene Werte annehmen, vorausgesetzt, daß die Funktion $f(x)$ nicht gerade konstant ist, doch läßt sich der Bereich aller dieser Werte, falls die Funktion $f(x)$ über das Intervall $(a \cdots b)$ integrierbar ist, dadurch auf eine beliebig enge Umgebung des Wertes $\int_a^b f(x)dx$ einschränken, daß man für die Teilung des Intervalles $(a \cdots b)$ einen hinreichend weit gehenden Grad der Feinheit vorschreibt. Es gilt nämlich der folgende wichtige

Lehrsatz: *Wenn die Funktion $f(x)$ über das Intervall $(a \cdots b)$ integrierbar ist, so kann man nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen positiven Konstanten ε lediglich durch die Vorschrift, daß die Längen der Teilintervalle $(x_\lambda \cdots x_{\lambda-1})$ eine gewisse der Konstanten ε zugeordnete positive Konstante h nicht überschreiten sollen, stets erreichen, daß der Unterschied $(U-E)$, also auch jeder der Unterschiede*

$$E-\int_a^b f(x)dx; \quad U-\int_a^b f(x)dx; \quad S-\int_a^b f(x)dx$$

immer absolut genommen kleiner als ε ausfällt, ganz einerlei wie die Teilpunkte $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ im übrigen gewählt und wie die Werte $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ in den einzelnen Teilintervallen angenommen sein mögen.

In diesem Sinne darf man also unter der Voraussetzung der Integrierbarkeit der Funktion $f(x)$ das Integral $\int_a^b f(x)dx$ als den gemeinsamen Grenzwert der Summen E und U, oder auch als den Grenzwert der Summe S für den Fall der unbegrenzten Verfeinerung der Teilung des Intervalles $(a \cdots b)$ bezeichnen.

Beim Beweise der ausgesprochenen Behauptung möge vorausgesetzt werden, daß $a < b$ sei, was ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit geschehen kann. Da die Funktion $f(x)$ nach Annahme über das Intervall $(a \cdots b)$ integrierbar ist, so kann man nach willkürlicher Wahl einer beliebig kleinen positiven Konstanten ε zunächst eine erste Teilung des Intervalles $(a \cdots b)$ von solcher Beschaffenheit finden, daß die dieser besonderen Teilung entsprechenden Werte E_1 und U_1 der Summen E und U die Ungleichung

$$U_1 - E_1 < \frac{\varepsilon}{3}$$

erfüllen. Ferner kann man, wenn ν die Anzahl der Teilpunkte bei dieser Teilung und A die größte Schwankung der Funktion

$f(x)$ für das ganze Intervall $(a \cdots b)$ bedeutet, eine positive Konstante h so bestimmen daß auch

$$\nu A h < \frac{\varepsilon}{3}$$

wird. Dann ist bei jeder zweiten Teilung des Intervalles $(a \cdots b)$, bei welcher die Länge jedes einzelnen Teilintervalles kleiner als h ist, die Differenz $(U_2 - E_2)$ der zugehörigen Werte E_2, U_2 der Summen E und U kleiner als ε. Bildet man nämlich durch Übereinanderlegung der ersten und der zweiten Teilung noch eine dritte Teilung und versteht man unter E_3, U_3 die dieser dritten Teilung entsprechenden Werte der Summen E und U, so ist

$$U_2 - E_2 = (U_2 - U_3) + (U_3 - E_3) + (E_3 - E_2).$$

Nun ist aber, da die dritte Teilung eine Fortsetzung der ersten darstellt,

$$E_1 \leqq E_3 \leqq U_3 \leqq U_1,$$

also

$$U_3 - E_3 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ferner ist

$$0 \leqq E_3 - E_2 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Denn beim Übergang von der zweiten zur dritten Teilung kann die Notwendigkeit, den Beitrag eines einzelnen Teilintervalles der zweiten Teilung zur Summe E_2 durch einen anderen und zwar größeren Wert zu ersetzen, höchstens ν-mal eintreten, nämlich nur dann, wenn das betrachtete Teilintervall wenigstens einen Teilpunkt der ersten Teilung im Innern enthält. Für jedes Teilintervall, bei welchem dies zutrifft, ist aber der eintretende Zuwachs kleiner als Ah, denn die Länge des Intervalles ist kleiner als h und die etwa nötige Vermehrung der unteren Funktionsgrenze kann niemals größer als A sein. Also ist wirklich

$$0 \leqq E_3 - E_2 < \nu A h < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da man ferner ganz ähnlich zeigen kann, daß auch

$$0 \leqq U_2 - U_3 < \frac{\varepsilon}{3}$$

ist, so ergibt sich schließlich

$$U_2 - E_2 = (U_2 - U_3) + (U_3 - E_3) + (E_3 - E_2) < \varepsilon,$$

wie behauptet wurde. Natürlich ist dann auch für jede unter Zugrundelegung der zweiten Teilung gebildete Summe S

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S\right| < \varepsilon,$$

womit der gewünschte Beweis erbracht ist. Wie leicht einzusehen, gilt auch die Umkehrung: *Wenn der Wertbereich der Summe S dadurch auf ein beliebig enges Intervall zusammengezogen werden kann, daß man für die Längen der einzelnen Teilintervalle eine hinlänglich kleine obere Grenze vorschreibt, so ist die Funktion $f(x)$ über das Intervall $(a \cdots b)$ integrierbar.*

422. Gleichmäßige Stetigkeit. — Unter Beibehaltung der in Nr. **420** eingeführten Bezeichnungen werde zu den dort gemachten Voraussetzungen noch die weitere Voraussetzung hinzugefügt, daß das Intervall $(a \cdots b)$ abgeschlossen und daß die Funktion $f(x)$ in diesem Intervall stetig sei. Dann sind die mit g_λ und G_λ bezeichneten Grenzen für jeden Wert von λ zugleich der kleinste und der größte Wert der Funktion $f(x)$ für die nicht außerhalb des Teilintervalles $(x_{\lambda-1} \cdots x_\lambda)$ liegenden Werte von x. Die Frage, ob sich die Differenz

$$U - E = \sum_{\lambda=1}^{n} (G_\lambda - g_\lambda)(x_\lambda - x_{\lambda-1})$$

durch Verfeinerung der Teilung des Intervalles $(a \cdots b)$ dem Wert 0 beliebig nahe bringen läßt, ist also jedenfalls dann mit ja zu beantworten, wenn der Unterschied zwischen dem größten und dem kleinsten Wert der Funktion im einzelnen Teilintervall gleichzeitig für sämtliche Teilintervalle unter eine willkürlich vorgeschriebene positive Konstante herabgedrückt werden kann. Dies letztere ist nun in der Tat immer möglich, aber dem Beweise dieser Behauptung steht zunächst noch eine gewisse Schwierigkeit entgegen, wie man durch folgende Überlegung erkennt: Es sei $f(x)$ eine in einem abgeschlossenen Intervall $\mathfrak{J}$ stetige Funktion einer rellen Veränderlichen x, und es sei x_1 eine feste diesem Intervall angehörende Zahl. Dann ist es nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen positiven Konstanten ε zwar immer möglich, eine zugeordnete positive Konstante h_1 so zu bestimmen, daß $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$ wird, sobald $|x - x_1| < h_1$ ist und zugleich x dem Intervall $\mathfrak{J}$ angehört. Aber wenn man nunmehr in dem Intervall $\mathfrak{J}$ eine von x_1 verschiedene Konstante x_2 annimmt, so braucht für diejenigen in $\mathfrak{J}$ liegenden Werte von x, welche die Ungleichung $|x - x_2| < h_1$ erfüllen, durchaus nicht immer $|f(x) - f(x_2)| < \varepsilon$ zu sein. Allerdings kann, da $f(x)$ auch an der Stelle x_2 stetig ist, der Konstanten ε eine Konstante h_2 derart zugeordnet werden, daß $|f(x) - f(x_2)| < \varepsilon$ wird, sobald $|x - x_2| < h_2$ ist und x in $\mathfrak{J}$ liegt, aber diese Konstante h_2 kann, obwohl sie derselben beliebig kleinen positiven Konstanten ε zugeordnet ist, doch kleiner sein wie h_1, da sie sich bei der Betrachtung eines anderen speziellen Wertes von x ergibt. Man braucht sich ja nur vorzustellen, daß die Funktion $f(x)$ sich an der Stelle x_1 langsam, an der Stelle x_2 dagegen schnell ändert und daß man die Konstante h_1 möglischst groß angenommen habe; dann muß für h_2 sicher eine unterhalb h_1 liegende Zahl gewählt werden.

Ist nun in dem Intervall $\mathfrak{J}$ noch eine dritte von x_1 und x_2 verschiedene Konstante x_3 gegeben, so kann es sein, daß es zur Erfüllung der Ungleichung $|f(x) - f(x_3)| < \varepsilon$ noch nicht hinreicht, wenn man verlangt, daß x in $\mathfrak{J}$ liegen und daß $|x - x_3|$ kleiner sein solle als die kleinere der Zahlen h_1 und h_2, daß man vielmehr die Differenz $(x - x_3)$ noch weiter einschränken muß. Ist dies geschehen, so kann es bei Betrachtung einer vierten von x_1, x_2, x_3 verschiedenen Stelle x_4 des Intervalles $\mathfrak{J}$ erforderlich sein, für den absoluten Wert der Differenz $(x - x_4)$ abermals eine kleinere Grenze vorzuschreiben, und so fort.

Da man nun hierbei nie zu einem Ende gelangt, so erscheint es zweifelhaft, ob es überhaupt möglich ist, eine Konstante h von solcher Beschaffenheit zu finden, daß für jeden in $\mathfrak{J}$ liegenden Wert x'

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

wird, sobald $|x - x'| < h$ ist und x ebenfalls in $\mathfrak{J}$ liegt. Eben dieser Zweifel ist zum Zweck des Nachweises der Integrierbarkeit einer jeden stetigen Funktion zu beseitigen. Dies geschieht durch den folgenden

Lehrsatz 1: *Wenn eine Funktion $f(x)$ in einem abgeschlossenen Intervall $\mathfrak{J}$ stetig ist, so kann jeder beliebig kleinen positiven Konstanten ε eine zweite positive Konstante h derart zugeordnet werden, daß der Unterschied der Werte, welche die Funktion $f(x)$ an zwei verschiedenen Stellen x, x' des Intervalles $\mathfrak{J}$ annimmt, jedesmal absolut genommen kleiner als ε ausfällt, sobald nur*

$|x - x'| < h$ *ist, ganz gleichgültig, wie die Werte* x, x' *im übrigen angenommen sein mögen.*

Beweis: Es sei x' irgend eine feste dem Intervall $\mathfrak{J}$ angehörende Zahl, und es sei auch x auf $\mathfrak{J}$ eingeschränkt. Dann kann man dadurch, daß man die positive Konstante δ hinreichend klein annimmt, immer erreichen, daß erstens das Intervall $\mathfrak{J}$ nicht als Teil in dem Intervall $(x' - \delta \cdots x' + \delta)$ enthalten ist und daß zweitens die größte Schwankung (Nr. **420**) der Funktion $f(x)$ in dem zwischen $(x' - \delta)$ und $(x' + \delta)$ enthaltenen Teil des Intervalles $\mathfrak{J}$ kleiner als ε wird, was beispielsweise sicher eintritt, sobald $|f(x) - f(x')|$ in dem fraglichen Teile des Intervalles $\mathfrak{J}$ beständig kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ bleibt. Dabei hat die Menge aller Werte, welche für δ genommen werden dürfen, eine endliche obere Grenze ξ, und da diese bei gegebenem Werte von x' jedesmal eindeutig bestimmt ist, so ist sie, wenn jetzt x' als eine auf $\mathfrak{J}$ eingeschränkte aber daselbst frei bewegliche Veränderliche angesehen wird, eine Funktion von x', und zwar eine Funktion, die überall positiv ist. Diese Funktion ist ferner durchweg stetig. Bedeutet nämlich x'_1 (Fig. 4) irgend eine im Innern des Intervalles $(x' - \xi \cdots x' + \xi)$ liegende und zugleich dem Intervall $\mathfrak{J}$ angehörende Zahl und ξ_1 den ihr entsprechendenden Wert der Funktion ξ, so muß das Intervall $(x'_1 - \xi_1 \cdots x'_1 + \xi_1)$ wenigstens bis zu der zunächst bei x'_1 liegenden Grenze des Intervalles $(x' - \xi \cdots x' + \xi)$ reichen, denn bei diesem Mindestmaß ist jeder ganz im Innern liegende Teil des Intervalles $(x'_1 - \xi_1 \cdots x'_1 + \xi_1)$ zugleich ein innerer Teil des Intervalles $(x' - \xi \cdots x' + \xi)$, also die zugehörige größte Schwankung der Funktion $f(x)$ kleiner als ε. Andererseits kann sich aber das Intervall $(x'_1 - \xi_1 \cdots x'_1 + \xi_1)$ nicht über die am weitesten von x' entfernte Grenze des Intervalles $(x' - \xi \cdots x' + \xi)$ hinaus erstrecken, weil sonst dieses letztere Intervall noch erweitert werden könnte, ohne seine Grundeigenschaft einzubüßen. Also ist

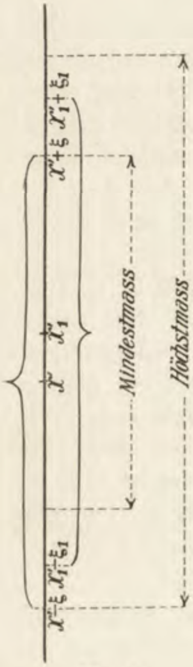


Fig. 4.

$$\xi - |x'_1 - x'| \leqq \xi_1 \leqq \xi + |x'_1 - x'|,$$

oder

$$|\xi_1 - \xi| \leqq |x_1' - x'|,$$

womit die behauptete Stetigkeit bewiesen ist.

Hieraus folgt nun, daß die Funktion ξ in dem Intervall $\mathfrak{J}$ ihre untere Grenze ξ_0 irgendwo wirklich erreicht. Eben deswegen ist diese untere Grenze notwendig von Null verschieden. Damit ist aber der Beweis des ausgesprochenen Lehrsatzes erbracht. Denn wählt man die positive Konstante h so, daß sie $\leqq \xi_0$ ist, so hat sie in der Tat die verlangte Eigenschaft.

Die durch den eben bewiesenen Lehrsatz beantwortete Frage bietet manche Ähnlichkeit mit denjenigen Überlegungen, die in Nr. **297** zur Unterscheidung der gleichmäßigen und der ungleichmäßigen Konvergenz bei unendlichen Reihen mit veränderlichen Gliedern geführt haben: Im einen Fall handelt es sich um die Summe $S_n(x)$ der n ersten Glieder einer aus Funktionen einer Veränderlichen x gebildeten Reihe, und es fragt sich, wie schnell die Annäherung dieser Summe an denjenigen Grenzwert, dem sie bei unbegrenzt wachsendem n zustrebt, für verschiedene Werte von x erfolgt; im anderen Fall handelt es sich um eine Funktion $f(x)$, die in einem abgeschlossenen Intervall $\mathfrak{J}$ stetig, also so beschaffen ist, daß bei Einschränkung der Veränderlichen x auf das Intervall $\mathfrak{J}$ für jeden in $\mathfrak{J}$ liegenden Wert x'

$$\lim_{x=x'} f(x) = f(x')$$

ist, und es fragt sich, wie schnell jetzt die Annäherung der Funktion $f(x)$ an ihren Grenzwert für verschiedene Werte von x' erfolgt. Aber während im ersten Fall eine Ungleichmäßigkeit in der Art der Annäherung tatsächlich vorkommen kann, ist eine solche Ungleichmäßigkeit im zweiten Fall nach dem eben bewiesenen Lehrsatz ausgeschlossen. Indem man dies hervorhebt, kann man dem erwähnten Lehrsatz auch die folgende kürzere Fassung geben:

Wenn eine Funktion einer Veränderlichen in einem abgeschlossenen Intervall überhaupt stetig ist, so ist sie daselbst auch gleichmäßig stetig.

Ein ähnlicher Satz gilt auch für Funktionen von mehreren Veränderlichen, und diese Erweiterung wird in der Integralrechnung ebenfalls gebraucht. Sie soll daher gleich jetzt bewiesen werden. Doch möge dabei die Betrachtung auf Funktionen von zwei Veränderlichen beschränkt werden, was ausreicht, da die leitenden Gedanken schon in diesem Falle genügend deutlich hervortreten.

Lehrsatz 2: *Wenn eine Funktion $f(x, y)$ von zwei Veränderlichen x, y in einem abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{B}$ stetig ist, so kann jeder beliebig kleinen Konstanten ε eine zweite positive Konstante h derart zugeordnet werden, daß der Unterschied der Werte, welche die Funktion $f(x, y)$ an zwei verschiedenen Stellen (x, y); (x', y') des Bereiches $\mathfrak{B}$ annimmt, jedesmal absolut genommen kleiner als ε ausfällt, sobald nur*

$$(x-x')^2+(y-y')^2<h^2$$

ist, ganz gleichgültig, wie die Wertepaare (x, y); (x', y') im übrigen angenommen sein mögen.

Der Beweis läßt sich in ähnlicher Weise führen wie für Funktionen einer Veränderlichen. Ist nämlich (x', y') irgend eine feste in $\mathfrak{B}$ liegende Stelle, so kann man dadurch, daß man die positive Konstante δ hinreichend klein annimmt, immer erreichen, daß erstens der Bereich $\mathfrak{B}$ nicht in der Fläche des durch die Gleichung

$$(x-x')^2+(y-y')^2=\delta^2$$

dargestellten Kreises als Teil enthalten ist und daß zweitens die größte Schwankung der Funktion $f(x, y)$ für den innerhalb dieses Kreises liegenden Teil von $\mathfrak{B}$ kleiner als ε wird. Dabei hat die Menge aller Werte, welche für δ genommen werden dürfen, eine endliche obere Grenze ξ, und da diese bei gegebenen Werten von x' und y' jedesmal eindeutig bestimmt ist, so ist sie, wenn jetzt die auf den Bereich $\mathfrak{B}$ eingeschränkte Stelle (x', y') als daselbst frei beweglich angesehen wird, eine Funktion von x' und y', und zwar eine Funktion, die überall positiv ist. Diese Funktion ist ferner in $\mathfrak{B}$ stetig. Denn ist (x_1', y_1') eine Stelle, die sowohl innerhalb des um (x', y') mit dem Radius ξ beschriebenen Kreises $\mathfrak{k}$ als auch in $\mathfrak{B}$ liegt, und ist ξ_1 der zugehörige Wert von ξ, so muß die Fläche des um (x_1', y_1') mit dem Radius ξ_1 beschriebenen Kreises $\mathfrak{k}_1$ (Fig. 5) mindestens bis zu dem Kreise $\mathfrak{k}$ heranreichen, kann sich aber andererseits nicht soweit erstrecken, daß sie den Kreis $\mathfrak{k}$ ganz im Innern enthielte. Folglich ist

Fig. 5.

$$|\xi_1 - \xi| \leqq \sqrt{(x_1' - x')^2 + (y_1' - y')^2},$$

womit die behauptete Stetigkeit bewiesen ist. Hieraus folgt nun, daß die Funktion ξ in dem Bereiche $\mathfrak{B}$ ihre untere Grenze ξ_0 irgendwo wirklich erreicht und daß daher diese untere Grenze von Null verschieden ist. Damit ist wieder der Beweis der Behauptung erbracht. Denn wählt man die positive Konstante h so, daß sie $\leqq \xi_0$ ist, so hat sie die verlangte Eigenschaft.

Ganz ebenso kann man auch für Funktionen jeder beliebigen endlichen Anzahl n von Veränderlichen schließen, indem man an die Stelle der eben benutzten Kreise kugelförmige Bereiche im Gebiet von n Dimensionen treten läßt. Somit gilt ganz allgemein der Satz:

Wenn eine Funktion einer beliebigen endlichen Anzahl von Veränderlichen in einem abgeschlossenen Bereiche stetig ist, so ist sie daselbst auch gleichmäßig stetig.

423. Integrierbarkeit stetiger Funktionen. — Wie schon oben angedeutet, folgt aus dem Lehrsatz 1 der vorigen Nummer die Integrierbarkeit einer jeden stetigen Funktion. Es gilt also der

Lehrsatz: *Wenn eine Funktion einer reellen Veränderlichen in einem abgeschlossenen Intervalle stetig ist, so ist sie auch über dieses Intervall integrierbar.*

Sind nämlich $a < b$ zwei Konstante und ist $f(x)$ eine Funktion, die für $a \leqq x \leqq b$ stetig ist, so ist es nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen positiven Konstanten ε immer möglich, eine zweite positive Konstante h so zu bestimmen, daß

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

wird, sobald die Argumentwerte x, x' beide dem Intervall $(a \cdots b)$ angehören und die Bedingung $|x - x'| < h$ erfüllen. Teilt man sodann das Intervall $(a \cdots b)$ derart ein, daß die Länge eines jeden Teilintervalles kleiner als h ist, so gilt bei Benutzung der in Nr. **420** erklärten Bezeichnungen für je zwei benachbarte Teilpunkte $x_{\lambda-1}$, x_λ die Ungleichung

$$G_\lambda - g_\lambda < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

da ja die Grenzen G_λ und g_λ mit zu den Werten gehören, welche die stetige Funktion $f(x)$ in dem abgeschlossenen Intervall $(x_{\lambda-1} \cdots x_\lambda)$ annimmt. Folglich wird

$$U-E=\sum_{\lambda=1}^{n}(G_\lambda-g_\lambda)(x_\lambda-x_{\lambda-1})$$

$$<\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}(x_\lambda-x_{\lambda-1})=\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{\lambda=1}^{n}(x_\lambda-x_{\lambda-1})$$

$$=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon,$$

so daß die Grenzen E^* und U^* nicht voneinander verschieden sein können.

Selbstverständlich bildet die Stetigkeit nur eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung der Integrierbarkeit. Denn eine Funktion kann über ein abgeschlossenes Intervall auch dann integrierbar sein, wenn sie daselbst nicht überall stetig ist. Beispielsweise liegt ein solcher Fall, wie man leicht einsieht, immer dann vor, wenn die Funktion in dem betrachteten Intervall zwischen endlichen Grenzen enthalten bleibt und daselbst zwar nicht durchweg stetig ist, aber nur eine endliche Anzahl von Unstetigkeitsstellen hat.

424. Geometrische und physikalische Bedeutungen des Integralbegriffs. — Aus den im vorhergehenden gegebenen Erklärungen der Begriffe Flächeninhalt und Integral folgt ohne weiteres: *Wenn eine Funktion $y=f(x)$ über ein endliches Intervall $\mathfrak{J}$ integrierbar und in diesem Intervall nirgends negativ ist, so kommt demjenigen Bereich, der in einer Ebene mit einem System rechtwinkeliger Koordinaten* (Fig. 6) *einerseits zwischen der Abszissenachse und dem geometrischen Bilde der Funktion $f(x)$ und andererseits zwischen den beiden Parallelen zur Ordinatenachse enthalten ist, die durch die Endpunkte des dem Intervall $\mathfrak{J}$ entsprechenden Stückes der Abszissenachse gehen, ein Flächeninhalt J zu, und dieser wird, wenn a die untere und b die obere Grenze des Intervalles $\mathfrak{J}$ bedeutet, durch die Gleichung*

$$J=\int_a^b y\,dx=\int_a^b f(x)\,dx \tag{1120}$$

gegeben.

Ist die Funktion $f(x)$ in dem Intervall $\mathfrak{J}$ nirgends positiv, so hat der in der angegebenen Weise abgegrenzte Bereich auch noch einen bestimmten Inhalt, doch liefert das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ diesen

Inhalt mit dem negativen Vorzeichen, und wenn die Funktion $f(x)$ in $\mathfrak{J}$ so beschaffen ist (Fig. 7), daß der eben erwähnte Bereich aus einer endlichen Anzahl teils oberhalb, teils unterhalb der Abszissenachse liegender Stücke besteht, so stellt das Integral $\int_a^b f(x)dx$ die algebraische Summe der Inhalte dieser Stücke dar, wobei die In-

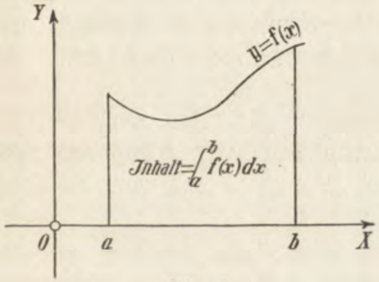


Fig. 6.

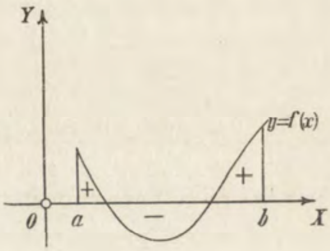


Fig. 7.

halte der oberhalb liegenden Stücke mit dem Vorzeichen $+$ und die der unterhalb liegenden mit dem Vorzeichen $-$ in Anschlag zu bringen sind. Zum Beweise dieser letzteren Behauptung gelangt man leicht, wenn man den Satz 5 der Nr. **425** zu Hilfe nimmt.

Infolge der Integrierbarkeit aller stetigen Funktionen gelten die vorstehenden Sätze über das Vorhandensein eines Flächeninhalts und seine Darstellung durch ein Integral insbesondere jedesmal dann, wenn die Funktion $f(x)$ in dem Intervall $\mathfrak{J}$ stetig ist.

Aus der Erklärung des Begriffs eines bestimmten Integrales ergibt sich ferner der folgende für manche Zwecke wichtige geometrische

Lehrsatz: *Wenn eine für ein endliches Intervall gegebene Funktion $f(x)$ über dieses Intervall integrierbar ist, so kann man ihr geometrisches Bild in einem System rechtwinkeliger ebener Koordinaten stets in einen geradlinig begrenzten Bereich von beliebig kleinem Flächeninhalt einschließen.*

Denn der Unterschied $(U-E)$ der in Nr. **420** durch die Gleichungen (1115) und (1116) erklärten Summen E und U, der infolge der Integrierbarkeit der Funktion $f(x)$ beliebig klein gemacht werden kann, läßt sich immer geometrisch als Inhalt eines aus endlich vielen Rechtecksflächen zusammengesetzten, also geradlinig begrenzten Bereiches deuten, der das geometrische Bild der Funktion $f(x)$ enthält. Indem man den oberen Teil der Begrenzung eines passend gewählten derartigen Bereiches um eine hinreichend kleine Strecke hinauf, den unteren Teil dagegen um eine ebensolche Strecke hinabrückt und zugleich links und rechts zwei hinreichend kleine Rechtecke ansetzt, kann man auch einen geradlinig begrenzten Bereich von vorgeschriebener Kleinheit des Inhaltes herstellen, der das gegebene geometrische Bild ganz im Innern enthält.

Insbesondere ist nach dem vorangehenden das geometrische Bild einer für ein abgeschlossenes Intervall gegebenen und daselbst stetigen Funktion immer in ein Vieleck von beliebig kleinem Inhalt einschließbar.

Im nachfolgenden werden sich auch Fälle ergeben, wo ein bestimmtes Integral eine geometrische Bedeutung hat, die von der bisher festgestellten abweicht, und ebenso auch zahlreiche Fälle, wo einem bestimmten Integral eine physikalische Bedeutung zukommt. Um wenigstens ein Beispiel dieser letzteren Art schon hier anzuführen, sei erwähnt, daß die Energiemenge, welche der Dampf in einer Kolbenmaschine während eines Kolbenhubes auf den Kolben überträgt, durch ein bestimmtes Integral ihren Ausdruck findet. Ist nämlich q der in Quadratmetern ausgedrückte Querschnitt des Kolbens, h die Gesamthöhe eines Hubes in Metern und $p(x)$ in Kilogrammgewichten pro Quadratmeter der Druck des Dampfes für diejenige Kolbenstellung, bei welcher der Kolben von seiner anfänglichen Totpunktlage den Abstand x Meter hat, so ist die erwähnte Energiemenge in Meterkilogrammen gleich

$$\int_0^h qp(x)\,dx\,.$$

Denn denkt man sich den Kolbenweg in Teile zerlegt, so ist die Gesamtarbeit des Dampfes immer gleich der Summe der Arbeiten, welche den einzelnen Teilen entsprechen. Bliebe nun, wenn der vom Kolben seit dem Verlassen seiner Anfangslage zurückgelegte Weg x den Zuwachs dx erfährt, der Druck dauernd gleich $p(x)$, so wäre die diesem Zuwachs entsprechende Arbeit des Dampfes gleich $qp(x)dx$. Tatsächlich hat sie wegen der Veränderlichkeit des Druckes zwar einen etwas anderen Wert, aber der Unterschied fällt um so weniger ins Gewicht, je kleiner dx ist, und sein Einfluß verschwindet vollständig, wenn man zur Grenze für den Fall einer unendlich feinen Teilung des Kolbenweges übergeht.

425. Einfachste Sätze über bestimmte Integrale. — Aus den Erklärungen der Nr. **420** und den Lehrsätzen der Nr. **421** ergeben sich ohne weiteres die folgenden Sätze:

1. — *Wenn eine Funktion $f(x)$ in einem endlichen Intervall $(a \cdots b)$ konstant ist, so ist sie auch über dieses Intervall integrierbar, und zwar ist, wenn C den konstanten Wert der Funktion $f(x)$ bezeichnet,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b C\,dx = C(b-a). \tag{1121}$$

2. — *Wenn zwei Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ über ein und dasselbe endliche Intervall $(a \cdots b)$ integrierbar sind und daselbst überall die Ungleichung*

$$f_1(x) \leqq f_2(x)$$

erfüllen, so ist, falls $a < b$ ist, auch

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \leqq \int_a^b f_2(x)\,dx. \tag{1122}$$

Denn bildet man für die Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ die beiden Summen S_1, S_2, welche der durch die Gleichung (1119) erklärten Summe S entsprechen, und zwar beide für die nämliche Teilung und die nämliche Auswahl der Zwischenwerte, so ist immer $S_1 \leqq S_2$. Also kann auch der Grenzwert von S_1 nicht größer sein als der von S_2.

Für $a > b$ ist natürlich, wie sich durch ähnliche Überlegungen ergibt,

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \geqq \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

3. — *Wenn eine Funktion $f(x)$ über ein endliches Intervall $(a \cdots b)$ integrierbar ist, so ist das Produkt der Funktion $f(x)$ mit einer beliebigen Konstanten C über das Intervall $(a \cdots b)$ ebenfalls integrierbar, und es besteht die Gleichung*

$$\int_a^b C f(x)\,dx = C \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1123}$$

4. — *Wenn zwei Funktionen $f(x)$, $g(x)$ über ein endliches Intervall $(a \cdots b)$ integrierbar sind, so ist ihre Summe über das nämliche Intervall ebenfalls integrierbar, und es ist*

$$(1124) \quad \int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Unter den gleichen Voraussetzungen gilt natürlich, wenn c_1 und c_2 Konstante bedeuten, auch die Gleichung

$$(1125) \quad \int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\,dx = c_1 \int_a^b f(x)\,dx + c_2 \int_a^b g(x)\,dx.$$

5. — *Wenn eine Funktion $f(x)$ über zwei aneinander stoßende abgeschlossene Intervalle $(a \cdots b)$ und $(b \cdots c)$ integrierbar ist, so ist immer*

$$(1126) \quad \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Liegt nämlich b zwischen a und c, so kann man festsetzen, daß bei der Bildung derjenigen Summe S (Gl. 1119), als deren Grenzwert das Integral $\int_a^c f(x)\,dx$ nach Nr. 421 erscheint, stets der Punkt b als Teilpunkt genommen werden soll. Dann zerfällt die Summe S von selbst in zwei Teilsummen, von denen die eine das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ und die andere das Integral $\int_b^c f(x)\,dx$ als Grenzwert hat.

Liegt zweitens c zwischen a und b, so erhält man zunächst

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

und hieraus

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Liegt endlich a zwischen b und c, so gelangt man in ähnlicher Weise durch Umformung der Gleichung

$$\int_b^c f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx$$

zum Ziel.

Anwendung: Wie man mit Hilfe der Sätze **1**, **3** und **4** dieser Nummer zeigen kann, gilt der folgende

Lehrsatz: *Wenn zwei Funktionen $f(x)$, $\varphi(x)$ über ein endliches Intervall integrierbar sind, so ist ihr Produkt über das nämliche Intervall ebenfalls integrierbar.*

Zum Beweis sei a die untere und b die obere Grenze des betrachteten Intervalles, und seien $x_0, x_1, \cdots x_n$ Zahlen von der gleichen Bedeutung wie in Nr. **420**. Ferner werde zunächst vorausgesetzt, daß die Funktionen $f(x)$, $\varphi(x)$ in dem Intervall $(a \cdots b)$ nie negativ seien. Dann ist für $\lambda = 1, 2, \cdots n$, wenn P_λ, Q_λ, R_λ die oberen und p_λ, q_λ, r_λ die unteren Grenzen der Funktionen $f(x)$, $\varphi(x)$ und des Produktes $f(x)\varphi(x)$ für die nicht außerhalb der Grenzen $x_{\lambda-1}$ und x_λ liegenden Werte von x bedeuten,

$$p_\lambda q_\lambda \leqq r_\lambda \leqq R_\lambda \leqq P_\lambda Q_\lambda,$$

also

$$0 \leqq R_\lambda - r_\lambda \leqq P_\lambda Q_\lambda - p_\lambda q_\lambda = P_\lambda(Q_\lambda - q_\lambda) + q_\lambda(P_\lambda - p_\lambda).$$

Folglich ist, wenn P und Q die oberen Grenzen der Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ für das ganze Intervall $(a \cdots b)$ bezeichnen, erst recht

$$0 \leqq R_\lambda - r_\lambda \leqq P(Q_\lambda - q_\lambda) + Q(P_\lambda - p_\lambda),$$

also auch

$$0 \leqq \sum_{\lambda=1}^{n} (R_\lambda - r\ )(x_\lambda - x_{\lambda-1}) \leqq P \sum_{\lambda=1}^{n} (Q_\lambda - q\ )(x_\lambda - x_{\lambda-1})$$
$$+ Q \sum_{\lambda=1}^{n} (P_\lambda - p_\lambda)(x_\lambda - x_{\lambda-1}).$$

Nun kann man aber die beiden Teile der rechten Seite dieser Ungleichung infolge der Integrierbarkeit der Funktionen $f(x)$, $\varphi(x)$ durch passende Wahl der Teilung des Intervalles $(a \cdots b)$ dem Wert 0 beliebig nahe bringen. Also kann man auch die Summe $\sum_{\lambda=1}^{n} (R_\lambda - r_\lambda)(x_\lambda - x_{\lambda-1})$ dem Wert 0 so weit nähern, als man will.

Das heißt aber nichts anderes, als daß auch das Produkt $f(x)\varphi(x)$ über das Intervall $(a \cdots b)$ integrierbar ist.

Ist endlich die zunächst gemachte Annahme, daß die Funktionen $f(x)$, $\varphi(x)$ in dem Intervall $(a \cdots b)$ nie negativ seien, nicht mehr erfüllt, so kann man stets zwei positive Konstante c, γ so bestimmen, daß die Summen

$$c + f(x) \qquad \text{und} \qquad \gamma + \varphi(x)$$

in dem Intervall $(a \cdots b)$ nie negativ werden. Dann ist aber das Produkt

$$[c + f(x)][\gamma + \varphi(x)] = c\gamma + c\varphi(x) + \gamma f(x) + f(x)\varphi(x)$$

integrierbar, und da die drei ersten Bestandteile desselben integrierbar sind (Satz 1 und 3), muß nach Satz 4 auch der letzte Bestandteil $f(x)\varphi(x)$ integrierbar sein.

426. Erster Mittelwertsatz der Integralrechnung. — *Wenn eine Funktion $f(x)$ über ein endliches Intervall $(a \cdots b)$ integrierbar ist und g die untere und G die obere Grenze der Funktion $f(x)$ für das Intervall $(a \cdots b)$ bedeutet, so liegt das Integral $\int_a^b f(x)dx$ niemals außerhalb der Grenzen $(b-a)g$ und $(b-a)G$. Man darf daher immer*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)M \tag{1127}$$

setzen, wo M eine nicht außerhalb der Grenzen g und G liegende Zahl bedeutet, und wenn die Funktion $f(x)$ in dem Intervall $(a \cdots b)$ stetig ist, so darf man auch

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f[a + \vartheta(b-a)] \tag{1127a}$$

setzen, wo ϑ eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl bezeichnet.

Da nämlich in dem Intervall $(a \cdots b)$ überall die Ungleichung

$$g \leqq f(x) \leqq G$$

besteht, so ist für $a < b$

$$\int_a^b g\,dx \leqq \int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b G\,dx$$

oder

$$(b-a)g \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq (b-a)G,$$

während für $a > b$ diejenigen Ungleichungen gelten, die sich aus den vorstehenden durch Vertauschung des Zeichens $<$ mit dem Zeichen $>$ ergeben.

Ist ferner die Funktion $f(x)$ in dem Intervall $(a \cdots b)$ stetig, so gibt es wenigstens eine zwischen 0 und 1 enthaltene Zahl ϑ, für welche der Funktionswert $f[a+\vartheta(b-a)]$ mit dem Mittelwert M übereinstimmt. Denn ist $g=G$, so ist die Funktion $f(x)$ in dem Intervall $(a \cdots b)$ konstant, und dann darf für ϑ jede beliebige zwischen 0 und 1 liegende Zahl genommen werden. Ist dagegen $g<G$, so kann M, wie leicht einzusehen, mit keiner der Grenzen g und G zusammenfallen, liegt vielmehr zwischen ihnen, und es gibt dann in dem Intervall $(a \cdots b)$ sowohl eine Stelle, wo $f(x)<M$, als auch eine Stelle, wo $f(x)>M$ ist, und zwischen diesen Stellen, also im Innern des Intervalles $(a \cdots b)$ wenigstens eine Stelle, an welcher $f(x)$ den Wert M erwirbt.

Ist eine für ein endliches Intervall $(a \cdots b)$ erklärte Funktion $f(x)$ über dieses Intervall integrierbar, so bezeichnet man diejenige Zahl M, welche die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)M$$

erfüllt, als **den mittleren Wert der Funktion $f(x)$** für das Intervall $(a \cdots b)$. In diesen Sinne sind z. B. die Ausdrücke „Mittlerer Barometerstand während eines Monats“, „Mittlerer Wasserstand an einem Pegel während eines bestimmten Jahres“, „Mittlerer Dampfdruck während eines Kolbenhubes“, „Mittlere Belastung einer elektrischen Zentrale während eines bestimmten Tages“ usw. zu verstehen.

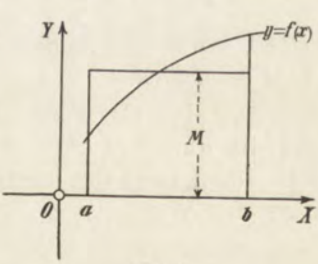


Fig. 8.

Geometrisch bedeutet (Fig. 8) der durch die Gleichung

$$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{1128}$$

erklärte Mittelwert M einer über ein endliches Intervall $(a \cdots b)$ integrierbaren Funktion $f(x)$ die Höhe desjenigen Rechtecks, welches dieselbe Grundlinie und denselben Flächeninhalt hat wie derjenige Bereich in der Ebene eines rechtwinkeligen ebenen Koordinatensystems, der zwischen der Abszissenachse und dem geometrischen Bilde der Funktion $f(x)$ und zwischen den zu den Abszissen a und b gehörenden Parallelen zur Ordinatenachse enthalten ist. Dabei sind Inhalte und Höhen unterhalb der Abszissenachse liegender Bereiche mit dem negativen Vorzeichen in Anschlag zu bringen.

Wie die Gleichung (1128) zeigt, beruht der scheinbar ganz volkstümliche Begriff des mittleren Wertes einer Funktion für ein gegebenes Intervall in Wahrheit durchaus auf dem als ganz entlegen und rein wissenschaftlich geltenden Begriff eines bestimmten Integrales.

427. Erweiterung des ersten Mittelwertsatzes. — *Es seien $f(x)$ und $\varphi(x)$ Funktionen, die in einem endlichen Intervall $(a \cdots b)$ beschränkt sind, und es sei sowohl die Funktion $\varphi(x)$ als das Produkt $f(x)\varphi(x)$ über dieses Intervall integrierbar. Wenn dann die Funktion $\varphi(x)$ in dem Intervall $(a \cdots b)$ nur Werte ein und desselben Vorzeichens annimmt, wobei jedoch der Wert 0 nicht ausgeschlossen zu werden braucht, so ist*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = M\int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{1129}$$

wo M einen Mittelwert bedeutet, der nicht kleiner ist als die untere Grenze g und nicht größer als die obere Grenze G der Funktion $f(x)$ für das Intervall $(a \cdots b)$. Ist $f(x)$ in diesem Intervall stetig, so darf man auch

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f[a+\vartheta(b-a)]\int_a^b \varphi(x)\,dx \tag{1129a}$$

setzen, wo ϑ eine nicht näher bekannte zwischen 0 und 1 liegende Zahl bezeichnet.

Beweis: Es werde zunächst vorausgesetzt, daß $a < b$ und daß die Funktion $\varphi(x)$ in dem Intervall $(a \cdots b)$ niemals negativ sei. Dann folgt für jeden nicht außerhalb des Intervalles $(a \cdots b)$ liegenden Wert von x aus der Ungleichung

$$g \leqq f(x) \leqq G$$

durch Multiplikation mit $\varphi(x)$ die Ungleichung

$$g\varphi(x) \leqq f(x)\varphi(x) \leqq G\varphi(x),$$

und es ist daher auch

$$g\int_a^b \varphi(x)dx \leqq \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \leqq G\int_a^b \varphi(x)dx.$$

Sind die Voraussetzungen $a < b$ und $0 \leqq \varphi(x)$ nicht mehr erfüllt, so kann man ganz ähnlich schließen und gelangt dann entweder ebenfalls zu der zuletzt erhaltenen Ungleichung oder zu derjenigen Ungleichung, die aus ihr durch Vertauschung des Zeichens $<$ mit dem Zeichen $>$ hervorgeht. Daraus folgt aber sofort, daß man in der Tat

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = M\int_a^b \varphi(x)\,dx \tag{1129}$$

setzen darf, wo M nicht außerhalb der Grenzen g und G liegt.

428. Der zweite Mittelwertsatz. — Den in Nr. 425 bis 427 zusammengestellten Sätzen möge der Vollständigkeit wegen noch ein weiterer Satz angereiht werden, der zwar zum Aufbau der Integralrechnung nicht unbedingt erforderlich ist, aber doch bei der Behandlung von Nebenfragen zuweilen gute Dienste leistet. Dieser gewöhnlich als zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung bezeichnete Satz lautet in seiner einfachsten Form folgendermaßen:

Es sei $f(x)$ eine Funktion, welche über ein abgeschlossenes Intervall, dessen untere Grenze a und dessen obere Grenze b heißen möge, integrierbar ist, und $\varphi(x)$ eine zweite für das Intervall $(a \cdots b)$ erklärte Funktion, die daselbst beschränkt und nie negativ ist. Wenn dann die Funktion $\varphi(x)$ in dem Intervall $(a \cdots b)$ bei wachsendem x nie zunimmt, so gibt es immer wenigstens eine nicht außerhalb der Grenzen a und b liegende Zahl ξ_1, welche die Gleichung

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^{\xi_1} f(x)\,dx} \tag{1130}$$

erfüllt, und ebenso gibt es, wenn die Funktion $\varphi(x)$ bei wachsendem x nie abnimmt, wenigstens eine nicht außerhalb der Grenzen a und b liegende Zahl ξ_2, welche die Gleichung

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(b)\int_{\xi_2}^b f(x)\,dx} \tag{1131}$$

befriedigt.

Eine andere aus der vorigen ableitbare Form des zweiten Mittelwertsatzes ist etwas weitläufiger, erfordert aber dafür nur ein geringeres Maß von Voraussetzungen, indem die Beschränkungen, daß $a<b$ sei und daß eine der beiden in Betracht zu ziehenden Funktionen niemals negativ werde, wegfallen. Diese andere Form lautet:

Ist $f(x)$ eine Funktion, die über ein abgeschlossenes Intervall $(a\cdots b)$ integrierbar ist, und ist $\varphi(x)$ eine zweite für das Intervall $(a\cdots b)$ erklärte Funktion, welche daselbst bei wachsendem x entweder nie abnimmt oder nie zunimmt, so gibt es wenigstens eine nicht außerhalb der Grenzen a und b liegende Zahl ξ_3, welche die Gleichung

$$(1132)\qquad \int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a)\int_a^{\xi_3} f(x)dx + \varphi(b)\int_{\xi_3}^b f(x)dx$$

befriedigt.

Beweis: Durch die letzten Lehrsätze der Nummern **420** und **425** ist die Integrierbarkeit des Produktes $f(x)\varphi(x)$ für das Intervall $(a\cdots b)$ sowohl bei denjenigen Voraussetzungen gewährleistet, die der einen, als auch bei denjenigen, die der anderen Form des zweiten Mittelwertsatzes zugrunde liegen.

Nachdem dies festgestellt, werde nun zunächst vorausgesetzt, daß $a<b$ und daß die Funktion $\varphi(x)$ in dem abgeschlossenen Intervall $(a\cdots b)$ nie negativ sei und mit wachsendem x nie zunehme. Versteht man dann unter $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ irgend welche Zahlen, die der Ungleichung

$$a<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<b$$

genügen, und setzt man zugleich

$$a=x_0 \qquad \text{und} \qquad b=x_n,$$

so kann man das Integral $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$ als den Grenzwert der Summe

$$S_1=\sum_{\lambda=1}^{n} f(x_{\lambda-1})\,\varphi(x_{\lambda-1})\,(x_\lambda - x_{\lambda-1})$$

ansehen für den Fall, daß die durch die Einschaltung der Zahlen $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ erzeugte Teilung des Intervalles $(a\cdots b)$ unbegrenzt verfeinert wird.

Dasselbe Integral läßt sich aber auch als Grenzwert der Summe

$$S_2 = \sum_{\lambda=1}^{n} \varphi(x_{\lambda-1}) \int_{x_{\lambda-1}}^{x_\lambda} f(x)\,dx$$

auffassen, weil die Differenz

$$S_2 - S_1 = \sum_{\lambda=1}^{n} \varphi(x_{\lambda-1}) \left[\int_{x_{\lambda-1}}^{x_\lambda} f(x)\,dx - f(x_{\lambda-1})(x_\lambda - x_{\lambda-1}) \right]$$

bei unbegrenzter Verfeinerung der Teilung unendlich klein wird. Ist nämlich g_λ die untere und G_λ die obere Grenze der Funktion $f(x)$ für die nicht außerhalb der Grenzen $x_{\lambda-1}$, x_λ liegenden Werte von x, so liegt weder das Integral $\int_{x_{\lambda-1}}^{x_\lambda} f(x)\,dx$ noch das Produkt $f(x_{\lambda-1})(x_\lambda - x_{\lambda-1})$ außerhalb der Grenzen

$$g_\lambda(x_\lambda - x_{\lambda-1}) \qquad \text{und} \qquad G_\lambda(x_\lambda - x_{\lambda-1}),$$

und es ist daher

$$\left| \int_{x_{\lambda-1}}^{x_\lambda} f(x)\,dx - f(x_{\lambda-1})(x_\lambda - x_{\lambda-1}) \right| \leqq (G_\lambda - g_\lambda)(x_\lambda - x_{\lambda-1}).$$

Folglich ist auch

$$\begin{aligned} |S_2 - S_1| &\leqq \sum_{\lambda=1}^{n} \varphi(x_{\lambda-1})(G_\lambda - g_\lambda)(x_\lambda - x_{\lambda-1}) \\ &\leqq \varphi(a) \sum_{\lambda=1}^{n} (G_\lambda - g_\lambda)(x_\lambda - x_{\lambda-1}). \end{aligned}$$

Nun ist aber die Funktion $f(x)$ über das Intervall $(a \cdots b)$ integrierbar. Also kann die Summe $\sum_{\lambda=1}^{n} (G_\lambda - g_\lambda)(x_\lambda - x_{\lambda-1})$ und mit ihr auch die Differenz $(S_2 - S_1)$ durch Annahme einer hinreichend feinen Teilung dem Wert 0 beliebig nahe gebracht werden.

Der Summe S_2 kann man nun mit Hilfe eines Kunstgriffes, den man als Kunstgriff der teilweisen Summation zu bezeichnen pflegt, eine andere Form geben, bei der eine Abschätzung möglich ist. Man hat nämlich zunächst

$$S_2 = \varphi(x_0)\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \varphi(x_1)\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \varphi(x_2)\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx + \cdots$$
$$+ \varphi(x_{n-1})\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$
$$= \varphi(x_0)\int_a^{x_1} f(x)\,dx + \varphi(x_1)\left[\int_a^{x_2} f(x)\,dx - \int_a^{x_1} f(x)\,dx\right]$$
$$+ \varphi(x_2)\left[\int_a^{x_3} f(x)\,dx - \int_a^{x_2} f(x)\,dx\right] + \cdots$$
$$+ \varphi(x_{n-1})\left[\int_a^{x_n} f(x)\,dx - \int_a^{x_{n-1}} f(x)\,dx\right],$$

und wenn man nun die Klammern auflöst und dann jeweils diejenigen Glieder vereinigt, welche das nämliche Integral enthalten, so erhält man

$$S_2 = [\varphi(x_0) - \varphi(x_1)]\int_a^{x_1} f(x)\,dx + [\varphi(x_1) - \varphi(x_2)]\int_a^{x_2} f(x)\,dx + \cdots$$
$$+ [\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_n)]\int_a^{x_n} f(x)\,dx + \varphi(x_n)\int_a^{x_n} f(x)\,dx.$$

Jetzt sei ξ eine der Ungleichung

$$a \leqq \xi \leqq b$$

unterworfene, aber sonst nicht weiter beschränkte Veränderliche und m der kleinste und M der größte Wert der stetigen (vgl. Nr. **429**) Funktion $\int_a^{\xi} f(x)\,dx$ von ξ. Dann liegt die Summe S_2, da keiner der Faktoren $[\varphi(x_0) - \varphi(x_1)]$, $[\varphi(x_1) - \varphi(x_2)]$, $\cdots$ $[\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_n)]$, $\varphi(x_n)$ negativ ist, nicht außerhalb der Grenzen

$$m\,\{[\varphi(x_0) - \varphi(x_1)] + [\varphi(x_1) - \varphi(x_2)] + \cdots$$
$$+ [\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_n)] + \varphi(x_n)\} = m\,\varphi(a)$$

und

$$M\,\{[\varphi(x_0) - \varphi(x_1)] + [\varphi(x_1) - \varphi(x_2)] + \cdots$$
$$+ [\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_n)] + \varphi(x_n)\} = M\,\varphi(a).$$

Also ist auch

$$m\varphi(a) \leqq \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \leqq M\varphi(a),$$

und es gibt daher wenigstens eine nicht außerhalb der Grenzen a und b liegende Zahl ξ_1, welche die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^{\xi_1} f(x)\,dx \tag{1130}$$

erfüllt, wie behauptet wurde.

Zweitens werde vorausgesetzt, daß $a < b$ und $\varphi(x)$ in dem Intervall $(a \cdots b)$ nie negativ sei, aber bei wachsendem x niemals abnehme. Dann ist $-b < -a$ und $\varphi(-x)$ eine in dem Intervall $(-b \cdots -a)$ nie negative und bei wachsendem x nie zunehmende Funktion. Zugleich ist

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_{-a}^{-b} f(-x)\,\varphi(-x)\,dx.$$

Denn zu jeder Teilung des Intervalles $(a \cdots b)$ gehört eine entsprechende durch Spiegelung am Nullpunkt entstehende Teilung des Intervalles $(-a \cdots -b)$, und dabei sind je zwei einander entsprechende Teilintervalle gleich lang, aber von entgegengesetzter Richtung, und das Produkt $f(-x)\varphi(-x)$ durchläuft in jedem Teil des Intervalles $(-a \cdots -b)$ genau dieselben Werte wie das Produkt $f(x)\,\varphi(x)$ in dem entsprechenden Teil von $(a \cdots b)$.

Vertauscht man nun auf der rechten Seite der letzten Gleichung die beiden Integrationsgrenzen, so erhält man zunächst

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\varphi(-x)\,dx$$

und dann nach dem zuvor Bewiesenen

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(b)\int_{-b}^{-\xi_2} f(-x)\,dx,$$

wo ξ_2 eine nicht außerhalb der Grenzen a und b liegende Zahl bedeutet. Aus ähnlichen Gründen wie zuvor ist aber

$$\int_{-b}^{-\xi_2} f(-x)\,dx = -\int_b^{\xi_2} f(x)\,dx = \int_{\xi_2}^b f(x)\,dx,$$

so daß sich schließlich die Gleichung (1131) ergibt.

Wird endlich drittens von der Funktion $\varphi(x)$ nur noch vorausgesetzt, daß sie bei wachsendem x entweder nie zu- oder nie abnimmt, so ist für den Fall, daß $a<b$ ist und $\varphi(x)$ nie zunimmt, die Differenz $[\varphi(x)-\varphi(b)]$ eine nie zunehmende und nie negative Funktion, also

$$\int_a^b f(x)[\varphi(x)-\varphi(b)]\,dx=[\varphi(a)-\varphi(b)]\int_a^{\xi_3} f(x)\,dx,$$

wo $a\leqq\xi_3\leqq b$ ist. Hieraus folgt aber durch naheliegende Umformungen

$$(1132)\qquad \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(a)\int_a^{\xi_3} f(x)\,dx+\varphi(b)\int_{\xi_3}^b f(x)\,dx.$$

Ähnlich ist für $a<b$, falls $\varphi(x)$ nie abnimmt,

$$\int_a^b f(x)[\varphi(b)-\varphi(x)]\,dx=[\varphi(b)-\varphi(a)]\int_a^{\xi_3} f(x)\,dx,$$

woraus wieder die Gleichung (1132) folgt.

Nunmehr kann man sich von der bisher festgehaltenen Annahme, daß $a<b$ sei, leicht befreien. Denn im entgegengesetzten Fall besteht die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\varphi(x)\,dx=-\varphi(b)\int_b^{\xi_3} f(x)\,dx-\varphi(a)\int_{\xi_3}^a f(x)dx,$$

die sofort in die Gleichung (1132) verwandelt werden kann.

429. Differentiation eines bestimmten Integrales in bezug auf eine seiner Grenzen. — Es sei $f(x)$ eine Funktion, die über ein endliches Intervall $(a\cdots b)$ integrierbar ist, und es sei ξ eine Veränderliche, die auf das Intervall $(a\cdots b)$ eingeschränkt, aber dort ebenso wie x frei veränderlich ist. Dann gehört zu jedem zulässigen Wert von ξ ein bestimmter Wert des über das Teilintervall $(a\cdots\xi)$ erstreckten Integrales

$$\int_a^\xi f(x)\,dx.$$

Dieses Integral ist daher eine Funktion von ξ, und zwar eine durchweg stetige Funktion. Denn erteilt man der Veränderlichen ξ einen Zuwachs h von solcher Beschaffenheit, daß die Summe $\xi + h$ auch noch dem Intervall $(a \cdots b)$ angehört, so erfährt das Integral den Zuwachs $\int_{\xi}^{\xi+h} f(x)\,dx$, und dieser wird nach Nr. **426** bei verschwindendem h ebenfalls unendlich klein.

Setzt man ferner voraus, daß die Funktion $f(x)$ in dem Intervall $(a \cdots b)$ stetig sei, so findet sich, daß die durch das Integral $\int_a^{\xi} f(x)\,dx$ dargestellte Funktion von ξ in dem Intervall $(a \cdots b)$ nicht nur stetig, sondern auch differenzierbar ist und daß die Ableitung dieser Funktion mit dem Wert $f(\xi)$ übereinstimmt, den die unter dem Integralzeichen stehende Funktion $f(x)$ annimmt, wenn man für ihr Argument x die obere Integrationsgrenze ξ einsetzt. Es gilt also der folgende wichtige

Lehrsatz: *Wenn eine Funktion $f(x)$ in einem endlichen Intervall $(a \cdots b)$ stetig ist und unter ξ eine auf das Intervall $(a \cdots b)$ eingeschränkte, aber dort frei bewegliche Veränderliche verstanden wird, so ist das Integral $\int_a^{\xi} f(x)\,dx$ eine in dem Intervall $(a \cdots b)$ differenzierbare Funktion seiner oberen Grenze ξ, und die Ableitung dieser Funktion wird durch die Gleichung*

$$\frac{d}{d\xi}\int_a^{\xi} f(x)\,dx = f(\xi) \tag{1133}$$

gegeben.

Ist nämlich $(\xi + h)$ irgend eine von ξ verschiedene, aber ebenfalls dem Intervall $(a \cdots b)$ angehörende Zahl, so ist nach dem ersten Mittelwertsatz (Nr. **426**)

$$\frac{1}{h}\left\{\int_a^{\xi+h} f(x)\,dx - \int_a^{\xi} f(x)\,dx\right\} = \frac{1}{h}\int_{\xi}^{\xi+h} f(x)\,dx = f(\xi + \vartheta h),$$

wo ϑ eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl bedeutet. Daraus folgt aber wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Funktion $f(x)$ sofort, daß der links stehende Differenzenquotient bei verschwindendem h dem Grenzwert $f(\xi)$ zustrebt.

Zusatz 1. — *Bei den gemachten Annahmen stellt auch das Integral*

$$\int_{\xi}^{b} f(x)\,dx$$

eine differenzierbare Funktion der Veränderlichen ξ dar, und die Ableitung dieser Funktion wird durch die Gleichung

$$\frac{d}{d\xi}\int_{\xi}^{b} f(x)\,dx = -f(\xi) \tag{1134}$$

gegeben.

Der Beweis läßt sich ähnlich wie oben, oder auch dadurch erbringen, daß man von der Gleichung $\int_{\xi}^{b} f(x)\,dx = -\int_{b}^{\xi} f(x)\,dx$ Gebrauch macht.

Zusatz 2. — *Jede reellwertige Funktion $f(x)$ eines reellen Argumentes x, die in einem Intervall $\mathfrak{J}$ stetig ist, kann daselbst als Ableitung einer zweiten Funktion von x angesehen werden.*

Denn ist a irgend eine feste dem Intervall $\mathfrak{J}$ angehörende Zahl, und ist zugleich x auf das Intervall $\mathfrak{J}$ eingeschränkt, so stellt das Integral

$$\int_{a}^{x} f(t)\,dt$$

eine differenzierbare Funktion von x dar, deren Ableitung mit $f(x)$ übereinstimmt.

430. Begriff eines unbestimmten Integrales. — Erklärung: *Ist x eine reelle Veränderliche, deren Wertbereich aus einem einzigen Intervall besteht, und $f(x)$ eine Funktion, die als Ableitung einer zweiten Funktion angesehen werden kann, so nennt man jede Funktion von x, deren Ableitung mit $f(x)$ übereinstimmt, ein* **unbestimmtes Integral** *der Funktion $f(x)$.*

Beispielweise ist, wenn x eine völlig freie Veränderliche bedeutet, die Funktion $\sin x$ ein unbestimmtes Integral der Funktion $\cos x$, weil $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$ ist. Ähnlich ist, wenn x eine positive, aber sonst nicht weiter beschränkte Veränderliche bezeichnet, die Funktion $\lg x$ ein unbestimmtes Integral der durch den Ausdruck $\frac{1}{x}$ dargestellten Funktion, weil $\frac{d\lg x}{dx} = \frac{1}{x}$ ist.

Ist eine Funktion $F(x)$ ein unbestimmtes Integral einer für ein Intervall gegebenen Funktion $f(x)$ und ist C eine beliebige Konstante, so ist die Summe

$$F(x) + C$$

wieder ein unbestimmtes Integral der Funktion $f(x)$, weil sie ebenfalls die Funktion $f(x)$ als Ableitung hat. Die Funktion $F(x)$ ist also durch die Eigenschaft, daß ihre Ableitung gleich $f(x)$ ist, noch nicht vollständig bestimmt. Eben hierauf wird dadurch hingewiesen, daß man sie als ein unbestimmtes Integral der Funktion $f(x)$ bezeichnet. Aber in der Möglichkeit der Vermehrung um eine beliebige Konstante besteht auch die einzige Unbestimmtheit, mit der eine Funktion noch behaftet ist, wenn sie ein unbestimmtes Integral einer gegebenen Funktion sein soll, denn:

Sind zwei Funktionen $F(x)$ und $\Phi(x)$ unbestimmte Integrale ein und derselben für ein Intervall erklärten Funktion $f(x)$, so ist die Differenz $[\Phi(x) - F(x)]$ in diesem Intervall konstant.

Der Beweis hierfür wurde bereits in Nr. **250** erbracht.

Wenn eine für ein Intervall erklärte Funktion $f(x)$ als Ableitung einer zweiten Funktion angesehen werden, also überhaupt von einem unbestimmten Integral der Funktion $f(x)$ die Rede sein kann, so stellt man ein solches sehr oft durch das Zeichen

$$\int f(x)\,dx$$

dar, wobei an das Integralzeichen keine Grenzen angesetzt werden. Eine Gleichung von der Form

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

ist hiernach jedesmal mit der Gleichung

$$F'(x) = f(x)$$

gleichbedeutend.

Die Aufgabe, ein unbestimmtes Integral einer für ein Intervall gegebenen Funktion zu finden, bildet die Umkehrung der in der Differentialrechnung gelösten Aufgabe, die Ableitung einer differenzierbaren Funktion zu ermitteln, und kann daher in vielen Fällen durch Umgestaltung bekannter Formeln der Differentialrechnung gelöst werden. So folgen z. B., wenn x eine völlig freie Veränderliche bedeutet, aus den Formeln

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x; \qquad \frac{de^x}{dx} = e^x; \qquad \frac{d\sin x}{dx} = \cos x$$

die Gleichungen

$$\int 2x\,dx = x^2; \qquad \int e^x dx = e^x; \qquad \int \cos x\,dx = \sin x.$$

431. Zusammenhang zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral. — Lehrsatz: *Ist $f(x)$ eine in einem abgeschlossenen Intervall $(a \cdots b)$ stetige Funktion und ist $F(x)$ irgend ein unbestimmtes Integral der Funktion $f(x)$, so gilt immer die Gleichung*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{1135}$$

Das bestimmte Integral einer stetigen Funktion ist also gleich der Differenz der speziellen Werte, die das unbestimmte Integral an der oberen und an der unteren Integrationsgrenze annimmt.

Beweis: Bei Beschränkung der Veränderlichen x auf das Intervall $(a \cdots b)$ stellt auch das Zeichen $\int_a^x f(t)dt$ ein unbestimmtes Integral der Funktion $f(x)$ dar. Denn nach Nr. 429 ist die durch dieses Zeichen dargestellte Funktion von x differenzierbar und hat die Ableitung $f(x)$. Folglich ist die Differenz

$$\int_a^x f(t)dt - F(x)$$

eine Konstante. Nun erwirbt aber diese Differenz für $x = a$ den Wert $[-F(a)]$. Daher ist auch für jeden anderen Wert von x

$$\int_a^x f(t)dt - F(x) = -F(a),$$

also insbesondere für $x = b$

$$\int_a^b f(t)dt - F(b) = -F(a)$$

oder, wenn nunmehr die Integrationsveränderliche wieder durch x bezeichnet wird,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

wie behauptet wurde.

Hiermit ist die Aufgabe der zahlenmäßigen Ausrechnung eines bestimmten Integrales in allen den Fällen, wo die unter dem Integralzeichen stehende Funktion im Integrationsintervall stetig ist, auf die Ermittelung eines unbestimmten Integrales dieser Funktion zurückgeführt und dadurch ein überaus wichtiges Hilfsmittel zur Ausrechnung bestimmter Integrale gefunden. Zugleich hat die Aufgabe, ein unbestimmtes Integral einer für ein Intervall gegebenen und daselbst stetigen Funktion zu finden, eine praktische Bedeutung gewonnen.

Für die Differenz der Werte, welche eine für ein abgeschlossenes Intervall $(a \cdots b)$ erklärte Funktion $F(x)$ an den Grenzen dieses Intervalles annimmt, wird oft das durch die Gleichung

(1136) $$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

erklärte Zeichen $[F(x)]_a^b$ gebraucht. Bei Benutzung desselben erhält die Gleichung (1135) die Form

(1135ᵃ) $$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$$

432. Beispiele und Übungsaufgaben. — 1. — Den Inhalt des Flächenstückes zwischen der Abszissenachse eines Systems rechtwinkeliger ebener Koordinaten x, y und einer halben Welle der durch die Gleichung $y = \sin x$ dargestellten Sinuslinie zu finden.

Lösung: Man kann diejenige halbe Welle ins Auge fassen, die sich (Fig. 9) vom Koordinatenanfang bis zu demjenigen Punkte der Abszissenachse erstreckt, der die Abszisse π hat. Dann ergibt sich für den gesuchten Flächeninhalt zunächst der Ausdruck

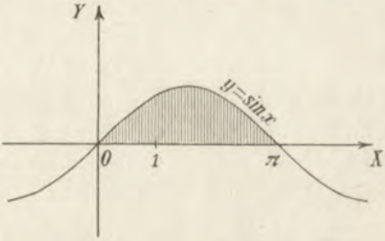


Fig. 9.

$$\int_0^\pi \sin x\,dx.$$

Nun ist aber, wie man leicht erkennt,

$$\int \sin x\,dx = -\cos x,$$

folglich

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2.$$

Der gesuchte Inhalt ist also doppelt so groß wie das Einheitsquadrat.

2. — Den Inhalt desjenigen Bereiches zu finden, welcher (Fig. 10) von der Abszissenachse eines Systems rechtwinkeliger Koordinaten x, y, der durch die Gleichung $y = \frac{1}{x}$ dargestellten gleichseitigen Hyperbel und den zu den Abszissen 1 und $\xi > 1$ gehörenden Parallelen zur Ordinatenachse begrenzt wird.

Lösung: Für den gesuchten Inhalt ergibt sich der Ausdruck

$$\int_1^{\xi} \frac{1}{x}\,dx = [\lg x]_1^{\xi} = \lg\xi - \lg 1 = \lg\xi.$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Inhalt des betrachteten Bereiches bei unbegrenzt wachsendem ξ ebenfalls unendlich groß wird, obwohl die Hyperbel sich der Abzissenachse fortgesetzt nähert und ihr unbegrenzt nahe kommt. Zugleich ergibt sich eine geometrische Bedeutung des natürlichen Logarithmus, und diese macht es anschaulich, wie langsam die Funktion $\lg\xi$ bei unbegrenzt wachsendem ξ unendlich wird. (Vgl. Nr. **276**).

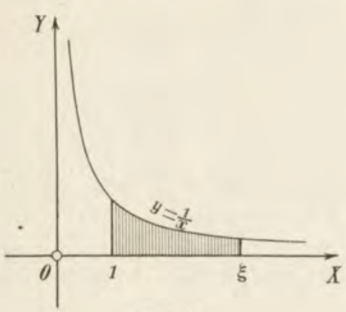


Fig. 10.

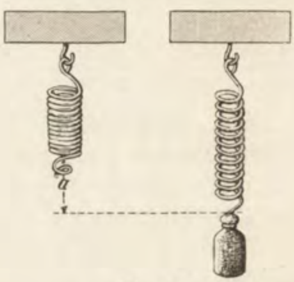


Fig. 11.

3. — Energieinhalt einer gespannten Feder. — Eine elastische Feder (Fig. 11) hat ein festes und ein längs einer Geraden bewegliches Ende und übt auf dieses letztere, wenn es sich außerhalb seiner Gleichgewichtslage befindet, eine Kraft aus, die gegen die Gleichgewichtslage hin gerichtet und, wie es bei mäßigen Federspannungen in vielen Fällen näherungsweise zutrifft, der Entfernung des beweglichen Endes von seiner Gleichgewichtslage proportional ist. Vorausgesetzt, daß man diese Kraft in Kilogrammen und den Abstand des beweglichen Endes in Metern mißt, sei c die Konstante, mit der man den Abstand multiplizieren muß, um die Kraft zu erhalten. Wie viel Meterkilogramm beträgt dann die in der Feder steckende direkt nutzbare, d. h. nicht in der Form von Wärme vorhandene Energie, wenn die Feder so weit gespannt ist, daß ihr bewegliches Ende von seiner Gleichgewichtslage um a Meter absteht?

Lösung: Nach dem Gesetz von der Erhaltung der Energie ist die gesuchte Energiemenge gleich der Arbeit, die man aufwenden muß, um die Feder nach und nach bis zu dem angegebenen Grade zu spannen. Diese letztere wird aber durch das Integral $\int_0^a cx\,dx$ dargestellt, hat also den Wert $\frac{1}{2}ca^2$.

4. — Wasserspiegel in einem rotierenden Gefäß. — Ein vertikalstehendes, zylindrisches, teilweise mit Wasser gefülltes Gefäß (Fig. 12) wird um seine Achse in Drehung versetzt und hierauf in einer gleichmäßigen Umdrehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω erhalten, was zur Folge hat, daß nach und nach ein neuer Gleichgewichtszustand des Wassers eintritt, bei welchem der Wasserspiegel die Form einer Umdrehungsfläche hat, deren Achse mit der des Gefäßes zusammenfällt. Man soll die Meridianlinie dieser Umdrehungsfläche ermitteln.

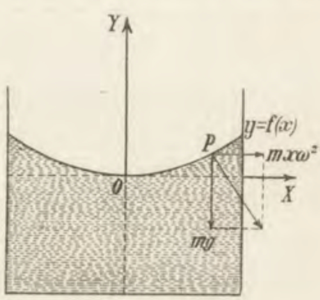


Fig. 12.

Lösung: Nachdem man in einer durch die Achse des Gefäßes gehenden Ebene ein System rechtwinkeliger Koordinaten x, y derart angenommen hat, daß sein Anfang O mit demjenigen Punkte zusammenfällt, wo die Achse den Wasserspiegel trifft, und daß die Ordinatenachse vertikal nach oben weist, denke man sich die gesuchte Meridianlinie durch eine Gleichung von der Form $y = f(x)$ dargestellt. Dann ist die Steigung der Meridianlinie im Punkte P mit der Abzisse x gleich der Ableitung $f'(x)$. Soll nun Gleichgewicht bestehen, so muß die Resultante der Massenkräfte, welche auf ein in P befindliches Flüssigkeitsteilchen wirken, auf der eben erwähnten Tangente senkrecht stehen, wie in der Hydrostatik nachzuweisen ist. Diese Kräfte sind aber

1. — die nach unten wirkende Schwere, dargestellt durch das

Produkt mg, wo m die Masse des Teilchens und g die Beschleunigung der Schwere bedeutet, und

2. — die in der Richtung der x-Achse wirkende Fliehkraft deren Größe durch den Ausdruck $mx\omega^2$ gegeben wird.

Die Resultante hat somit die Steigung

$$\frac{-mg}{mx\omega^2} = -\frac{g}{x\omega^2},$$

und die Bedingung des Gleichgewichts ist daher

$$f'(x) = \frac{x\omega^2}{g}.$$

Hieraus folgt aber, da $f(0)=0$ ist,

$$f(x) = \int_0^x f'(\xi)d\xi = \int_0^x \frac{\omega^2}{g}\xi d\xi = \frac{\omega^2}{2g}x^2.$$

Die gesuchte Meridianlinie wird somit durch die Gleichung

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2 \qquad \text{oder} \qquad x^2 = 2\frac{g}{\omega^2}y$$

dargestellt und ist daher eine Parabel, welche die Achse des Gefäßes als Achse hat.

Grundregeln zur Berechnung unbestimmter Integrale.

433. Einfachste Grundregeln. — Durch Umformung von Grundformeln der Differentialrechnung erhält man leicht die folgenden Grundregeln der Integralrechnung:

1. — *Wenn n eine beliebige von (-1) verschiedene Konstante bedeutet, so gilt für jedes Intervall, in welchem das Zeichen x^n überall eine Bedeutung hat, die Gleichung*

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{1137}$$

Die Zahl (-1) mußte von den möglichen Werten des Exponenten ausgeschlossen werden, weil für diesen Wert von n auf der rechten Seite der Gleichung (1137) der Nenner 0 auftritt und diese Gleichung nicht mehr gilt. Ersatz hierfür wird durch die folgende zweite Regel geboten:

2. — *Bei Einschränkung der Veränderlichen x auf positive Werte gilt die Gleichung*

(1138) $$\int \frac{1}{x}\,dx = \lg x\,.$$

Ist x nur negativer Werte fähig, so ist $\lg(-x)$ reell und

$$\frac{d\lg(-x)}{dx} = \frac{1}{(-x)}\cdot(-1) = \frac{1}{x},$$

folglich

(1138ᵃ) $$\int \frac{1}{x}\,dx = \lg(-x)\,.$$

Dieses Ergebnis kann man mit dem vorigen zu der folgenden Regel zusammenfassen:

Ist x in irgend einem die Null nicht enthaltenden Intervall frei veränderlich, so ist immer

(1139) $$\int \frac{1}{x}\,dx = \lg|x|\,.$$

Anmerkung. — Die unüberbrückbar scheinende Verschiedenheit der Formeln (1137) und (1138) verschwindet, wenn man statt der unbestimmten die entsprechenden bestimmten über ein und dasselbe Intervall zu erstreckenden Integrale ins Auge faßt. Versteht man nämlich unter a und b irgend zwei positive Zahlen, so ist einerseits für jeden von (-1) verschiedenen Wert von n

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

und andererseits für $n = -1$

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \lg b - \lg a\,.$$

Zwischen den rechten Seiten dieser Gleichungen besteht aber in der Tat ein stetiger Übergang, denn es ist, wie man leicht bestätigt,

$$\lim_{n=-1} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} = \lg b - \lg a\,.$$

Indem man $a = 1$ setzt, erkennt man, daß man die Formel (1137) in eine stetig in (1138) übergehende Formel verwandeln kann, indem man rechts die Integrationskonstante $\left(-\frac{1}{n+1}\right)$ zufügt, wodurch man

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}-1}{n+1}$$

erhält.

3. — *Für jedes beliebige Intervall gilt die Gleichung*

(1140) $$\int e^x dx = e^x$$

und allgemeiner, wenn a eine beliebige Konstante bedeutet, die Gleichung

(1141) $$\int a^x dx = \frac{1}{\lg a} a^x.$$

4. — *Für jedes beliebige Intervall gelten die Gleichungen*

(1142) $$\int \sin x\, dx = -\cos x$$

und

(1143) $$\int \cos x\, dx = \sin x.$$

5. — *Für jedes beliebige Intervall gilt die Gleichung*

(1144) $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x.$$

6. — *Bei Einschränkung der Veränderlichen x durch die Ungleichung*

$$-1 < x < 1$$

gilt die Gleichung

(1145) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

wo das Zeichen arcsin den Hauptwert bedeutet [1]).

---

1) Geht man von der Gleichung

$$\frac{d \arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

aus, wo das Zeichen $\arccos x$ den Hauptwert bedeutet, so erhält man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x.$$

Dieses Ergebnis ist aber von dem im Text angegebenen nur um eine Konstante verschieden. Denn ist φ der zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ enthaltene

Diesen Einzelergebnissen lassen sich noch einige einfache allgemeine Regeln anreihen, und zwar zunächst die beiden folgenden Regeln, deren Richtigkeit ohne weiteres einleuchtet:

7. — *Ist $f(x)$ eine Funktion, welche ein unbestimmtes Integral hat, und C eine beliebige Konstante, so hat das Produkt $Cf(x)$ ebenfalls ein unbestimmtes Integral, und es ist*

$$\int Cf(x)\,dx = C\int f(x)\,dx. \tag{1146}$$

8. — *Sind $f_1(x)$, $f_2(x)$ Funktionen, welche unbestimmte Integrale haben, so hat die Summe $[f_1(x)+f_2(x)]$ ebenfalls ein unbestimmtes Integral, und es ist*

$$\int [f_1(x)+f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx. \tag{1147}$$

Bei der praktischen Ausrechnung unbestimmter Integrale ist endlich zuweilen eine einfache Regel von Nutzen, die man ganz kurz folgendermaßen aussprechen kann:

9. — *Ist*

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

und sind a, b Konstante, von denen die erste von Null verschieden ist, so ist

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\,F(ax+b). \tag{1148}$$

Ausführlicher heißt dies: Kennt man ein unbestimmtes Integral $F(x)$ einer gegebenen Funktion $f(x)$, so kann man, wenn a eine von Null verschiedene und b eine beliebige Konstante bedeutet und unter x jetzt eine Veränderliche von solcher Beschaffenheit verstanden wird, daß die Summe $(ax+b)$ stets zum Wert-

---

Winkel, welcher die Gleichung $\sin\varphi = x$ erfüllt, also $\arcsin x = \varphi$, so liegt die Differenz $\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$ zwischen 0 und π, und da

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \sin\varphi = x$$

ist, so ist $\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$ der Hauptwert von $\arccos x$, also

$$-\arccos x = \varphi - \frac{\pi}{2} = \arcsin x - \frac{\pi}{2}.$$

bereich des Argumentes der Funktion f gehört, jedesmal auch ein unbestimmtes Integral der Funktion $f(ax+b)$ angeben, nämlich eben die Funktion $\frac{1}{a}F(ax+b)$. Denn infolge der Annahme, daß die Funktion F ein unbestimmtes Integral der Funktion f sei, gilt die Gleichung

$$F'(ax+b)=f(ax+b),$$

also auch die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]=f(ax+b),$$

womit die Behauptung gleichbedeutend ist.

434. Beispiele und Übungsaufgaben. —

1) $\int 2\,dx=2x.$

2) $\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2.$

3) $\int 3x^4\,dx=\frac{3}{5}x^5.$

4) $\int (x^2+6x-7)\,dx=\frac{1}{3}x^3+3x^2-7x.$

5) $\int (2x+5)^3 dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot(2x+5)^4=\frac{1}{8}(2x+5)^4.$

6) $\int \frac{1}{x^2}\,dx=\int x^{-2}\,dx=\frac{x^{-1}}{-1}=-\frac{1}{x}.$

7) $\int \frac{1}{x^3}\,dx=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}.$

8) $\int \frac{1}{(6x+1)^2}\,dx=-\frac{1}{6}\frac{1}{6x+1}.$

9) $\int \sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}.$

10) $\int \sqrt{2x+3}\,dx=\frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3}.$

11) $\int \sqrt[3]{5x+2}\,dx=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot(5x+2)^{\frac{4}{3}}=\frac{3}{20}(5x+2)^{\frac{4}{3}}.$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+1}} = \int (5x+1)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{5}\sqrt{5x+1}.$

13) $\int \frac{dx}{x+7} = \lg|x+7|.$

14) $\int \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2}\lg|2x+3|.$

15) $\int e^{4-3x} dx = -\frac{1}{3}e^{4-3x}.$

16) $\int 10^x dx = \frac{1}{\lg 10} 10^x.$

17) $\int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$

18) $\int \cos(2x) dx = \frac{1}{2}\sin(2x).$

19) $\int \sin(\omega t + \alpha) dt = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \alpha).$

20) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\cdot a \cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$

21) $\int \frac{dx}{1+a^2x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(ax).$

22) $\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a}.$

[Aus 20) abzuleiten.]

23) $\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \int \frac{dx}{1+(x+3)^2} = \operatorname{arctg}(x+3).$

24) $\int \frac{dx}{4x^2-20x+34} = \int \frac{dx}{9+(2x-5)^2} = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x-5}{3}.$

[Aus 20) abzuleiten.]

25) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-a^2x^2}} = \frac{1}{a}\arcsin(ax).$

26) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{1}{a}\cdot a \cdot \arcsin\frac{x}{a} = \arcsin\frac{x}{a}.$

27) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} = \frac{1}{b}\arcsin\frac{bx}{a}.$

28) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,x\right)\cdot$

29) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{3-12x-4x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{12-(2x+3)^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x+3}{\sqrt{12}}.$

[Aus 26) abzuleiten.]

435. Teilweise Integration. — Während die Differentialrechnung eine Regel liefert, um die Ableitung eines Produktes zweier differenzierbaren Funktionen durch die Ableitungen der Faktoren auszudrücken, läßt sich in der Integralrechnung keine allgemeingültige Regel angeben, mittels deren die Berechnung des unbestimmten Integrales eines Produktes auf die Berechnung der unbestimmten Integrale seiner Faktoren zurückführbar wäre. Immerhin kann man einen gewissen Ersatz hierfür durch Umkehrung der Formel für die Differentiation eines Produktes gewinnen, und zwar in folgender Weise: Es seien u, v Funktionen des gleichen Argumentes x, die in ein und demselben Intervall differenzierbar und so beschaffen sind, daß jedes einzelne der Produkte uv', $u'v$ ein unbestimmtes Integral hat. Dann folgt für dieses Intervall aus der Gleichung

$$\frac{d(uv)}{dx}=uv'+u'v$$

durch Umkehrung die Gleichung

$$\int uv'\,dx+\int u'v\,dx=uv$$

oder

$$\int uv'\,dx=uv-\int u'v\,dx.$$

Ist nun $f(x)$ eine in einem Intervall differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung und $\varphi(x)$ eine in dem gleichem Intervall stetige Funktion, so kann man die zuvor benutzten Bezeichnungen dadurch abändern, daß man

$$u=f(x)\qquad\text{und}\qquad v=\int\varphi(x)\,dx$$

setzt. Dann erhält man die Gleichung

(1149) $$\int f(x)\varphi(x)\,dx=f(x)\int\varphi(x)\,dx-\int\left\{f'(x)\int\varphi(x)\,dx\right\}dx,$$

welche als die **Formel für die teilweise** oder **partielle Integration** bezeichnet wird.

Diese Formel führt die Berechnung des Integrales eines Produktes $f(x)\varphi(x)$ darauf zurück,

Erstens das Integral des zweiten Faktors $\varphi(x)$ zu finden und, nachdem dies geschehen,

Zweitens das Integral desjenigen Produktes $f'(x)\int\varphi(x)dx$ zu ermitteln, welches die Ableitung $f'(x)$ des ersten Faktors und das zuvor berechnete Integral $\int\varphi(x)dx$ des zweiten Faktors zu Faktoren hat.

Aber da diese beiden neuen Aufgaben keineswegs immer leichter zu lösen sind wie die ursprüngliche, gewährt die Formel (1149) nur einen sehr beschränkten Nutzen. Immerhin lassen sich manche Aufgaben mit ihrer Hilfe lösen. Dies zeigen die folgenden

Beispiele. — **1.** — Das Integral des Produktes $x\cos x$ zu finden.

Lösung: Die Gleichung (1149) liefert, wenn man

$$f(x)=x \qquad \text{und} \qquad \varphi(x)=\cos x$$

setzt,

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$$
$$= x\sin x + \cos x,$$

womit das gesuchte Integral gefunden ist.

2. — Ähnlich wie eben findet man

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int\cos x\,dx$$
$$= -x\cos x + \sin x.$$

3. — Auch die Integrale der Produkte

$$x^2\cos x \qquad \text{und} \qquad x^2\sin x$$

lassen sich durch teilweise Integration finden. Man erhält nämlich zunächst

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx$$

und sodann unter Benutzung des unter 2 erhaltenen Ergebnisses

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x.$$

Ähnlich ergibt sich

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx$$
$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x.$$

Wie man leicht einsieht, kann man auf dem betretenen Wege weiter fortschreitend alle Produkte von der Form

$$x^n \cos x \qquad \text{oder} \qquad x^n \sin x$$

integrieren, wo n irgendeine ganze positive Zahl bedeutet.

4. — An die Stelle des Argumentes x der trigonometrischen Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ darf auch eine beliebige lineare Funktion von x treten, ohne daß die teilweise Integration ihre Anwendbarkeit verliert. Beispielsweise ergibt sich

$$\int x \sin(3x)\, dx = -\frac{1}{3} x \cos(3x) + \frac{1}{3}\int \cos(3x)\, dx$$
$$= -\frac{1}{3} x \cos(3x) + \frac{1}{9} \sin(3x)$$

und

$$\int x^2 \cos(2x)\, dx = \frac{1}{2} x^2 \sin(2x) - \int x \sin(2x)\, dx$$
$$= \frac{1}{2} x^2 \sin(2x) + \frac{1}{2} x \cos(2x) - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx$$
$$= \frac{1}{2} x^2 \sin(2x) + \frac{1}{2} x \cos(2x) - \frac{1}{4} \sin(2x).$$

5. — Genau ebenso wie die bisher behandelten Produkte können auch diejenigen Produkte integriert werden, die aus einer Potenz mit ganzem positivem Exponenten und einer Exponentialfunktion zusammengesetzt sind. Beispielsweise ist

$$\int x e^x\, dx = x e^x - \int e^x\, dx = (x-1) e^x,$$
$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\, dx = (x^2 - 2x + 2) e^x,$$
$$\int x e^{-x}\, dx = -x e^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -(x+1) e^{-x},$$
$$\int x^2 e^{-3x}\, dx = -\frac{1}{3} x^2 e^{-3x} + \frac{2}{3}\int x e^{-3x}\, dx$$
$$= -\frac{1}{3} x^2 e^{-3x} - \frac{2}{9} x e^{-3x} + \frac{2}{9}\int e^{-3x}\, dx$$
$$= -\frac{1}{27}(9x^2 + 6x + 2) e^{-3x}.$$

Für das Gelingen der soeben unter 1—5 durchgeführten Berechnungen ist wesentlich, daß man die Potenz als ersten und die trigonometrische Funktion, beziehungsweise Exponentialfunktion als zweiten Faktor nimmt. Bei umgekehrter Stellung der Faktoren würde die teilweise Integration nicht auf einfachere, sondern auf verwickeltere Integrale führen. Nähme man z. B. bei dem unter 1 behandelten Produkte die Funktion $\cos x$ als ersten und die Veränderliche x als zweiten Faktor, so hätte man in der Gleichung (1149)

$$f(x) = \cos x \qquad \text{und} \qquad \varphi(x) = x$$

zu setzen und erhielte

$$\int \cos x \cdot x\,dx = \cos x \cdot \frac{x^2}{2} - \int (-\sin x)\frac{x^2}{2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2 \cos x + \frac{1}{2}\int x^2 \sin x\,dx.$$

Damit wäre aber das verhältnismäßig einfache links stehende Integral, in welchem die trigonometrische Funktion $\cos x$ nur mit der ersten Potenz von x multipliziert ist, auf das verwickeltere Integral $\int x^2 \sin x\,dx$ zurückgeführt, in welchem zu der trigonometrischen Funktion $\sin x$ das Quadrat von x hinzutritt.

Wenn ein mathematischer Ausdruck noch nicht die Form eines Produktes hat, so kann man ihn durch Hinzufügung des Faktors 1 in ein Produkt verwandeln und dadurch für die Anwendung der teilweisen Integration vorbereiten. Ein Beispiel einer Aufgabe, bei der dieser einfache Kunstgriff zum Ziele führt, ist die Berechnung des Integrales $\int \lg x\,dx$, wo unter x eine auf positive Werte beschränkte Veränderliche zu verstehen ist. Man erhält nämlich

$$\int \lg x\,dx = \int \lg x \cdot 1 \cdot dx = \lg x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x\,dx$$

und hieraus schließlich

$$(1150) \qquad \int \lg x\,dx = x \lg x - x = x(\lg x - 1).$$

Zusatz. — Auch bestimmte Integrale lassen sich mit Hilfe der Formel für die teilweise Integration umgestalten. Ist nämlich $f(x)$ eine in einem abgeschlossenen Intervall $(a \cdots b)$ differenzierbare Funktion, deren Ableitung daselbst stetig ist, und $\varphi(x)$ eine in dem Intervall $(a \cdots b)$ stetige Funktion, so liefert die Gleichung (1149) bei Beschränkung der Veränderlichen x auf das Intervall $(a \cdots b)$ zunächst einen Ausdruck für das unbestimmte Integral des Produktes $f(x)\varphi(x)$. Nun ist aber das von a bis b erstreckte bestimmte Integral dieses Produktes gleich der Differenz der speziellen Werte, welche das unbestimmte Integral für $x=b$ und für $x=a$ annimmt. Man erhält daher, indem man diese Differenz wirklich bildet, für das bestimmte Integral die Gleichung

$$(1151)\quad \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \left[f(x)\int\varphi(x)\,dx\right]_a^b - \int_a^b\left\{f'(x)\int\varphi(x)\,dx\right\}dx.$$

Auf diese Formel sei deswegen besonders hingewiesen, damit nicht etwa die irrige Meinung entstehe, daß man zur Bildung des bestimmten Integrales $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$ einfach nur an sämtliche auf der rechten Seite der Gleichung (1149) vorkommenden Integrale die Grenzen a und b anzuschreiben hätte.

436. Integration eines Quotienten. — Ebensowenig wie sich die Integration eines Produktes auf die seiner Faktoren zurückführen läßt, ebensowenig ist es möglich, eine allgemeingültige Regel anzugeben, welche die Integration eines Bruches auf die seines Zählers und seines Nenners zurückführte. Man muß sich also auch hier damit begnügen, Regeln von beschränkter Anwendbarkeit anzugeben.

Zunächst erhält man durch Umkehrung solcher Grundformeln der Differentialrechnung, bei denen das Endergebnis die Form eines Bruches hat, die schon in Nr. **433** angegebenen Gleichungen

$$(1139)\quad \int\frac{1}{x}\,dx = \lg|x|,$$

$$(1144)\quad \int\frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x,$$

$$(1145)\quad \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$$

und die beiden neuen Gleichungen

$$(1152)\quad \int\frac{1}{\cos x^2}\,dx = \operatorname{tg} x,$$

$$(1153)\qquad \int \frac{1}{\sin x^2}\,dx = -\operatorname{ctg} x,$$

bei denen man sich die Veränderliche x jedesmal auf ein Intervall eingeschränkt zu denken hat, welches keine Nullstelle des Nenners der unter dem Integralzeichen stehenden Funktion enthält.

Ferner kann man durch Umkehrung der Formel für die Differentiation eines Quotienten die folgende allgemeine Regel gewinnen:

Sind $Z(x)$ und $N(x)$ zwei in einem Intervall differenzierbare Funktionen, von denen die zweite daselbst nirgends gleich Null wird, so ist in diesem Intervall

$$(1154)\qquad \int \frac{N(x)\,Z'(x) - Z(x)\,N'(x)}{[N(x)]^2}\,dx = \frac{Z(x)}{N(x)}.$$

Aber da es nur ganz ausnahmsweise vorkommt, daß ein zu integrierender Bruch gerade in der Form $\frac{NZ' - ZN'}{N^2}$ gegeben ist oder durch naheliegende Umgestaltungen auf diese Form gebracht werden kann, so hat die Formel (1154) nur geringe praktische Bedeutung. Wichtiger ist eine zweite allgemeine Regel, die sich folgendermaßen ergibt: Wenn $f(x)$ eine in einem Intervall differenzierbare und daselbst nicht verschwindende Funktion bedeutet, so ist

$$\frac{d \lg |f(x)|}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

also umgekehrt

$$(1155)\qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \lg |f(x)|.$$

Das heißt in Worten: *Das unbestimmte Integral eines Bruches kann für ein Intervall, in welchem der Nenner nicht verschwindet, jedesmal dann angegeben werden, wenn der Zähler gerade die Ableitung des Nenners ist, und ist dann gleich dem natürlichen Logarithmus des absoluten Wertes des Nenners.*

Beispielsweise folgt hieraus, da

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x}$$

gesetzt werden kann, für jedes Intervall, welches kein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ enthält,

$$(1156)\qquad \int \operatorname{tg} x\,dx = -\lg |\cos x|,$$

und ähnlich ergibt sich für jedes Intervall, welches kein ganzzahliges Vielfaches von π enthält,

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \lg|\sin x|. \tag{1157}$$

Als ein wichtiges Hilfsmittel zur Integration eines Bruches ist endlich die Zerspaltung des Nenners in Faktoren und nachfolgende Zerlegung des gegebenen Bruches in eine Summe einfacherer Brüche zu erwähnen. Handelt es sich z. B. um die Berechnung des Integrales $\int \frac{dx}{1-x^2}$, so gelangt man folgendermaßen zum Ziel: Man setzt

$$1 - x^2 = (1+x)(1-x)$$

und sucht nun zwei Konstante A, B so zu bestimmen, daß

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x}$$

wird. Dies ist in der Tat möglich. Die vorstehende Gleichung erhält nämlich durch Wegschaffung der Nenner die Form

$$1 = A(1-x) + B(1+x)$$

oder

$$1 = A + B - (A - B)x.$$

Sie wird also erfüllt, sobald die Unbekannten A, B die beiden Gleichungen

$$A + B = 1$$
$$A - B = 0$$

befriedigen, und die Auflösung dieses Systems liefert für A und B die Werte

$$A = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad B = \frac{1}{2}.$$

So gelangt man zu der Gleichung

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-x}$$

und erhält hieraus sofort

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\lg|1+x| - \frac{1}{2}\lg|1-x| = \frac{1}{2}\lg\left|\frac{1+x}{1-x}\right|. \tag{1158}$$

Ein zweites Beispiel ist das Integral $\int \frac{5x-3}{x^2-6x-7}\,dx$. Auch dieses läßt sich in ähnlicher Weise berechnen: Man löst zunächst die quadratische Gleichung

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

auf, findet für deren Wurzeln die Werte 7 und (-1) und gelangt dadurch zu der Erkenntnis, daß der Nenner $(x^2 - 6x - 7)$ in das Produkt $(x-7)(x+1)$ verwandelt werden kann. Nun macht man den Ansatz

$$\frac{5x-3}{x^2-6x-7} = \frac{5x-3}{(x-7)(x+1)} = \frac{A}{x-7} + \frac{B}{x+1},$$

erhält nach Wegschaffung der Nenner zur Bestimmung der unbekannten Konstanten A, B die Gleichungen

$$A + B = 5$$
$$A - 7B = -3$$

und findet durch deren Auflösung

$$A = 4; \qquad B = 1.$$

So ergibt sich

$$\frac{5x-3}{x^2-6x-7} = \frac{4}{x-7} + \frac{1}{x+1},$$

und hieraus folgt

$$\int \frac{5x-3}{x^2-6x-7}\,dx = 4\lg|x-7| + \lg|x+1|.$$

Wie sich später herausstellen wird, kann man mit Hilfe des durch diese Beispiele erläuterten Kunstgriffes der Zerlegung in einfachere Brüche das unbestimmte Integral einer jeden gebrochenen rationalen Funktion ermitteln.

Beispiele und Übungsaufgaben.

1) $$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\lg(1+x^2).$$

2) $$\int \frac{x\,dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{2b^2}\lg(a^2+b^2x^2).$$

3) $$\int \frac{5x+7}{3x^2+1}\,dx = \frac{5}{6}\int \frac{6x}{3x^2+1}\,dx + 7\int \frac{1}{1+3x^2}\,dx$$
$$= \frac{5}{6}\lg(3x^2+1) + \frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{3}).$$

4) $$\int \frac{5x+7}{2x+3}\,dx = \int \left\{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2x+3}\right\} dx$$
$$= \frac{5}{2}x - \frac{1}{4}\lg|2x+3|.$$

5) $$\int \frac{x^2+5x+7}{2x+3}\,dx = \int \left\{\frac{1}{2}x + \frac{7}{4} + \frac{7}{4}\,\frac{1}{2x+3}\right\} dx$$
$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{7}{8}\lg|2x+3|.$$

Der leitende Gedanke bei der Lösung dieser und der vorangehenden Aufgabe besteht darin, daß man die zu integrierende unecht gebrochene rationale Funktion durch Ausführung der Division in die Summe einer ganzen und einer echt gebrochenen rationalen Funktion zerlegt und dadurch für die Integration vorbereitet. Ähnlich hat man auch bei dem nachfolgenden Beispiel zu verfahren.

6) $$\int \frac{2x^3-7x^2+5x+8}{3x^2+1}\,dx = \int \left\{\frac{2}{3}x - \frac{7}{3} + \frac{1}{3}\,\frac{13x+31}{x^2+1}\right\} dx$$
$$= \int \left\{\frac{2}{3}x - \frac{7}{3} + \frac{13}{18}\,\frac{6x}{3x^2+1} + \frac{31}{3}\,\frac{1}{1+3x^2}\right\} dx$$
$$= \frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{13}{18}\lg(3x^2+1) + \frac{31}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{3}).$$

7) $$\int \frac{x}{\cos x^2}\,dx = x\operatorname{tg}x - \int \operatorname{tg}x\,dx$$
$$= x\operatorname{tg}x + \lg|\cos x|.$$

8) $$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \lg(e^x + e^{-x}).$$

9) $$\int \frac{1}{x^2(1+x)}\,dx = \int \left\{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x}\right\} dx$$
$$= -\frac{1}{x} + \lg\left|\frac{1+x}{x}\right|.$$

Anleitung: Beim Ansatz der Zerlegung des gegebenen Bruches in einfachere Brüche muß man dem quadratischen Faktor x^2 des Nenners zwei Brüche entsprechen lassen, nämlich einen Bruch mit dem Nenner x^2 und außerdem einen Bruch mit dem Nenner x.

10) $$\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin x^2}\,dx = \frac{1}{2}\lg(1+\sin x^2).$$

437. Einführung einer neuen Veränderlichen. — Auch aus der Regel für die Differentiation einer mittelbaren Funktion läßt sich durch Umkehrung eine Formel der Integralrechnung gewinnen, die in vielen Fällen gute Dienste leistet. Sind nämlich $\varphi(x)$ und $F(y)$ zwei Funktionen, von denen die erste in einem Intervall $\mathfrak{J}$ und die zweite in einem Intervall $\mathfrak{J}'$ differenzierbar ist, und ist zugleich jeder Wert, den $\varphi(x)$ in $\mathfrak{J}$ anzunehmen vermag, in $\mathfrak{J}'$ enthalten, so folgt aus der Gleichung

$$\frac{dF[\varphi(x)]}{dx} = F'[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

durch Umkehrung die für das Intervall $\mathfrak{J}$ geltende Gleichung

$$\int F'[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)].$$

Setzt man nunmehr

$$F'(y) = f(y), \qquad \text{also} \qquad F(y) = \int f(y)dy,$$

so nimmt diese Gleichung folgende Form an:

$$(1159) \qquad \int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx = \left[\int f(y)\,dy\right]_{y=\varphi(x)}.$$

Das Integral eines Produktes läßt sich also jedesmal dann ermitteln, wenn der eine Faktor eine mittelbare Funktion $f[\varphi(x)]$ und der andere Faktor die Ableitung $\varphi'(x)$ der inneren Funktion ist, vorausgesetzt, daß die äußere Funktion $f(y)$ ein unbestimmtes Integral hat und dieses letztere angegeben werden kann.

Beispielsweise ist hiernach für beliebige Werte von x

$$(1160) \qquad \int \sin x^3 \cos x\,dx = \left[\int y^3 dy\right]_{y=\sin x} = \frac{1}{4}\sin x^4,$$

$$(1161) \qquad \left\{\begin{aligned} \int \sin x^3 dx &= \int \sin x^2 \cdot \sin x\,dx \\ &= \int (1-\cos x^2)\sin x\,dx = -\left[\int (1-y^2)dy\right]_{y=\cos x} \\ &= -\cos x + \frac{1}{3}\cos x^3, \end{aligned}\right.$$

$$(1162) \qquad \int e^{x^2} x\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2} 2x\,dx = \frac{1}{2}\left[\int e^y dy\right]_{y=x^2} = \frac{1}{2}e^{x^2},$$

$$(1163)\quad \int\sqrt{a^2+x^2}\,x\,dx=\frac{1}{2}\left[\int\sqrt{y}\,dy\right]_{y=a^2+x^2}=\frac{1}{3}\sqrt{a^2+x^2}^{\,3}.$$

Ferner ist für $-a\leqq x\leqq a$

$$(1164)\quad \int\sqrt{a^2-x^2}\,x\,dx=\left[-\frac{1}{2}\int\sqrt{y}\,dy\right]_{y=a^2-x^2}=-\frac{1}{3}\sqrt{a^2-x^2}^{\,3}$$

und für $-1<x<1$

$$(1165)\quad \left\{\begin{aligned}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}&=-\frac{1}{2}\int\frac{-2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\\ &=-\frac{1}{2}\left[\int y^{-\frac{1}{2}}dy\right]_{y=1-x^2}=-\left[y^{\frac{1}{2}}\right]_{y=1-x^2}\\ &=-\sqrt{1-x^2}.\end{aligned}\right.$$

Die Formel (1159) umfaßt die in Nr. **433** unter 9 angegebene Regel als besonderen Fall. Denn bei den dortigen Voraussetzungen ist nach (1159)

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\,a\,dx=\frac{1}{a}\left[\int f(y)\,dy\right]_{y=ax+b}$$
$$=\frac{1}{a}F(ax+b).$$

Auch die Formel (1155) ist als spezieller Fall in der Formel (1159) enthalten. Denn nach (1159) ist für jedes Intervall, in welchem $f(x)$ positiv und differenzierbar ist,

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\left[\int\frac{1}{y}\,dy\right]_{y=f(x)}=\lg f(x)$$

und für jedes Intervall, wo $f(x)$ negativ und differenzierbar ist,

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\int\frac{-f'(x)}{-f(x)}\,dx=\left[\int\frac{1}{y}\,dy\right]_{y=-f(x)}=\lg[-f(x)].$$

Für die durch die Gleichung (1159) ausgedrückte allgemeine Regel läßt sich noch eine zweite, oft noch bequemere Form angeben. Falls nämlich die Funktion $y=\varphi(x)$ in dem Intervall $\mathfrak{J}$ bei wachsendem x beständig zu- oder beständig abnimmt, so daß sie eine Umkehrung zuläßt, und $x=\chi(y)$ die durch Umkehrung entstehende

Funktion bedeutet, so kann man der Gleichung (1159), indem man dieselbe umgekehrt liest, zunächst die Gestalt

$$\int f(y)\,dy = \left[\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx\right]_{x=\chi(y)}$$

geben, und wenn man nun noch erreichen will, daß die Integrationsveränderliche in dem links stehenden Integral, welches man jetzt als das ursprünglich gegebene ansieht, wieder durch x bezeichnet sei, so hat man nur nötig, den Buchstaben y durch den Buchstaben x und zugleich den Buchstaben x durch irgendeinen anderen Buchstaben, etwa u, zu ersetzen. So erhält man die Gleichung

$$\int f(x)\,dx = \left[\int f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,du\right]_{u=\chi(x)}$$

und gewinnt damit den folgenden wichtigen

Lehrsatz: *Wenn eine Funktion $f(x)$ in einem Intervall $\mathfrak{J}'$ als Ableitung einer zweiten Funktion angesehen werden kann, so kann man das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$ stets in mannigfach verschiedener Weise dadurch auf ein anderes unbestimmtes Integral zurückführen, daß man die Integrationsveränderliche durch eine passend gewählte Funktion einer neuen Veränderlichen ersetzt. Man braucht nämlich nur eine Funktion $\varphi(u)$ so zu wählen, daß sie*

1. — *in einem Intervall $\mathfrak{J}$ differenzierbar ist, daß sie*
2. — *in diesem Intervall bei wachsendem Argument beständig zu- oder beständig abnimmt und*
3. — *das Intervall $\mathfrak{J}'$ durchläuft, während u das Intervall $\mathfrak{J}$ durchläuft.*

Dann gilt für das Intervall $\mathfrak{J}'$ die Gleichung

$$\int \boldsymbol{f(x)\,dx} = \left[\int \boldsymbol{f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,du}\right]_{u=\chi(x)}, \tag{1166}$$

wo $\chi(x)$ die aus der Funktion $x=\varphi(u)$ durch Umkehrung entstehende Funktion bedeutet.

Besonders zu bemerken ist beim Gebrauch dieser Regel, daß man nicht bloß in dem Ausdruck der Funktion $f(x)$ die Veränderliche x durch die Funktion $\varphi(u)$, sondern außerdem das Differential dx durch das Produkt $\varphi'(u)\,du$ zu ersetzen hat.

Beispielsweise kann man das Integral $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$, wo x eine völlig freie Veränderliche bedeutet, dadurch umformen, daß man, unter u eine positive, aber sonst nicht weiter beschränkte Veränderliche verstehend,

$$x = \lg u, \qquad \text{also} \qquad u = e^x$$

setzt. Man erhält dann

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = \left[\int \frac{u-1}{u+1} \frac{1}{u} du \right]_{u = e^x}$$

und kann nun das vorgelegte Integral wirklich berechnen. Denn durch Zerlegung in einfachere Brüche ergibt sich leicht

$$\int \frac{u-1}{u+1} \frac{1}{u} du = \int \left\{ \frac{2}{u+1} - \frac{1}{u} \right\} du$$
$$= 2 \lg (u+1) - \lg u,$$

also

(1167) $$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = 2 \lg (e^x + 1) - x.$$

Ähnlich kann man das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}^3}$ mittels einer geeigneten Umformung berechnen. Setzt man nämlich, unter φ einen zwischen $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ und $\frac{\pi}{2}$ enthaltenen Winkel verstehend,

$$x = \operatorname{tg} \varphi, \qquad \text{also} \qquad \varphi = \operatorname{arctg} x,$$

so wird

$$\sqrt{1 + x^2} = \frac{1}{\cos \varphi} \qquad \text{und} \qquad dx = \frac{d\varphi}{\cos \varphi^2}.$$

Das vorgelegte Integral geht daher über in

$$\int \cos \varphi^3 \frac{d\varphi}{\cos \varphi^2} = \int \cos \varphi \, d\varphi = \sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} \varphi^2}},$$

und wenn man nun für $\operatorname{tg} \varphi$ wieder x einsetzt, so erhält man

(1168) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}^3} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Wenn die Funktion $f(x)$ in einem abgeschlossenen Intervall $(a \cdots b)$ stetig ist, so läßt sich aus der Gleichung (1166) eine entsprechende Regel zur Umformung des **bestimmten** Integrales $\int_a^b f(x)dx$ ableiten, nämlich:

Hat man eine in einem abgeschlossenen Intervall $(\alpha\cdots\beta)$ *differenzierbare Funktion* $\varphi(u)$, *deren Ableitung daselbst stetig ist,*[1] *irgendwie so bestimmt, daß sie beständig zu- oder beständig abnehmend von dem Anfangswert* a *zu dem Endwert* b *übergeht, während* u *das Intervall* $(\alpha\cdots\beta)$ *in dem Sinne von* α *gegen* β *durchläuft, so ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(u)]\varphi'(u)\,du. \tag{1169}$$

Man muß also, um ein gegebenes bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)dx$ durch Einführung einer neuen Integrationsveränderlichen umzuformen,

Erstens in der unter dem Integralzeichen stehenden Funktion die alte Integrationsveränderliche x durch die neue u ausdrücken,

Zweitens das Differential dx durch das Produkt $\frac{dx}{du}\cdot du$ ersetzen und

Drittens die Integrationsgrenzen den Umständen entsprechend ändern.

Zu genau dem gleichen Ergebnis führt, wie man leicht einsieht, auch die Formel (1159), wenn sie auf bestimmte Integrale angewandt wird.

Endlich ist nachträglich leicht einzusehen, daß die Gleichung (1169) auch dann bestehen bleibt, wenn die Funktion $\varphi(u)$ eine endliche Anzahl von Malen vom Wachsen zum Abnehmen und umgekehrt übergeht, während u das Intervall $(\alpha\cdots\beta)$ durchläuft, sobald sie nur dabei niemals aus dem Stetigkeitsbereich der Funktion $f(x)$ heraustritt und alle übrigen Voraussetzungen erfüllt sind.

Beispiel. Indem man $x = \sin\varphi$ setzt, erhält man

---

1) Die Voraussetzung der Stetigkeit der Funktionen $f(x)$ und $\varphi'(u)$ läßt sich durch die weniger weitgehende Annahme ersetzen, daß die Funktion $f(x)$ über das Intervall $(a\cdots b)$ und das Produkt $f[\varphi(u)]\varphi'(u)$ über das Intervall $(\alpha\cdots\beta)$ integrierbar sei. Zum Beweise hat man nur nötig, auf die Erklärung eines bestimmten Integrales als Grenzwert einer Summe zurückzugehen und von dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung Gebrauch zu machen.

$$(1170)\quad \left\{\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin\varphi^2}\cos\varphi\,d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi^2\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\,d\varphi \\ &= \left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}\right.$$

438. Gründe für die Schwierigkeit der Integralrechnung. — Obwohl in den vorangehenden Nummern die Ermittelung einer größeren Anzahl unbestimmter Integrale gelungen ist, hat das Gesamtergebnis doch etwas Unbefriedigendes. In der Differentialrechnung hatte sich ergeben, daß die Ableitung einer in geschlossener Form darstellbaren Funktion allemal wieder in geschlossener Form dargestellt werden kann. In der Integralrechnung hat sich dagegen ein entsprechendes Ergebnis durch die bisherigen Betrachtungen nicht gewinnen lassen. Man stößt vielmehr auf Schwierigkeiten, wenn man dieses Ziel auf ähnlichem Wege wie in der Differentialrechnung zu erreichen sucht. Allerdings gelingt es ziemlich leicht, die unbestimmten Integrale der Grundfunktionen x^n, e^x, a^x, $\lg x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ anzugeben. Diese Aufgabe wird ja durch die im vorangehenden nach und nach erhaltenen Gleichungen (1137)—(1143), (1150), (1156), (1157) gelöst. Und diesen Gleichungen lassen sich auch noch zwei weitere Gleichungen anreihen, welche die Integrale der Hauptwerte der Funktionen $\arcsin x$ und $\operatorname{arctg} x$ und damit natürlich auch die Integrale der Funktionen

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \qquad \text{und} \qquad \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$$

liefern. Man erhält nämlich durch teilweise Integration zunächst

$$\begin{aligned} \int \arcsin x\,dx &= \int \arcsin x \cdot 1\,dx \\ &= \arcsin x \cdot x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \end{aligned}$$

und dann mit Hilfe der Gleichung (1165)

(1171) $$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

Und ähnlich findet sich zunächst

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = \int \operatorname{arctg} x \cdot 1\, dx$$
$$= \operatorname{arctg} x \cdot x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2}$$

und hieraus mit Hilfe der am Schluß der Nr. **436** bei den Beispielen unter 1) angegebenen Formel

(1172) $$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \lg(1+x^2).$$

Aber wenn man sich nunmehr der Integration solcher stetigen Funktionen zuwendet, die durch geschlossene Ausdrücke verwickelterer Art dargestellt werden, so sieht man sich bald gehemmt. Regeln, die den in der Differentialrechnung geltenden entsprechen, lassen sich nur noch für die Integration einer Summe, einer Differenz und eines Produktes einer veränderlichen Funktion mit einer Konstanten aufstellen, womit allerdings auch die Integration aller ganzen rationalen Funktionen geleistet ist. Dagegen bieten sich bei der Betrachtung eines beliebigen Produktes, eines Quotienten und vollends einer mittelbaren Funktion nur vereinzelte Fälle dar, in denen die Integration ausführbar ist. Das Vorhandensein eines unbestimmten Integrales steht auch hier auf Grund des allgemeinen Satzes fest, daß jede in einem Intervall stetige Funktion daselbst als Ableitung einer zweiten Funktion angesehen werden kann, aber schon bei einfachen Beispielen schlagen alle Versuche zur Ermittelung des unbestimmten Integrales fehl. Es fragt sich, ob dies nur darauf beruht, daß man den richtigen Weg zur Lösung bisher noch nicht gefunden hat, oder ob vielleicht eine innere, in der Natur der Sache begründete Unmöglichkeit vorliegt, so daß die Lösung auch in Zukunft niemals gelingen kann.

Glücklicherweise ist diese Frage zurzeit keine schwebende mehr. Sie ist vielmehr endgültig in dem zuletzt erwähnten Sinne entschieden. Die neuere Entwickelung der Algebra und der Funktionentheorie hat nämlich die Mittel geliefert, für zahlreiche Klassen stetiger in geschlossener Form darstellbarer Funktionen in aller Strenge nachzuweisen, daß die Darstellung des unbestimmten Integrales in geschlossener Form unmöglich ist, also niemals gelingen kann, wie weit auch die Wissenschaft fortschreiten mag.[1]) Beispielsweise gehören bereits diejenigen Funktionen hierher, die durch die verhältnismäßig einfachen Ausdrücke

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \quad \text{und} \quad \frac{e^x}{x}$$

dargestellt werden. Man muß deswegen die Grundaufgabe der Lehre von den unbestimmten Integralen anders fassen als die Grundaufgabe der Differentialrechnung. In der Differentialrechnung hatte es einen Sinn, die Entwickelung von Regeln zu verlangen, nach denen die Ableitung einer jeden in geschlossener Form dargestellten stetigen Funktion berechnet, d. h. wieder durch einen geschlossenen analytischen Ausdruck dargestellt werden kann. In der Integralrechnung muß man dagegen mit weniger zufrieden

---

1) Es ist das Verdienst von J. Liouville, auf diesem Gebiete Klarheit geschaffen zu haben. Die Ergebnisse seiner ausgedehnten hierzu angestellten Untersuchungen sind in folgenden Abhandlungen niedergelegt:

1. — Sur la détermination des Intégrales dont la valeur est algébrique, Journal de l'école royale polytechnique, Tome 14, Cahier 22, Paris 1833, Premier mémoire, Seite 124—148, Second mémoire, Seite 149—193. Beide Abhandlungen sind wieder abgedruckt in den Mémoires présentés par divers savants à l'académie royale des sciences de l'institut de France, Sciences mathématiques et physiques (Sér. 2), Tome 5, Paris 1838, Seite 76—102 und Seite 103—151. Ein von Lacroix, Navier und Poisson erstatteter Bericht über diese beiden Abhandlungen, der besonders klar erkennen läßt, welche große Bedeutung ihnen zur Zeit ihrer Veröffentlichung zukam, nebst einigen Zusätzen von Liouville, steht im Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von A. L. Crelle, Bd. 10, Berlin 1833, Seite 342 bis 359.

2. — Mémoire sur les Transcendantes Elliptiques de première et de seconde espèce, considérées comme fonctions de leur amplitude, Journal de l'école royale polytechnique, Tome 14, Cahier 23, Paris 1834, Seite 37—83.

3. — Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes, Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von A. L. Crelle, Bd. 13, Berlin 1835, Seite 93—118.

4. — Mémoire sur la classification des transcendantes et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients, Journal de mathématiques pures et appliquées, publié par J. Liouville, (Sér. 1), Tome 2, Paris 1837, Seite 56—104; Fortsetzung ebendaselbst, Tome 3, Paris 1838, Seite 523—546.

Der Beweis der im Text ausgesprochenen Behauptungen findet sich in den unter **2** und **3** erwähnten Abhandlungen.

sein. Das Äußerste, was man vernünftigerweise fordern kann, ist die Angabe sicherer Kennzeichen zur Entscheidung der Frage, ob das unbestimmte Integral einer gegebenen Funktion in geschlossener Form darstellbar ist oder nicht. Aber da sich auch hierbei keine Vollständigkeit erreichen läßt, so muß man sich schließlich damit begnügen, die wichtigsten Arten von Funktionen aufzuzählen, deren Integrale in geschlossener Form darstellbar sind, und für diese besonderen Arten Integrationsregeln anzugeben. Eine weitere Grundaufgabe besteht dann darin, zur zahlenmäßigen Berechnung bestimmter Integrale außer der Benutzung des unbestimmten Integrales noch andere Verfahrungsweisen anzugeben, mittels deren man diese Berechnung in solchen Fällen, wo das unbestimmte Integral sich nicht in geschlossener Form darstellen läßt, wenigstens näherungsweise ausführen kann.

Neuerdings sind außer den Logarithmen und den trigonometrischen Funktionen auch manche Funktionen, die sich nicht in geschlossener Form darstellen lassen (elliptische Funktionen, Gaußsches Fehlerintegral, Gammafunktion, Besselsche Funktionen, Integrallogarithmus und andere mehr) wegen ihrer praktischen Wichtigkeit in Tafeln gebracht worden.[1]) Man kann daher ein unbestimmtes Integral auch dann als bekannt ansehen, wenn es gelungen ist, dasselbe auf eine dieser Funktionen zurückzuführen. Die vorhin erwähnte Aufgabe der Aufzählung wäre also noch mancher Erweiterung fähig. Hier kann sie jedoch nur in ihrer ursprünglichen engsten Fassung behandelt werden.

Übersicht über die wichtigsten Arten von Funktionen, deren Integrale in geschlossener Form darstellbar sind.

439. Begriff eines unbestimmten Integrales einer Funktion komplexen Argumentes. — Der Überblick über die zur Berechnung unbestimmter Integrale anwendbaren Regeln wird wesentlich erleichtert, wenn man sich bei der Erklärung des Begriffes eines unbestimmten Integrales nicht, wie es im vorangehenden geschehen ist, auf die Betrachtung reellwertiger Funktionen reellen Argu-

1) Solche Tafeln nebst eingehenden Literaturnachweisungen finden sich in E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, Leipzig und Berlin 1909.

mentes beschränkt, sondern den Integralbegriff auch auf komplexe Funktionen komplexen Argumentes ausdehnt. Dies geschieht durch die folgende

Erklärung. *Ist z eine komplexe Veränderliche, deren Wertbereich aus einem Kontinuum besteht, und ist $f(z)$ eine Funktion, die als Ableitung einer zweiten Funktion angesehen werden kann, so nennt man jede Funktion von z, deren Ableitung mit $f(z)$ übereinstimmt, ein unbestimmtes Integral der Funktion $f(z)$.*

Auch bei den gegenwärtigen Annahmen versteht man unter dem Zeichen $\int f(z)dz$ stets ein unbestimmtes Integral der Funktion $f(z)$. Auch jetzt ist also eine Gleichung von der Form

$$\int f(z)dz = F(z)$$

jedesmal gleichbedeutend mit der Gleichung

$$F'(z) = f(z).$$

Beispielsweise ist hiernach, wenn z eine völlig freie komplexe Veränderliche bedeutet,

$$\int z^2 dz = \frac{1}{3} z^3$$

$$\int e^z dz = e^z$$

$$\int \sin z\, dz = -\cos z$$

$$\int \cos z\, dz = \sin z$$

$$\int z e^z dz = e^z (z - 1)$$

usw.

Die Frage, wann eine Funktion komplexen Argumentes als Ableitung einer zweiten derartigen Funktion angesehen werden kann, wird in Nr. **480** beantwortet werden.

Zwei verschiedene unbestimmte Integrale ein und derselben Funktion komplexen Argumentes können sich immer nur um eine Konstante unterscheiden.

Ähnlich wie für Funktionen reellen Argumentes (vgl. Nr. **250** und **430**) gilt nämlich der folgende

Hilfssatz: *Ist eine Funktion $f(z)$ eines komplexen Argu-*

mentes z in einem Kontinuum $\mathfrak{B}$ differenzierbar und ist ihre Ableitung daselbst überall gleich Null, so ist die Funktion in $\mathfrak{B}$ konstant.

Beweis: Es sei z_0 eine in $\mathfrak{B}$ liegende feste Stelle. Ferner seien

$$z = x + iy; \qquad z_0 = x_0 + iy_0;$$
$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

diejenigen Gleichungen, welche sich durch Zerlegung der komplexen Zahlen z, z_0, $f(z)$ in ihre reellen und ihre imaginären Teile ergeben. Dann ist, wenn man sich um z_0 einen beliebigen Kreis beschrieben denkt, dessen Inneres ganz in $\mathfrak{B}$ liegt, für jede Stelle $(x_0 + h,\ y_0 + k)$, die dem Innern dieses Kreises angehört,

$$u(x_0 + h,\ y_0 + k) = u(x_0, y_0).$$

Zunächst ist nämlich nach der in Nr. **329** angegebenen Ausdehnung des Mittelwertsatzes

$$u(x_0 + h,\ y_0 + k) = u(x_0, y_0)$$
$$+ h u_x(x_0 + \vartheta h,\ y_0 + \vartheta k) + k u_y(x_0 + \vartheta h,\ y_0 + \vartheta k),$$

wo ϑ eine zwischen 0 und 1 enthaltene Zahl bedeutet. Hier fallen aber der zweite und der dritte Summand der rechten Seite von selbst weg. Denn da die Stelle $[x_0 + \vartheta h + (y_0 + \vartheta k)i]$ in $\mathfrak{B}$ liegt, sind zugleich mit der Ableitung $f'[x_0 + \vartheta h + (y_0 + \vartheta k)i]$ auch die partiellen Ableitungen $u_x(x_0 + \vartheta h,\ y_0 + \vartheta k)$, $u_y(x_0 + \vartheta h,\ y_0 + \vartheta k)$ beide gleich Null.

Ganz ebenso findet sich, daß auch

$$v(x_0 + h,\ y_0 + k) = v(x_0,\ y_0)$$

sein muß. Also ist die Funktion $f(z)$ im Innern des betrachteten Kreises konstant, und dasselbe gilt natürlich auch von jedem anderen Kreise, dessen Fläche ganz zu $\mathfrak{B}$ gehört. Nun ist es aber, wenn irgend zwei verschiedene Stellen z_0, z_1 von $\mathfrak{B}$ gegeben sind, immer möglich, eine endliche Anzahl von Kreisen nacheinander so zu bestimmen, daß

1. — das Innere jedes Kreises ganz zu $\mathfrak{B}$ gehört,

2. — jeder nachfolgende Kreis mit dem nächstvorangehenden einen Flächenteil gemeinsam hat,

3. — der Punkt z_0 im Innern des ersten und der Punkt z_1 im Innern des letzten Kreises liegt.[1])

Folglich hat die Funktion $f(z)$ an der Stelle z_1 den gleichen Wert wie an der Stelle z_0, ist also in dem ganzen Kontinuum konstant.

Nachdem so der Hilfssatz bewiesen ist, kann man sich von der Richtigkeit der unmittelbar vorher ausgesprochenen Behauptung ganz ebenso überzeugen wie bei Funktionen reellen Argumentes.

440. Ausdehnung der Grundformeln der Integralrechnung. — Durch einen Rückblick auf die in den Nummern **433—437** entwickelten Regeln zur Berechnung unbestimmter Integrale überzeugt man sich leicht, daß alle diese Regeln nebst ihren Beweisen bei ganz geringen Änderungen des Wortlautes auch dann aufrecht erhalten werden können, wenn die reelle Veränderllche x durch eine komplexe Veränderliche z ersetzt wird und die vorkommenden unbestimmten Konstanten nicht bloß reelle, sondern auch

1) Die Richtigkeit dieser Behauptung ist selbstverständlich, falls $\mathfrak{B}$ die ganze unendliche Ebene umfaßt, und läßt sich anderenfalls folgendermaßen in aller Strenge beweisen: Man denke sich die Punkte z_0, z_1 durch einen ganz in $\mathfrak{B}$ verlaufenden Weg $\mathfrak{l}$ verbunden, was wegen des Zusammenhangs von $\mathfrak{B}$ immer möglich ist, und denke sich diesen Weg durch zwei Gleichungen

$$x = \varphi(t); \qquad y = \chi(t)$$

dargestellt, wo $\varphi(t), \chi(t)$ durchweg stetige Funktionen des von einem endlichen Minimalwert a bis zu einem endlichen Maximalwert b frei veränderlichen Parameters t bedeuten. Ferner denke man sich, was ebenfalls immer zulässig ist, eine positive Konstante ϱ so bestimmt, daß das Innere eines jeden Kreises, der den Radius ϱ hat und dessen Mittelpunkt auf $\mathfrak{l}$ liegt, ganz zu $\mathfrak{B}$ gehört. Dann kann man, da die Funktionen $\varphi(t), \chi(t)$ für $a \leq t \leq b$ gleichmäßig stetig sind, eine positive Konstante η so bestimmen, daß für je zwei dem Intervall $(a \cdots b)$ angehörende Zahlen t, t', die der Bedingung $|t - t'| < \eta$ genügen, immer sowohl

$$|\varphi(t) - \varphi(t')| < \varrho, \qquad \text{als auch} \qquad |\chi(t) - \chi(t')| < \varrho$$

ist, und kann hierauf eine feste, oberhalb 1 liegende ganze Zahl n so groß annehmen, daß $\frac{b-a}{n} < \eta$ ist. Teilt man sodann das Intervall $(a \cdots b)$ in n gleiche Teile und bestimmt man auf $\mathfrak{l}$ die den Teilpunkten entsprechenden Punkte $P_1, P_2, \cdots P_{n-1}$, so bilden diejenigen Kreise vom Radius ϱ, die den Punkt z_0 und die Punkte $P_1, P_2, \cdots P_{n-1}, z_1$ als Mittelpunkte haben, in der Tat eine Kette von Kreisen von der verlangten Beschaffenheit.

imaginäre Werte haben dürfen. Es ist dies einfach eine Folge des Erhaltenbleibens der Regeln der Differentialrechnung. Natürlich muß man sich die Veränderliche z überall da, wo Logarithmen, Potenzen mit nicht ganzzahligen Exponenten oder zyklometrische Funktionen in Frage kommen, auf ein passend gewähltes Kontinuum eingeschränkt und die zur eindeutigen Erklärung jener Ausdrücke nötigen Nebenbedingungen so gewählt denken, daß alle diese Ausdrücke differenzierbare Funktionen von z darstellen. Da es zu weitläufig wäre, hierauf immer wieder und wieder aufmerksam zu machen, werden diese Annahmen im nachfolgenden mehrfach stillschweigend gemacht werden.

441. Integration der rationalen Funktionen. — Das unbestimmte Integral einer *ganzen* rationalen Funktion $g(z)$ kann immer ohne weiteres angegeben werden. Hat man nämlich die ganze rationale Funktion $g(z)$ nach fallenden Potenzen von z geordnet und dadurch die Gleichung

$$g(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n$$

erhalten, wo n eine ganze nicht negative Zahl und $a_0, a_1, a_2, \cdots a_n$ Konstante bedeuten, so ergibt sich sofort

$$\int g(z)\,dz = \frac{a_0}{n+1} z^{n+1} + \frac{a_1}{n} z^n + \frac{a_2}{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_n z.$$

Handelt es sich zweitens um die Integration einer *gebrochenen* rationalen Funktion, so hat man vor allen Dingen darauf zu achten, ob man es mit einer echt — oder einer unecht gebrochenen Funktion (Nr. 159) zu tun hat. Von diesen beiden Fällen kann aber der zweite auf den ersten zurückgeführt werden, denn

Jede unecht gebrochene rationale Funktion einer Veränderlichen läßt sich in die Summe einer ganzen rationalen Funktion und einer echt gebrochenen rationalen Funktion zerlegen.

Zur wirklichen Ausführung dieser Zerlegung hat man nämlich nur nötig, die gegebene unecht gebrochene rationale Funktion als einen Quotienten $\frac{g_1(z)}{g_2(z)}$ zweier ganzen rationalen Funktionen $g_1(z)$, $g_2(z)$ darzustellen, diese nach fallenden Potenzen von z zu ordnen, und sodann den Zähler $g_1(z)$ nach dem gewöhnlichen Divisionsverfahren durch den Nenner $g_2(z)$ zu dividieren, bis man zu einem Reste gelangt, der von niedrigerem Grade ist als der Divisor.

Ist dann $q(z)$ der Quotient und $r(z)$ der Rest, der sich bei dieser Division ergibt, so ist

$$g_1(z) = q(z)g_2(z) + r(z),$$

also

$$\frac{g_1(z)}{g_2(z)} = q(z) + \frac{r(z)}{g_2(z)}.$$

Hiermit ist die gewünschte Zerlegung gefunden und zugleich die Integration der gegebenen unecht gebrochenen auf die Integration einer echt gebrochenen rationalen Funktion zurückgeführt.

Was nun endlich diese letztere Aufgabe anbelangt, so gibt es manche Fälle, in denen sie sich ohne weiteres lösen läßt. Insbesondere gehört hierher der Fall, daß die gegebene rationale Funktion die Form

$$\frac{A}{(z-a)^\alpha}$$

hat, wo a und A beliebige reelle oder imaginäre Konstante bedeuten und α eine ganze positive Zahl bezeichnet. Denn für $\alpha > 1$ gilt die Gleichung

(1173) $$\int \frac{A}{(z-a)^\alpha} dz = A\int (z-a)^{-\alpha} dz = -\frac{A}{\alpha-1}\frac{1}{(z-a)^{\alpha-1}},$$

und für $\alpha = 1$ ist

1174) $$\int \frac{A}{z-a} dz = A \lg(z-a),$$

wobei man sich die Abweichung der Differenz $(z-a)$ durch geeignete Nebenbedingungen eindeutig bestimmt denken muß, und zwar so, daß sie eine stetige Funktion von z ist.

Eine rationale Funktion einer Veränderlichen z heißt ein **einfacher Bruch** oder auch ein **Partialbruch,** wenn sie sich durch einen Ausdruck von der eben angegebenen Form $\frac{A}{(z-a)^\alpha}$ darstellen läßt. Die Konstante A heißt dabei kurz der **Zähler** des einfachen Bruches.

Der so erklärte Begriff eines einfachen Bruches ist deswegen wichtig, weil durch die Erledigung der Integration der einfachen Brüche auch ein Weg zur Integration aller anderen echt gebrochenen rationalen Funktionen gebahnt wird. Es gilt nämlich der folgende

Lehrsatz: *Jede echt gebrochene rationale Funktion einer Veränderlichen kann, wofern sie nicht selbst schon ein einfacher Bruch ist, in eine Summe von endlich vielen einfachen Brüchen aufgelöst werden.*

Beweis: Jede echt gebrochene rationale Funktion einer Veränderlichen z läßt sich als ein Quotient $\frac{Z(z)}{N(z)}$ zweier ganzen rationalen Funktionen $Z(z)$, $N(z)$ darstellen, von denen die zweite höheren Grad hat als die erste. Dabei darf auch vorausgesetzt werden, daß die Funktionen $Z(z)$ und $N(z)$ keinen gemeinschaftlichen Teiler, also auch keine gemeinschaftliche Nullstelle haben, da ein etwaiger gemeinschaftlicher Teiler stets nach dem bekannten Divisionsverfahren ermittelt und dann entfernt werden könnte.

Bei dieser Darstellung sei nun a eine Wurzel der Gleichung

$$N(z) = 0$$

und α ihre Ordnungszahl. Dann ist

$$N(z) = (z-a)^{\alpha} g(z),$$

wo $g(z)$ eine für $z = a$ nicht verschwindende ganze rationale Funktion bedeutet. Ferner ist, wenn unter A_1 eine zunächst beliebige Konstante verstanden wird,

$$\frac{Z(z)}{N(z)} - \frac{A_1}{(z-a)^{\alpha}} = \frac{Z(z)}{(z-a)^{\alpha} g(z)} - \frac{A_1}{(z-a)^{\alpha}} = \frac{Z(z) - A_1 g(z)}{(z-a)^{\alpha} g(z)}.$$

Hier kann man nun aber den zuletzt erhaltenen Ausdruck durch passende Verfügung über die Konstante A_1 vereinfachen. Bestimmt man nämlich die Konstante A_1 so, daß

$$Z(a) - A_1 g(a) = 0$$

wird, d. h., setzt man von jetzt an

$$A_1 = \frac{Z(a)}{g(a)}, \tag{1175}$$

so wird die ganze Funktion $[Z(z) - A_1 g(z)]$ durch die Differenz $(z-a)$ teilbar, und wenn $Z_1(z)$ den durch Ausführung der Division entstehenden Quotienten bedeutet, so ist

$$\frac{Z(z)}{N(z)} - \frac{A_1}{(z-a)^{\alpha}} = \frac{Z_1(z)}{(z-a)^{\alpha-1} g(z)}$$

oder

(1176) $$\frac{Z(z)}{N(z)} = \frac{A_1}{(z-a)^\alpha} + \frac{Z_1(z)}{(z-a)^{\alpha-1} g(z)}.$$

Ist nun hier der zweite Teil der rechten Seite dauernd gleich Null, so ist die gegebene rationale Funktion selbst schon ein einfacher Bruch. Anderenfalls ist in der Gleichung (1176) der zweite Teil der rechten Seite wenigstens insofern einfacher wie die linke Seite, als er einen Nenner von niedrigerem Grade hat. Zugleich ist dieser zweite Teil natürlich wieder echt gebrochen.

Nunmehr kann man, wenn $\alpha > 1$ und $Z_1(z)$ nicht durch $(z-a)^{\alpha-1}$ teilbar ist, von dem Bruch $\frac{Z_1(z)}{(z-a)^{\alpha-1} g(z)}$ wieder einen einfachen Bruch abtrennen, dessen Nenner eine Potenz von $(z-a)$ ist, und zwar so, daß es entweder der Hinzufügung eines weiteren Summanden überhaupt nicht mehr bedarf, oder daß der hinzuzufügende Summand abermals einen Nenner von niedrigerem Grade hat. So kann man weiter fortfahren. Dabei gelangt man, falls die Gleichung $N(z) = 0$ nur die eine Wurzel a hat, also $g(z)$ eine Konstante ist, spätestens nach α Schritten zu einer Zerlegung des Bruches $\frac{Z(z)}{N(z)}$ in eine Summe

$$\frac{A_1}{(z-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(z-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{z-a}$$

von einfachen Brüchen. Hat dagegen die Gleichung $N(z) = 0$ außer der Wurzel a noch eine oder mehrere andere Wurzeln $b, c \cdots$, so gelangt man, ebenfalls spätestens nach α Schritten, zu einem nicht dauernd verschwindenden Bruch, dessen Nenner den Faktor $(z-a)$ nicht mehr enthält, und kann dann von diesem zunächst einen oder mehrere einfache Brüche abtrennen, deren Nenner Potenzen von $(z-b)$ sind, dann einfache Brüche, die Potenzen von $(z-c)$ zu Nennern haben, und so fort. Aber da die Gleichung $N(z) = 0$ nur eine endliche Anzahl verschiedener Wurzeln hat, so erreicht man notwendig nach einer endlichen Anzahl von Schritten einen Abschluß und erhält, wenn

$$a,\ b,\ c, \cdots l$$

die voneinander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $N(z) = 0$ und

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma, \cdots \lambda$$

ihre Ordnungszahlen bedeuten, als Endergebnis eine Gleichung von der Form

$$
(1177)\quad \begin{cases}
\dfrac{Z(z)}{N(z)} = \dfrac{A_1}{(z-a)^{\alpha}} + \dfrac{A_2}{(z-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \dfrac{A_{\alpha}}{z-a} \\
\quad + \dfrac{B_1}{(z-b)^{\beta}} + \dfrac{B_2}{(z-b)^{\beta-1}} + \cdots + \dfrac{B_{\beta}}{z-b} \\
\quad + \dfrac{C_1}{(z-c)^{\gamma}} + \dfrac{C_2}{(z-c)^{\gamma-1}} + \cdots + \dfrac{C_{\gamma}}{z-c} \\
\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\quad + \dfrac{L_1}{(z-l)^{\lambda}} + \dfrac{L_2}{(z-l)^{\lambda-1}} + \cdots + \dfrac{L_{\lambda}}{z-l},
\end{cases}
$$

wo $A_1, A_2, \cdots A_{\alpha}, B_1, \cdots L_{\lambda}$ Konstante bedeuten. Hiermit ist der Beweis des oben ausgesprochenen Lehrsatzes vollständig erbracht.

Wenn die Gleichung $N(z) = 0$ mehrere verschiedene Wurzeln $a, b, c, \cdots l$ hat, so sind verschiedene Anordnungen dieser Wurzeln möglich. Man kann daher, wenn man den Bruch $\frac{Z(z)}{N(z)}$ in der eben beschriebenen Weise nach und nach in eine Summe einfacher Brüche auflösen will, in verschiedener Weise zu Werke gehen, indem man z. B. das eine Mal mit der Abtrennung derjenigen einfachen Brüche beginnt, die der Wurzel a entsprechen, das andere Mal dagegen zuerst diejenigen Brüche abtrennt, die zu der Wurzel b gehören. Aber die Art, wie man die Zerlegung ausführt, hat auf das durch die Gleichung (1177) dargestellte Endergebnis keinen wesentlichen Einfluß. Es gilt vielmehr der Satz:

Die Zerlegung einer echt gebrochenen rationalen Funktion in eine Summe von einfachen Brüchen ist, wenn man von Änderungen in der Reihenfolge dieser letzteren absieht, immer nur auf eine Weise möglich.

Gäbe es nämlich außer der durch die Gleichung (1177) dargestellten Zerlegung der Funktion $\frac{Z(z)}{N(z)}$ noch eine zweite solche Zerlegung

$$
(1178)\quad \begin{cases}
\dfrac{Z(z)}{N(z)} = \dfrac{A'_1}{(z-a)^{\alpha}} + \dfrac{A'_2}{(z-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \dfrac{A'_{\alpha}}{z-a} \\
\quad + \dfrac{B'_1}{(z-b)^{\beta}} + \dfrac{B'_2}{(z-b)^{\beta-1}} + \cdots + \dfrac{B'_{\beta}}{z-b} \\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\quad + \dfrac{L'_1}{(z-l)^{\lambda}} + \dfrac{L'_2}{(z-l)^{\lambda-1}} + \cdots + \dfrac{L'_{\lambda}}{z-l}
\end{cases}
$$

wo auch $A'_1, A'_2, \cdots L'_{\lambda}$ Konstante bedeuten, so müßten die rechten Seiten der Gleichungen (1177) und (1178), also auch ihre Produkte mit $(z-a)^\alpha$, für jeden von $a, b, \cdots l$ verschiedenen Wert von z miteinander übereinstimmen. Es wäre also für jeden solchen Wert von z

$$\begin{aligned}
&A_1 + A_2(z-a) + \cdots + A_\alpha(z-a)^{\alpha-1} \\
&\quad + (z-a)^\alpha \left[\frac{B_1}{(z-b)^\beta} + \cdots + \frac{B_\beta}{z-b} + \cdots + \frac{L_1}{(z-l)^\lambda} + \cdots + \frac{L_\lambda}{z-l}\right] \\
&= A_1' + A_2'(z-a) + \cdots + A'_\alpha(z-a)^{\alpha-1} \\
&\quad + (z-a)^\alpha \left[\frac{B'_1}{(z-b)^\beta} + \cdots + \frac{B'_\beta}{z-b} + \cdots + \frac{L'_1}{(z-l)^\lambda} + \cdots + \frac{L'_\lambda}{(z-l}\right].
\end{aligned}$$

Läßt man nun z gegen a konvergieren, so erhält man $A_1 = A_1'$, kann, nachdem dies festgestellt, in den beiden miteinander zu vergleichenden Summen die Glieder $\frac{A_1}{(z-a)^\alpha}$ und $\frac{A_1'}{(z-a)^\alpha}$ gegeneinander heben, sodann ebenso zeigen, daß auch $A_2 = A_2'$ sein muß, und so fort.

Diese Eindeutigkeit der Zerlegung einer echt gebrochenen rationalen Funktion in einfache Brüche hat die praktisch wichtige Folge, daß man sich bei der Bestimmung der Zähler dieser Brüche nicht an dasjenige Verfahren zu binden braucht, welches beim Beweise der Zerlegbarkeit angegeben wurde, sondern statt dessen auch jedes beliebige andere zum Ziele führende Verfahren anwenden darf. Man kann beispielsweise für die Veränderliche z nacheinander so viele verschiedene spezielle Werte einsetzen, als Zähler zu bestimmen sind, und diese letzteren aus dem so sich ergebenden System linearer Gleichungen berechnen. Oder man kann in der die Zerlegung darstellenden Gleichung von der Form (1177) sämtliche Nenner durch Multiplikation wegschaffen und dann die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von z auf beiden Seiten vergleichen, was wieder zu einem System linearer Gleichungen führt, aus dem sich die unbekannten Zähler bestimmen lassen.

Beispiele. — **1.** — Zur Zerlegung des Bruches

$$\frac{3z^4 - 9z^3 + 4z^2 - 34z + 1}{(z-2)^3(z+3)^2}$$

in einfache Brüche hat man folgenden Ansatz zu machen

$$\begin{aligned}
\frac{3z^4 - 9z^3 + 4z^2 - 34z + 1}{(z-2)^3(z+3)^2} &= \frac{A_1}{(z-2)^3} + \frac{A_2}{(z-2)^2} + \frac{A_3}{z-2} \\
&\quad + \frac{B_1}{(z+3)^2} + \frac{B_2}{z+3}.
\end{aligned}$$

Setzt man nun für die Veränderliche z nacheinander die speziellen Werte

$$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 3$$

ein, so erhält man zur Bestimmung der fünf unbekannten Zähler A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 die Gleichungen

$$\begin{aligned}
-\tfrac{205}{64} &= -\tfrac{1}{64}A_1 + \tfrac{1}{16}A_2 - \tfrac{1}{4}A_3 + B_1 + B_2\\
-\tfrac{17}{36} &= -\tfrac{1}{27}A_1 + \tfrac{1}{9}A_2 - \tfrac{1}{3}A_3 + \tfrac{1}{4}B_1 + \tfrac{1}{2}B_2\\
-\tfrac{1}{72} &= -\tfrac{1}{8}A_1 + \tfrac{1}{4}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3 + \tfrac{1}{9}B_1 + \tfrac{1}{3}B_2\\
\tfrac{35}{16} &= -A_1 + A_2 - A_3 + \tfrac{1}{16}B_1 + \tfrac{1}{4}B_2\\
-\tfrac{65}{36} &= A_1 + A_2 + A_3 + \tfrac{1}{36}B_1 + \tfrac{1}{6}B_2.
\end{aligned}$$

Entfernt man dagegen aus der zunächst angesetzten Gleichung sämtliche Nenner durch Multiplikation mit dem Faktor $(z-2)^3(z+3)^2$ und vergleicht man sodann die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von z auf beiden Seiten, so erhält man die etwas leichter zu behandelnden Gleichungen

$$\begin{aligned}
3 &= A_3 + B_2\\
-9 &= A_2 + 2A_3 + B_1 - 3B_2\\
4 &= A_1 + 4A_2 - 11A_3 - 6B_1 - 6B_2\\
-34 &= 6A_1 - 3A_2 - 12A_3 + 12B_1 + 28B_2\\
1 &= 9A_1 - 18A_2 + 36A_3 - 8B_1 - 24B_2.
\end{aligned}$$

Beide Gleichungssysteme liefern für die Unbekannten übereinstimmend die folgenden Werte:

$$A_1 = -3;\quad A_2 = 0;\quad A_3 = 1;\quad B_1 = -5;\quad B_2 = 2.$$

Man erhält daher schließlich

$$(1179)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{3z^4 - 9z^3 + 4z^2 - 34z + 1}{(z-2)^3(z+3)^2} &= -\frac{3}{(z-2)^3} + \frac{1}{z-2}\\ &\quad -\frac{5}{(z+3)^2} + \frac{2}{z+3}.\end{aligned}\right.$$

2. — Um den Bruch $\frac{1}{(z^2+1)^2}$ in einfache Brüche zu zerlegen, hat man zunächst

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z^2+1)^2} &= \frac{1}{(z+i)^2\,(z-i)^2}\\ &= \frac{A_1}{(z+i)^2} + \frac{A_2}{z+i} + \frac{B_1}{(z-i)^2} + \frac{B_2}{z-i}\end{aligned}$$

zu setzen. Schafft man die Nenner weg, so erhält man

$$\begin{aligned}1 = {} & A_1(z^2-2iz-1) + A_2(z^3-iz^2+z-i)\\ & + B_1(z^2+2iz-1) + B_2(z^3+iz^2+z+i),\end{aligned}$$

und wenn man nun die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von z auf beiden Seiten vergleicht, so bekommt man die Gleichungen

$$\begin{aligned}0 &= \phantom{-2iA_1+{}} A_2 \phantom{{}+2iB_1} + B_2\\ 0 &= A_1 - iA_2 + B_1 + iB_2\\ 0 &= -2iA_1 + A_2 + 2iB_1 + B_2\\ 1 &= -A_1 - iA_2 - B_1 + iB_2.\end{aligned}$$

Die Auflösung derselben ergibt

$$A_1 = -\frac{1}{4};\quad A_2 = \frac{1}{4}i;\quad B_1 = -\frac{1}{4};\quad B_2 = -\frac{1}{4}i.$$

Man erhält daher schließlich

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(z+i)^2} + \frac{i}{4}\,\frac{1}{z+i} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{(z-i)^2} - \frac{i}{4}\,\frac{1}{z-i}. \tag{1180}$$

Mit dem Nachweis der Zerlegbarkeit jeder echt gebrochenen rationalen Funktion einer Veränderlichen in einfache Brüche ist das letzte Hindernis beseitigt, welches der Integration der rationalen Funktionen noch entgegenstand. Es ergibt sich also schließlich:

Das unbestimmte Integral einer rationalen Funktion einer Veränderlichen kann stets in geschlossener Form dargestellt werden.

Beispielsweise folgt aus der Gleichung (1179)

$$\left\{\begin{aligned}&\int\frac{3z^4-9z^3+4z^2-34z+1}{(z-2)^3(z+3)^2}\,dz\\ &\quad = \frac{3}{2}\,\frac{1}{(z-2)^2} + \frac{5}{z+3} + \lg(z-2) + 2\lg(z+3)\end{aligned}\right. \tag{1181}$$

und aus der Gleichung (1180)

$$(1182)\quad \left\{\begin{aligned}\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}&=\frac{1}{4}\frac{1}{z+i}+\frac{1}{4}\frac{1}{z-i}+\frac{i}{4}\lg\frac{z+i}{z-i}\\&=\frac{1}{2}\frac{z}{z^2+1}-\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} z \qquad \text{(vgl. Nr. 399)}\\&=\frac{1}{2}\frac{z}{z^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z-\frac{\pi}{4}.\end{aligned}\right.$$

Natürlich könnte die Konstante $-\frac{\pi}{4}$, welche in dem zuletzt erhaltenen Ausdruck vorkommt, auch mit der Integrationskonstanten vereinigt und daher weggelassen werden.

Kunstgriffe zur möglichst schnellen Integration rationaler Funktionen werden in Nr. **444** bis **449** besprochen werden.

442. Integration irrationaler algebraischer Funktionen. — Schon unter den irrationalen algebraischen Funktionen einer Veränderlichen finden sich neben solchen Funktionen, deren Integrale in geschlossener Form darstellbar sind, auch solche, bei denen dies nicht zutrifft. Die praktisch wichtigsten Arten von Ausdrücken, welche eine Veränderliche z enthalten und Funktionen von der ersteren Beschaffenheit darstellen, sind folgende:

I. — Alle Ausdrücke, die aus z und einer beliebig hohen Wurzel aus einer ganzen rationalen Funktion ersten Grades von z rational zusammengesetzt sind, d. h. die Form

$$R(z; \sqrt[n]{az+b})$$

haben, wo das Funktionszeichen R eine rationale Funktion seiner beiden Argumente bezeichnet und n eine beliebige ganze positive Zahl und a und b Konstante bedeuten.

II. — Alle Ausdrücke, die aus z und einer beliebig hohen Wurzel aus einem Quotienten zweier ganzen rationalen Funktionen ersten Grades von z rational zusammengesetzt sind, d. h. die Form

$$R\left(z; \sqrt[n]{\frac{az+b}{cz+g}}\right)$$

haben, wo R, n, a, b die gleiche Bedeutung haben wie zuvor und auch c und g Konstante bezeichnen.

III. — Alle Ausdrücke, die aus z und einer Quadratwurzel aus einer ganzen rationalen Funktion zweiten Grades von z rational zusammengesetzt sind, d. h. die Form

$$R(z; \sqrt{az^2+bz+c})$$

haben, wo das Funktionszeichen R wieder eine rationale Funktion seiner beiden Argumente bezeichnet und a, b, c Konstante bedeuten.

IV. — Alle Ausdrücke, die aus z und zwei Quadratwurzeln aus ganzen rationalen Funktionen ersten Grades von z rational zusammengesetzt sind, d. h. die Form

$$R(z;\sqrt{az+b};\sqrt{cz+g})$$

haben, wo das Funktionszeichen R eine rationale Funktion seiner Argumente bezeichnet und a, b, c, g Konstante bedeuten.

Zur wirklichen Berechnung des unbestimmten Integrales kann man bei den vier eben unterschiedenen Arten von Ausdrücken auf folgenden Wegen gelangen:

Fall **I.** — Man führe an Stelle von z eine neue Veränderliche w ein, indem man

(1183) $$\sqrt[n]{az+b}=w$$

setzt. Dann wird

$$az+b=w^n,$$

also

$$z=\frac{w^n-b}{a} \qquad \text{und} \qquad dz=\frac{n}{a}w^{n-1}\,dw,$$

folglich

(1184) $$\int R(z;\sqrt[n]{az+b})\,dz=\frac{n}{a}\int R\left(\frac{w^n-b}{a};w\right)w^{n-1}\,dw.$$

Nun kommt aber rechts kein Wurzelzeichen mehr vor. Die unter dem Integralzeichen stehende Funktion von w ist vielmehr rational; denn der sie darstellende Ausdruck ist aus rationalen Funktionen durch eine endliche Anzahl von Anwendungen der vier elementaren Grundoperationen aufgebaut. Nach Nr. **441** kann man daher das unbestimmte Integral dieser Funktion durch einen geschlossenen analytischen Ausdruck darstellen, und wenn man in diesen für w die Wurzel $\sqrt[n]{az+b}$ einsetzt, so erhält man wieder einen geschlossenen analytischen Ausdruck.

Fall **II.** — Man darf annehmen, daß der Quotient $\frac{az+b}{cz+g}$ keine Konstante sei, und kann daher an Stelle von z eine neue Veränderliche w einführen, indem man

(1185) $$\sqrt[n]{\frac{az+b}{cz+g}}=w$$

setzt. Dann wird

$$\frac{az+b}{cz+g}=w^n,$$

folglich

$$z=-\frac{gw^n-b}{cw^n-a} \quad \text{und} \quad dz=n(ag-bc)\frac{w^{n-1}}{(cw^n-a)^2}dw,$$

also

(1186) $$\left\{\begin{aligned}&\int R\left(z;\sqrt[n]{\frac{az+b}{cz+g}}\right)dz\\&\quad=n(ag-bc)\int R\left(-\frac{gw^n-b}{cw^n-a};\, w\right)\frac{w^{n-1}}{(cw^n-a)^2}dw,\end{aligned}\right.$$

womit wieder die Integration der gegebenen Funktion auf die einer rationalen Funktion zurückgeführt ist.

Fall **III.** — Sollte $b^2-4ac=0$ sein, so wäre der Ausdruck (az^2+bz+c) das Quadrat einer linearen Funktion von z, so daß sich die Quadratwurzel ohne weiteres beseitigen ließe. Daher bleibt nur der Fall zu erörtern, daß $b^2-4ac \neq 0$ ist. In diesem Fall setze man für z eine gebrochene rationale Funktion einer neuen Veränderlichen w und suche diese Funktion so zu wählen, daß umgekehrt auch w in geschlossener Form durch z ausgedrückt werden kann und daß außerdem der unter dem Quadratwurzelzeichen stehende Ausdruck (az^2+bz+c) in das Quadrat einer rationalen Funktion von w übergeht. Ist dies gelungen, so kann man die Quadratwurzel ausziehen und hat die Integration der gegebenen Funktion auf die einer rationalen Funktion zurückgeführt. Dieses Ziel läßt sich nun auf verschiedene Weisen erreichen. Insbesondere bieten sich die folgenden Möglichkeiten:

A. — Man setze zunächst

(1187) $$\sqrt{az^2+bz+c}=\sqrt{a}(w-z),$$

wo für $\sqrt{a}$ nach Belieben einer der möglichen Werte genommen werden kann. Dann wird

(1188) $$w=z+\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{az^2+bz+c}.$$

Ferner ist

$$az^2+bz+c=a(w^2-2wz+z^2)$$

oder

$$bz+c=aw^2-2awz.$$

Da jetzt die Glieder mit z^2 weggefallen sind, so ergibt sich aus dieser Gleichung z als rationale Funktion von w, nämlich

(1189) $$z=\frac{aw^2-c}{2aw+b}.$$

Führt man nun diesen Ausdruck für z in die Gleichung (1187) ein, so erhält man

(1190) $$\sqrt{az^2+bz+c}=\sqrt{a}\,\frac{aw^2+bw+c}{2aw+b}.$$

Also wird auch $\sqrt{az^2+bz+c}$ eine r a t i o n a l e Funktion von w. Da endlich

(1191) $$dz=2a\frac{aw^2+bw+c}{(2aw+b)^2}dw$$

ist, so ergibt sich schließlich

(1192) $$\left\{\begin{aligned}&\int R(z;\sqrt{az^2+bz+c})dz\\&=2a\int R\left(\frac{aw^2-c}{2aw+b};\sqrt{a}\,\frac{aw^2+bw+c}{2aw+b}\right)\frac{aw^2+bw+c}{(2aw+b)^2}dw,\end{aligned}\right.$$

womit das vorgelegte Integral auf das einer rationalen Funktion zurückgeführt ist. Nach Ausrechnung dieses letzteren ist natürlich für w der durch die Gleichung (1188) gegebene Ausdruck einzusetzen.

B. — Man setze zunächst

(1193) $$\sqrt{az^2+bz+c}=wz-\sqrt{c},$$

wo für $\sqrt{c}$ jeder der beiden möglichen Werte zulässig ist. Dann wird, wofern man sich den Wert 0 vom Wertbereich der Veränderlichen z ausgeschlossen denkt,

(1194) $$w=\frac{\sqrt{az^2+bz+c}+\sqrt{c}}{z}.$$

Ferner ist

$$az^2+bz+c=w^2z^2-2\sqrt{c}\,wz+c.$$

Aber wenn man hier die Konstante c auf beiden Seiten streicht und dann durch z dividiert, so erhält man wieder eine Gleichung ersten Grades in bezug auf z, nämlich

$$az + b = w^2 z - 2\sqrt{c}w.$$

Die Auflösung dieser Gleichung liefert

(1195) $$z = \frac{2\sqrt{c}w + b}{w^2 - a},$$

und wenn man diesen Ausdruck für z in die rechte Seite der Gleichung (1193) einsetzt, so erhält man

(1196) $$\sqrt{az^2 + bz + c} = \frac{\sqrt{c}w^2 + bw + a\sqrt{c}}{w^2 - a}.$$

Da endlich

(1197) $$dz = -2\frac{\sqrt{c}w^2 + bw + a\sqrt{c}}{(w^2 - a)^2}dw$$

ist, so ergibt sich schließlich

(1198) $$\left\{\begin{aligned} &\int R(z; \sqrt{az^2 + bz + c})dz \\ &= -2\int R\left(\frac{2\sqrt{c}w + b}{w^2 - a}; \frac{\sqrt{c}w^2 + bw + a\sqrt{c}}{w^2 - a}\right)\frac{\sqrt{c}w^2 + bw + a\sqrt{c}}{(w^2 - a)^2}dw, \end{aligned}\right.$$

womit wieder das erstrebte Ziel erreicht ist.

C. — Man löse zunächst die quadratische Gleichung

$$az^2 + bz + c = 0$$

auf. Sind z_1 und z_2 die Wurzeln derselben, so ist immer

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

Ferner ist z_1 von z_2 verschieden, weil sonst $b^2 - 4ac = 0$ sein müßte, was ja ausgeschlossen wurde. Also ist der Quotient $\frac{z - z_1}{z_2 - z}$ [1]) keine Konstante. Man darf daher

(1199) $$\sqrt{\frac{z - z_1}{z_2 - z}} = w$$

1) Man könnte statt des Quotienten $\frac{z - z_1}{z_2 - z}$ auch den Quotienten $\frac{z - z_1}{z - z_2}$ in die Rechnung einführen. Dem ersteren ist jedoch der Vorzug gegeben, damit man in gewissen praktisch vorkommenden und später noch genauer zu kennzeichnenden Fällen nur mit reellen Zahlen zu rechnen hat.

setzen, wo w eine neue Veränderliche bedeutet, und erhält dann

$$z = \frac{z_1 + z_2 w^2}{1 + w^2}, \tag{1200}$$

also

$$dz = \frac{2(z_2 - z_1) w}{(1 + w^2)^2} dw. \tag{1201}$$

Ferner ist

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt{az^2 + bz + c} &= \sqrt{-a} \sqrt{(z - z_1)(z_2 - z)} \\ &= \sqrt{-a} (z_2 - z) \sqrt{\frac{z - z_1}{z_2 - z}}, \end{aligned} \right. \tag{1202}$$

woraus mittels der Gleichungen (1199) und (1200)

$$\sqrt{az^2 + bz + c} = \sqrt{-a} \frac{z_2 - z_1}{1 + w^2} w \tag{1203}$$

folgt. Somit ergibt sich schließlich

$$\left\{ \begin{aligned} &\int \boldsymbol{R}\left(z; \sqrt{az^2 + bz + c}\right) dz \\ &= 2(z_2 - z_1) \int \boldsymbol{R}\left(\frac{z_1 + z_2 w^2}{1 + w^2}; \sqrt{-a}(z_2 - z_1) \frac{w}{1 + w^2}\right) \frac{w}{(1 + w^2)^2} dw, \end{aligned} \right. \tag{1204}$$

womit die zu lösende Aufgabe wieder auf die Integration einer rationalen Funktion zurückgeführt ist.

Dieses dritte Verfahren kann auch als eine Zurückführung des Falles **III** auf den Fall **II** aufgefaßt werden. Denn durch die Umwandlung der Wurzel $\sqrt{az^2 + bz + c}$ mittels der Gleichung (1202) wird der zu integrierende Ausdruck in einen anderen verwandelt, der den Voraussetzungen des Falles **II** entspricht.

Fall **IV**. — Man führe an Stelle von z eine neue Veränderliche w ein, indem man

$$\sqrt{az + b} = w$$

setzt. Dann wird

$$az + b = w^2,$$

also

$$z = \frac{w^2 - b}{a}; \qquad dz = \frac{2w}{a} dw.$$

Ferner wird

$$cz + g = \frac{cw^2 + ag - bc}{a}.$$

Man erhält daher schließlich

$$(1205)\quad \begin{cases} \int R(z; \sqrt{az+b}; \sqrt{cz+g})\,dz \\ \qquad = \frac{2}{a}\int R\left(\frac{w^2-b}{a}; w; \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{cw^2+ag-bc}\right) w\,dw. \end{cases}$$

Hiermit ist aber der Fall **IV** auf den Fall **III** zurückgeführt.

Beispiele zu den vorangehenden rein theoretischen Auseinandersetzungen und praktische Regeln zur möglichst bequemen Berechnung von Integralen irrationaler Funktionen werden in Nr. **450—456** angegeben werden.

Den bisher aufgezählten Arten von Funktionen ließen sich noch manche andere Arten entwickelter irrationaler algebraischer Funktionen anreihen, deren Integrale ebenfalls in geschlossener Form darstellbar sind. Aber sobald in dem Ausdruck einer entwickelten algebraischen Funktion einer Veränderlichen z eine Quadratwurzel aus einer ganzen rationalen Funktion dritten oder höheren Grades von z oder eine höhere Wurzel aus einer nicht linearen Funktion von z vorkommt, kann der Fall eintreten, daß es unmöglich ist, das unbestimmte Integral in geschlossener Form darzustellen. Insbesondere sind, wie schon J. Liouville in der auf S. 64 in der Fußnote unter 2 erwähnten Abhandlung gezeigt hat, die sogenannten elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung, d. h. die Integrale

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad \text{und} \quad \int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

wo k^2 eine von 1 verschiedene Konstante bedeutet, nicht in geschlossener Form darstellbar, und dasselbe gilt von den sogenannten Weierstrassschen Normalintegralen

$$\int \frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}} \quad \text{und} \quad \int \frac{z\,dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}},$$

sobald die Konstanten g_2, g_3 so beschaffen sind, daß die Differenz $(g_2^3 - 27g_3^2)$ nicht gleich Null ist.

Weitreichende Hilfsmittel zur Entscheidung der Frage, ob das unbestimmte Integral einer gegebenen algebraischen Funktion einer Veränderlichen in geschlossener Form darstellbar ist oder nicht, hat die Lehre von den elliptischen und den Abelschen Integralen geliefert. Aber auf diese Dinge kann hier nicht näher eingegangen werden.

443. Integration transzendenter Funktionen. — Zu denjenigen transzendenten Funktionen eines Argumentes z, deren unbestimmte Integrale in geschlossener Form darstellbar sind, gehören insbesondere

I. — alle rationalen Funktionen von e^z, d. h. alle Funktionen, welche sich durch Ausdrücke von der Form

$$R(e^z)$$

darstellen lassen, wo das Funktionszeichen R eine rationale Funktion seines Argumentes bezeichnet.

Ist nämlich irgend eine rationale Funktion $R(e^z)$ von e^z gegeben, so erhält man, indem man mittels der Gleichungen

$$e^z = w; \qquad z = \lg w$$

eine neue Veränderliche w einführt, sofort

$$\int R(e^z)\,dz = \int R(w)\,\frac{1}{w}\,dw \tag{1206}$$

und hat damit die Integration der gegebenen Funktion auf die einer rationalen Funktion zurückgeführt.

Nach dem allgemeinen in Nr. 433 unter 9 angegebenen Satze ist dann natürlich auch jedes Integral von der Form

$$R(e^{az})\,dz,$$

wo a eine beliebige von Null verschiedene Konstante bedeutet, durch einen geschlossenen Ausdruck darstellbar.

Zu den gegenwärtig in Rede stehenden Funktionen gehören ferner

II. — alle rationalen Funktionen von $\sin z$ und $\cos z$ d. h. alle Funktionen, die durch Ausdrücke von der Form

$$R(\sin z;\ \cos z)$$

darstellbar sind, wo das Funktionszeichen R eine rationale Funktion seiner beiden Argumente bedeutet.

Der Beweis läßt sich auf verschiedenen Wegen erbringen. Man kann zunächst die eine der beiden Funktionen $\sin z$, $\cos z$ gleich einer neuen Veränderlichen w setzen und erhält dann, wenn man etwa

$$\sin z = w$$

setzt und die Wurzel $\sqrt{1-w^2}$ passend bestimmt,

$$\cos z = \sqrt{1-w^2}; \quad z = \arcsin w; \quad dz = \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}},$$

also, wenn $R(\sin z; \cos z)$ irgend einen Ausdruck von der angegebenen Art bedeutet,

$$\int \boldsymbol{R}(\sin z; \cos z)dz = \int \boldsymbol{R}(w; \sqrt{1-w^2})\frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}. \tag{1207}$$

Hier ist aber das rechts stehende Integral nach Nr. **442, III** in geschlossener Form darstellbar, denn der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck ist aus der Integrationsveränderlichen w und einer einzigen Quadratwurzel aus einer ganzen Funktion zweiten Grades von w rational zusammengesetzt.

Dieses Verfahren ist insbesondere dann zu empfehlen, wenn es sich darum handelt, eine Potenz von $\sin z$ oder $\cos z$ zu integrieren, die einen ganzen positiven ungeraden Exponenten hat. Ist nämlich ν irgend eine ganze nicht negative Zahl, so erhält man, indem man $\sin z = w$ setzt,

$$\begin{aligned}\int \cos z^{2\nu+1} dz &= \int (\cos z^2)^\nu \cos z\, dz \\ &= \int (1-w^2)^\nu dw \\ &= \int \left[1 - \nu w^2 + \binom{\nu}{2} w^4 - \cdots + (-1)^\nu w^{2\nu}\right] dw\end{aligned}$$

und kann nun die Integration ausführen. Indem man dies tut und dann für w wieder $\sin z$ einsetzt, bekommt man die Gleichung

$$\left\{\begin{aligned}\int \cos z^{2\nu+1} dz = \sin z - \frac{1}{3}\nu \sin z^3 + \frac{1}{5}\binom{\nu}{2}\sin z^5 \\ - \cdots + (-1)^\nu \frac{1}{2\nu+1}\sin z^{2\nu+1}.\end{aligned}\right. \tag{1208}$$

Beispielsweise ist also

$$\int \cos z^3 dz = \sin z - \frac{1}{3}\sin z^3. \tag{1209}$$

Ähnlich findet man, indem man $\cos z = w$ setzt,

$$\begin{aligned}\int \sin z^{2\nu+1} dz &= \int (\sin z^2)^\nu \sin z\, dz \\ &= -\int (1-w^2)^\nu dw \\ &= -\int \left[1 - \nu w^2 + \binom{\nu}{2} w^4 - \cdots + (-1)^\nu w^{2\nu}\right] dw\end{aligned}$$

und erhält hieraus

$$(1210)\quad \left\{\begin{aligned}\int \sin z^{2\nu+1} dz = -\cos z + \frac{1}{3}\nu \cos z^3 - \frac{1}{5}\binom{\nu}{2}\cos z^5 \\ + \cdots + (-1)^{\nu+1}\frac{1}{2\nu+1}\cos z^{2\nu+1}.\end{aligned}\right.$$

Beispielsweise ist hiernach

$$(1211)\quad \int \sin z^3 dz = -\cos z + \frac{1}{3}\cos z^3.$$

Noch einfacher als auf dem eben beschriebenen Wege gelangt man manchmal zum Ziel, indem man von den Gleichungen (1072)

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Gebrauch macht. Denn da $e^{-iz} = \frac{1}{e^{iz}}$ ist, so werden $\sin z$ und $\cos z$ vermöge dieser Gleichungen rationale Funktionen von e^{iz}. Zugleich geht $R(\sin z; \cos z)$ in einen Ausdruck über, der rational aus e^{iz} zusammengesetzt ist und daher nach der unter **I** angegebenen Regel integriert werden kann.

Dieser Kunstgriff macht insbesondere eine schnelle Integration der Potenzen von $\sin z$ und $\cos z$ auch dann möglich, wenn die Exponenten ganze positive gerade Zahlen sind. Denn wenn man in einer Potenz von $\sin z$ oder $\cos z$ mit ganzem positivem Exponenten die trigonometrische Funktion durch e^{iz} ausdrückt, so kommt man stets auf eine der in Nr. **397** angegebenen Gleichungen, welche die Umkehrung der Moivreschen Formeln bilden. Bei allen diesen Gleichungen kann aber die rechte Seite ohne weiteres integriert werden. Insbesondere erhält man aus den Gleichungen (1077) und (1079) sofort

$$(1212)\quad \left\{\begin{aligned}\int \cos z^{2\nu} dz = \frac{1}{2^{2\nu}}\left\{\frac{1}{\nu}\sin(2\nu z) + \frac{1}{\nu-1}\binom{2\nu}{1}\sin[2(\nu-1)z]\right. \\ \left. + \frac{1}{\nu-2}\binom{2\nu}{2}\sin[2(\nu-2)z] + \cdots + \binom{2\nu}{\nu-1}\sin(2z) + \binom{2\nu}{\nu}z\right\},\end{aligned}\right.$$

$$(1213)\quad \left\{\begin{aligned}\int \sin z^{2\nu} dz = \frac{(-1)^\nu}{2^{2\nu}}\left\{\frac{1}{\nu}\sin(2\nu z) - \frac{1}{\nu-1}\binom{2\nu}{1}\sin[2(\nu-1)z]\right. \\ + \frac{1}{\nu-2}\binom{2\nu}{2}\sin[2(\nu-2)z] - \cdots \\ \left. + (-1)^{\nu-1}\binom{2\nu}{\nu-1}\sin(2z) + (-1)^\nu\binom{2\nu}{\nu}z\right\}.\end{aligned}\right.$$

Beispielsweise ist also

$$(1214) \qquad \int \cos z^2\,dz = \int \frac{1}{2}[\cos(2z)+1]\,dz = \frac{1}{4}[\sin(2z)+2z],$$

$$(1215) \qquad \int \cos z^4\,dz = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{2}\sin(4z)+4\sin(2z)+6z\right],$$

$$(1216) \qquad \int \sin z^2\,dz = \int \frac{1}{2}[-\cos(2z)+1]\,dz = -\frac{1}{4}[\sin(2z)-2z],$$

$$(1217) \qquad \int \sin z^4\,dz = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{2}\sin(4z)-4\sin(2z)+6z\right].$$

Die Integrale $\int \cos z^2\,dz$ und $\int \sin z^2\,dz$ würden sich auch dadurch finden lassen, daß man teilweise Integration anwendet. Man erhält dann nämlich

$$\int \cos z^2\,dz = \int \cos z \cos z\,dz = \cos z \sin z + \int \sin z^2\,dz$$
$$= \sin z \cos z + \int (1-\cos z^2)\,dz,$$

oder

$$\int \cos z^2\,dz = \sin z \cos z + z - \int \cos z^2\,dz.$$

Hieraus folgt aber durch Auflösung in bezug auf die Unbekannte $\int \cos z^2\,dz$ sofort

$$(1214^a) \qquad \int \cos z^2\,dz = \frac{1}{2}(\sin z \cos z + z),$$

was mit der Gleichung (1214) gleichwertig ist.

Eine ganz ähnliche Rechnung liefert die mit (1216) gleichwertige Gleichung

$$(1216^a) \qquad \int \sin z^2\,dz = \frac{1}{2}(-\sin z \cos z + z).$$

Selbstverständlich kann man mit Hilfe der Umkehrung der Moivreschen Formeln auch die Integrale solcher Potenzen von $\sin z$ und $\cos z$ berechnen, deren Exponenten ungerade sind. Auf diesem Wege erhält man aus den Gleichungen (1078) und (1080) die von den Gleichungen (1208) und (1210) nur in der äußeren Form abweichenden Gleichungen

$$(1208^a)\begin{cases} \int \cos z^{2\nu+1} dz \\ = \frac{1}{2^{2\nu}}\left\{ \frac{1}{2\nu+1}\sin[(2\nu+1)z] + \frac{1}{2\nu-1}\binom{2\nu+1}{1}\sin[(2\nu-1)z] \right. \\ \left. + \frac{1}{2\nu-3}\binom{2\nu+1}{2}\sin[(2\nu-3)z] + \cdots + \binom{2\nu+1}{\nu}\sin z \right\}, \end{cases}$$

$$(1210^a)\begin{cases} \int \sin z^{2\nu+1} dz \\ = \frac{(-1)^{\nu+1}}{2^{2\nu}}\left\{ \frac{1}{2\nu+1}\cos[(2\nu+1)z] - \frac{1}{2\nu-1}\binom{2\nu+1}{1}\cos[(2\nu-1)z] \right. \\ \left. + \frac{1}{2\nu-3}\binom{2\nu+1}{2}\cos[(2\nu-3)z] - \cdots + (-1)^{\nu}\binom{2\nu+1}{\nu}\cos z \right\}. \end{cases}$$

Insbesondere ergeben sich jetzt für $\nu = 1$ die mit dem Gleichungen (1209) und (1211) gleichwertigen Gleichungen

$$(1209^a) \qquad \int \cos z^3 dz = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\sin(3z) + 3\sin z\right],$$

$$(1211^a) \qquad \int \sin z^3 dz = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\cos(3z) - 3\cos z\right].$$

Ein drittes zur Integration rationaler Funktionen von $\sin z$ und $\cos z$ dienliches Verfahren, welches sich deswegen empfiehlt, weil es ganz direkt zum Ziele führt und bei reellwertigen Funktionen ohne Benutzung des Imaginären auskommt, besteht darin, daß man die Tangente des halben Argumentes als neue Veränderliche einführt. Setzt man nämlich

$$\operatorname{tg}\frac{z}{2} = w,$$

so wird

$$\sin z = \frac{2w}{1+w^2}; \qquad \cos z = \frac{1-w^2}{1+w^2}$$
$$z = 2\operatorname{arctg} w; \qquad dz = \frac{2dw}{1+w^2},$$

also

$$(1218) \qquad \int \boldsymbol{R}(\sin z;\ \cos z)dz = 2\int \boldsymbol{R}\left(\frac{2w}{1+w^2};\ \frac{1-w^2}{1+w^2}\right)\frac{dw}{1+w^2},$$

womit die Zurückführung des zu behandelnden Integrales auf das einer rationalen Funktion geleistet ist.

Beispielsweise erhält man

$$\begin{aligned}\int\frac{dz}{\cos z}&=2\int\frac{1+w^2}{1-w^2}\,\frac{dw}{1+w^2}=2\int\frac{dw}{1-w^2}\\&=\int\left(\frac{1}{1+w}+\frac{1}{1-w}\right)dw\\&=\lg\frac{1+w}{1-w}=\lg\frac{1+\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{z}{2}}.\end{aligned}$$

Diesem Ergebnis kann man schließlich noch eine einfachere Form geben. Da nämlich $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$ ist, kann man

$$\frac{1+\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{z}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{z}{2}}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right)$$

setzen und erhält dann

$$\int\frac{dz}{\cos z}=\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right). \tag{1219}$$

Neben den vorangehenden allgemeinen Regeln leisten natürlich auch besondere Kunstgriffe manchmal gute Dienste. So kann man z. B., wenn n irgend eine ganze oberhalb 2 liegende Zahl bedeutet, die Integrale der n-ten Potenzen von $\operatorname{tg}z$ und $\operatorname{ctg}z$ am leichtesten dadurch berechnen, daß man sie auf Integrale niedrigerer Potenzen von $\operatorname{tg}z$ und $\operatorname{ctg}z$ zurückführt. Man hat nämlich

$$\int\operatorname{tg}z^n\,dz=\int\operatorname{tg}z^{n-2}\frac{1-\cos z^2}{\cos z^2}\,dz,$$

und wenn man nun bedenkt, daß $\frac{1}{\cos z^2}=\frac{d\operatorname{tg}z}{dz}$ ist, so erhält man

$$\int\operatorname{tg}z^n dz=\int\operatorname{tg}z^{n-2}\frac{d\operatorname{tg}z}{dz}\,dz-\int\operatorname{tg}z^{n-2}dz$$

und hieraus

$$\int\operatorname{tg}z^n\,dz=\frac{1}{n-1}\operatorname{tg}z^{n-1}-\int\operatorname{tg}z^{n-2}\,dz. \tag{1220}$$

Ähnlich ist

$$\begin{aligned}&\int\operatorname{ctg}z^n dz\\&=\int\operatorname{ctg}z^{n-2}\frac{1-\sin z^2}{\sin z^2}\,dz=-\int\operatorname{ctg}z^{n-2}\frac{d\operatorname{ctg}z}{dz}\,dz-\int\operatorname{ctg}z^{n-2}\,dz,\end{aligned}$$

also

$$\int \operatorname{ctg} z^n \, dz = -\frac{1}{n-1} \operatorname{ctg} z^{n-1} - \int \operatorname{ctg} z^{n-2} dz. \tag{1221}$$

Durch fortgesetzte Anwendung dieser Formeln kommt man aber schließlich bei ungeradem n auf eines der aus den Gleichungen (1156) und (1157) bekannten Integrale

$$\int \operatorname{tg} z \, dz = -\lg \cos z\,; \quad \int \operatorname{ctg} z \, dz = \lg \sin z$$

und bei geradem n auf eines der Integrale

$$\int \operatorname{tg} z^2 \, dz = \int \frac{1-\cos z^2}{\cos z^2} dz = \operatorname{tg} z - z, \tag{1222}$$

$$\int \operatorname{ctg} z^2 \, dz = \int \frac{1-\sin z^2}{\sin z^2} dz = -\operatorname{ctg} z - z. \tag{1223}$$

Formeln von der Art der Gleichungen (1220) und (1221), welche eine Reihe von mathematischen Ausdrücken ähnlicher Art so miteinander verbinden, daß man jeden nachfolgenden Ausdruck berechnen kann, sobald man die vorangehenden kennt, werden vielfach als **Rekursionsformeln** bezeichnet (Rekursion = Zurückführung des verwickelteren auf die einfacheren Fälle).

Ein in vielen Fällen wirksames Mittel zur Auffindung von Integralen transzendenter Funktionen besteht in der Anwendung der teilweisen Integration. Wie sich mit seiner Hilfe zeigen läßt, gehören zu denjenigen Funktionen, deren Integrale in geschlossener Form darstellbar sind,

III. — alle Produkte von der Form

$$g(z)e^{az}$$

wo $g(z)$ eine ganze rationale Funktion und a eine beliebige von Null verschiedene[1]) Konstante bedeutet.

Ist nämlich $g(z)$ vom nullten Grade, d. h. gleich einer Konstanten c, so bereitet die Integration überhaupt keine Schwierigkeit, denn man findet ohne weiteres

$$\int c e^{az} \, dz = \frac{c}{a} e^{az}.$$

1) Für $a = 0$ ist die Richtigkeit der Behauptung selbstverständlich.

Ist dagegen $g(z)$ von höherem Grade, so erhält man durch teilweise Integration

$$\int g(z) e^{az}\,dz = \frac{1}{a} g(z) e^{az} - \frac{1}{a}\int g'(z) e^{az}\,dz$$

und hat damit das zu berechnende Integral auf ein anderes Integral von der gleichen Form zurückgeführt, in welchem der Grad des ganzen rationalen Faktors um eine Einheit niedriger ist. Dieses Integral kann dann, falls $g'(z)$ auch noch von höherem als dem nullten Grade ist, ebenso behandelt werden, und auf diese Weise fortfahrend kommt man nach einer endlichen Anzahl von Schritten zu einem Integral von der schon oben betrachteten Form $\int c e^{az} dz$, wo c eine Konstante bedeutet.

Ganz ebenso erledigen sich

IV. — alle Produkte von der Form

$$\boldsymbol{g(z)\sin(az)} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{g(z)\cos(az)},$$

wo wieder $g(z)$ eine ganze rationale Funktion und a eine von Null verschiedene Konstante bedeutet.

Man hat nämlich

$$\int g(z)\sin(az)\,dz = -\frac{1}{a} g(z)\cos(az) + \frac{1}{a}\int g'(z)\cos(az)\,dz$$

und

$$\int g(z)\cos(az)\,dz = \frac{1}{a} g(z)\sin(az) - \frac{1}{a}\int g'(z)\sin(az)\,dz,$$

kann also die Integrale der betrachteten Produkte durch (nötigenfalls wiederholte) Anwendung der teilweisen Integration auf die Integrale

$$\int \sin(az)\,dz = -\frac{1}{a}\cos(az) \quad \text{und} \quad \int \cos(az)\,dz = \frac{1}{a}\sin(az)$$

zurückführen.

Ferner gehören hierher

V. — die Produkte

$$\boldsymbol{e^{az}\sin(bz)} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{e^{az}\cos(bz)},$$

wo a und b zwei beliebige von Null verschiedene[1]) Konstante bedeuten.

1) Ist eine der Konstanten a, b gleich Null, so ist die Richtigkeit der Behauptung wieder selbstverständlich.

Durch teilweise Integration erhält man nämlich zunächst

$$\int e^{az}\sin(bz)dz = -\frac{1}{b}e^{az}\cos(bz) + \frac{a}{b}\int e^{az}\cos(bz)dz,$$

und wenn man nun das rechts stehende Integral wieder durch teilweise Integration umformt, so ergibt sich

$$\int e^{az}\sin(bz)dz = -\frac{1}{b}e^{az}\cos(bz) + \frac{a}{b^2}e^{az}\sin(bz) - \frac{a^2}{b^2}\int e^{az}\sin(bz)dz.$$

Hiermit ist man zwar wieder auf das ursprünglich vorgelegte Integral gekommen, aber wenn nicht gerade

$$-\frac{a^2}{b^2} = 1, \qquad \text{d. h.} \qquad a^2 + b^2 = 0$$

ist, was ja bei reellen von Null verschiedenen Werten von a und b niemals vorkommen kann, so hat man eine Gleichung gewonnen, in der das zu bestimmende Integral als Unbekannte auftritt, und erhält durch Auflösung dieser Gleichung

(1224) $$\int e^{az}\sin(bz)dz = e^{az}\frac{a\sin(bz) - b\cos(bz)}{a^2+b^2}.$$

Ähnlich findet man

$$\int e^{az}\cos(bz)dz = \frac{1}{b}e^{az}\sin(bz) - \frac{a}{b}\int e^{az}\sin(bz)dz$$
$$= \frac{1}{b}e^{az}\sin(bz) + \frac{a}{b^2}e^{az}\cos(bz) - \frac{a^2}{b^2}\int e^{az}\cos(bz)dz,$$

also, wenn wieder $a^2 + b^2 \neq 0$ ist,

(1225) $$\int e^{az}\cos(bz)dz = e^{az}\frac{b\sin(bz) + a\cos(bz)}{a^2+b^2}.$$

Zu den Gleichungen (1224) und (1225) kann man auch noch auf einem anderen Wege gelangen, nämlich dadurch, daß man für $\sin(bz)$ und $\cos(bz)$ beziehentlich die Ausdrücke $\frac{e^{ibz} - e^{-ibz}}{2i}$ und $\frac{e^{ibz} + e^{-ibz}}{2}$ einsetzt. Man erhält dann

$$(1226)\qquad \begin{aligned} e^{az}\sin(bz) &= \frac{1}{2i}\left[e^{(a+ib)z} - e^{(a-ib)z}\right] \\ e^{az}\cos(bz) &= \frac{1}{2}\left[e^{(a+ib)z} + e^{(a-ib)z}\right] \end{aligned}$$

und kommt nun, wenn (a^2+b^2), also auch $(a+ib)$ und $(a-ib)$ von Null verschieden ist, durch einfache Rechnungen wieder auf die Gleichungen (1224) und (1225) zurück. Zugleich gestattet dieses zweite Verfahren die Erledigung des Ausnahmefalles. Ist nämlich

$$a^2+b^2=0, \qquad \text{also} \qquad b=\pm ia$$

so ist

$$e^{az}\sin(bz) = e^{az}\sin(\pm iaz) = \pm e^{az}\sin(iaz)$$

und

$$e^{az}\cos(bz) = e^{az}\cos(\pm iaz) = e^{az}\cos(iaz).$$

Ferner ist nach den Gleichungen (1226)

$$e^{az}\sin(iaz) = \frac{1}{2i}(1-e^{2az}); \qquad e^{az}\cos(iaz) = \frac{1}{2}(1+e^{2az}),$$

also

$$\begin{aligned} \int e^{az}\sin(\pm iaz)\,dz &= \pm\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{2a}e^{2az}\right) \\ \int e^{az}\cos(\pm iaz)\,dz &= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{2a}e^{2az}\right). \end{aligned}$$

Zu denjenigen Funktionen, deren Integrale durch teilweise Integration gefunden werden können, gehören ferner

VI. — die Produkte

$$\sin(az)\sin(bz); \qquad \sin(az)\cos(bz); \qquad \cos(az)\cos(bz),$$

wo a und b beliebige von Null verschiedene Konstante bedeuten, die so beschaffen sind, daß (a^2-b^2) ebenfalls von Null verschieden ist.[1])

In der Tat ist ja

$$\int\sin(az)\sin(bz)\,dz = -\frac{1}{b}\sin(az)\cos(bz) + \frac{a}{b}\int\cos(az)\cos(bz)\,dz$$

$$= -\frac{1}{b}\sin(az)\cos(bz) + \frac{a}{b^2}\cos(az)\sin(bz) + \frac{a^2}{b^2}\int\sin(az)\sin(bz)\,dz,$$

1) Ist eine der Konstanten a, b gleich Null, so ist die Richtigkeit der Behauptung selbstverständlich. Ist $a=\pm b$, so folgt sie aus dem unter II gewonnenen Ergebnis.

woraus leicht

$$(1227)\qquad \int \sin(az)\sin(bz)\,dz = \frac{b\sin(az)\cos(bz) - a\cos(az)\sin(bz)}{a^2 - b^2}$$

folgt. Ganz ähnlich findet sich

$$(1228)\qquad \int \sin(az)\cos(bz)\,dz = \frac{-b\sin(az)\sin(bz) - a\cos(az)\cos(bz)}{a^2 - b^2},$$

$$(1229)\qquad \int \cos(az)\cos(bz)\,dz = \frac{a\sin(az)\cos(bz) - b\cos(az)\sin(bz)}{a^2 - b^2}.$$

Ein anderes Verfahren besteht darin, daß man die zu integrierenden Produkte zunächst in zweigliedrige Ausdrücke verwandelt mittels der Formeln

$$\sin(az)\sin(bz) = \frac{1}{2}\cos[(a-b)z] - \frac{1}{2}\cos[(a+b)z]$$

$$\sin(az)\cos(bz) = \frac{1}{2}\sin[(a+b)z] + \frac{1}{2}\sin[(a-b)z]$$

$$\cos(az)\cos(bz) = \frac{1}{2}\cos[(a+b)z] + \frac{1}{2}\cos[(a-b)z].$$

Man erhält dann sofort

$$(1227^{a})\qquad \int \sin(az)\sin(bz)\,dz = \frac{1}{2(a-b)}\sin[(a-b)z] - \frac{1}{2(a+b)}\sin[(a+b)z],$$

$$(1228^{a})\qquad \int \sin(az)\cos(bz)\,dz = -\frac{1}{2(a+b)}\cos[(a+b)z] - \frac{1}{2(a-b)}\cos[(a-b)z],$$

$$(1229^{a})\qquad \int \cos(az)\cos(bz)\,dz = \frac{1}{2(a+b)}\sin[(a+b)z] + \frac{1}{2(a-b)}\sin[(a-b)z].$$

Die Übereinstimmung dieser Gleichungen mit den Gleichungen (1227) bis (1229) läßt sich durch ganz einfache Rechnungen nachweisen.

Den unter **V.** und **VI.** behandelten Funktionsarten kann man noch eine allgemeinere Art von Funktionen anreihen, bei denen man durch teilweise Integration ebenfalls dazu gelangen kann, das unbestimmte Integral in geschlossener Form darzustellen. Sie umfaßt

VII. — alle Produkte von den Formen

$$g(z)e^{az}\sin(bz); \qquad g(z)e^{az}\cos(bz)$$
$$g(z)\sin(az)\sin(bz); \quad g(z)\sin(az)\cos(bz); \quad g(z)\cos(az)\cos(bz),$$

wo $g(z)$ eine beliebige ganze rationale Funktion und a und b beliebige Konstante bedeuten.

Man kann nämlich die vorkommenden trigonometrischen Funktionen durch Exponentialfunktionen ausdrücken und kommt dann auf Integrale der unter **III** behandelten Art. Ein hiervon nur unwesentlich verschiedenes Verfahren besteht darin, daß man das zu berechnende Integral durch teilweise Integration auf andere Integrale der hier in Rede stehenden Art zurückführt, in denen $g'(z)$ an die Stelle von $g(z)$ getreten, also der Grad des ganzen rationalen Faktors um eine Einheit niedriger ist, und die dann noch zu berechnenden Integrale erforderlichenfalls ebenso behandelt.

Zu den hier aufzuzählenden Arten von Funktionen gehören endlich auch manche Produkte eines Logarithmus oder einer zyklometrischen Funktion mit einer rationalen Funktion. Aber bei derartigen Produkten darf man die rationale Funktion nicht ganz nach Belieben annehmen. Das Integral des Produktes ist vielmehr im allgemeinen nur dann in geschlossener Form darstellbar, wenn der rationale Faktor die Ableitung einer zweiten rationalen Funktion ist, so daß alle diejenigen gebrochenen rationalen Funktionen auszuschließen sind, deren Integration auf Logarithmen führt. Hiernach kann man den bisher aufgezählten Funktionsarten, indem man unter $R(z)$ jedesmal eine beliebige rationale Funktion versteht, noch weiter anreihen

VIII. — alle Produkte von der Form

$$\lg z \frac{dR(z)}{dz},$$

IX. — alle Produkte von der Form

$$\operatorname{arctg} z \frac{dR(z)}{dz},$$

X. — alle Produkte von der Form

$$\arcsin z \frac{dR(z)}{dz}.$$

Durch teilweise Integration erhält man nämlich

$$\int \lg z \frac{dR(z)}{dz} dz = \lg z \cdot R(z) - \int \frac{1}{z} R(z) dz$$

$$\int \operatorname{arctg} z \frac{dR(z)}{dz} dz = \operatorname{arctg} z \cdot R(z) - \int \frac{1}{1+z^2} R(z) dz$$

$$\int \arcsin z \frac{dR(z)}{dz} dz = \arcsin z \cdot R(z) - \int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} R(z) dz,$$

kommt also in den Fällen **VIII** und **IX** auf das Integral einer rationalen Funktion und im Fall **X** auf das Integral eines Ausdruckes, welcher zu den in Nr. **442** unter **III** behandelten Ausdrücken gehört.

Ganz ähnliche Überlegungen zeigen, daß man die Funktionsarten **VIII**, **IX**, **X** noch in verschiedener Weise erweitern könnte. So könnte man an die Stelle von $R(z)$ in den Fällen **VIII** und **IX** auch einen Ausdruck treten lassen, der zu einer der in Nr. **442** unter **I** bis **IV** erwähnten Arten gehört. Und im Fall **X** könnte $R(z)$ durch einen Ausdruck ersetzt werden, der aus z und $\sqrt{1-z^2}$ rational zusammengesetzt ist. Ferner könnte man, wenn man als zweiten Faktor einen Ausdruck von der Form $\frac{dR(z)}{dz}$ beibehält, im Fall **VIII** die Funktion $\lg z$ durch den Logarithmus und im Fall **IX** die Funktion $\operatorname{arctg} z$ durch den Arcustangens einer beliebigen rationalen Funktion ersetzen, oder auch einer irrationalen Funktion, die zu einer der in Nr. **442** erwähnten Arten gehört. Das Integral des Produktes würde dann immer noch in geschlossener Form darstellbar bleiben, ja dies würde in manchen Fällen auch dann noch gelten, wenn sich eine solche Änderung der transzendenten Funktion mit einer der zuvor erwähnten Änderungen des algebraischen Faktors verbände.

Natürlich ist die vorstehende Aufzählung transzendenter Funktionen keineswegs erschöpfend, sondern umfaßt nur die einfachsten und praktisch wichtigsten Fälle.

Zur Technik des Integrierens.

A. Zur Integration der rationalen Funktionen.

444. Einfache Nullstellen des Nenners. — Wenn es sich darum handelt, eine echt gebrochene rationale Funktion, die in der Form eines Quotienten $\frac{Z(z)}{N(z)}$ zweier ganzen rationalen Funktionen $Z(z)$, $N(z)$ dargestellt ist, in einfache Brüche zu zerlegen, so lassen sich die Zähler derjenigen Partialbrüche, die zu einfachen Nullstellen des Nenners gehören, besonders leicht berechnen. *Denn ist a eine einfache Wurzel der Gleichung $N(z) = 0$ und ist $\frac{A}{z-a}$ der ihr entsprechende einfache Bruch, so ist immer*

(1230) $$A = \frac{Z(a)}{N'(a)}.$$

Da nämlich a eine einfache Wurzel der Gleichung $N(z) = 0$ sein soll, so ist

(1231) $$N(z) = (z-a)g(z),$$

wo $g(z)$ eine für $z = a$ nicht verschwindende ganze rationale Funktion bedeutet. Ferner ist nach Gleichung (1175)

$$A = \frac{Z(a)}{g(a)}.$$

Nun folgt aber aus (1231) durch Differentiation

$$N'(z) = g(z) + (z-a)g'(z)$$

und hieraus für $z = a$

$$N'(a) = g(a),$$

womit die Gleichung (1230) bewiesen ist.

Hiernach kann die Zerlegung der echt gebrochenen Funktion $\frac{Z(z)}{N(z)}$ in Partialbrüche in dem Falle, daß die Nullstellen des Nenners sämtlich einfach sind, sofort vollständig angegeben werden. Sind nämlich in diesem Falle $a, b, \cdots l$ die einzelnen Nullstellen, also

$$N(z) = C(z-a)(z-b)\cdots(z-l),$$

wo C eine Konstante bedeutet, so ist

(1232) $$\frac{Z(z)}{N(z)} = \frac{Z(a)}{N'(a)}\frac{1}{z-a} + \frac{Z(b)}{N'(b)}\frac{1}{z-b} + \cdots + \frac{Z(l)}{N'(l)}\frac{1}{z-l}.$$

445. Das Integral $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$. — In den praktisch vorkommenden Fällen der Integration einer gebrochenen rationalen Funktion einer Veränderlichen ist regelmäßig die Integrationsveränderliche auf reelle Werte beschränkt und die zu integrierende Funktion als ein Quotient zweier ganzen rationalen Funktionen darstellbar, deren Koeffizienten sämtlich reell sind. Ist nun hierbei der Nenner nur vom ersten Grade, so bedarf es zur Ausführung der Integration keines besonderen Kunstgriffes. Dagegen ist es nicht überflüssig, in dem nächst einfachen Falle, daß der Nenner vom zweiten Grade ist, die allgemeinen Integrationsregeln der Nr. **441** durch einige Vorschriften darüber zu ergänzen, wie man für das gesuchte Integral am einfachsten einen Ausdruck gewinnen kann, der für reelle Werte der Integrationsveränderlichen ebenfalls reell ist. Zugleich empfiehlt es sich, die hierzu dienenden Formeln ein für allemal gebrauchsfertig zusammenzustellen. Dabei genügt es natürlich, nur echt gebrochene rationale Funktionen ins Auge zu fassen. Für diesen Fall liefern nun die einfachsten Grundregeln der Integralrechnung sofort die folgenden Formeln, in denen unter r eine reelle Konstante und unter t eine reelle Veränderliche zu verstehen und für den vorkommenden Arcustangens der Hauptwert und für den vorkommenden Logarithmus der reelle Wert zu nehmen ist:

$$\int \frac{dt}{t^2+r^2} = \frac{1}{r} \operatorname{arctg} \frac{t}{r}, \tag{1233}$$

$$\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}, \tag{1234}$$

$$\int \frac{dt}{t^2-r^2} = \frac{1}{2r} \lg \left|\frac{t-r}{t+r}\right|. \tag{1235}$$

Alle anderen Integrale der gegenwärtig in Rede stehenden Art sind am einfachsten dadurch zu berechnen, daß man sie auf die vorstehenden speziellen Integrale zurückführt, was jedesmal dadurch geschehen kann, daß man eine passend gewählte lineare Funktion der ursprünglichen Integrationsveränderlichen x als neue Veränderliche einführt. Sind nämlich a, b, c irgend drei Konstante, von denen die erste von Null verschieden ist, so ist immer

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{4a\,dx}{(2ax+b)^2-(b^2-4ac)}.$$

Hieraus folgt aber, wenn

$$2ax+b=t$$

gesetzt wird,

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = 2\int \frac{dt}{t^2-(b^2-4ac)}.$$

Nun empfiehlt es sich, wenn a, b, c reell sind, drei verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem (b^2-4ac) negativ, gleich

Null, oder positiv ist, oder anders ausgedrückt, je nachdem die Gleichung $ax^2+bx+c=0$ zwei konjugiert imaginäre Wurzeln, eine reelle Doppelwurzel, oder zwei verschiedene reelle Wurzeln hat. Man gelangt dann mit Hilfe der Gleichungen (1233) bis (1235) zunächst zu folgenden, bei reellem x ebenfalls reellwertigen Ergebnissen:

1. — *Ist*

$$b^2-4ac<0,$$

so ist

(1236) $$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}},$$

wo das Zeichen arctg *den Hauptwert bedeutet.*

2. — *Ist*

$$b^2-4ac=0,$$

so ist

(1237) $$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=-\frac{2}{2ax+b}.$$

3. — *Ist*

$$b^2-4ac>0,$$

so ist

(1238) $$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\lg\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|.$$

Nunmehr kann man auch für das allgemeinere Integral

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx,$$

wo auch A und B reelle Konstante bedeuten, ein Berechnungsverfahren angeben, welches ohne Zuhilfenahme des Imaginären auskommt. Außer dem eben erledigten Falle, daß der Zähler des unter dem Integralzeichen stehenden Bruches gleich 1 ist, gibt es nämlich noch einen anderen, in welchem die Integration ebenfalls keine Schwierigkeit bereitet. Es ist dies der Fall, daß der Zähler mit der Ableitung des Nenners übereinstimmt. Denn dann gilt, wenn auch x auf reelle Werte beschränkt ist, so lange der Nenner von Null verschieden bleibt, die Gleichung

(1239) $$\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx=\lg|ax^2+bx+c|.$$

Auf das hiermit gewonnene und das durch die Gleichungen (1236) bis (1238) gegebene Integral kann aber das obige allgemeine Integral zurückgeführt werden. Denn naheliegende Umformungen ergeben die Gleichung

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

oder

$$(1240)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx \\ \displaystyle= \frac{A}{2a}\lg|ax^2+bx+c| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}. \end{cases}$$

Natürlich hat man bei der Anwendung dieser Gleichung wieder darauf zu achten, ob (b^2-4ac) negativ, gleich Null, oder positiv ist, und dementsprechend zur Berechnung des rechts vorkommenden Integrales bald die eine, bald die andere der Gleichungen (1236) bis (1238) zu benutzen.

446. Das Integral $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$. — Auch das Integral

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx,$$

wo n einen ganzen oberhalb 1 liegenden Exponenten bedeutet und a, b, c, A, B beliebige Konstante bezeichnen, von denen die erste von Null verschieden ist, kann am leichtesten dadurch berechnet werden, daß man dasselbe auf einfachere Integrale zurückführt. Zunächst ergibt sich nämlich durch Überlegungen ähnlicher Art wie bei der Herleitung der Gleichung (1240) die Gleichung

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$$
$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

oder

$$(1241)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = -\frac{A}{2(n-1)a}\cdot\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \\ \displaystyle\qquad + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}, \end{cases}$$

so daß man nur noch das rechts vorkommende Integral zu betrachten braucht. Bei diesem liegt es nun nahe, die Zurückführung auf das nächst einfachere Integral $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}$ zu versuchen, durch die man ja schließlich auf das keine Schwierigkeit mehr bietende Integral $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ kommen würde. Zu diesem Zweck verhilft aber in der Tat der Ansatz

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + R\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}, \tag{1242}$$

wo P, Q, R passend zu bestimmende Konstante bedeuten. Die Gleichung (1242) ist nämlich gleichwertig mit der aus ihr durch Differentiation und nachfolgende Multiplikation mit dem Faktor $(ax^2+bx+c)^n$ entstehenden Gleichung

$$1 = -(n-1)(Px+Q)(2ax+b) + (P+R)(ax^2+bx+c),$$

und diese besteht für beliebige Werte von x, sobald die Konstanten P, Q, R die aus der Vergleichung gleichhoher Potenzen von x hervorgehenden Bedingungen

$$\begin{aligned} -(2n-3)P \qquad\qquad\qquad\quad + \;R &= 0 \\ -(n-2)bP - 2(n-1)aQ + bR &= 0 \\ cP - \;(n-1)bQ + cR &= 1 \end{aligned}$$

befriedigen. Diese Gleichungen lassen sich aber stets durch ein und nur ein System von Werten der Unbekannten P, Q, R erfüllen. Setzt man nämlich in den beiden letzten Gleichungen für R den durch die erste Gleichung gelieferten Wert $(2n-3)P$, so erhält man nach naheliegenden Vereinfachungen

$$\begin{aligned} bP - 2aQ &= 0 \\ 2cP - \;bQ &= \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

und bekommt hieraus durch Auflösung sofort

$$P = \frac{2a}{(n-1)(4ac-b^2)}; \qquad Q = \frac{b}{(n-1)(4ac-b^2)}.$$

Somit ergibt sich schließlich die Rekursionsformel

$$\left\{\begin{aligned} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} &= \frac{1}{(n-1)(4ac-b^2)} \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \\ &\quad + \frac{2(2n-3)a}{(n-1)(4ac-b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}, \end{aligned}\right. \tag{1243}$$

womit ein gangbarer Weg zur allmählichen Zurückführung des links stehenden Integrales auf das bekannte Integral $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ gefunden ist, und zwar ein Weg, der bei reellen Werten der Konstanten a, b, c und der Integrationsveränderlichen x ohne Benutzung des Imaginären auskommt. Beispielsweise ergibt sich aus (1243) sofort

$$(1182^{a})\qquad \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x,$$

übereinstimmend mit der Gleichung (1182).

447. Vermeidung des Imaginären. — Wenn die teilerfremden ganzen rationalen Funktionen $Z(z)$, $N(z)$ lauter reelle Koeffizienten haben, aber die Wurzeln der Gleichung $N(z)=0$ nicht alle reell sind, so erhält man für das unbestimmte Integral des bei reellem Werte von z ebenfalls reellwertigen Bruches $\frac{Z(z)}{N(z)}$ durch das in Nr. **441** angegebene Berechnungsverfahren eine Summe, in deren Gliedern imaginäre Konstante auftreten. Allerdings sind diejenigen Glieder, bei welchen dies zutrifft, notwendig paarweise konjugiert, sobald man z auf reelle von den Nullstellen des Nenners verschiedene Werte einschränkt und diejenigen Nebenbedingungen, welche zur eindeutigen Erklärung der etwa vorkommenden Logarithmen dienen, passend wählt. Denn je zwei konjugiert imaginäre Wurzeln der Gleichung $N(z)=0$ haben die gleiche Ordnungszahl (Nr. **402**), und bei der Bestimmung der Zähler derjenigen Partialbrüche, die zu zwei solchen Wurzeln gehören, sowie bei der Integration dieser Brüche hat man jedesmal für die eine Wurzel genau dieselben Rechnungen durchzuführen wie für die andere, nur mit den konjugierten Zahlen, und erhält daher konjugierte Ergebnisse. Es ist somit immer möglich, denjenigen Ausdruck, der sich für das Integral $\int \frac{Z(z)}{N(z)}\,dz$ zunächst ergibt, durch geeignete Zusammenfassungen in einen anderen Ausdruck umzuwandeln, der keine imaginären Konstanten mehr enthält. Gleichwohl erscheint die Benutzung des Imaginären bei der Integration einer reellwertigen Funktion einer reellen Veränderlichen als ein Umweg, der, wenn irgend möglich, vermieden werden sollte. Deswegen möge jetzt noch kurz auseinandergesetzt werden, wie man dieser letzteren Forderung ganz allgemein entsprechen kann. Dabei soll aber die Integrationsveränderliche, um ihre Einschränkung auf reelle

Werte auch äußerlich hervortreten zu lassen, wieder durch x bezeichnet und die Betrachtung auf den Fall eingeschränkt werden, daß der Grad der ganzen rationalen Funktion $Z(x)$ niedriger ist als der der ganzen rationalen Funktion $N(x)$. Unter diesen Voraussetzungen seien nun

$$(p+iq) \quad \text{und} \quad (p-iq)$$

zwei konjugiert imaginäre Wurzeln der Gleichung $N(z)=0$. Wenn dann die gemeinsame Ordnungszahl dieser beiden Wurzeln gleich Eins ist, so entsprechen ihnen in der Partialbruchzerlegung des Bruches $\frac{Z(x)}{N(x)}$ zwei Brüche von den Formen

$$\frac{P+iQ}{x-p-iq} \quad \text{und} \quad \frac{P-iQ}{x-p+iq},$$

wo P und Q reelle Konstante bedeuten, die nicht beide gleich Null sind. Die Zusammenfassung dieser Brüche liefert aber die Gleichung

$$\frac{P+iQ}{x-p-iq}+\frac{P-iQ}{x-p+iq}=2\frac{P(x-p)-Qq}{(x-p)^2+q^2},$$

führt also auf einen Bruch, dessen Nenner zwar vom zweiten Grade ist, dessen Integral jedoch nach den in Nr. 445 angegebenen Regeln sofort in reeller Form dargestellt werden kann. Denn mit Hilfe der Gleichungen (1240) und (1233) ergibt sich

$$(1244) \qquad \int 2\frac{P(x-p)-Qq}{(x-p)^2+q^2}dx = P\lg[(x-p)^2+q^2]-2Q\operatorname{arctg}\frac{x-p}{q}.$$

Ist dagegen zweitens die gemeinsame Ordnungszahl der Wurzeln $(p+iq)$ und $(p-iq)$ größer als Eins, so kommen in der Partialbruchzerlegung des Bruches $\frac{Z(x)}{N(x)}$ auch Paare von Brüchen vor, welche die Formen

$$\frac{P+iQ}{(x-p-iq)^k} \quad \text{und} \quad \frac{P-iQ}{(x-p+iq)^k}$$

haben, wo k eine ganze oberhalb 1 liegende Zahl bezeichnet und P, Q wieder reelle Konstante bedeuten, die nicht beide gleich Null sind. Faßt man nun zwei derartige Brüche zusammen, so erhält man einen Bruch von der Form

$$\frac{g(x)}{[(x-p)^2+q^2]^k},$$

wo $g(x)$ eine ganze rationale Funktion bedeutet, deren Grad höchstens gleich k ist und deren Koeffizienten sämtlich reelle Werte haben. Ein derartiger Bruch kann aber, sobald der Grad von $g(x)$ größer als 1 ist, auf einfachere Brüche zurückgeführt werden. Dividiert man nämlich $g(x)$ durch $[(x-p)^2+q^2]$, bis man zu einem Reste vom ersten oder vom nullten Grade gelangt, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$g(x)=g_1(x)[(x-p)^2+q^2]+Ax+B$$

oder

$$\frac{g(x)}{[(x-p)^2+q^2]^k}=\frac{g_1(x)}{[(x-p)^2+q^2]^{k-1}}+\frac{Ax+B}{[(x-p)^2+q^2]^k},$$

wo A und B Konstante bezeichnen und $g_1(x)$ wieder eine ganze rationale Funktion bedeutet. Ist deren Grad noch größer als 1, so kann man dasselbe Verfahren auf den ersten Teil der rechten Seite noch einmal anwenden, usf.

Auf diese Weise gelingt es schließlich, die Summe aller Partialbrüche, welche dem Wurzelpaare $(p\pm iq)$ entsprechen, in eine Summe von Brüchen umzuwandeln, von denen jeder einzelne eine lineare Funktion von x als Zähler und eine Potenz des Ausdruckes $[(x-p)^2+q^2]$ als Nenner hat. Nachdem dies einmal festgestellt, kann man natürlich bei der Umformung des Bruches $\frac{Z(x)}{N(x)}$ zum Zweck der Integration die Einführung imaginärer Konstanten dadurch umgehen, daß man statt der gewöhnlichen Partialbruchzerlegung sofort einen Ansatz macht, welcher dem eben gewonnenen Ergebnis entspricht. Ist

$$N(x)=C(x-a)^{\alpha}\cdots[(x-p)^2+q^2]^{\mu}\cdots \tag{1245}$$

diejenige Gleichung; welche sich durch die Zerlegung der Funktion $N(x)$ in ihre voneinander verschiedenen reellwertigen Faktoren ersten oder zweiten Grades ergibt, so lautet dieser Ansatz

$$\left|\begin{aligned}\frac{Z(x)}{N(x)}&=\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_\alpha}{x-a}\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\frac{P_1x+Q_1}{[(x-p)^2+q^2]^{\mu}}+\frac{P_2x+Q_2}{[(x-p)^2+q^2]^{\mu-1}}+\cdots+\frac{P_\mu x+Q_\mu}{(x-p)^2+q^2}\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}\right. \tag{1246}$$

wo $A_1, A_2, \cdots A_\alpha, \cdots P_1, Q_1, P_2, Q_2, \cdots P_\mu, Q_\mu, \cdots$ reelle Konstante bedeuten. Und da eine solche Darstellung des Bruches

$\frac{Z(x)}{N(x)}$ immer möglich ist, aber, wie man auch jetzt leicht nachweisen kann, nur auf eine Weise[1]), so kann man zur Bestimmung der erwähnten Konstanten wieder jedes beliebige zum Ziel führende Verfahren benutzen. Insbesondere kann man die Konstanten auf mannigfach verschiedene Weise durch Auflösung eines Systems linearer Gleichungen ermitteln. Nachdem sie gefunden, bereitet die Integration keine Schwierigkeit mehr. Denn die Gleichungen (1240) und (1233) liefern sofort

$$(1247)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{P_\mu x + Q_\mu}{(x-p)^2+q^2}\,dx = \frac{1}{2} P_\mu \lg[(x-p)^2+q^2] \\ \displaystyle\qquad\qquad + \frac{Q_\mu + P_\mu p}{q} \operatorname{arctg} \frac{x-p}{q}, \end{cases}$$

und das Integral eines jeden Bruches, der eine höhere als die erste Potenz einer Summe zweier Quadrate als Nenner hat, kann auf ein Integral der eben betrachteten Form zurückgeführt werden mittels der aus (1241) und (1243) fließenden Formeln

$$(1248)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{Px+Q}{[(x-p)^2+q^2]^n}\,dx = -\frac{P}{2(n-1)} \frac{1}{[(x-p)^2+q^2]^{n-1}} \\ \displaystyle\qquad\qquad + (Q+Pp)\int \frac{dx}{[(x-p)^2+q^2]^n} \end{cases}$$

und

$$(1249)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{[(x-p)^2+q^2]^n} = \frac{1}{2(n-1)q^2} \frac{x-p}{[(x-p)^2+q^2]^{n-1}} \\ \displaystyle\qquad\qquad + \frac{2n-3}{2(n-1)q^2} \int \frac{dx}{[(x-p)^2+q^2]^{n-1}}. \end{cases}$$

448. Trennung des algebraischen und des transzendenten Teiles. — Denkt man sich die echt gebrochene rationale Funktion $\frac{Z(z)}{N(z)}$ unter den der Gleichung (1177) zu Grunde liegenden Voraussetzungen gemäß dieser Gleichung in eine Summe von Partial-

1) Wenn man sich die durch die Gleichung (1245) dargestellte Zerlegung des Nenners $N(x)$ in seine reellwertigen Faktoren ersten oder zweiten Grades gegeben denkt, so kann man die Möglichkeit und die Eindeutigkeit der Darstellung des Bruches $\frac{Z(x)}{N(x)}$ durch eine Gleichung von der Form (1246) auch ohne Zuhilfenahme des Imaginären beweisen. Näheres hierüber findet sich in O. Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, Erster Teil, Leipzig 1893, S. 293—300.

brüchen zerlegt, so führt nur die Integration derjenigen Partialbrüche, deren Nenner vom ersten Grade sind, auf transzendente Funktionen. Die Integrale aller übrigen Partialbrüche sind dagegen wieder rational, und zwar echte Brüche, in deren Nennern nach Gleichung (1173) keine höheren Potenzen der Differenzen $(z-a)$, $(z-b)$, $\cdots (z-l)$ auftreten als die Potenzen

$$(z-a)^{\alpha-1}; \quad (z-b)^{\beta-1}; \quad \cdots (z-l)^{\lambda-1}.$$

Demgemäß kann man, wenn zur Abkürzung

$$(z-a)^{\alpha-1}(z-b)^{\beta-1}\cdots(z-l)^{\lambda-1}=T(z) \tag{1250}$$

gesetzt wird, die Summe der rationalen Integrale in einen einzigen Bruch von der Form

$$\frac{g_1(z)}{T(z)}$$

zusammenfassen, wo $g_1(z)$ eine ganze rationale Funktion von niedrigerem Grade als $T(z)$ bedeutet. Die Summe aller derjenigen Partialbrüche, welche rationale Integrale liefern, ist dann nichts weiter als die Ableitung des Bruches $\frac{g_1(z)}{T(z)}$, erscheint also in der Form

$$\frac{d}{dz}\frac{g_1(z)}{T(z)}.$$

Setzt man ferner zur Abkürzung

$$(z-a)(z-b)\cdots(z-l)=q(z), \tag{1251}$$

so lassen sich diejenigen Partialbrüche, deren Integrale transzendent sind, zu einem einzigen Bruche zusammenziehen von der Form

$$\frac{g_2(z)}{q(z)},$$

wo auch $g_2(z)$ eine ganze rationale Funktion bedeutet, und zwar eine Funktion, deren Grad niedriger ist als der Grad von $q(z)$.

So ergibt sich für die ursprünglich gegebene Funktion die Darstellung

$$\frac{Z(z)}{N(z)}=\frac{d}{dz}\frac{g_1(z)}{T(z)}+\frac{g_2(z)}{q(z)} \tag{1252}$$

und für das gesuchte Integral die Gleichung

$$\int\frac{Z(z)}{N(z)}dz=\frac{g_1(z)}{T(z)}+\int\frac{g_2(z)}{q(z)}dz. \tag{1253}$$

Hiermit ist ein neues Verfahren zur Integration einer echt gebrochenen rationalen Funktion $\frac{Z(z)}{N(z)}$ gewonnen, und zwar ein Verfahren, welches den Vorzug hat, daß man bei seiner Anwendung den algebraischen Teil des Integrales auch ohne vorherige Auflösung der Gleichung $N(z) = 0$ finden kann. Die Funktion $T(z)$ ist nämlich nichts weiter als der größte gemeinschaftliche Teiler der Funktion $N(z)$ und ihrer Ableitung $N'(z)$ in derjenigen Form, bei welcher die höchste vorkommende Potenz von z den Koeffizienten 1 hat. Dieser größte gemeinschaftliche Teiler kann aber nach bekanntem Verfahren durch eine endliche Anzahl von Divisionen ermittelt werden. Nachdem er gefunden, ergibt eine weitere Division die Funktion $q(z)$, da diese bis auf einen konstanten Faktor mit dem Quotienten $\frac{N(z)}{T(z)}$ übereinstimmt. Ist auch $q(z)$ berechnet, so kann man für $g_1(z)$ und $g_2(z)$ zwei ganze rationale Funktionen, deren Grade je um eine Einheit niedriger sind als die Grade von $T(z)$ und $q(z)$, zunächst mit unbestimmten Koeffizienten ansetzen und dann diese Koeffizienten in mannigfach verschiedener Weise aus einem System linearer Gleichungen so bestimmen, daß die Gleichung (1252) für beliebige Werte von z erfüllt wird. Dies Verfahren führt stets zum Ziel, da die Darstellung des Quotienten $\frac{Z(z)}{N(z)}$ durch einen Ausdruck von der Form der rechten Seite der Gleichung (1252) immer möglich ist, und zwar, wie man auch jetzt leicht zeigen kann, jedesmal nur auf eine einzige Weise.

Sind die Koeffizienten der Funktionen $Z(z)$, $N(z)$ sämtlich reell, so erfordert die Bestimmung der Funktionen $T(z)$, $q(z)$, $g_1(z)$, $g_2(z)$ nur Rechnungen mit reellen Zahlen. Ferner kann man, sobald die Zerlegung der Funktion $q(z)$ in ihre reellwertigen Faktoren ersten oder zweiten Grades bekannt ist, auch für das Integral $\int \frac{g_2(z)}{q(z)} dz$ nach den in Nr. **447** gemachten Ausführungen verhältnismäßig leicht einen geschlossenen nur reelle Konstante enthaltenden Ausdruck finden, und zwar ist hierzu nicht einmal nötig, daß man die Koeffizienten der Funktion $g_2(z)$ zuvor berechnet habe. In der Gleichung (1252) kann man nämlich statt des echten Bruches $\frac{g_2(z)}{q(z)}$ gleich eine Summe von Brüchen ansetzen, welche die Form

$$\frac{A}{z-a} \quad \text{oder die Form} \quad \frac{Pz+Q}{(z-p)^2+q^2}$$

haben und den reellwertigen Faktoren ersten und zweiten Grades in der gegebenen Zerlegung der Funktion $q(z)$ entsprechen, und hierauf statt der Koeffizienten von $g_2(z)$ sofort die in den Zählern dieser Brüche auftretenden Konstanten A, P, Q zusammen mit den Koeffizienten von $g_1(z)$ aus einem geeigneten System linearer Gleichungen ermitteln.

449. Besondere Kunstgriffe. — In manchen Fällen kann man bei der Integration einer gebrochenen rationalen Funktion durch besondere Kunstgriffe, namentlich durch zweckmäßige Einführung einer neuen Veränderlichen beträchtliche Abkürzungen der Rechnung erzielen. So erhält man z. B. das anscheinend nur durch längere Rechnung bestimmbare Integral $\int \frac{x^7}{2+x^4}\,dx$ sehr leicht, wenn man mittels der Gleichung

$$x^4 = u$$

eine neue Veränderliche u einführt. Denn dann ergibt sich sofort

$$\int \frac{x^7}{2+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{u}{2+u}\,du = \frac{1}{4}u - \frac{1}{2}\lg(2+u)$$
$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}\lg(2+x^4).$$

Ähnlich ist das Integral $\int \frac{dx}{x(4+3x^6)}$ am einfachsten dadurch zu berechnen, daß man den unter dem Integralzeichen stehenden Bruch zunächst durch Multiplikation seines Zählers und Nenners mit x^5 erweitert und dann für x^6 eine neue Veränderliche v einführt. Denn so ergibt sich

$$\int \frac{dx}{x(4+3x^6)} = \int \frac{x^5\,dx}{x^6(4+3x^6)} = \frac{1}{6}\int \frac{dv}{v(4+3v)}$$
$$= \frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{4}\,\frac{1}{v} - \frac{3}{4}\,\frac{1}{4+3v}\right)dv = \frac{1}{24}\lg\frac{v}{4+3v}$$
$$= \frac{1}{24}\lg\frac{x^6}{4+3x^6}.$$

B. Zur Integration der irrationalen algebraischen Funktionen.

450. Vergleichung verschiedener Verfahrungsweisen. — Wenn eine irrationale algebraische Funktion einer Veränderlichen z zu der in Nr. **442** unter **III** erwähnten Art gehört, wenn sie sich also durch einen Ausdruck darstellen läßt, der aus der Veränderlichen z und der Quadratwurzel aus einer ganzen rationalen Funktion zweiten Grades von z rational zusammengesetzt ist, so kann man ihr unbestimmtes Integral auf verschiedenen Wegen ermitteln. Insbesondere ist jede der drei in Nr. **442** angegebenen Berechnungsweisen immer anwendbar. Aber je nach dem benutzten Verfahren kann die Berechnung bald einfacher, bald umständlicher sein. Deswegen ist es zweckmäßig, auch noch die Frage zu erörtern, wie man am kürzesten zum Ziel gelangen kann. Dabei genügt es aber, sich auf den Fall zu beschränken, daß der Ausdruck, welcher die zu integrierende Funktion darstellt, nur reelle Konstante enthält, daß ferner die Integrationsveränderliche auf einen nur reelle Werte umfassenden Bereich eingeschränkt und daß endlich auch die vorkommende Quadratwurzel in diesem Bereich überall reell ist. Denn praktisch kommt kaum ein anderer Fall in Betracht. Zum Hinweis auf diese Einschränkungen möge die Integrationsveränderliche fortan nicht mehr durch z, sondern durch x bezeichnet werden.

Unter den eben erwähnten Voraussetzungen ist nun immer mindestens eine der in Nr. **442** unter **III, A, B, C** angegebenen Berechnungsweisen wenigstens insofern bequem, als sie ohne Benutzung des Imaginären zum Ziele führt. Ist nämlich

$$ax^2 + bx + c,$$

wo jetzt a, b, c reelle Konstante bedeuten, diejenige Funktion zweiten Grades, welche in dem zu betrachtenden Ausdruck unter dem Quadratwurzelzeichen steht, so kommt man ohne Einführung imaginärer Zahlen aus, wenn man,

falls a positiv ist, das Verfahren **A**, und

falls c positiv oder gleich Null ist, das Verfahren **B** anwendet. Natürlich können die beiden eben gemachten Annahmen auch gleichzeitig erfüllt sein, und dann ist jedes der Verfahren **A**, **B** anwendbar. Ferner kann sich mit dem Umstand, daß a positiv oder daß c nicht negativ ist, auch noch der andere verbinden, daß die Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1254}$$

reelle Wurzeln hat, und dann steht auch noch das Verfahren **C** entweder unverändert oder mit geringfügigen Änderungen zur Verfügung.

Hiernach bleibt nur noch der Fall zu erörtern, daß a und c

beide negativ sind. Dann hat aber die Gleichung (1254) sicher zwei verschiedene reelle Wurzeln. Zunächst ist nämlich der Fall einer einzigen doppelt zählenden reellen Wurzel deswegen ausgeschlossen, weil dann überhaupt keine Irrationalität vorläge. Aber auch der Fall, daß die erwähnte Gleichung gar keine reelle Wurzel hätte, ist nicht möglich. Denn dann hätte die in ebenen Parallelkoordinaten x, y durch die Gleichung

$$y = ax^2 + bx + c$$

dargestellte Parabel mit der x-Achse keinen Schnittpunkt gemein, verliefe also, da y bei hinreichend großem absoluten Werte von x negativ ist, ganz unterhalb der x-Achse, so daß die Wurzel $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ beständig imaginär wäre, entgegen der ursprünglich gemachten Voraussetzung. Somit ist im vorliegenden Falle sicher das Verfahren **C** benutzbar, und zwar genau in der in Nr. **442** angegebenen Form. Denn da die Wurzel $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ nur dann reell ist, wenn x nicht unterhalb der kleineren Wurzel x_1 und nicht oberhalb der größeren Wurzel x_2 der Gleichung (1254) liegt, so wird die nach Nr. **442**, **III**, **C** durch die Gleichung

$$\sqrt{\frac{x - x_1}{x_2 - x}} = v \tag{1199a}$$

einzuführende neue Integrationsveränderliche v für alle zulässigen Werte von x reell.

Die eben beschriebenen Wege führen indessen trotz der Vermeidung des Imaginären nicht immer am einfachsten zum Ziel. Hielte man sich z. B. zum Zweck der Ermittelung des bereits in Nr. **433** unter 6 gewonnenen Integrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x$$

an die vorangehenden Regeln, so hätte man die Wahl zwischen zwei Verfahrungsweisen. Man könnte nämlich

Erstens gemäß Nr. **442**, **III**, **B**, nachdem man den Wert 0 vom Wertbereich der Veränderlichen x vorläufig ausgeschlossen hat,

$$\sqrt{1 - x^2} = ux - 1, \qquad \text{also} \qquad u = \frac{\sqrt{1 - x^2} + 1}{x}.$$

setzen und bekäme dann

$$1-x^2=u^2x^2-2ux+1$$

$$-x=u^2x-2u$$

$$x=\frac{2u}{u^2+1}$$

$$\sqrt{1-x^2}=\frac{u^2-1}{u^2+1}; \qquad dx=-2\frac{u^2-1}{(u^2+1)^2}du.$$

Hieraus erhielte man

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-2\int\frac{du}{u^2+1}=-2\operatorname{arctg}u$$

$$=-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x},$$

wo unter dem Zeichen arctg der zwischen 0 und π enthaltene Wert verstanden werden kann, so daß die rechte Seite auch für $x=0$ stetig ist. Man käme also gar nicht einmal ohne weiteres zu dem oben angegebenen einfachen Ergebnis, sondern zu einer scheinbar davon verschiedenen Funktion. Aber natürlich läßt sich zeigen, daß der Unterschied nur eine Konstante ist. Setzt man nämlich, unter φ einen nicht außerhalb des Intervalles $\left(-\frac{\pi}{2}\cdots\frac{\pi}{2}\right)$ liegenden Winkel verstehend,

$$x=\sin\varphi,$$

so wird

$$\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}=\frac{\cos\varphi+1}{\sin\varphi}=\frac{2\cos\frac{\varphi}{2}^2}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right),$$

also

$$-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}=-2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)=\varphi-\pi$$

$$=\arcsin x-\pi.$$

Falls man, was auch angängig wäre, statt des zunächst gemachten Ansatzes den anderen Ansatz

$$\sqrt{1-x^2}=ux+1, \qquad \text{also} \qquad u=\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$$

machte, so erhielte man durch eine ganz ähnliche Rechnung zunächst

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x},$$

wo jetzt unter dem Zeichen arctg der Hauptwert verstanden werden kann, und bekäme dann, indem man wieder $x = \sin\varphi$ setzt,

$$\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \frac{\cos\varphi - 1}{\sin\varphi} = -\frac{2\sin\frac{\varphi^2}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = -\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg}\left(-\frac{\varphi}{2}\right),$$

also schließlich

$$-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = 2\frac{\varphi}{2} = \varphi = \arcsin x.$$

Zweitens könnte man gemäß Nr. **442, III, C**

$$\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} = v, \qquad \text{also} \qquad x = \frac{v^2-1}{v^2+1}$$

setzen und erhielte dann

$$\sqrt{1-x^2} = (1-x)\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} = \frac{2v}{v^2+1}; \qquad dx = \frac{4v\,dv}{(v^2+1)^2},$$

folglich

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\int \frac{dv}{v^2+1} = 2\operatorname{arctg} v$$
$$= 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{1-x}},$$

wo unter dem Zeichen arctg der Hauptwert verstanden werden kann. Auch jetzt käme man also nicht ohne weiteres zu dem einfachen Endergebnis $\arcsin x$, sondern erhielte dieses erst durch Umrechnung, und zwar auch nur bis auf eine Konstante. Setzt man nämlich wieder $x = \sin\varphi$, so wird

$$\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} = \sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}} = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right),$$

also

$$2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} = 2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) = \varphi + \frac{\pi}{2} = \arcsin x + \frac{\pi}{2}.$$

Diese und andere ähnliche Erfahrungen machen es wünschenswert, außer den bisher erwähnten Verfahrungsweisen noch einige weitere Regeln und Kunstgriffe anzugeben. Dabei besteht der erste Schritt in dem Nachweis, daß man alle Integrale der gegenwärtig in Rede stehenden Art auf drei Arten von Grundintegralen zurückführen kann, und daran schließen sich dann Angaben darüber, wie sich diese Grundintegrale am einfachsten berechnen lassen.

451. Zurückführung auf Grundintegrale. — Unter der Voraussetzung, daß a, b, c reelle Konstante bedeuten, welche die Bedingungen $a \neq 0$ und $b^2 - 4ac \neq 0$ erfüllen, daß es ferner ein Intervall gebe, in welchem die Funktion $(ax^2 + bx + c)$ nie negativ wird, und daß die Veränderliche x auf ein solches Intervall beschränkt sei, möge im nächstfolgenden zur Abkürzung

$$ax^2 + bx + c = X$$

gesetzt werden. Wenn dann ein nur reelle Konstante enthaltender, aus x und $\sqrt{X}$ rational zusammengesetzter Ausdruck $A(x, \sqrt{X})$ gegeben ist, so ist es immer, und zwar ohne Zuhilfenahme imaginärer Zahlen, möglich, eine Gleichung von der Form

$$A(x, \sqrt{X}) = R_1(x) + R_2(x)\frac{1}{\sqrt{X}} \tag{1255}$$

herzustellen, wo $R_1(x)$ und $R_2(x)$ rationale Funktionen von x bedeuten. Falls nämlich der Ausdruck $A(x, \sqrt{X})$ nicht schon von vorn herein die gleiche Form hat wie die rechte Seite der Gleichung (1255), so kann man ihm nach Nr. **159** zunächst die Form eines Quotienten geben, dessen Zähler und Nenner aus x und $\sqrt{X}$ ganz und rational zusammengesetzt sind. Ferner kann man, nachdem dies geschehen, jede vorkommende gerade Potenz von $\sqrt{X}$ in eine ganze rationale Funktion von x und jede ungerade Potenz von $\sqrt{X}$ in das Produkt einer ganzen rationalen Funktion von x mit $\sqrt{X}$ verwandeln. Indem man dies tut und dann Zusammengehöriges vereinigt, erhält man einen Quotienten von der Form $\frac{M + N\sqrt{X}}{P + Q\sqrt{X}}$, wo M, N, P, Q ganze rationale Funktionen von x bedeuten. Nach Multiplikation des Zählers und Nenners mit der Differenz $(P - Q\sqrt{X})$ und einfachen Umformungen ergibt sich sodann

$$A(x, \sqrt{X}) = \frac{MP - NQX}{P^2 - Q^2X} + \frac{NP - MQ}{P^2 - Q^2X}\sqrt{X},$$

und hieraus erhält man eine Gleichung von der Form (1255) einfach dadurch, daß man die Wurzel $\sqrt{X}$ durch den Quotienten $\frac{X}{\sqrt{X}}$ ersetzt und zugleich für die rationalen Funktionen

$$\frac{MP - NQX}{P^2 - Q^2X} \quad \text{und} \quad \frac{(NP - MQ)X}{P^2 - Q^2X}$$

die abkürzenden Bezeichnungen $R_1(x)$ und $R_2(x)$ einführt.

Nun kann man das Integral $\int R_1(x)dx$ nach früheren Regeln berechnen. Ferner kann man von der rationalen Funktion $R_2(x)$, wenn nötig, einen ganzen rationalen Bestandteil abtrennen und die übrig bleibende echt gebrochene Funktion nach Gleichung (1246) zerlegen. Die Berechnung des Integrales $\int A(x, \sqrt{X})$ kommt somit schließlich hinaus auf die Berechnung einer endlichen Anzahl von Integralen von den Formen

$$\int \frac{g(x)}{\sqrt{X}} dx; \quad \int \frac{dx}{(x-k)^\varkappa \sqrt{X}}; \quad \int \frac{Ax + B}{[(x-p)^2 + q^2]^\lambda \sqrt{X}} dx,$$

wo $g(x)$ eine ganze rationale Funktion, $\varkappa$, λ ganze positive Exponenten und k, A, B, p, q reelle Konstante bedeuten, von denen die letzte von Null verschieden ist.

452. Das Integral $\int \frac{g(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$. — Einer der einfachsten Fälle, die sich bei der Ermittelung eines Integrales von der Form $\int \frac{g(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ darbieten können, besteht darin, daß die im Zähler stehende ganze rationale Funktion $g(x)$ den konstanten Wert 1 hat. Es handelt sich dann um das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

wo a, b, c nach wie vor reelle, den Bedingungen $a \neq 0$ und $b^2 - 4ac \neq 0$ genügende Konstante bedeuten. Die Berechnung gerade dieses Integrales ist deswegen von besonderer Wichtigkeit, weil sie für manches Weitere die Grundlage abgibt. Bei ihrer Ausführung empfiehlt es sich, zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem a positiv oder negativ ist.

Fall **I.** Es sei $a > 0$.

Dann führt das in Nr. **442** unter **III**, **A** angegebene Verfahren am einfachsten zum Ziel. Setzt man nämlich
$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}(u - x)$, also $u = x + \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{ax^2 + bx + c}$,
so erhält man aus Gleichung (1192) sofort

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=2a\int\frac{2au+b}{\sqrt{a}(au^2+bu+c)}\cdot\frac{au^2+bu+c}{(2au+b)^2}\,du$$
$$=2\sqrt{a}\int\frac{du}{2au+b}=\frac{1}{\sqrt{a}}\lg|2au+b|$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\lg|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}|$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\lg\left|\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+\frac{1}{\sqrt{a}}\lg(2\sqrt{a}).$$

Da man nun hier die Konstante $\frac{1}{\sqrt{a}}\lg(2\sqrt{a})$ mit der Integrationskonstanten vereinigen, also auch weglassen darf, so kann man das Endergebnis auch so schreiben:

(1256) $$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\lg\left|\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+bx+c}\right|$$
(für $a>0$).

Insbesondere ist hiernach, wenn a eine beliebige von Null verschiedene Konstante bedeutet,

(1257) $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\lg\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|.$$

Fall **II.** Es sei $a<0$.

Dann ist es am zweckmäßigsten, das zu berechnende Integral auf das Integral
$$\int\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}=\arcsin v$$
zurückzuführen. Das ist in folgender Weise möglich: Man hat
$$ax^2+bx+c=\frac{1}{-a}(-ac-abx-a^2x^2)$$
$$=\frac{1}{-a}\left[\frac{b^2-4ac}{4}-\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2\right].$$

Nun ist in allen praktisch vorkommenden Fällen
$$b^2-4ac>0,$$
weil es sonst überhaupt kein Intervall gäbe, in welchem die Wurzel $\sqrt{ax^2+bx+c}$ reell ist. Man kann daher der zuvor gewonnenen Gleichung auch die Gestalt geben
$$ax^2+bx+c=\frac{b^2-4ac}{-4a}\left[1-\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)^2\right]$$

und erhält dann sofort

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{2\sqrt{-a}}{\sqrt{b^2-4ac}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)^2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{-a}}{\sqrt{b^2-4ac}} \cdot \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}},$$

also schließlich

(1258) $$\left\{ \begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} &= -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-2ax-b}{\sqrt{b^2-4ac}} \\ &\qquad (\text{für } a<0), \end{aligned} \right.$$

wo unter dem Zeichen arcsin der Hauptwert verstanden werden kann.

Insbesondere ergibt sich, wenn a eine positive Konstante bedeutet, übereinstimmend mit der bereits in Nr. **434** unter 26) gefundenen Gleichung

(1259) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}.$$

Ein zweiter praktisch wichtiger Fall, in dem sich die Berechnung eines Integrales von der Form $\int \frac{g(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ ohne Schwierigkeiten durchführen läßt, besteht darin, daß die im Zähler stehende ganze rationale Funktion $g(x)$ mit der Ableitung $(2ax+b)$ der unter dem Wurzelzeichen stehenden Funktion übereinstimmt. Dann erhält man nämlich mit Hilfe der Formel (1159) für die Umformung eines Integrales durch Einführung einer neuen Veränderlichen, indem man wie früher

$$ax^2+bx+c = X$$

setzt, sofort

$$\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{dX}{\sqrt{X}} = 2\sqrt{X}$$

oder

(1260) $$\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = 2\sqrt{ax^2+bx+c}.$$

Insbesondere ist

(1261)
$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$$
und

(1262)
$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Von den beiden bisher erledigten Fällen abgesehen ist das Integral eines Ausdruckes von der Form $\frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, wo n eine ganze positive Zahl und $a_0, a_1, \cdots a_n$ Konstante bedeuten und $a_0 \neq 0$ ist, am einfachsten dadurch zu berechnen, daß man unter Einführung von $(n+1)$ vorläufig unbekannten Konstanten $A_0, A_1, \cdots A_{n-1}, B$ die Gleichung

(1263)
$$\begin{aligned} &\int \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx \\ &= (A_0 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \cdots + A_{n-1}) \sqrt{ax^2 + bx + c} \\ &\qquad + B \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \end{aligned}$$

ansetzt und dann die Konstanten $A_0, A_1, \cdots A_{n-1}, B$ so bestimmt, daß diese Gleichung für alle Werte von x richtig wird. Man überzeugt sich leicht, daß dies immer möglich ist. Denn durch Differentiation beider Seiten, Wegschaffung der Nenner und nachfolgende Koeffizientenvergleichung erhält man ein System linearer Gleichungen, von denen die erste die Konstante A_0 eindeutig bestimmt, sodann die zweite die Konstante A_1, und so fort, bis schließlich die letzte Gleichung auch die Konstante B liefert. Insbesondere ergibt sich auf diese Weise

(1264)
$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$
und

(1265)
$$\begin{aligned} \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} &= \frac{1}{2a}\left(x - \frac{3b}{2a}\right)\sqrt{ax^2 + bx + c} \\ &\qquad + \frac{3b^2 - 4ac}{8a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}. \end{aligned}$$

453. Das Integral $\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx$. — Zu den Integralen, die mit Hilfe der bisherigen Entwickelungen berechnet werden können, gehört auch das praktisch wichtige Integral $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$. Wandelt man nämlich dieses Integral gemäß der in Nr. **451** angegebenen Regel zunächst in $\int\frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ um, so lehrt die Nr. **452**, daß man berechtigt ist,

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$
$$=(A_0x+A_1)\sqrt{ax^2+bx+c}+B\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

zu setzen, wo A_0, A_1, B Konstante bedeuten.

Die Differentiation beider Seiten dieser Gleichung liefert sodann nach Wegschaffung des rechts noch auftretenden Nenners die Gleichung

$$ax^2+bx+c=A_0(ax^2+bx+c)+(A_0x+A_1)\left(ax+\frac{b}{2}\right)+B,$$

aus der sich durch Koeffizientenvergleichung nach einfachen Zwischenrechnungen

$$A_0=\frac{1}{2};\qquad A_1=\frac{b}{4a};\qquad B=\frac{4ac-b^2}{8a}$$

ergibt. Man erhält also schließlich

$$(1266)\quad \begin{cases} \int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\sqrt{ax^2+bx+c} \\ \qquad\qquad +\frac{4ac-b^2}{8a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \end{cases}$$

Insbesondere ergibt sich hieraus mit Hilfe der Formeln (1257) und (1259)

$$(1267)\quad \int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{1}{2}a^2\lg\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|$$

und

$$(1268)\quad \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}.$$

454. Das Integral $\int\frac{dx}{(x-k)^\varkappa\sqrt{ax^2+bx+c}}$. — Die am Schluß der Nr. **451** an zweiter Stelle erwähnten Integrale von der Form $\int\frac{dx}{(x-k)^\varkappa\sqrt{ax^2+bx+c}}$ lassen sich am einfachsten berechnen, wenn man zunächst an Stelle von x eine neue Veränderliche u einführt, indem man

$$x = k + \frac{1}{u}, \qquad \text{also umgekehrt} \qquad u = \frac{1}{x-k}$$

setzt. Man erhält dann nach einfacher Zwischenrechnung

$$\text{(1269)} \qquad \int \frac{dx}{(x-k)^{\varkappa}\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\int \frac{u^{\varkappa-1}du}{\sqrt{Au^2+Bu+a}},$$

wobei man

$$A = ak^2 + bk + c; \qquad B = 2ak + b$$

zu setzen hat.

Ist nun Erstens $A \neq 0$, so ist das zu berechnende Integral durch die Gleichung (1269) auf ein Integral der in Nr. **452** betrachteten Art zurückgeführt.

Ist dagegen Zweitens $A = 0$, d. h. k eine Wurzel der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, so hat man es nur noch mit dem verhältnismäßig einfachen Integral $\int \frac{u^{\varkappa-1}du}{\sqrt{Bu+a}}$ zu tun. Hier ist nun $B = 2ak + b$ sicher von Null verschieden, weil sonst k eine Doppelwurzel der eben erwähnten Gleichung wäre, also überhaupt keine Irrationalität vorläge. Folglich darf man an Stelle von u abermals eine neue Veränderliche v dadurch einführen, daß man

$$\sqrt{Bu+a} = v, \qquad \text{also} \qquad u = \frac{v^2-a}{B}$$

setzt. Man erhält dann

$$\int \frac{u^{\varkappa-1}du}{\sqrt{Bu+a}} = \frac{2}{B^{\varkappa}}\int (v^2-a)^{\varkappa-1}dv,$$

kann rechts die Potenz $(v^2-a)^{\varkappa-1}dv$ nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln und dann die einzelnen Glieder ohne weiteres integrieren. Besonders bemerkenswert ist hierbei, daß sich für das Integral $\int \frac{dx}{(x-k)^{\varkappa}\sqrt{ax^2+bx+c}}$, falls $ak^2 + bk + c = 0$ ist, eine algebraische Funktion von x ergibt.

455. Das Integral $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^{\lambda}\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. — Bei der Berechnung derjenigen Integrale, welche zu der am Schluß der Nr. **451** an dritter Stelle erwähnten Gattung gehören, hat man zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem die außerhalb des Wurzelzeichens stehende Funktion zweiten Grades $[(x-p)^2+q^2]$ abgesehen von einem konstanten Faktor mit der unter dem Wurzelzeichen stehenden Funktion (ax^2+bx+c) übereinstimmt oder nicht. Der erste Fall ist der einfachere und möge daher zunächst behandelt werden. Man hat es dabei mit einem Integrale

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^\lambda \sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

zu tun, wo λ eine ganze positive Zahl und A und B Konstante bedeuten. Zur Berechnung dieses Integrales kann man sich nun der in Nr. **446** angegebenen Gleichungen (1241) und (1243) bedienen. Diese Gleichungen gelten nämlich nicht nur, wenn n eine ganze oberhalb 1 liegende Zahl bedeutet, sondern bleiben, wie man durch Differentiation beider Seiten leicht erkennt, auch für beliebige nicht ganzzahlige Werte von n bestehen. Man darf daher den Exponenten n durch die Summe $\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)$ ersetzen und erhält dann aus (1241), wenn man wieder zur Abkürzung

$$ax^2+bx+c=X$$

setzt,

$$(1270)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{Ax+B}{X^\lambda\sqrt{X}}\,dx = -\frac{A}{(2\lambda-1)a}\,\frac{1}{X^{\lambda-1}\sqrt{X}} \\ \displaystyle\qquad\qquad + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{X^\lambda\sqrt{X}}. \end{cases}$$

Ähnlich ergibt sich aus (1243) die Rekursionsformel

$$(1271)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{X^\lambda\sqrt{X}} = \frac{2}{(2\lambda-1)(4ac-b^2)}\,\frac{2ax+b}{X^{\lambda-1}\sqrt{X}} \\ \displaystyle\qquad\qquad + \frac{8(\lambda-1)a}{(2\lambda-1)(4ac-b^2)}\int\frac{dx}{X^{\lambda-1}\sqrt{X}}. \end{cases}$$

Damit ist ein gangbarer Weg zur schrittweisen Berechnung des in Rede stehenden Integrales gewonnen. Insbesondere findet sich für $\lambda=1$

$$(1272)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}^{\,3}} = \frac{2}{4ac-b^2}\,\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

und

$$(1273)\quad \int\frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}^{\,3}} = -\frac{2}{4ac-b^2}\,\frac{bx+2c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Aus den Gleichungen (1270), (1271) und (1272) folgt ferner ganz allgemein, daß das Integral $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^\lambda \sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ für jeden ganzen positiven Wert von λ **algebraisch** ist.

Zusatz. — Aus der Gleichung (1271) geht wieder eine richtige Gleichung hervor, wenn man, unter λ nach wie vor eine ganze positive Zahl verstehend, λ mit $(-\lambda)$ vertauscht. Man erhält so

$$\int \frac{X^\lambda}{\sqrt{X}}\,dx = -\frac{2}{(2\lambda+1)(4ac-b^2)}\,\frac{(2ax+b)X^{\lambda+1}}{\sqrt{X}} + \frac{8(\lambda+1)a}{(2\lambda+1)(4ac-b^2)}\int \frac{X^{\lambda+1}}{\sqrt{X}}\,dx$$

oder, wenn man mit $\frac{(2\lambda+1)(4ac-b^2)}{8(\lambda+1)a}$ multipliziert und dann die Gleichung umgekehrt liest,

$$(1274)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int X^\lambda \sqrt{X}\,dx \\ &= \frac{2ax+b}{4(\lambda+1)a} X^\lambda \sqrt{X} + \frac{(2\lambda+1)(4ac-b^2)}{8(\lambda+1)a}\int X^{\lambda-1}\sqrt{X}\,dx. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung liefert für $\lambda = 0$ eine Bestätigung der in Nr. **453** auf anderem Wege gewonnenen Gleichung (1266) und gibt für jeden ganzen positiven Wert von λ ein sehr bequemes Mittel, um das Integral $\int (ax^2+bx+c)^\lambda \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ durch allmähliche Zurückführung desselben auf das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ zu berechnen. Insbesondere findet sich für $\lambda = 1$

$$(1275)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int \sqrt{ax^2+bx+c}^{\,3}\,dx \\ &= \frac{2ax+b}{8a}\sqrt{ax^2+bx+c}^{\,3} + \frac{3(4ac-b^2)}{16a}\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx \\ &= \frac{2ax+b}{8a}\left(ax^2+bx+\frac{20ac-3b^2}{8a}\right)\sqrt{ax^2+bx+c} \\ &\qquad + \frac{3(4ac-b^2)^2}{128a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \end{aligned} \right.$$

456. Das Integral $\int \frac{Ax+B}{[(x-p)^2+q^2]^\lambda \sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$. — Wenn man ein Integral von der in der Überschrift dieser Nummer angegebenen Form zu berechnen hat, bei welchem der Quotient $\frac{ax^2+bx+c}{(x-p)^2+q^2}$ keine Konstante ist, so empfiehlt es sich, zunächst an Stelle von x dadurch eine neue Veränderliche ξ einzuführen, daß man

$$x-p=\xi$$

setzt. Man kommt dann, wenn man nach Ausführung der Umwandlung die Integrationsveränderliche wieder durch x und die Koeffizienten der unter dem Wurzelzeichen stehenden Funktion zweiten Grades wieder durch a, b, c bezeichnet und endlich für $(Ap+B)$ wieder B schreibt, auf ein Integral von der etwas einfacheren Form

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+q^2)^\lambda \sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$

wo q und a nach wie vor von Null verschiedene Konstante bedeuten und der Quotient $\frac{ax^2+bx+c}{x^2+q^2}$ keine Konstante ist.

Ist nun bei einem Integral dieser Art $\lambda>1$, so kann man dasselbe stets auf ein Integral von der gleichen Form zurückführen, in welchem der Exponent λ den Wert 1 hat. Zunächst kann man nämlich, falls $\lambda=2$ ist, vier Konstante C, D, E, F so bestimmen, daß

$$(1276)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+q^2)^2\sqrt{ax^2+bx+c}} \\ &\qquad = \frac{(Cx+D)\sqrt{ax^2+bx+c}}{x^2+q^2} + \int \frac{(Ex+F)\,dx}{(x^2+q^2)\sqrt{ax^2+bx+c}} \end{aligned}\right.$$

wird. Denn hierzu ist, wie man sich leicht überzeugt, nur nötig, daß die folgenden vier Gleichungen bestehen:

$$(1277)\quad \left\{\begin{array}{llll} -\frac{b}{2}C & -aD & +E & =0 \\ (-c+2aq^2)C & -\frac{3}{2}bD & & +F=0 \\ \frac{3}{2}bq^2C+(aq^2-2c)D+q^2E & & & =A \\ cq^2C & +\frac{1}{2}bq^2D & & +q^2F=B. \end{array}\right.$$

Diese haben aber stets eine und nur eine Lösung. Denn durch Elimination von E und F erhält man die Gleichungen

$$
(1278) \qquad \begin{aligned} 2bq^2C + 2(aq^2 - c)D &= A \\ -2(aq^2 - c)q^2C + \qquad 2bq^2D &= B, \end{aligned}
$$

und bei diesen ist die aus den Koeffizienten der Unbekannten zusammengesetzte Determinante

$$
\begin{vmatrix} 2bq^2 & 2(aq^2 - c) \\ -2(aq^2 - c)q^2 & 2bq^2 \end{vmatrix} = 4[b^2q^4 + (aq^2 - c)^2q^2]
$$

sicher von Null verschieden. Sonst wäre nämlich $b = 0$ und $c = aq^2$, also $ax^2 + bx + c = a(x^2 + q^2)$, entgegen der Voraussetzung, daß der Quotient $\frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + q^2}$ keine Konstante sein soll. Folglich gibt es ein und nur ein Paar von Werten C, D, welches die Gleichungen (1278) befriedigt, und dann natürlich auch ein und nur ein Paar von Werten E, F, die zusammen mit C und D den Gleichungen (1277) genügen.

Etwas verwickelter ist der Fall, daß $\lambda > 2$ ist. Doch kommt man dann, indem man fünf vorläufig unbekannte Konstante C, D, E, F, G einführt, durch den folgenden Ansatz zum Ziel:

$$
(1279) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{(x^2 + q^2)^\lambda \sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx &= \frac{(Cx + D)\sqrt{ax^2 + bx + c}}{(x^2 + q^2)^{\lambda - 1}} \\ &+ \int \frac{(Ex + F)\, dx}{(x^2 + q^2)^{\lambda - 1}\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \int \frac{G\, dx}{(x^2 + q^2)^{\lambda - 2}\sqrt{ax^2 + bx + c}}. \end{aligned} \right.
$$

Für das Bestehen dieser Gleichung ist nämlich nur erforderlich, daß die unbekannten Konstanten die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$
\begin{aligned}
-2(\lambda - 2)aC & & & + G = 0 \\
-(2\lambda - \tfrac{7}{2})bC & \quad -(2\lambda - 3)aD + E & & = 0 \\
[-(2\lambda - 3)c + 2aq^2]C & \quad -\left(2\lambda - \tfrac{5}{2}\right)bD & & + F + 2q^2G = 0 \\
\tfrac{3}{2}bq^2C + [aq^2 - 2(\lambda - 1)c]D + q^2E & & & = A \\
cq^2C & \quad + \tfrac{1}{2}bq^2D & & + q^2F + q^4G = B.
\end{aligned}
$$

Dieses System von Gleichungen hat aber ebenfalls eine und nur eine Lösung. Denn setzt man den durch die erste Gleichung gegebenen Wert von G in die dritte und die fünfte Gleichung ein und eliminiert man sodann E aus der zweiten und vierten und

F aus der dritten und fünften Gleichung, so erhält man für C und D die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2(\lambda-1)bq^2C + 2(\lambda-1)(aq^2-c)D &= A \\ -2(\lambda-1)(aq^2-c)q^2C + \qquad 2(\lambda-1)bq^2D &= B \end{aligned}$$

und kann dann ganz ähnlich weiter schliessen wie im vorigen Fall

Indem man die Rekursionsformel (1279), wenn nötig, wiederholt anwendet und erforderlichenfalls auch noch die Gleichung (1276) hinzuzieht, erhält man schließlich eine Gleichung von der Form

$$(1280)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \frac{Ax+B}{(x^2+q^2)^\lambda \sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \\ &\quad = \frac{c_0x^{2\lambda-3}+c_1x^{2\lambda-4}+\cdots+c_{2\lambda-3}}{(x^2+q^2)^{\lambda-1}}\sqrt{ax^2+bx+c} \\ &\qquad + \int \frac{A'x+B'}{(x^2+q^2)\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \end{aligned}\right.$$

wo $c_0, c_1, \cdots c_{2\lambda-3}, A', B'$ Konstante bedeuten. Natürlich kann man die Rechnung auch dadurch abkürzen, daß man gleich von vornherein eine Gleichung dieser Art ansetzt und dann die vorläufig unbekannten Konstanten $c_0, c_1, \cdots c_{2\lambda-3}, A', B'$ so bestimmt, daß der gemachte Ansatz richtig wird. Hierzu ist weiter nichts erforderlich als die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen, welches sich durch Differentiation, Wegschaffung der Nenner und Koeffizientenvergleichung ergibt und lösbar ist, da ja die Form des Ansatzes durch die vorangehenden Betrachtungen ihre Rechtfertigung erhalten hat.

Die weitere Behandlung des nun noch zu berechnenden Integrales $\int \frac{A'x+B'}{(x^2+q^2)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ wird, falls b von Null verschieden ist, wesentlich erleichtert, wenn man das Integral zunächst auf ein anderes Integral von der gleichen Form zurückführt, in welchem die erste Potenz der Integrationsveränderlichen unter dem Wurzelzeichen nicht mehr vorkommt. Dies läßt sich stets dadurch erreichen, daß man, unter u eine neue Veränderliche und unter α, β voneinander verschiedene Konstante verstehend,

$$x = \frac{\alpha u+\beta}{u+1}, \qquad \text{also} \qquad u = -\frac{x-\beta}{x-\alpha}$$

setzt. Wie man durch Ausrechnung findet, braucht man nämlich die Konstanten α, β nur so zu bestimmen, daß

$$\alpha + \beta = \frac{2(aq^2 - c)}{b} \qquad \text{und} \qquad \alpha\beta = -q^2$$

wird, was stets reelle Werte für α und β ergibt. So kommt man, wenn man die Integrationsveränderliche wieder durch x bezeichnet, auf ein Integral von der Form

$$\int \frac{A_1 x + B_1}{(x^2 + r^2)\sqrt{a_1 x^2 + c_1}}\, dx,$$

wo A_1, B_1, r, a_1, c_1 Konstante bedeuten und r, a_1, c_1 und $(c_1 - a_1 r^2)$ von Null verschieden sind. Spaltet man nun dieses Integral in

$$A_1 \int \frac{x\,dx}{(x^2 + r^2)\sqrt{a_1 x^2 + c_1}} + B_1 \int \frac{dx}{(x^2 + r^2)\sqrt{a_1 x^2 + c_1}}$$

so läßt sich der erste Teil sofort in ein leicht zu berechnendes Integral einer rationalen Funktion verwandeln, wenn man an Stelle von x mittels der Gleichung

$$\sqrt{a_1 x^2 + c_1} = t$$

eine neue Veränderliche t einführt. Ferner stimmt der zweite Teil bis auf einen konstanten Faktor stets mit einem der drei folgenden Integrale überein:

$$\textbf{I)} \int \frac{dx}{(x^2 + r^2)\sqrt{x^2 + s^2}}; \qquad \textbf{II)} \int \frac{dx}{(x^2 + r^2)\sqrt{x^2 - s^2}}$$

$$\textbf{III)} \int \frac{dx}{(x^2 + r^2)\sqrt{s^2 - x^2}};$$

wo s jedesmal eine positive Konstante bedeutet und im Fall **I)** auch s von $|r|$ verschieden sein muß.

Von diesen Integralen läßt sich nun das erste nach dem in Nr. **442** unter **III, A** angegebenen Verfahren berechnen, und zwar findet man auf diesem Wege unter Heranziehung der Ergebnisse der Nr. **445**, falls $r^2 < s^2$ ist,

$$\int \frac{dx}{(x^2 + r^2)\sqrt{x^2 + s^2}} = \frac{1}{r\sqrt{s^2 - r^2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 + r^2 + x\sqrt{x^2 + s^2}}{r\sqrt{s^2 - r^2}} \tag{1281}$$

und, falls $r^2 > s^2$ ist,

$$\int \frac{dx}{(x^2 + r^2)\sqrt{x^2 + s^2}} = \frac{1}{2r\sqrt{r^2 + s^2}} \lg \frac{x^2 + x\sqrt{x^2 + s^2} + r^2 - r\sqrt{r^2 - s^2}}{x^2 + x\sqrt{x^2 + s^2} + r^2 + r\sqrt{r^2 - s^2}}. \tag{1282}$$

Ein noch einfacherer Weg besteht darin, daß man

$$x = s \operatorname{tg} \varphi \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$$

setzt. Man erhält dann

$$\int \frac{dx}{(x^2+r^2)\sqrt{x^2+s^2}} = \int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{s^2 \sin\varphi^2 + r^2 \cos\varphi^2} = \int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{r^2 + (s^2 - r^2)\sin\varphi^2}$$

und findet, falls $r^2 < s^2$ ist,

$$(1283) \qquad \int \frac{dx}{(x^2+r^2)\sqrt{x^2+s^2}} = \frac{1}{r\sqrt{s^2-r^2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{s^2-r^2}}{r\sqrt{x^2+s^2}}$$

und, falls $r^2 > s^2$ ist,

$$(1284) \quad \int \frac{dx}{(x^2+r^2)\sqrt{x^2+s^2}} = \frac{1}{2r\sqrt{r^2-s^2}} \lg \frac{r\sqrt{x^2+s^2} + x\sqrt{r^2-s^2}}{r\sqrt{x^2+s^2} - x\sqrt{r^2-s^2}}.$$

Elementare Umrechnungen zeigen, daß diese neuen Ergebnisse sich von den vorigen nur um Konstante unterscheiden. Zunächst ist nämlich, wie man leicht bestätigt, bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von π

$$\operatorname{arctg} \frac{x^2+r^2+x\sqrt{x^2+s^2}}{r\sqrt{s^2-r^2}} = \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{s^2-r^2}}{r\sqrt{x^2+s^2}} + \operatorname{arctg} \frac{r}{\sqrt{s^2-r^2}}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} &x^2 + x\sqrt{x^2+s^2} + r^2 - r\sqrt{r^2+s^2} \\ &= x(x+\sqrt{x^2+s^2}) + r(r - \sqrt{r^2-s^2}) \\ &= x\,\frac{s^2}{\sqrt{x^2+s^2}-x} + r\,\frac{s^2}{r+\sqrt{r^2-s^2}} \\ &= \frac{s^2}{(\sqrt{x^2+s^2}-x)(r+\sqrt{r^2-s^2})}\left(r\sqrt{x^2+s^2} + x\sqrt{r^2-s^2}\right). \end{aligned}$$

Ganz ähnlich läßt sich die Summe $(x^2 + x\sqrt{x^2+s^2} + r^2 + r\sqrt{r^2-s^2})$ umformen, und indem man dies tut, erhält man

$$\lg \frac{x^2+x\sqrt{x^2+s^2}+r^2-r\sqrt{r^2-s^2}}{x^2+x\sqrt{x^2+s^2}+r^2+r\sqrt{r^2-s^2}} = \lg \frac{r\sqrt{x^2+s^2}+x\sqrt{r^2-s^2}}{r\sqrt{x^2+s^2}-x\sqrt{r^2-s^2}} + \lg \frac{r-\sqrt{r^2-s^2}}{r+\sqrt{r^2-s^2}}.$$

Bei dem Integral **II)** ist gleichfalls das in Nr. **442** unter **III, A** angegebene Verfahren ohne Schwierigkeit anwendbar, und zwar führt dasselbe zu der Gleichung

$$(1285)\quad \left\{\begin{aligned}&\int\frac{dx}{(x^2+r^2)\sqrt{x^2-s^2}}\\&\qquad=\frac{1}{2r\sqrt{r^2+s^2}}\lg\frac{x^2+x\sqrt{x^2-s^2}+r^2-r\sqrt{r^2+s^2}}{x^2+x\sqrt{x^2-s^2}+r^2+r\sqrt{r^2+s^2}}.\end{aligned}\right.$$

Setzt man dagegen

$$x=\frac{s}{\cos\varphi}\qquad\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$$

oder

$$x=-\frac{s}{\cos\varphi}\qquad\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right),$$

je nachdem x auf Werte beschränkt ist, die oberhalb s, oder auf Werte, die unterhalb $(-s)$ liegen, so erhält man im einen wie im anderen Falle nach einfachen Zwischenrechnungen

$$(1286)\quad \left\{\begin{aligned}&\int\frac{dx}{(x^2+r^2)\sqrt{x^2-s^2}}\\&\qquad=\frac{1}{2r\sqrt{r^2+s^2}}\lg\frac{x\sqrt{r^2+s^2}+r\sqrt{x^2-s^2}}{x\sqrt{r^2+s^2}-r\sqrt{x^2-s^2}}\end{aligned}\right.$$

und kann dann in ähnlicher Weise wie zuvor zeigen, daß die rechten Seiten der Gleichungen (1285) und (1286) sich nur um eine Konstante unterscheiden.

Bei dem Integral **III)** endlich ist es am einfachsten,

$$x=s\sin\varphi\qquad\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$$

zu setzen. Man erhält dann zunächst

$$\int\frac{dx}{(x^2+r^2)\sqrt{s^2-x^2}}=\int\frac{d\varphi}{s^2\sin\varphi^2+r^2},$$

und wenn man nunmehr

$$\operatorname{tg}\varphi=v$$

setzt, so ergibt sich

$$\int\frac{dx}{(x^2+r^2)\sqrt{s^2-x^2}}=\int\frac{dv}{(r^2+s^2)v^2+r^2}$$

und hieraus schließlich

$$(1287)\quad \int\frac{dx}{(x^2+r^2)\sqrt{s^2-x^2}}=\frac{1}{r\sqrt{r^2+s^2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{r^2+s^2}}{r\sqrt{s^2-x^2}}.$$

Hiermit sind alle die Fälle erledigt, die sich bei der Berechnung der in Nr. **451** unterschiedenen Grundintegrale darbieten können.

Natürlich kann man in manchen Fällen mehrere der im vorangehenden getrennt behandelten Umwandlungen zusammenziehen und dadurch insbesondere zu einer schnellen Scheidung des algebraischen und des transzendenten Teiles gelangen. Näheres hierüber findet sich in O. Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, 1. Teil, Leipzig 1893, S. 314ff. und 326ff.

Endlich sei noch darauf hingewiesen, daß S. Aronhold im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 61, Berlin 1863, S. 95—145, zur Integration von irrationalen Funktionen der im vorangehenden behandelten Art ein sehr bemerkenswertes Verfahren angegeben hat, welches auf ganz anderen Grundgedanken beruht wie die im vorangehenden durchgeführten Betrachtungen und andere hier nicht zur Verfügung stehende Hilfsmittel (Integration vollständiger Differentiale von Funktionen von mehreren Veränderlichen und Invariantentheorie) benutzt.

Integration unendlicher Reihen.

457. Hinreichende Bedingungen der gliedweisen Integrierbarkeit. — Die so häufig vorkommende Darstellung einer Funktion durch eine unendliche Reihe gibt Anlaß zu folgender Frage: Wenn eine unendliche Reihe

$$u_1(x); \quad u_2(x); \quad u_3(x); \cdots,$$

deren Glieder reellwertige Funktionen ein und derselben reellen Veränderlichen x sind, in einem abgeschlossenen Intervall $(a \cdots b)$ überall konvergiert und jedes einzelne Glied der Reihe über dieses Intervall integrierbar ist, stellt dann auch die Summe $U(x)$ der betrachteten Reihe eine über das Intervall $(a \cdots b)$ integrierbare Funktion dar, bilden ferner die von a bis b erstreckten Integrale der Funktionen $u_1(x), u_2(x), u_3(x), \cdots$ wieder eine konvergente Reihe, und stimmt, wenn dies alles zutrifft, das Integral $\int_a^b U(x)\,dx$ mit der Summe

$$\int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \int_a^b u_3(x)\,dx + \cdots$$

überein?

Sind alle diese Fragen zu bejahen, so sagt man kurz, das von a bis b erstreckte Integral der gegebenen Reihe könne durch

gliedweise Integration gefunden werden oder die Reihe sei von a bis b **gliedweise integrierbar**. Aber dieser Fall ist nicht der einzig mögliche. Auch hier zeigt sich vielmehr, daß man die Eigenschaften solcher Summen, die nur endlich viele Glieder haben, nicht ohne weiteres auf unendliche Reihen übertragen darf. Ist nämlich eine Reihe

$$u_1(x); \quad u_2(x); \quad u_3(x); \quad \cdots$$

von der soeben beschriebenen Art gegeben, so braucht ihre Summe $U(x)$ überhaupt nicht über das Intervall $(a \cdots b)$ integrierbar zu sein. Ferner braucht die Reihe der von a bis b erstreckten Integrale der einzelnen Glieder nicht zu konvergieren[1]), und selbst wenn sie konvergiert und überdies die Summe $U(x)$ über das Intervall $(a \cdots b)$ integrierbar ist, braucht die Summe

$$\int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \int_a^b u_3(x)\,dx + \cdots$$

nicht mit dem Integral $\int_a^b U(x)\,dx$ übereinzustimmen.

Es möge genügen, hier auf ein Beispiel für diesen letzteren Fall näher einzugehen. Ein solches bietet für ein die Null enthaltendes Intervall, etwa das Intervall $(0 \cdots 1)$, die schon in Nr. **298** zu anderem Zwecke angeführte beständig konvergente Reihe

$$xe^{-x^2}; \quad 2xe^{-2x^2} - xe^{-x^2}; \quad 3xe^{-3x^2} - 2xe^{-2x^2}; \quad \cdots.$$

Hier ist nämlich für jeden ganzen positiven Wert von n

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) = nxe^{-nx^2},$$

folglich

---

1) Beispiele solcher Fälle liefern für jedes die Null enthaltende Intervall, etwa das Intervall $(0 \cdots 1)$, die Reihen

$$\frac{x}{1+x^2}; \quad \frac{2x}{1+2x^2} - \frac{x}{1+x^2}; \quad \frac{3x}{1+3x^2} - \frac{2x}{1+2x^2}; \quad \cdots$$

und

$$\frac{2\lg 2 \cdot x}{1+4x^4}; \quad \frac{3\lg 3 \cdot x}{1+9x^4} - \frac{2\lg 2 \cdot x}{1+4x^4}; \quad \frac{4\lg 4 \cdot x}{1+16x^4} - \frac{3\lg 3 \cdot x}{1+9x^4}; \quad \cdots.$$

Weitere Beispiele gibt E. W. Hobson, The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, Cambridge 1907, Nr. 388, S. 547 ff.

$$\int_0^1 u_1(x)\,dx + \int_0^1 u_2(x)\,dx + \cdots + \int_0^1 u_n(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 n x e^{-nx^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-nx^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-n}.$$

Die links stehende Summe strebt also bei unbegrenzt wachsendem n dem Grenzwert $\frac{1}{2}$ zu. Das heißt aber in anderen Worten: Die Reihe der von 0 bis 1 erstreckten Integrale der einzelnen Glieder konvergiert, und es ist

$$\int_0^1 u_1(x)\,dx + \int_0^1 u_2(x)\,dx + \int_0^1 u_3(x)\,dx + \cdots = \frac{1}{2}.$$

Andererseits ist aber

$$U(x) = \lim_{n=\infty} [u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)] = \lim_{n=\infty} (n x e^{-nx^2}) = 0,$$

folglich auch

$$\int_0^1 U(x)\,dx = 0$$

und nicht etwa $\int_0^1 U(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

Der Grund dieser Erscheinung wird klar, wenn man sich überlegt, in welcher Weise sich das geometrische Bild der Funktion $y = n x e^{-nx^2}$ in einem rechtwinkeligen ebenen Koordinatensystem bei unbegrenzt wachsendem n der Geraden $y = 0$ nähert. In Fig. 13 ist dieses Bild für $n = 2$ und für $n = 18$ näherungsweise richtig gezeichnet. Wie schon in Nr. 298 erwähnt, hat die Funktion $n x e^{-nx^2}$ in dem Intervall $(0 \cdots 1)$ den Maximalwert $\sqrt{\frac{n}{2e}}$ und erreicht denselben für $x = \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Der Gipfel ihres geometrischen

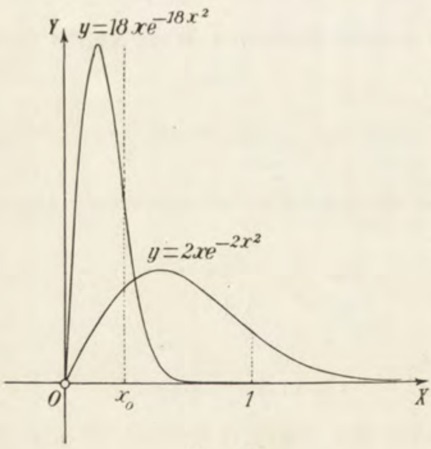


Fig. 13.

Bildes steigt also bei wachsendem n immer höher und vermag sich dabei über jede gegebene Grenze zu erheben. Zugleich kommt er aber auch der Ordinatenachse unbegrenzt nahe. Hat man zwischen 0 und 1 irgendeine feste Zahl x_0 nach Belieben angenommen, so rückt der Gipfel schließlich immer auf die linke Seite der Geraden $x = x_0$, und trotz seines Aufsteigens ist doch jedesmal $\lim\limits_{n=\infty} \left(n x_0 e^{-n x_0^2}\right) = 0$. Gleichwohl bewirkt die Erhebung des Gipfels, daß sich der Inhalt des Flächenstückes zwischen dem Intervall $(0 \cdots 1)$ der Abszissenachse und der Linie $y = n x e^{-n x^2}$ nicht dem Grenzwert 0, sondern dem Grenzwert $\frac{1}{2}$ nähert.

Die eben erörterte und andere Eigentümlichkeiten werden jedoch ausgeschlossen, wenn man voraussetzt, daß die gegebene Reihe in dem betrachteten Intervall gleichmäßig (Nr. **297**) konvergiert, denn dann gilt der folgende

Lehrsatz: *Wenn eine unendliche Reihe*

$$u_1(x); \quad u_2(x); \quad u_3(x) \quad \cdots,$$

deren Glieder reellwertige Funktionen ein und derselben reellen Veränderlichen x sind, in einem abgeschlossenen Intervall $(a \cdots b)$ gleichmäßig konvergiert und jedes einzelne Glied der Reihe über dieses Intervall integrierbar ist, so ist auch die Summe $U(x)$ der Reihe über das Intervall $(a \cdots b)$ integrierbar. Ferner konvergiert die Reihe der von a bis b erstreckten Integrale der einzelnen Glieder, und es ist

$$\int_a^b U(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \int_a^b u_3(x)\,dx + \cdots, \tag{1288}$$

also gliedweise Integration zulässig.

Zum Beweise werde für jeden ganzen positiven Wert von k

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_k(x) = U_k(x)$$

und

$$u_{k+1}(x) + u_{k+2}(x) + u_{k+3}(x) + \cdots = R_k(x)$$

gesetzt. Ferner sei das Intervall $(a \cdots b)$ in eine beliebige Anzahl n von Teilen zerlegt, und es seien

$$\delta_1, \ \delta_2, \ \delta_3, \ \cdots \ \delta_n$$

die Längen dieser Teilintervalle und für $\lambda = 1, 2, \cdots n$ jedesmal

$$S_\lambda, \quad S_{k\lambda}, \quad r_{k\lambda}$$

die größten Schwankungen (Nr. **420**) der Funktionen $U(x)$, $U_k(x)$, $R_k(x)$ für das Teilintervall von der Länge δ_λ. Dann ist

$$\sum_{\lambda=1}^{n} S_\lambda \delta_\lambda \leqq \sum_{\lambda=1}^{n} S_{k\lambda} \delta_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{n} r_{k\lambda} \delta_\lambda .$$

Nun kann man nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen positiven Konstanten ε infolge der gleichmäßigen Konvergenz der gegebenen Reihe zunächst die Zahl k so groß annehmen, daß für jeden dem Intervall $(a \cdots b)$ angehörenden Wert von x

$$|R_k(x)| < \frac{\varepsilon}{4|b-a|}$$

ist. Dann ist für jede gegebene Teilung des Intervalles $(a \cdots b)$ und für jeden bei derselben zulässigen Wert von λ

$$r_{k\lambda} \leqq \frac{\varepsilon}{2|b-a|},$$

also

$$\sum_{\lambda=1}^{n} r_{k\lambda} \delta_\lambda \leqq \frac{\varepsilon}{2|b-a|} \sum_{\lambda=1}^{n} \delta_\lambda = \frac{\varepsilon}{2} .$$

Ferner kann man, da jede der Funktionen $u_1(x), u_2(x), \cdots u_k(x)$, also auch die Summe $U_k(x)$ über das Intervall $(a \cdots b)$ integrierbar ist (Nr. **425**, 4), die Anzahl n und die Längen $\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_n$ so wählen, daß

$$\sum_{\lambda=1}^{n} S_{k\lambda} \delta_\lambda < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. Dann ist aber

$$\sum_{\lambda=1}^{n} S_\lambda \delta_\lambda < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

womit der Beweis für die Integrierbarkeit der Summe $U(x)$ erbracht ist. Hieraus folgt, daß auch die Funktion $R_k(x) = U(x) - U_k(x)$ für jeden möglichen Wert von k über das Intervall $(a \cdots b)$ integriert werden kann, und zugleich ergibt sich die Gleichung

$$\int_a^b U_k(x)\,dx = \int_a^b U(x)\,dx - \int_a^b R_k(x)\,dx .$$

Nun kann man aber nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen positiven Konstanten ε wegen der gleichmäßigen Konvergenz eine positive Konstante K so bestimmen, daß für jeden dem Intervall $(a \cdots b)$ angehörenden Wert von x

$$|R_k(x)| < \frac{\varepsilon}{|b-a|}$$

wird, sobald k oberhalb K liegt. Ist dies geschehen, so ist für $k > K$ auch

$$\left|\int_a^b R_k(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Folglich nähert sich die Summe

$$\int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \cdots + \int_a^b u_k(x)\,dx = \int_a^b U_k(x)\,dx$$

bei unbegrenzt wachsendem k dem Grenzwert $\int_a^b U(x)\,dx$. Das heißt aber in anderen Worten: Die Reihe

$$\int_a^b u_1(x)\,dx; \quad \int_a^b u_2(x)\,dx; \quad \int_a^b u_3(x)\,dx; \quad \cdots$$

konvergiert, wie behauptet wurde, und hat das Integral $\int_a^b U(x)\,dx$ zur Summe.

Nach Nr. **301** ist insbesondere jede Potenzreihe mit reellen Koeffizienten in jedem abgeschlossenen Teile ihres Konvergenzbereiches gleichmäßig konvergent. Daher kann das über einen abgeschlossenen Teil des Konvergenzbereiches einer solchen Potenzreihe erstreckte Integral ihrer Summe stets durch gliedweise Integration gefunden werden.

458. Potenzreihen für arcsin x und arctg x. — Wenn man die Hauptwerte der Funktionen arcsin x und arctg x mit Hilfe des Satzes von Maclaurin durch Potenzreihen von x darzustellen versucht, so kommt man aus dem Grunde auf Schwierigkeiten, weil sich für die höheren Ableitungen dieser Funktionen keine einfachen Ausdrücke ergeben. Dagegen kommt man ohne jedes Hindernis zum Ziel, wenn man von dem Endergebnis der vorigen Nummer Gebrauch macht. Für jeden zwischen (-1) und 1 enthaltenen Wert von x gilt nämlich, wofern das Zeichen arcsin x den Hauptwert bedeutet, die Gleichung

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Ähnlich ist, wenn auch unter $\operatorname{arctg} x$ der Hauptwert verstanden wird, für jeden Wert von x

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{d\xi}{1+\xi^2}.$$

Nun ist für $-1 < \xi < 1$ nach Nr. **293**, Gl. (629)

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} = (1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\xi^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\xi^6 + \cdots$$

und

$$\frac{1}{1+\xi^2} = (1+\xi^2)^{-1} = 1 - \xi^2 + \xi^4 - \xi^6 + \cdots.$$

Hieraus folgt aber, wenn auch x absolut genommen kleiner als 1 ist, durch Integration über das Intervall $(0 \cdots x)$

$$\textbf{(1289)}\qquad \arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \cdots$$

und

$$\textbf{(1290)}\qquad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

Die beiden so erhaltenen Reihen sind auch noch für $x = \pm 1$ konvergent. Für die zweite Reihe ist dies ohne weiteres ersichtlich, aber auch für die erste läßt es sich beweisen, allerdings nicht mittels der in Nr. **290** angegebenen einfachsten hinreichenden Bedingung der Konvergenz, wohl aber, wenn man gewisse feinere Kennzeichen der Konvergenz zu Hilfe nimmt, deren Erörterung jedoch hier zu weit führen würde. Da ferner die beiden Seiten der Gleichung (1289) und ebenso auch der Gleichung (1290) sowohl für $x = 1$ als für $x = -1$ stetig sind, so bleiben die Gleichungen (1289) und (1290) auch noch für $x = \pm 1$ richtig.

459. Berechnung der Zahl π. — Mit Hilfe der Gleichung (1290) kann man die Zahl π verhältnismäßig leicht auf eine größere Anzahl von Dezimalen berechnen. Doch bedarf es dazu noch einiger besonderen Kunstgriffe. Setzt man nämlich $x = 1$, so erhält man zwar für $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ die schon von J. Gregory (1638 bis 1675) und G. W. Leibniz (1646—1716) gefundene[1]) Gleichung

---

1) Näheres bei M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. 3, Kapitel 86, Leipzig, 1. Aufl. 1894, S. 71, 2. Aufl. 1901, S. 75.

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots,$$

aber hier konvergiert die rechts stehende Reihe so langsam, daß sie sich nicht zur genaueren Berechnung eignet. Diese Schwierigkeit läßt sich jedoch vermeiden, wenn man sich den Winkel $\frac{\pi}{4}$ aus mehreren Teilen zusammengesetzt denkt, deren Tangenten echt gebrochene rationale Zahlen sind. Dies ist auf mannigfach verschiedene Weisen möglich. Ist nämlich α irgendeine positive unterhalb $\frac{\pi}{4}$ liegende Zahl und $\beta=\frac{\pi}{4}-\alpha$, so ist

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}.$$

Man kann also $\operatorname{tg}\alpha$ einem beliebigen rationalen echten Bruche gleichsetzen und erhält dann auch für $\operatorname{tg}\beta$ einen rationalen echten Bruch. Setzt man insbesondere $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5}$, so kann man den Winkel α bequem aus der Gleichung

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{5}=\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot5^3}+\frac{1}{5\cdot5^5}-\frac{1}{7\cdot5^7}+\cdots$$

berechnen. Zugleich wird

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{2}{3}.$$

Nun ist zwar auch dieser Bruch noch zu groß, als daß sich sein Arkustangens sofort berechnen ließe; aber man kann auf dem betretenen Wege weiter fortschreiten. Setzt man nämlich, unter α den oben berechneten Wert $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$ verstehend,

$$\beta=\alpha+\gamma$$

so erhält man

$$\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{5}}{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}}=\frac{7}{17}.$$

Setzt man nunmehr

$$\gamma=\alpha+\delta,$$

so bekommt man

$$\operatorname{tg}\delta=\operatorname{tg}(\gamma-\alpha)=\frac{\frac{7}{17}-\frac{1}{5}}{1+\frac{7}{17}\cdot\frac{1}{5}}=\frac{9}{46},$$

und wenn man endlich noch

$$\delta = \alpha + \varepsilon$$

setzt, so findet sich

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \operatorname{tg}(\delta - \alpha) = \frac{\frac{9}{46} - \frac{1}{5}}{1 + \frac{9}{46}\cdot\frac{1}{5}} = -\frac{1}{239}.$$

Damit ist man bei einer Zahl angelangt, deren Arkustangens sich schnell berechnen läßt. Alles zusammengefaßt, bekommt man schließlich

$$(1291)\quad \begin{cases} \frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239} \\ \quad = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \cdots\right) \\ \quad\quad - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \frac{1}{7\cdot 239^7} + \cdots\right). \end{cases}$$

Nach dieser Formel ist die Zahl π von dem englischen Astronomen J. Machin um 1706 bis auf 100 Dezimalen[1]) und von W. Shanks 1873 sogar bis auf 707 Dezimalen[2]) berechnet worden.

460. Hinreichende Bedingung der gliedweisen Differenzierbarkeit. — Wenn eine unendliche Reihe

$$\text{(I)}\qquad u_1(x);\quad u_2(x);\quad u_3(x);\quad \cdots,$$

deren Glieder Funktionen ein und derselben Veränderlichen x sind, in einem Intervall $\mathfrak{J}$ konvergiert und jedes einzelne Glied der Reihe in diesem Intervall differenzierbar ist, so kann es sein, daß die in dem Intervall $\mathfrak{J}$ durch die Summe der Reihe (I) dargestellte Funktion $U(x)$ daselbst überall differenzierbar ist, daß ferner die aus den Ableitungen der einzelnen Glieder gebildete Reihe

$$\text{(II)}\qquad u_1'(x);\quad u_2'(x);\quad u_3'(x);\quad \cdots$$

---

1) Näheres bei M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. 3, Kapitel 97, Leipzig, 1. Aufl. 1894, S. 350, 2. Aufl. 1901, S. 367, und bei A. von Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, 2. Teil, Leipzig 1903, S. 80, sowie bei Th. Vahlen, Konstruktionen und Approximationen, Leipzig und Berlin 1911, S. 277. In diesen letzteren Werken finden sich auch eingehende Angaben über andere ältere und neuere Berechnungen der Zahl π.

2) Proceedings of the Royal Society of London, Bd. 21, 1873, S. 318; Berichtigung Bd. 22, 1874, S. 45.

ebenfalls in $\mathfrak{J}$ konvergiert und daß ihre Summe mit der Ableitung $U'(x)$ der Summe $U(x)$ übereinstimmt. Trifft dies alles zu, so sagt man kurz, die Reihe (I) sei in $\mathfrak{J}$ **gliedweise differenzierbar**. Aber neben diesem praktisch wichtigsten Falle sind noch andere Fälle möglich, z. B. daß die Reihe (II) in $\mathfrak{J}$ nicht überall oder sogar nirgends konvergiert[1]), oder daß die Funktion $U(x)$ in $\mathfrak{J}$ nicht überall oder sogar nirgends differenzierbar ist[2]). Deswegen ist es wichtig, wenigstens eine Bedingung zu kennen, unter der man sich darauf verlassen kann, daß der zuerst erwähnte Hauptfall vorliegt. Eine solche Bedingung liefert der folgende

Lehrsatz: *Wenn die Glieder einer unendlichen Reihe*

(I) $$u_1(x); \quad u_2(x); \quad u_3(x); \quad \cdots$$

Funktionen ein und derselben Veränderlichen x sind, wenn ferner alle diese Funktionen in ein und demselben Intervall $\mathfrak{J}$ stetige Ableitungen haben und die aus den letzteren gebildete Reihe

(II) $$u_1'(x); \quad u_2'(x); \quad u_3'(x); \quad \cdots$$

in $\mathfrak{J}$ gleichmäßig konvergiert, so ist die Reihe (I), *sofern sie an irgend einer dem Intervall $\mathfrak{J}$ angehörenden Stelle a konvergiert, in diesem Intervall überall konvergent und ihre Summe $U(x)$ eine daselbst differenzierbare Funktion, deren Ableitung durch gliedweise Differentiation gebildet werden kann. Es gilt also dann in $\mathfrak{J}$ die Gleichung*

$$U'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + \cdots.$$

---

1) Ein derartiges Verhalten zeigt die Reihe

$$\sin x; \quad \frac{1}{2}\sin(2x); \quad \frac{1}{3}\sin(3x); \quad \cdots.$$

Diese Reihe ist nämlich, wie aus den Anfangsgründen der Lehre von den Fourierschen Reihen folgt, für jeden Wert von x konvergent und hat für $0 < x < \pi$ die Summe $\frac{\pi - x}{2}$. Die Summe der Reihe stellt also eine zwischen 0 und π überall differenzierbare Funktion dar. Trotzdem ist die aus den Ableitungen der einzelnen Glieder bestehende Reihe

$$\cos x; \quad \cos(2x); \quad \cos(3x); \quad \cdots$$

für keinen Wert von x konvergent.

2) Einen Beleg für diese Möglichkeit liefert das von K. Weierstrass angegebene erste Beispiel einer stetigen nirgends differenzierbaren Funktion, welches im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 79, 1875, S. 29, und in K. Weierstrass, Mathematische Werke, Bd. 2, Berlin 1895, S. 71, veröffentlicht wurde. Vgl. Bd. 2, S. 56, Fußnote 1.

Beweis: Nach Einschränkung der Veränderlichen x auf das Intervall $\mathfrak{J}$ sei zur Abkürzung

$$u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + \cdots = V(x)$$

gesetzt. Dann ist $V(\xi)$ eine in dem Intervall $(a \cdots x)$ stetige Funktion, deren Integral durch gliedweise Integration berechnet werden kann, d. h. es ist

$$\int_a^x u_1'(\xi)d\xi + \int_a^x u_2'(\xi)d\xi + \int_a^x u_3'(\xi)d\xi + \cdots = \int_a^x V(\xi)d\xi$$

oder

$$[u_1(x) - u_1(a)] + [u_2(x) - u_2(a)] + [u_3(x) - u_3(a)] + \cdots = \int_a^x V(\xi)d\xi\,.$$

Addiert man nun beiderseits die Summe $U(a)$ der nach Voraussetzung konvergenten Reihe

$$u_1(a); \quad u_2(a); \quad u_3(a); \; \cdots,$$

so erkennt man, daß die Reihe (I) in $\mathfrak{J}$ konvergiert, und erhält zugleich für ihre Summe $U(x)$ die Gleichung

$$U(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots = \int_a^x V(\xi)d\xi + U(a).$$

Daraus folgt aber sofort, daß $U(x)$ in $\mathfrak{J}$ differenzierbar und daß daselbst überall

$$U'(x) = V(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + \cdots$$

ist, wie behauptet wurde.[1]) Insbesondere ist, wie schon in Nr. **303** auf anderem Wege gezeigt wurde, jede als Summe einer konvergenten Potenzreihe dargestellte Funktion im Innern des Konvergenzbereiches differenzierbar und kann daselbst dadurch differenziert werden, daß man die einzelnen Glieder differenziert.

1) Andere hinreichende Bedingungen für die gliedweise Differenzierbarkeit haben U. Dini, Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Größe, deutsch von J. Lüroth und A. Schepp, Leipzig 1892, § 100—106, S. 150ff. und W. F. Osgood, American Journal of Mathematics, Vol. 19, 1897, S. 188, und Bulletin of the American mathematical society, 2. Series, Vol. 3, 1897, S. 79, angegeben.

Siebzehnter Abschnitt.

Anwendungen einfacher Integrale.

461. Inhaltsberechnung durch Zerlegung in Streifen. — Wenn es sich darum handelt, den Inhalt eines krummlinig begrenzten ebenen Bereiches zu ermitteln, so empfiehlt es sich im allgemeinen, zunächst zu versuchen, den gegebenen Bereich nach Zugrundelegung eines rechtwinkeligen Koordinatensystems, so wie es die Figuren 14 und 15 andeuten, durch Addition und Subtraktion aus einer endlichen Anzahl von Bereichen der in Nr. **419** erwähnten Art zusammenzusetzen und dann diejenigen Integrale zu berechnen, welche die Inhalte dieser Bereiche darstellen. Dieses Verfahren kann treffend als Inhaltsberechnung durch **Zerlegung in Streifen** bezeichnet werden. Für die Anwendbarkeit dieses

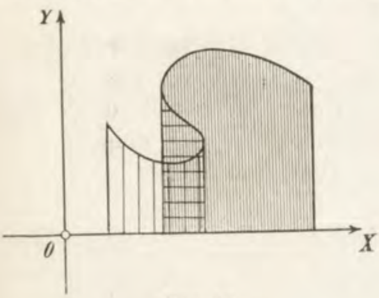


Fig. 14.

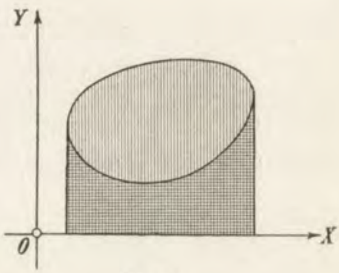


Fig. 15.

Verfahrens braucht es kein Hindernis zu bilden, wenn eines der in Betracht kommenden krummen Linienstücke in dem angenommenen System rechtwinkeliger Koordinaten x, y nicht ohne weiteres durch eine Gleichung von der Form $y = f(x)$ darstellbar, sondern statt dessen durch eine Parameterdarstellung gegeben ist. Denn es gilt der folgende

Lehrsatz: *In einem System rechtwinkeliger Koordinaten x, y sei ein nirgends unterhalb der x-Achse verlaufendes Linienstück $\mathfrak{l}$ durch zwei Gleichungen*

$$x = \varphi(t); \qquad y = \chi(t)$$

gegeben, wobei der Parameter t von einem endlichen Anfangswert α bis zu einem endlichen Endwert β stetig zuzunehmen hat und $\varphi(t)$, $\chi(t)$ zwei in dem Intervall $(\alpha \cdots \beta)$ stetige Funktionen be-

deuten, von denen die erste daselbst eine stetige Ableitung hat und sich bei wachsendem t beständig in gleichem Sinne ändert. Dann wird der Inhalt J desjenigen Bereiches, den das von einem beweglichen Punkte P von $\mathfrak{l}$ auf die x-Achse herabgelassene Lot überstreicht, wenn der zu P gehörende Parameterwert von α bis β zunimmt, durch die Gleichung

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} \chi(t)\,\varphi'(t)\,dt \tag{1292}$$

gegeben, vorausgesetzt, daß man dem erwähnten Bereich einen positiven oder negativen Inhalt beilegt, je nachdem die Funktion $\varphi(t)$ bei wachsendem t zu- oder abnimmt.

Bei den gemachten Annahmen kann man nämlich, nachdem man die Veränderliche x auf das Intervall mit den Grenzen $\varphi(\alpha) = a$ und $\varphi(\beta) = b$ eingeschränkt hat, den Parameter t als eine durch die Gleichung

$$x = \varphi(t)$$

in Verbindung mit der Ungleichung $\alpha \leqq t \leqq \beta$ bestimmte Funktion von x ansehen, ganz einerlei, ob diese Funktion in geschlossener Form darstellbar ist oder nicht. Denkt man sich dann diese Funktion an Stelle von t in die Gleichung $y = \chi(t)$ eingesetzt, so geht y in eine Funktion $f(x)$ von x über, und es ist

$$J = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Nun kann man aber das rechts stehende Integral dadurch umformen, daß man an Stelle von x den Parameter t als neue Integrationsveränderliche einführt, und erhält dadurch die zu beweisende Gleichung (1292).

Beispielsweise ergibt sich hieraus für den Inhalt J des Bereiches, welcher von dem durch die Gleichungen

$$x = r(t - \sin t); \qquad y = r(1 - \cos t)$$

in Verbindung mit der Ungleichung $0 \leqq t \leqq 2\pi$ dargestellten Zykloidenbogen (vgl. Nr. **343**, 4) und der x-Achse begrenzt wird, die Gleichung

$$\begin{aligned} J &= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\,dt \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos t^2)\,dt = 3\pi r^2 \end{aligned}$$

462. Inhaltsberechnung durch Zerlegung in Sektoren. — Stellen sich dem in der vorigen Nummer angegebenen Verfahren der Inhaltsberechnung irgendwelche Schwierigkeiten entgegen, so kann man manchmal zum Ziel gelangen, indem man sich eines zweiten Verfahrens bedient, welches sich durch die Bezeichnung Inhaltsberechnung durch **Zerlegung in Sektoren** kennzeichnen läßt. Dieses zweite Verfahren besteht darin, daß man den gegebenen Bereich durch Addition und Subtraktion aus Bereichen zusammenzusetzen sucht, von denen jeder einzelne durch zwei

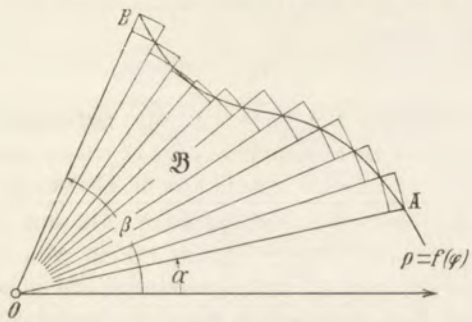


Fig. 16.

von einem Punkt O (Fig. 16) ausgehende Strecken und ein ihre Endpunkte A, B verbindendes einfaches Linienstück begrenzt ist. Seine Grundlage bildet der folgende

Lehrsatz: *Es seien α, β irgend zwei den Bedingungen*

$$\alpha < \beta \qquad \text{und} \qquad \beta - \alpha < 2\pi$$

genügende Konstante und $f(\varphi)$ eine für das abgeschlossene Intervall $(\alpha \cdots \beta)$ erklärte und daselbst nirgends negative Funktion. Ferner sei (Fig. 16) *in der Ebene eines Systems ebener Polarkoordinaten ϱ, φ eine Punktmenge durch die Gleichung*

$$\varrho = f(\varphi)$$

gegeben, und ein zugehöriger Bereich $\mathfrak{B}$ durch die Festsetzung abgegrenzt, daß er diejenigen, aber auch nur diejenigen Punkte enthalten soll, für welche die Abweichung φ nicht außerhalb der Grenzen α und β und zugleich der Leitstrahl nicht außerhalb der Grenzen 0 und $\varrho = f(\varphi)$ liegt. Wenn dann die Funktion $f(\varphi)$ über das Intervall $(\alpha \cdots \beta)$ integrierbar ist, so hat der Bereich $\mathfrak{B}$ einen bestimmten Flächeninhalt J und dieser wird durch die Gleichung

(1293) $$J=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\varrho^2 d\varphi=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\varphi)]^2 d\varphi$$

gegeben.

Beweis: Man denke sich das Intervall $(\alpha\cdots\beta)$ in eine beliebige Anzahl n von Teilen zerlegt, deren Längen der Reihe nach $\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_n$ heißen mögen, denke sich auch den Bereich $\mathfrak{B}$ durch Halbstrahlen, welche vom Nullpunkt ausgehen, in der entsprechenden Weise geteilt und verstehe unter

$$g_1, g_2, \cdots g_n$$

die unteren und unter

$$G_1, G_2, \cdots G_n$$

die oberen Grenzen der Funktion $f(\varphi)$ für die einzelnen Teilintervalle. Ferner denke man sich für $\lambda=1, 2, \cdots n$ jedesmal mit den Radien g_λ und G_λ um den Nullpunkt zwei Kreisbogen beschrieben, welche zusammen mit den Halbstrahlen, die den λ-ten Teil des Bereiches $\mathfrak{B}$ begrenzen, zwei Sektoren bilden, von denen der eine in diesem Teil enthalten ist und der andere ihn umschließt. Dann hat die Summe der eingeschlossenen Kreissektoren den Inhalt $\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{n} g_\lambda^2\delta_\lambda$ und die der umschließenden den Inhalt $\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{n} G_\lambda^2\delta_\lambda$. Zugleich bildet die erstere eine in dem Bereich $\mathfrak{B}$ enthaltene, die zweite eine ihn umschließende Fläche. Ferner kann man, da die Funktion $f(\varphi)$, also nach Nr. **425** auch die Funktion $[f(\varphi)]^2$ über das Intervall $(\alpha\cdots\beta)$ integrierbar ist, nach willkürlicher Annahme einer bsliebig kleinen positiven Konstanten ε durch passende Wahl der Anzahl n und der Längen $\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_n$ stets erreichen, daß der Unterschied der Summen $\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{n} G_\lambda^2\delta_\lambda$ und $\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{n} g_\lambda^2\delta_\lambda$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ wird. Konstruiert man sodann, was immer möglich ist, einen von einer endlichen Anzahl gerader Strecken begrenzten Bereich $\mathfrak{B}_1$, der von der inneren Sektorensumme eingeschlossen wird und dessen Inhalt sich von dem ihrigen um weniger als $\frac{\varepsilon}{3}$ unterscheidet, sowie ein die äußere Sektorensumme umschließendes Vieleck $\mathfrak{B}_2$, dessen Inhalt von dem ihrigen ebenfalls um weniger als $\frac{\varepsilon}{3}$ abweicht, so erhält man zwei geradlinig begrenzte Bereiche, deren Inhalte sich um weniger als ε unterscheiden und von denen der eine von dem Bereich $\mathfrak{B}$ eingeschlossen ist, während der andere ihn umschließt. Damit ist der Beweis erbracht, daß dem Bereich $\mathfrak{B}$ wirklich ein Flächeninhalt zukommt, und zugleich folgt aus dem vorangehenden, daß dieser Inhalt durch den Ausdruck $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\varphi)]^2\,d\varphi$ dargestellt wird.

Von der Einschränkung, daß $\beta-\alpha<2\pi$ sein soll, kann man sich nachträglich leicht befreien. Das gewonnene Ergebnis bleibt nämlich auch für $\beta-\alpha\geqq 2\pi$ bestehen, wenn man sich die Ebene, so wie es Fig. 17 andeutet, von dem Bereich $\mathfrak{B}$ stellenweise mehr-

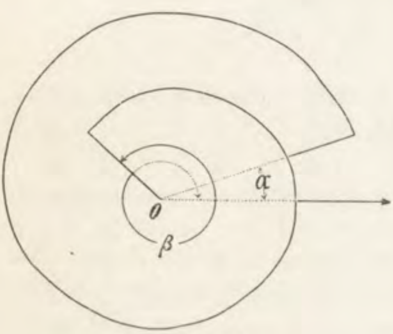


Fig. 17.

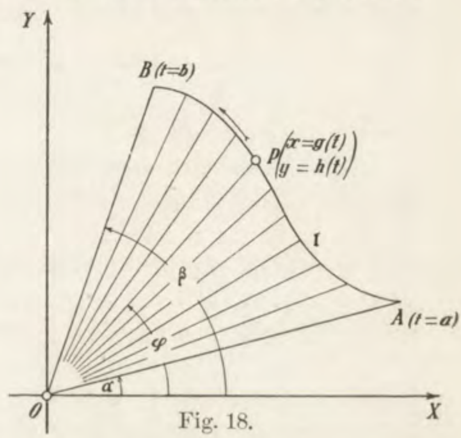


Fig. 18.

fach überdeckt denkt und dann bei der Inhaltsberechnung alle mehrfach überdeckten Teile entsprechend oft in Anschlag bringt.

Endlich kann auch die Forderung, daß $\alpha<\beta$ sein soll, fallen gelassen werden, wenn man im entgegengesetzten Fall dem Bereich $\mathfrak{B}$ einen negativen Inhalt zuschreibt.

Aus dem im vorangehenden erhaltenen Satze folgt nun ohne viel Mühe noch ein anderer, der bei den Anwendungen oft bequemer ist, weil er sich auf den Fall bezieht, daß man die zu betrachtende Figur auf rechtwinkelige Koordinaten bezogen hat. Dieser zweite Satz lautet folgendermaßen:

In einer Ebene mit einem System rechtwinkeliger Koordinaten x, y (Fig. 18) *sei ein einfaches Linienstück $\mathfrak{l}$ durch zwei Gleichungen*

$$x = g(t); \qquad y = h(t)$$

gegeben, in denen $g(t)$ und $h(t)$ Funktionen bedeuten, die in einem abgeschlossenen Intervall differenzierbar und deren Ableitungen daselbst stetig und so beschaffen sind, daß die Determinante

$$D(t) = \begin{vmatrix} g(t) & h(t) \\ g'(t) & h'(t) \end{vmatrix}$$

nirgends gleich Null wird. Dann dreht sich der vom Koordinatenanfang O nach dem beweglichen Punkte P mit den Koordinaten $x = g(t)$, $y = h(t)$ führende Leitstrahl, wenn t stetig von der unteren Grenze a des erwähnten Intervalles bis zu dessen oberer Grenze b zunimmt, beständig im gleichen Sinne fortschreitend um einen endlichen Winkel, und der Inhalt J des Bereiches $\mathfrak{B}$, den er dabei überstreicht, wird stets durch die Gleichung

$$J = \frac{1}{2}\int_a^b \begin{vmatrix} g(t) & h(t) \\ g'(t) & h'(t) \end{vmatrix} dt \tag{1294}$$

gegeben, wofern man nur

1. — *jeden etwa vorkommenden mehrfach überstrichenen Teil der Ebene auch entsprechend oft zählt und*

2. — *in Übereinstimmung mit der am Schluß der Nr.* 418 *erwähnten Erklärung den Inhalt des Bereiches $\mathfrak{B}$ durch eine positive oder eine negative Zahl mißt, je nachdem sich der Leitstrahl OP bei wachsendem t im positiven oder im negativen Sinne dreht.*

Beweis: Da die Determinante $D(t)$ in dem Intervall $(a \cdots b)$ nirgends verschwindet, werden auch die Funktionen $g(t)$, $h(t)$ daselbst niemals gleichzeitig gleich Null. Folglich ist auch der kleinste Wert, den die stetige Funktion $\sqrt{[g(t)]^2 + [h(t)]^2}$ in dem Intervall $(a \cdots b)$ erwirbt, von Null verschieden. Er heiße r_0. Ferner sei t_0 irgendein fester, dem Intervall $(a \cdots b)$ angehörender Wert von t und P_0 der entsprechende Punkt von $\mathfrak{l}$. Dann liegt der bewegliche Punkt P mit den Koordinaten $g(t)$, $h(t)$ sicher solange nicht auf der Verlängerung der Strecke OP_0 über O hinaus, als der Abstand P_0P kleiner als $2r_0$ oder

$$[g(t) - g(t_0)]^2 + [h(t) - h(t_0)]^2 < 4r_0^2$$

ist. Nun ist aber

$$g(t) - g(t_0) = (t - t_0)g'(\tau) \qquad \text{und} \qquad h(t) - h(t_0) = (t - t_0)h'(\tau'),$$

wo τ und τ' Mittelwerte zwischen t_0 und t bedeuten. Folglich wird die vorangehende Ungleichung stets erfüllt, wenn man zunächst eine Konstante M derart wählt, daß sie größer ist als jeder Wert, den $|g'(t)|$, und auch größer als jeder Wert, den $|h'(t)|$ in dem Intervall $(a \cdots b)$ zu erwerben vermag, und sodann t so nahe bei t_0 annimmt, daß

$$2(t-t_0)^2 M^2 \leqq 4 r_0^2 \qquad \text{oder} \qquad |t-t_0| \leqq \frac{r_0\sqrt{2}}{M}$$

ist. Die in der letzteren Gleichung rechts stehende, von Null verschiedene Konstante $\frac{r_0\sqrt{2}}{M}$ geht aber in der endlichen Differenz $(b-a)$ nur eine endliche Anzahl von Malen auf. Daher kann man eine ganze positive Zahl k so bestimmen, daß

$$(k-1)\frac{r_0\sqrt{2}}{M} \leqq b-a < k\frac{r_0\sqrt{2}}{M}$$

ist, und hierauf die Abweichung φ des Leitstrahles OP für das ganze Intervall $(a \cdots b)$ eindeutig als Funktion des Parameters t erklären, indem man folgende Festsetzungen trifft:

1. — Nachdem für die Abweichung der zu dem Anfangswert a des Parameters t gehörenden Anfangslage OA des Leitstrahles OP unter den möglichen Werten der Abweichung ein bestimmter Wert α ausgewählt ist, soll für jeden der Bedingung

$$a \leqq t \leqq a + \frac{r_0\sqrt{2}}{M}$$

genügenden Wert von t für die Abweichung φ des Leitstrahles OP der zwischen $(\alpha-\pi)$ und $(\alpha+\pi)$ liegende Wert genommen werden.

2. — Wenn $k>1$ ist und φ_1 denjenigen Wert der Abweichung bedeutet, der sich nach der vorigen Festsetzung für $t = a + \frac{r_0\sqrt{2}}{M}$ ergibt, so soll, solange

$$a + \frac{r_0\sqrt{2}}{M} \leqq t \leqq a + 2\frac{r_0\sqrt{2}}{M}$$

ist, für die Abweichung φ stets der zwischen $(\varphi_1-\pi)$ und $(\varphi_1+\pi)$ enthaltene Wert genommen werden.

3. — Wenn k auch größer als 2 ist und φ_2 denjenigen Wert der Abweichung bedeutet, der sich nach der eben getroffenen Festsetzung für $t = a + 2\frac{r_0\sqrt{2}}{M}$ ergibt, so soll, solange

$$a + 2\frac{r_0\sqrt{2}}{M} \leqq t \leqq a + 3\frac{r_0\sqrt{2}}{M}$$

ist, für die Abweichung φ der zwischen $(\varphi_2 - \pi)$ und $(\varphi_2 + \pi)$ enthaltene Wert genommen werden, und so fort.

Die so erklärte Abweichung φ läßt sich kurz als diejenige bezeichnen, die aus dem Anfangswert α durch stetige Fortsetzung entsteht. Sie ist, wie man sofort einsieht, eine in dem Intervall $(a \cdots b)$ überall stetige Funktion des Parameters t. Sie erfüllt ferner die Gleichungen

$$\text{(1295)}\qquad \begin{aligned} \sqrt{[g(t)]^2 + [h(t)]^2}\cos\varphi &= g(t) \\ \sqrt{[g(t)]^2 + [h(t)]^2}\sin\varphi &= h(t) \end{aligned}$$

und ist daher auch durchweg differenzierbar. Dies folgt nämlich, solange φ keinem ganzzahligen Vielfachen von π gleichkommt, aus der ersten Gleichung und, wenn φ mit einem solchen Vielfachen zusammenfällt, aus der zweiten. Zugleich ergibt sich

$$-\sqrt{[g(t)]^2 + [h(t)]^2}\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\sqrt{[g(t)]^2 + [h(t)]^2}}{dt}\cos\varphi = g'(t)$$
$$\sqrt{[g(t)]^2 + [h(t)]^2}\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\sqrt{[g(t)]^2 + [h(t)]^2}}{dt}\sin\varphi = h'(t),$$

woraus durch Multiplikation mit $(-\sin\varphi)$ und $\cos\varphi$ und nachfolgende Addition

$$\sqrt{[g(t)]^2 + [h(t)]^2}\frac{d\varphi}{dt} = -g'(t)\sin\varphi + h'(t)\cos\varphi$$

folgt. Hieraus erhält man endlich, indem man für $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ die durch die Gleichungen (1295) gegebenen Werte einsetzt,

$$\text{(1296)}\qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{g(t)h'(t) - g'(t)h(t)}{[g(t)]^2 + [h(t)]^2}.$$

Nun steht hier im Zähler der rechten Seite gerade die Determinante $D(t)$, von welcher vorausgesetzt wurde, daß sie in dem Intervall $(a \cdots b)$ dauernd von Null verschieden sei. Also kann auch die Ableitung $\frac{d\varphi}{dt}$ niemals gleich Null werden und niemals ihr Vorzeichen wechseln. Der Leitstrahl OP dreht sich somit bei wachsendem t beständig im gleichen Sinne, wie behauptet wurde, und kann dabei auch nur einen Winkel von endlicher Größe überstreichen, da ja die Abweichung φ, wenn sie von dem Anfangswert α nach dem oben beschriebenen Verfahren stetig fortgesetzt wird, für den Endwert b des Parameters t einen endlichen Endwert erwirbt. Dieser Endwert heiße β. Dann ist nicht nur φ eine in dem Intervall $(a \cdots b)$ differenzierbare Funktion von t, sondern auch umgekehrt t eine in dem abgeschlossenen Intervall $(\alpha \cdots \beta)$ differenzierbare Funktion von φ. Folglich kann auch die durch die Gleichung

(1297) $$\varrho = \sqrt{[g(t)]^2 + [h(t)]^2}$$

gegebene Länge ϱ des Leitstrahles OP als eine Funktion der Abweichung φ angesehen werden, und da diese Funktion stetig ist, so wird der gemäß der obigen Festsetzung als positiv oder negativ anzusehende Inhalt J des von dem Leitstrahl OP überstrichenen Bereiches $\mathfrak{B}$ durch den Ausdruck

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varrho^2 \, d\varphi$$

dargestellt. Formt man nun das hier vorkommende Integral dadurch um, daß man statt der Integrationsveränderlichen φ den Parameter t als neue Integrationsveränderliche einführt, so erhält man bei Berücksichtigung der Gleichungen (1296) und (1297) nach einer von selbst sich darbietenden Vereinfachung

$$J = \frac{1}{2}\int_a^b [g(t)h'(t) - g'(t)h(t)]\,dt,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Die hiermit gewonnene Formel für die Inhaltsberechnung durch Zerlegung in Sektoren bleibt sehr oft auch dann noch gültig, wenn die zunächst gemachten Voraussetzungen nicht mehr in vollem Umfang erfüllt sind. Namentlich ist sie in den praktisch vorkommenden Fällen fast immer auch dann noch anwendbar, wenn die Determinante $D(t)$ für eine endliche Anzahl dem Intervall $(a \cdots b)$ angehörender Stellen gleich Null wird. Sind z. B.

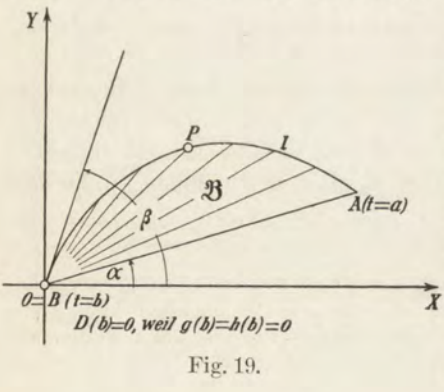


Fig. 19.

alle bisher gemachten Voraussetzungen erfüllt mit der einzigen Ausnahme, daß $D(b)=0$ ist, und strebt zugleich der Halbstrahl OP, wie es z. B. in den durch die Figuren 19 und 20 angedeuteten Fällen zutrifft, einer Grenzlage zu[1]), wenn t wachsend dem Wert b unbegrenzt nahe rückt, so hat der von dem Leitstrahl OP überstrichene Bereich $\mathfrak{B}$ immer noch einen bestimmten Inhalt, und dieser wird auch durch den angegebenen Ausdruck dargestellt. Der Leitstrahl OP dreht sich nämlich nach wie vor bei wachsendem t beständig in demselben Sinne, und der von ihm überstrichene Bereich $\mathfrak{B}$ kann nach willkürlicher Annahme einer positiven unterhalb $(b-a)$ liegenden Zahl η in die beiden den Intervallen $(a \cdots b-\eta)$ und $(b-\eta \cdots b)$ entsprechenden Teile zerlegt werden. Von diesen hat aber der erste den Inhalt $\frac{1}{2}\int_a^{b-\eta} D(t)\,dt$, der bei verschwindendem η dem Grenzwert $\frac{1}{2}\int_a^b D(t)\,dt$ zustrebt, während der zweite Teil in ein Dreieck von vorgeschriebenem, beliebig kleinem Inhalt eingeschlossen werden kann, sobald nur η unter einer gewissen Grenze liegt.

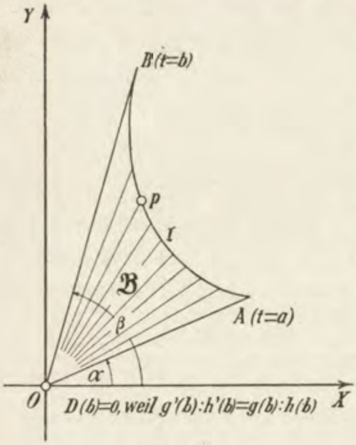


Fig. 20.

Genau Entsprechendes gilt, wenn nur insofern eine Abweichung von den früheren Voraussetzungen vorliegt, als $D(a)=0$ ist, dabei aber der Halbstrahl OP einer Grenzlage zustrebt, wenn der Parameter t abnehmend dem Wert a unbegrenzt nahe rückt.

Endlich darf $D(t)$ auch für eine endliche Anzahl im Innern des Intervalles $(a \cdots b)$ liegender Werte verschwinden, sobald nur alle übrigen Voraussetzungen erfüllt sind und der Halbstrahl OP jedesmal einer Grenzlage zustrebt, wenn t zunehmend oder abnehmend in eine der zwischen a und b liegenden Nullstellen

1) Der entgegengesetzte Fall wäre der, daß der Punkt P, wenn t wachsend unendlich nahe an b heranrückt, längs einer Spirale mit unendlich vielen Windungen dem Nullpunkt unbegrenzt nahe kommt, und ist ohne praktische Bedeutung.

von $D(t)$ übergeht. Um dies einzusehen, hat man nur nötig, das Intervall $(a \cdots b)$ in Teile zu zerlegen, welche jene Nullstellen als Grenzen haben. Wechselt die Determinante bei ihrem Nullwerden ihr Vorzeichen, so liefert die Formel natürlich diejenige algebraische Summe, die sich ergibt, wenn man (Fig. 21) die Inhalte der im positiven Sinne überstrichenen Flächenteile durch positive und die Inhalte der im negativen Sinne überstrichenen Flächenteile durch negative Zahlen mißt.

Infolge der angegebenen Erweiterungen kann man mittels der gewonnenen Formel den Inhalt eines von einer einfachen ge-

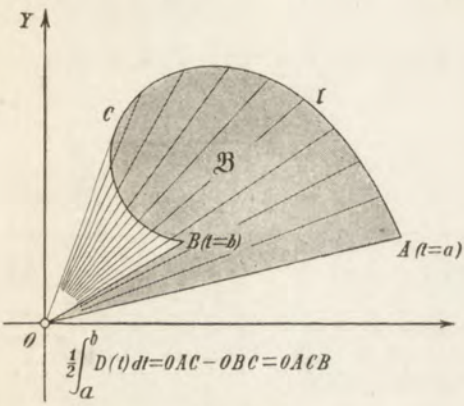


Fig. 21.

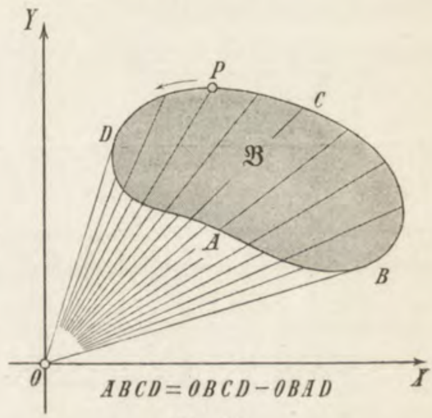


Fig. 22.

schlossenen Linie umschlossenen Bereiches 𝔅 (Fig. 22) sehr oft auch dann finden, wenn der Koordinatenanfang O nicht im Innern von 𝔅 liegt, indem sich der Leitstrahl OP, wenn der Punkt P den Umfang von 𝔅 im positiven Sinne durchläuft, bald in positiver, bald in negativer Richtung dreht und die algebraische Summe der mit den richtigen Vorzeichen versehenen Inhalte der positiv und negativ überstrichenen Bereiche gerade den Inhalt des Bereiches 𝔅 ergibt.

463. Beispiele und Übungsaufgaben. — 1. — In einer Ebene mit einem System rechtwinkeliger Koordinaten x, y sei eine Parabel vom Halbparameter p gegeben durch die Gleichung

$$y^2 = 2px.$$

Man soll den Flächeninhalt J eines Segmentes berechnen, welches von einem Bogen dieser Parabel und der seine Endpunkte verbindenden Sehne begrenzt wird, und zwar

I. — wenn die Sehne auf der Achse der Parabel senkrecht steht (Fig. 23) und die Abszisse a ihres Schnittpunktes mit der Achse gegeben ist,

II. — wenn die Sehne vom Scheitel O der Parabel ausgeht (Fig. 24)

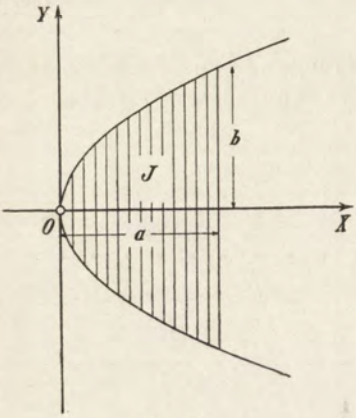


Fig. 23.

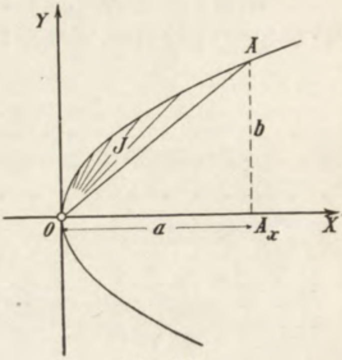


Fig. 24.

und die Abszisse a des Punktes A gegeben ist, in welchem sie die Parabel zum zweitenmal schneidet,

III. — wenn die Sehne zwei beliebige Punkte A_1, A_2 (Fig. 25) der Parabel verbindet und die Koordinaten dieser Punkte gegeben sind.

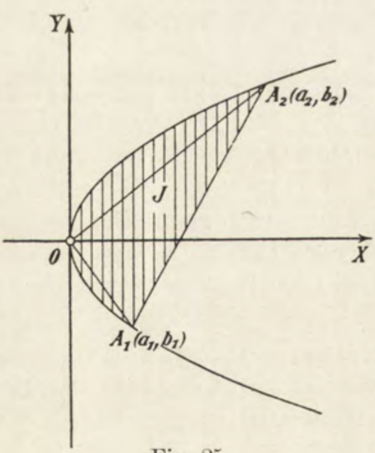


Fig. 25.

Lösungen: I. — Mittels der Inhaltsberechnung durch Zerlegung in Streifen erhält man sofort

$$J = 2\int_0^a \sqrt{2px}\,dx = 2\sqrt{2p}\,\frac{2}{3}\,a^{\frac{3}{2}}$$

oder, wenn man zur Abkürzung $\sqrt{2pa} = b$ setzt, so daß b die halbe Länge der Sehne bedeutet,

$$J = \frac{4}{3}\,ab\,.$$

II. — Es sei A_x der Fußpunkt des vom Anfang auf die Achse der Parabel gefällten Lotes, und es werde zunächst vorausgesetzt, daß die Ordinate b des Punktes A positiv, also $b=+\sqrt{2pa}$ sei. Dann erhält man dadurch, daß man den Inhalt des Dreiecks OA_xA von dem Inhalt desjenigen Bereiches abzieht, der von dem Parabelbogen OA und den Strecken OA_x, A_xA begrenzt wird,

$$J=\frac{2}{3}ab-\frac{1}{2}ab=\frac{1}{6}ab.$$

Zu demselben Ergebnis führt die Inhaltsberechnung durch Zerlegung in Sektoren. Denkt man sich nämlich die Parabel durch die beiden Gleichungen

$$x=t^2; \qquad y=\sqrt{2p}\,t$$

dargestellt, so wird das gegebene Segment von dem zu dem Parameterwert t gehörenden Leitstrahl überstrichen, wenn t von 0 bis $\sqrt{a}$ zunimmt, und zwar im negativen Sinne. Man erhält also

$$J=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{a}}\begin{vmatrix} t^2 & \sqrt{2p}\,t \\ 2t & \sqrt{2p}\end{vmatrix}dt$$

$$J=\frac{\sqrt{2p}}{2}\int_0^{\sqrt{a}}t^2\,dt=\frac{\sqrt{2p}}{6}\sqrt{a}^3=\frac{1}{6}ab$$

wie zuvor.

Ist die Ordinate b negativ, so gibt der Ausdruck $\frac{1}{6}ab$ auch noch den Inhalt des Segmentes, wenn dieser als negativ angesehen wird.

III. — Es seien a_1, b_1 die Kordinaten des Punktes A_1 und a_2, b_2 die Koordinaten des Punktes A_2, und es werde zunächst vorausgesetzt, daß $a_1b_1 < a_2b_2$ sei. Dann erhält man, indem man sich den Inhalt des von der Sehne A_1A_2 abgeschnittenen Segmentes durch Addition und Subtraktion aus den mit den richtigen Vorzeichen genommenen Inhalten der von den Sehnen OA_1 und OA_2 abgeschnittenen Segmente und des Dreiecks OA_1A_2 zusammengesetzt denkt, in allen Fällen die Gleichung

$$J=\frac{1}{6}(a_2b_2-a_1b_1)+\frac{1}{2}(a_1b_2-a_2b_1).$$

Dieselbe Formel gilt auch noch, wenn $a_1b_1 > a_2b_2$ ist, wofern man dann den Inhalt des von der Sehne A_1A_2 abgeschnittenen Segmentes als negativ ansieht.

2. — Eine Parabel vom Halbparameter p (Fig. 26) ist auf

ein System von Polarkoordinaten ϱ, φ bezogen, dessen Anfang mit dem Brennpunkt F der Parabel zusammenfällt und dessen Achse nach dem Scheitel der Parabel hin gerichtet ist. Durch einen Bogen dieser Parabel und die nach seinen Endpunkten A, B führenden Leitstrahlen ist ein Sektor FAB begrenzt. Man soll den Flächeninhalt dieses Sektors finden, wenn die zwischen $(-\pi)$ und π enthaltenen Werte α, β der Abweichungen der Punkte A, B gegeben sind.

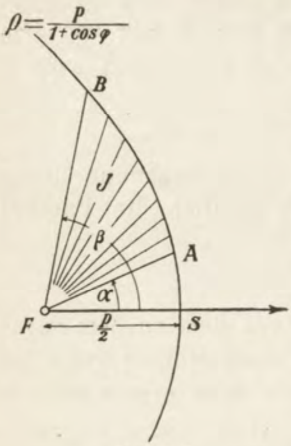


Fig. 26.

Lösung: In dem angenommenen Koordinatensystem wird die gegebene Parabel durch die Gleichung

$$\varrho = \frac{p}{1+\cos\varphi}$$

dargestellt. Hiervon überzeugt man sich leicht, wenn man die Parabel zunächst in einem System rechtwinkeliger Koordinaten x, y mit dem Anfang S und der positiven Abszissenrichtung SF durch die Gleichung $y^2 = 2px$ darstellt, dann den Koordinatenanfang nach F verlegt, dann die Richtung der Abszissenachse umkehrt und endlich zu den Polarkoordinaten ϱ, φ übergeht. Man erhält daher den Inhalt des erwähnten Sektors, wofern man sich denselben, je nachdem $\alpha < \beta$ oder $\alpha > \beta$ ist, durch eine positive oder eine negative Zahl J gemessen denkt, stets aus der Gleichung

$$J = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{p^2}{(1+\cos\varphi)^2}\, d\varphi .$$

Setzt man nun zum Zweck der Ausrechnung dieses Integrales

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = u,$$

so bekommt man nach einfachen Zwischenrechnungen

$$J = \frac{p^2}{4}\int_{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}^{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} (1+u^2)\,du$$

$$= \frac{p^2}{4}\left[\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^3\right].$$

3. — Eine Ellipse hat die Halbachsen a, b. Man soll den Inhalt J der von ihr umschlossenen Fläche finden.

Lösung: Da die Ellipse bei passender Wahl eines Systems rechtwinkeliger Koordinaten x, y durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

also ihre obere Hälfte durch die Gleichung

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

dargestellt wird, erhält man durch Zerlegung in Streifen

$$J=2\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

und hieraus mit Hilfe der Gleichung (1268), Nr. **453**

$$J=2\frac{b}{a}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}\right]_{-a}^{a}=\pi ab.$$

Noch einfacher gelangt man zum Ziel, wenn man sich die Ellipse durch die Gleichungen

$$x=a\cos t;\qquad y=b\sin t\qquad (0\leqq t<2\pi)$$

dargestellt denkt und die Zerlegung in Sektoren anwendet. Dann ergibt sich nämlich sofort

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\begin{vmatrix} a\cos t & b\sin t\\ -a\sin t & b\cos t\end{vmatrix}dt=\pi ab.$$

Dasselbe Ergebnis kann man auch mit Hilfe des am Schluß der Nr. **418** erwähnten Satzes ganz elementar erhalten, wenn man bedenkt, daß die Fläche der Ellipse nach Nr. **351**, **2**, falls $a>b$ ist, als senkrechte Projektion der Fläche eines Kreises vom Radius a angesehen werden kann, dessen Ebene gegen die Ebene der Ellipse derart geneigt ist, daß der Kosinus des Neigungswinkels den Wert $\frac{b}{a}$ hat.

4. — In einer Ebene mit einem System rechtwinkeliger Koordinaten x, y (Fig. 27) ist die eine Hälfte einer Hyperbel von der Hauptachse $2a$ und der Nebenachse $2b$

Entweder — A. — durch die Gleichungen

$$(1298)\qquad x=\frac{a}{\cos t};\qquad y=b\operatorname{tg}t\qquad \left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$$

Oder — B. — durch die Gleichungen

$$(1299)\qquad x = a\frac{e^v + e^{-v}}{2}; \qquad y = b\frac{e^v - e^{-v}}{2} \qquad (v = -\infty \cdots + \infty)$$

gegeben. Auf dieser Hälfte bewegt sich ein Punkt P vom Scheitel S bis zu einem Punkte P_0, für welchen im Fall A der zugehörige Wert t_0 des Parameters t und im Fall B der zugehörige Wert v_0 des Parameters v gegeben ist. Man soll den (als positiv oder negativ anzusehenden) Inhalt J des Sektors OSP_0 finden, der hierbei von dem den Koordinatenanfang O mit dem Punkte P verbindenden Leitstrahl OP überstrichen wird.

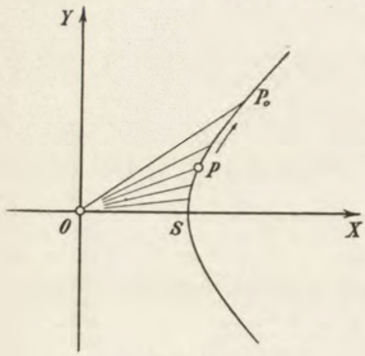


Fig. 27.

Lösung: Im Fall A erhält man

$$(1300)\qquad J = \frac{1}{2}\int_0^{t_0} \begin{vmatrix} \frac{a}{\cos t} & b \operatorname{tg} t \\ \frac{a \sin t}{\cos t^2} & \frac{b}{\cos t^2} \end{vmatrix} dt = \frac{ab}{2}\int_0^{t_0} \frac{dt}{\cos t}$$

und hieraus mit Hilfe der Gleichung (1219) Nr. **443**

$$(1300^{\text{a}})\qquad J = \frac{1}{2} ab \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t_0}{2}\right).$$

Im Fall B ist

$$(1301)\quad J = \frac{ab}{8}\int_0^{v_0} \begin{vmatrix} e^v + e^{-v} & e^v - e^{-v} \\ e^v - e^{-v} & e^v + e^{-v} \end{vmatrix} dv = \frac{ab}{8}\int_0^{v_0} 4\,dv = \frac{1}{2} ab v_0.$$

Durch dieses letzte Ergebnis wird klar, welche Bedeutung dem Parameter v bei der Darstellung eines Hyperbelzweiges mittels der Gleichungen (1299) zukommt: Er bedeutet den doppelten Inhalt des Sektors, den der zugehörige Leitstrahl seit dem Verlassen seiner Anfangslage OS überstrichen hat, geteilt durch das Produkt ab der Halbachsen.

Zugleich ergibt sich die schon in Nr. **398** in Aussicht gestellte Rechtfertigung der Bezeichnung Hyperbelfunktionen für die durch die Gleichungen

$$\operatorname{Cos} v = \frac{e^v + e^{-v}}{2}; \qquad \operatorname{Sin} v = \frac{e^v - e^{-v}}{2}$$

erklärten Funktionen Cos v und Sin v. Läßt man nämlich auf einem Kreise, der um den Anfang O eines Systems rechtwinkeliger ebener Koordinaten x, y mit dem Radius 1 beschrieben ist, einen Punkt P, der ursprünglich auf der positiven Hälfte der x-Achse lag, stetig fortschreiten und versteht man unter t den doppelten Inhalt des von dem Leitstrahl OP überstrichenen Sektors, so werden die Koordinaten x, y des Punktes P stets durch die Gleichungen

$$x = \cos t; \qquad y = \sin t$$

gegeben. Läßt man dagegen in der nämlichen Ebene einen Punkt Q, der ebenfalls ursprünglich auf der positiven Hälfte der x-Achse lag, auf einer gleichseitigen Hyperbel fortschreiten, deren Halbachsen beide gleich 1 sind und welche den Koordinatenanfang als Mittelpunkt und die x-Achse als Hauptachse hat, und versteht man jetzt unter v den doppelten Inhalt des von dem Leitstrahl OQ seit dem Verlassen seiner Anfangslage überstrichenen Sektors, so werden die Koordinaten x, y des Punktes Q stets durch die Gleichungen

$$x = \operatorname{Cos} v; \qquad y = \operatorname{Sin} v$$

gegeben. Die Funktionen Cos v, Sin v spielen also bei der gleichseitigen Hyperbel dieselbe Rolle wie die Funktionen $\cos t$ und $\sin t$ beim Kreise; nur muß man das Argument t dieser letzteren nicht, wie es sonst vielfach geschieht und auch meistens zweckmäßig ist, als die Länge des durchlaufenen Kreisbogens, sondern als den doppelten Inhalt des überstrichenen Sektors deuten.

5. — In einer Ebene mit einem System von Polarkoordinaten ϱ, φ ist (Fig. 28) eine Archimedische Spirale durch eine Gleichung

$$\varrho = a\varphi$$

gegeben, in der a eine positive Konstante bedeutet. Den Inhalt J der Fläche zu bestimmen, welche von dem Leitstrahl ϱ überstrichen wird, wenn die Abweichung φ von 0 bis 2π zunimmt.

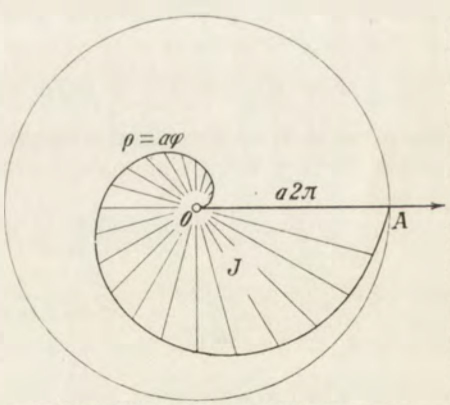


Fig. 28.

Lösung: Man erhält sofort

$$J = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \varphi^2 \, d\varphi = \frac{1}{6} a^2 (2\pi)^3 = \frac{4}{3} \pi^3 a^2,$$

oder

$$J = \frac{1}{3} \pi (a 2\pi)^2.$$

Die überstrichene Fläche ist also, wie schon Archimedes[1]) (287—212 v. Chr.) gefunden hat, gleich dem dritten Teile der Fläche desjenigen Kreises, welcher den Endwert $OA = a2\pi$ des Leitstrahles als Radius hat.

6. — Durch das Rollen eines Kreises vom Radius r ist eine Zykloide (Fig. 29) erzeugt. Den Inhalt J desjenigen Bereiches zu

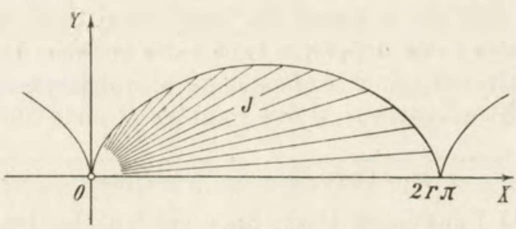


Fig. 29.

finden, welcher von einem zwei benachbarte Spitzen verbindenden Bogen dieser Zykloide und der geraden Verbindungslinie dieser Spitzen begrenzt wird.

Lösung: Da der zu betrachtende Zykloidenbogen bei geeigneter Wahl eines Systems rechtwinkeliger Koordinaten x, y durch die Gleichungen

$$x = r(t - \sin t); \qquad y = r(1 - \cos t) \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

dargestellt wird und der Leitstrahl sich in negativem Sinne dreht, wenn t von 0 bis 2π zunimmt, erhält man

$$J = -\frac{1}{2} r^2 \int_0^{2\pi} \begin{vmatrix} t - \sin t & 1 - \cos t \\ 1 - \cos t & \sin t \end{vmatrix} dt$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos t^2 + \sin t^2 - t \sin t) \, dt$$

---

1) Archimedis opera omnia, herausgegeben von J. L. Heiberg, Bd. 2, Leipzig 1881, S. 98.

$$= \frac{1}{2} r^2 \int_0^{2\pi} (2 - 2\cos t - t \sin t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2} r^2 [2t - 2\sin t + t\cos t - \sin t]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2} r^2 6\pi = 3\pi r^2.$$

7. Der Flächensatz der Mechanik. — In bezug auf das Achsenkreuz eines rechtwinkeligen räumlichen Koordinatensystems, für welches das Trägheitsgesetz gilt, bewege sich ein materieller Punkt P unter der alleinigen Einwirkung einer Kraft, die beständig gegen den Koordinatenanfang hin oder von diesem fort gerichtet ist. Dann ist, wenn die Funktionen $g(t)$, $h(t)$, $k(t)$ die Koordinaten des Punktes P zu der veränderlichen Zeit t angeben, beständig

$$h(t)k''(t) - h''(t)k(t) = 0$$
$$k(t)g''(t) - k''(t)g(t) = 0$$
$$g(t)h''(t) - g''(t)h(t) = 0.$$

Denn diese Gleichungen gelten, wenn $g(t)$, $h(t)$, $k(t)$ sämtlich gleich Null sind, und sie gelten auch, wenn dies nicht zutrifft, da dann die Komponenten $g''(t)$, $h''(t)$, $k''(t)$ der Beschleunigung des Punktes P den Koordinaten $g(t)$, $h(t)$, $k(t)$ proportional sind. Nun ist aber, wie eine einfache Rechnung lehrt,

$$h(t)k''(t) - h''(t)k(t) = \frac{d}{dt}[h(t)k'(t) - h'(t)k(t)].$$

Folglich ist bei den gemachten Voraussetzungen

$$h(t)k'(t) - h'(t)k(t) = a$$

und ähnlich

$$k(t)g'(t) - k'(t)g(t) = b$$
$$g(t)h'(t) - g'(t)h(t) = c,$$

wo a, b, c Konstante bedeuten. Durch Multiplikation mit den Faktoren $g(t)$, $h(t)$, $k(t)$ und nachfolgende Addition ergibt sich hieraus, daß für jeden Wert von t die Gleichung

$$ag(t) + bh(t) + ck(t) = 0$$

besteht. Fällt nun der Punkt P zu irgendeiner Zeit nicht mit dem Koordinatenanfang zusammen und ist zugleich seine Geschwindigkeit von Null verschieden und weder auf den Koordinatenanfang zu, noch von ihm fortgerichtet, so sind die Konstanten a, b, c nicht alle gleich Null. Die Bewegung des Punktes erfolgt daher in einer bestimmten durch den Koordinatenanfang gehenden Ebene.

Denkt man sich das Koordinatensystem von vorn herein so gewählt, daß die xy-Ebene mit dieser Ebene zusammenfällt, so ist $k(t)$ dauernd gleich Null. Folglich ist dann $a=b=0$, also $c \neq 0$. Dann lehrt aber die Gleichung

$$g(t)h'(t) - g'(t)h(t) = c,$$

daß $g(t)$ und $h(t)$ niemals gleichzeitig gleich Null werden. Der Punkt P geht also niemals durch den Koordinatenanfang. Ferner dreht sich der Leitstrahl OP nach dem zweiten der in Nr. **462** angegebenen Lehrsätze beständig im gleichen Sinne und überstreicht dabei wegen der Konstanz der Determinante $[g(t)h'(t) - g'(t)h(t)]$ in gleichen Zeiten gleich große Flächen. Dies ist der sogenannte Flächensatz für die Zentralbewegung. Er findet Anwendung in der Astronomie. Bei der Betrachtung der Planetenbewegung kann man nämlich mit weitgehender Annäherung die Sonne durch den festen Anfangspunkt eines Koordinatensystems abbilden, für welches das Trägheitsgesetz gilt, und einen Planeten durch einen in bezug auf das Achsenkreuz dieses Systems beweglichen materiellen Punkt. Tut man dies, so erscheint das von J. Kepler (1571—1630) unter Zugrundelegung einer solchen Abbildung in der im Jahre 1609 erschienenen Astronomia nova[1]) aufgestellte Gesetz, daß der Leitstrahl eines Planeten in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht, nach dem vorangehenden als eine Folge der Annahme, daß die Sonne auf den Planeten eine ihn beständig gegen den Koordinatenanfang treibende Kraft ausübt, neben der alle sonst etwa auf den Planeten wirkenden Kräfte ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden dürfen. Dabei braucht man über die Größe der von der Sonne ausgeübten Kraft gar nichts zu wissen. Ja die gezogene Folgerung würde auch dann bestehen bleiben, wenn es sich nicht um eine Anziehung, sondern um eine Abstoßung handelte.

464. Längenberechnung krummer Linien. — Erklärung 1. — *Sind A, B die Endpunkte eines einfachen Linienstückes* $\mathfrak{l}$ *und $P_1, P_2, \cdots P_n$ irgendwelche von A und B und voneinander verschiedene Punkte von* $\mathfrak{l}$, *welche so liegen, daß jedesmal der mittlere von irgend drei Punkten der Reihe*

$$A,\ P_1,\ P_2,\ \cdots P_n,\ B$$

1) Johannis Kepleri opera omnia ed. Ch. Frisch, Bd. 3, Frankfurt und Erlangen 1860. Vgl. insbesondere den Anfang von Cap. 60, S. 407—408.

auch auf $\mathfrak{l}$ *zwischen den beiden anderen Punkten liegt (vgl. Nr.* **342**, *Ende), so sagt man kurz, daß die Punkte* $P_1, P_2, \cdots P_n$ *auf* $\mathfrak{l}$ *im Sinne von* A *gegen* B *aufeinander folgen.*

Erklärung 2. — *Sind* A, B *die Endpunkte eines einfachen Linienstückes* $\mathfrak{l}$ *und sind* $P_1, P_2, \cdots P_{n-1}$ *irgendwelche auf* $\mathfrak{l}$ *liegende Punkte in endlicher Anzahl, die im Sinne von* A *gegen* B *aufeinander folgen, so sagt man von der gebrochenen Linie* $AP_1P_2\cdots P_{n-1}B$, *sie sei dem Linienstück* $\mathfrak{l}$ **eingeschrieben,** *oder sie sei ein* **Sehnenpolygon** *von* $\mathfrak{l}$.

Erklärung 3. — *Wenn die Längen aller Sehnenpolygone eines einfachen Linienstückes* $\mathfrak{l}$ *eine endliche obere Grenze haben, so nennt man diese obere Grenze die* **Länge des Linienstückes** $\mathfrak{l}$. *Anderenfalls kommt dem Linienstück* $\mathfrak{l}$ *eine Länge nicht zu.*

Allgemeiner versteht man unter der Länge eines Linienstückes $\mathfrak{l}$, welches aus einer endlichen Anzahl aneinandergereihter einfacher Linienstücke zusammengesetzt ist, wofern nur jedem dieser letzteren eine Länge zukommt, die Summe dieser Längen. Kann ein Linienstück überhaupt in der eben beschriebenen Weise zusammengesetzt werden, so ist dies immer auf unendlich viele verschiedene Arten möglich. Aber alle diese verschiedenen Zusammensetzungen liefern, wie leicht einzusehen, für die Gesamtlänge denselben Wert.

Lehrsatz: *Ist ein Linienstück* $\mathfrak{l}$ *in einem System rechtwinkeliger Koordinaten* x, y, z[1]) *durch eine Parameterdarstellung*

$$x=\varphi(t); \qquad y=\chi(t); \qquad z=\psi(t)$$

gegeben, bei welcher der Parameter t *ein abgeschlossenes Intervall* $\mathfrak{J}$ *zu durchlaufen hat, so ist dafür, daß das Linienstück eine Länge habe,* *hinreichend*, *daß die Funktionen* $\varphi(t)$, $\chi(t)$, $\psi(t)$ *in dem Intervall* $\mathfrak{J}$ *differenzierbar und daß ihre Ableitungen daselbst stetig seien. Sind diese Bedingungen erfüllt und ist* a *die untere und* b *die obere Grenze des Intervalles* $\mathfrak{J}$, *so wird die Länge* l *des Linienstückes* $\mathfrak{l}$ *gegeben durch die Gleichung*

$$(1302) \quad \left\{ \begin{aligned} l &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt. \end{aligned} \right.$$

1) Die Spezialisierung für den Fall einer ebenen, auf ein System ebener Koordinaten bezogenen Linie ergibt sich einfach, indem man im nachfolgenden überall $\psi(t)=0$ setzt.

Beim Beweise dieser Behauptungen leisten die beiden folgenden einfachen Hilfssätze gute Dienste:

Hilfssatz 1. — *Sind a, b, c reelle Zahlen, so ist stets*

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right| \leqq |b-c|.$$

Man darf daher immer

$$\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}=\eta(b-c)$$

setzen, wo $-1 \leqq \eta \leqq 1$ *ist.*

Ist nämlich $a=0$, so ist

$$\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}=|b|-|c|,$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung ohne weiteres folgt. Ist dagegen $a \neq 0$, so ist

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}&=\frac{b^2-c^2}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}}\\&=\frac{|b|+|c|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}}(|b|-|c|).\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$0 \leqq \frac{|b|+|c|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}} < 1,$$

folglich

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right| < \big||b|-|c|\big| \leqq |b-c|,$$

also die Behauptung ebenfalls richtig.

Hilfssatz 2. — *Sind a, b, c, d, e irgendwelche reelle Zahlen, so ist stets*

$$\left|\sqrt{a^2+b^2+c^2}-\sqrt{a^2+d^2+e^2}\right| \leqq |b-d|+|c-e|. \tag{1304}$$

Man darf daher immer

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}-\sqrt{a^2+d^2+e^2}=\eta_1(b-d)+\eta_2(c-e)$$

setzen, wo η_1 *und* η_2 *Zahlen bedeuten, deren absolute Werte nicht größer als* 1 *sind.*

Da nämlich

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+b^2+c^2}-\sqrt{a^2+d^2+e^2}=&\sqrt{(a^2+c^2)+b^2}-\sqrt{(a^2+c^2)+d^2}\\&+\sqrt{(a^2+d^2)+c^2}-\sqrt{(a^2+d^2)+e^2}\end{aligned}$$

ist, so ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung sofort durch zweimalige Anwendung des Hilfssatzes 1.

Nunmehr sei das Intervall $(a \cdots b)$ durch Einschaltung einer beliebigen Anzahl $(n-1)$ von Zwischenwerten in n Teile zerlegt. Diese Zwischenwerte seien, so wie sie wachsend aufeinander folgen, durch $t_1, t_2, \cdots t_{n-1}$ bezeichnet, und außerdem sei der Gleichmäßigkeit halber $a = t_0$ und $b = t_n$ gesetzt. Endlich seien

$$P_0, P_1, P_2, \cdots P_{n-1}, P_n$$

diejenigen Punkte von $\mathfrak{l}$, die den Werten

$$t_0, \quad t_1, \quad t_2, \quad \cdots t_{n-1}, \quad t_n$$

des Parameters t entsprechen. Dann wird die Länge $P_{\lambda-1}P_\lambda$ des λ-ten Stückes der gebrochenen Linie $P_0P_1P_2 \cdots P_n$ durch die Gleichung

$$P_{\lambda-1}P_\lambda = \sqrt{[\varphi(t_\lambda) - \varphi(t_{\lambda-1})]^2 + [\chi(t_\lambda) - \chi(t_{\lambda-1})]^2 + [\psi(t_\lambda) - \psi(t_{\lambda-1})]^2}$$

gegeben. Formt man nun hier jede einzelne der unter dem Quadratwurzelzeichen stehenden Differenzen mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung um, so erhält man

$$P_{\lambda-1}P_\lambda = \sqrt{[\varphi'(\tau_\lambda)]^2 + [\chi'(\tau_\lambda')]^2 + [\psi'(\tau_\lambda'')]^2}\,(t_\lambda - t_{\lambda-1}),$$

wo $\tau_\lambda, \tau_\lambda', \tau_\lambda''$ Mittelwerte bedeuten, die sämtlich zwischen $t_{\lambda-1}$ und t_λ liegen. Wären diese Mittelwerte alle einander gleich, so wäre man sofort am Ziel. Aber eine solche Gleichheit braucht nicht zu bestehen, und darin liegt eine gewisse Schwierigkeit. Eben diese Schwierigkeit kann jedoch mittels des Hilfssatzes 2 überwunden werden. Nach demselben ist nämlich

$$(1305)\quad \left\{\begin{aligned} P_{\lambda-1}P_\lambda = &\sqrt{[\varphi'(\tau_\lambda)]^2 + [\chi'(\tau_\lambda)]^2 + [\psi'(\tau_\lambda)]^2}\,(t_\lambda - t_{\lambda-1}) \\ &+ \{\eta_1[\chi'(\tau_\lambda') - \chi'(\tau_\lambda)] + \eta_2[\psi'(\tau_\lambda'') - \psi'(\tau_\lambda)]\}(t_\lambda - t_{\lambda-1}), \end{aligned}\right.$$

wo η_1 und η_2 niemals absolut genommen größer als 1 sind. Nun sind aber die Ableitungen $\chi'(t)$, $\psi'(t)$ nach Voraussetzung in dem Intervall $(a \cdots b)$ stetig, also auch gleichmäßig stetig. Folglich kann man nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen positiven Konstanten ε, indem man für die Längen der einzelnen Teilintervalle eine hinreichend kleine obere Grenze vorschreibt und die Anzahl n hinreichend groß annimmt, stets erreichen, daß für $\lambda = 1, 2 \cdots n$ jedesmal sowohl

$$|\chi'(\tau_\lambda') - \chi'(\tau_\lambda)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

als auch

$$|\psi'(\tau_\lambda'') - \psi'(\tau_\lambda)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

ist und daß außerdem die Summe

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \sqrt{[\varphi'(\tau_\lambda)]^2 + [\chi'(\tau_\lambda)]^2 + [\psi'(\tau_\lambda)]^2}\,(t_\lambda - t_{\lambda-1})$$

von dem Integral

$$l = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt$$

um weniger als $\frac{\varepsilon}{3}$ abweicht. Für jede Teilung dieser Art ist dann die Länge $\sum_{\lambda=1}^{n} P_{\lambda-1}P_\lambda$ der gebrochenen Linie $P_0 P_1 \cdots P_n$ von dem Integral l um weniger als ε verschieden. Denn aus der Gleichung (1305) folgt durch Summation

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{\lambda=1}^{n} P_{\lambda-1}P_\lambda - l\right| \\
< \left|\sum_{\lambda=1}^{n} \sqrt{[\varphi'(\tau_\lambda)]^2 + [\chi'(\tau_\lambda)]^2 + [\psi'(\tau_\lambda)]^2}\,(t_\lambda - t_{\lambda-1}) - l\right| \\
+ \frac{2}{3}\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{\lambda=1}^{n}(t_\lambda - t_{\lambda-1}) \\
< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ist nun $\mathfrak{l}$ ein *einfaches* Linienstück, so ergibt sich aus dem vorangehenden, daß die Längen aller Sehnenpolygone von $\mathfrak{l}$ eine endliche obere Grenze haben, so daß dem Linienstück $\mathfrak{l}$ eine Länge zukommt, und daß diese gerade gleich l ist. Zunächst ist nämlich ohne weiteres ersichtlich, daß jene obere Grenze nicht kleiner als l sein kann. Sie ist aber auch nicht größer oder gar unendlich groß, denn sonst könnte man eine Konstante M annehmen, die größer als l, aber zugleich kleiner als jene obere Grenze wäre, und hierauf ein Sehnenpolygon S finden, dessen Länge größer als M wäre. Durch Hinzufügung neuer Ecken würden dann aus S immer nur Sehnenpolygone von noch größerer Länge entstehen. Es wäre also nicht möglich, von dem Sehnenpolygon S durch fortgesetzte Vermehrung der Ecken zu einem Sehnenpolygon zu gelangen, dessen Länge beliebig wenig von l verschieden wäre. Dies würde aber dem vorangehenden widersprechen.

Ist zweitens $\mathfrak{l}$ zwar nicht selbst ein einfaches Linienstück, wohl aber aus einer endlichen Anzahl aneinandergereihter einfacher Linienstücke zusammengesetzt, so ist das Integral l, wie sofort ersichtlich, die Summe der Längen dieser letzteren.

Zusatz 1. — Wenn eine Funktion $f(x)$ in einem abgeschlossenen Intervall, dessen untere Grenze a und dessen obere Grenze b heißen möge, differenzierbar und ihre Ableitung daselbst stetig ist, so hat dasjenige Linienstück, welches in einem System rechtwinkeliger ebener Koordinaten x, y durch die Gleichung

$$y=f(x)$$

in Verbindung mit der Ungleichung $a \leqq x \leqq b$ dargestellt wird, stets eine Länge, und deren Wert l ergibt sich aus der Gleichung

$$(1306) \qquad l=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Denn die Gleichung $y=f(x)$ kann durch die Parameterdarstellung

$$x=t; \qquad y=f(t) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

ersetzt werden.

Zusatz 2. — Ein ähnlicher Satz gilt, wie man leicht bestätigt, für den Fall, daß in einem System ebener Polarkoordinaten ϱ, φ ein Linienstück $\mathfrak{l}$ durch eine Gleichung

$$\varrho=f(\varphi)$$

gegeben ist, in der die Veränderliche φ ein abgeschlossenes Intervall zu durchlaufen hat und $f(\varphi)$ eine dort nirgends negative Funktion bedeutet. Ist nämlich die Funktion $f(\varphi)$ in diesem Intervall differenzierbar und ihre Ableitung daselbst stetig, so kommt dem Linienstück $\mathfrak{l}$ eine Länge l zu, und diese wird, wenn α den kleinsten und β den größten der möglichen Werte von φ bezeichnet, durch die Gleichung

$$(1307) \qquad l=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi=\int_\alpha^\beta \sqrt{[f(\varphi)]^2+[f'(\varphi)]^2}\,d\varphi$$

gegeben.

Zusatz 3. — Zur Ermittelung der Länge eines ebenen Linienstückes, welches durch eine Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

zwischen den Koordinaten x, y gegeben ist, muß man diese Gleichung erst in bezug auf eine der Veränderlichen x, y auflösen oder durch eine gleichwertige Parameterdarstellung ersetzen.

Zusatz 4. — Wenn ein Linienstück eine Länge hat, so kommt auch jedem Teilstück desselben eine Länge zu.

Zusatz 5. — Wenn ein Linienstück $\mathfrak{l}$ eine Länge hat, so nennt man ein Teilstück desselben, von dem man sich vorstellt, daß seine Länge unendlich klein wird, sehr oft ein **Bogenelement** oder auch ein **Linienelement** von $\mathfrak{l}$.

465. Beispiele. — 1. — In einer Ebene mit einem System rechtwinkeliger Koordinaten x, y (Fig. 30) ist eine Parabel vom Halbparameter p durch die Gleichung $y^2 = 2px$ gegeben. Die

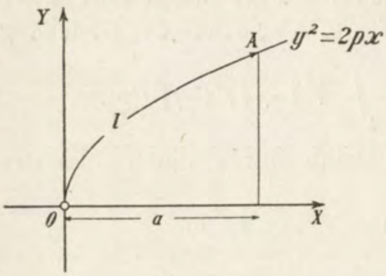


Fig. 30.

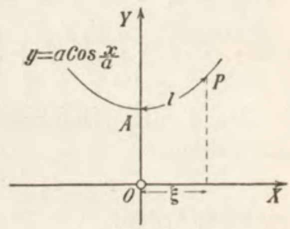


Fig. 31.

Länge l eines vom Scheitel O ausgehenden Bogens dieser Parabel zu finden, wenn die Abszisse a des Endpunktes A gegeben ist.

Lösung: Denkt man sich die Parabel durch die Gleichungen

$$x = t^2; \qquad y = \sqrt{2p}\,t$$

dargestellt, so erhält man

$$l = \int_0^{\sqrt{a}} \sqrt{4t^2 + 2p}\,dt = 2\int_0^{\sqrt{a}} \sqrt{t^2 + \frac{p}{2}}\,dt$$

und hieraus mit Hilfe der Gleichung (1267), Nr. **453**

$$l = 2\left[\frac{1}{2}t\sqrt{t^2 + \frac{p}{2}} + \frac{p}{4}\lg\left(t + \sqrt{t^2 + \frac{p}{2}}\right)\right]_0^{\sqrt{a}}$$

oder

$$l = \sqrt{a}\sqrt{a + \frac{p}{2}} + \frac{p}{2}\lg\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a + \frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}. \tag{1308}$$

2. — In einer Ebene mit einem System rechtwinkeliger Koordinaten x, y (Fig. 31) sei eine Linie durch eine Gleichung

(1309) $$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a \operatorname{Cos} \frac{x}{a}$$

gegeben, wo a eine positive Konstante bedeutet. Man soll die Länge l desjenigen Stückes dieser Linie finden, welches von dem zur Abszisse 0 gehörenden tiefsten Punkte A bis zu einem anderen Punkte P mit der gegebenen positiven Abszisse ξ reicht.

Lösung: Man erhält

$$l = \int_0^{\xi} \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_0^{\xi} \sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right)}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\xi} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx,$$

also schließlich

(1310) $$l = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\xi}{a}} - e^{-\frac{\xi}{a}}\right).$$

Anmerkung. — Denkt man sich auf einer Linie $\mathfrak{l}$, die in einer vertikal stehenden Ebene liegt und in einem daselbst angenommenen System rechtwinkeliger Koordinaten x, y mit nach oben gerichteter Ordinatenachse durch eine Gleichung von der Form (1309) dargestellt ist, irgend zwei Punkte P, Q gegeben und einen unendlich dünnen, vollkommen biegsamen, aber unausdehnbaren homogenen schweren Faden, dessen Länge mit der Länge des Bogens PQ der Linie $\mathfrak{l}$ übereinstimmt, mit seinen Endpunkten in P und Q befestigt und dann der Einwirkung der Schwere überlassen, so nimmt dieser Faden, wie in der Mechanik gezeigt wird, stets eine solche Gestalt an, daß er sich in seiner ganzen Ausdehnung mit der Linie $\mathfrak{l}$ deckt. Eben deswegen heißt jede Linie, die bei passender Wahl eines Systems rechtwinkeliger ebener Koordinaten x, y durch eine Gleichung von der Form (1309) dargestellt werden kann, eine **Kettenlinie.**

3. — Durch das Rollen eines Kreises vom Radius r ist eine Zykloide erzeugt. Die Länge l eines Bogens dieser Zykloide zu berechnen, der zwei benachbarte Spitzen verbindet.

Lösung: Denkt man sich den zu betrachtenden Zykloidenbogen nach zweckmäßiger Annahme eines Systems rechtwinkeliger ebener Koordinaten durch die Gleichungen

$$x = r(t - \sin t); \qquad y = r(1 - \cos t) \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

dargestellt, so wird

$$\frac{dx}{dt} = r(1 - \cos t); \qquad \frac{dy}{dt} = r \sin t,$$

also

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = r^2(2 - 2\cos t) = 4r^2\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2.$$

Man erhält daher

$$l = 2r\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 4r\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8r. \tag{1311}$$

4. — Die Länge l einer Ellipse von der großen Halbachse a und der kleinen Halbachse b zu berechnen.

Lösung: Denkt man sich die Ellipse nach zweckmäßiger Annahme eines Systems rechtwinkeliger ebener Koordinaten x, y durch die Gleichungen

$$x = a\cos t; \qquad y = b\sin t \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

dargestellt, so erhält man sofort

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin t^2 + b^2 \cos t^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos t^2}\,dt$$

oder, wenn man die durch die Gleichung $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \varepsilon$ gegebene numerische Exzentrizität der Ellipse in die Rechnung einführt,

$$l = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos t^2}\,dt. \tag{1312}$$

Hier gehört nun die unter dem Integralzeichen stehende Funktion zu denjenigen, von denen man nachweisen kann, daß ihre Integrale nicht in geschlossener Form darstellbar sind. Man muß sich daher mit der Angabe eines Verfahrens begnügen, nach welchem die gesuchte Länge wenigstens mit jedem gewünschten Grade der

Annäherung berechnet werden kann. Ein solches Verfahren ergibt sich für kleine Werte der Exzentrizität ε durch folgende Überlegung: Nach dem binomischen Lehrsatz ist

$$\sqrt{1-\varepsilon^2\cos t^2} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\cos t^2 - \frac{1}{2\cdot 4}\varepsilon^4\cos t^4 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\varepsilon^6\cos t^6 - \cdots,$$

und da die rechts stehende Reihe für $0 \leqq t \leqq 2\pi$ gleichmäßig konvergiert, so kann das von 0 bis 2π erstreckte Integral ihrer Summe durch gliedweise Integration gefunden werden. So erhält man

$$(1313)\quad \left\{\begin{aligned} l = a\Big(2\pi - \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_0^{2\pi}\cos t^2\,dt - \frac{1}{2\cdot 4}\varepsilon^4\int_0^{2\pi}\cos t^4\,dt \\ - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\varepsilon^6\int_0^{2\pi}\cos t^6\,dt - \cdots\Big). \end{aligned}\right.$$

Nun ist aber nach Nr. **443**, Gleichung (1212), für jeden ganzen positiven Wert von ν

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\cos t^{2\nu}\,dt &= \frac{1}{2^{2\nu}}\binom{2\nu}{\nu}2\pi = 2\pi\,\frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}\,\nu!\,\nu!} \\ &= 2\pi\,\frac{1\cdot 3\cdots(2\nu-1)}{2^\nu\,\nu!}\;\frac{2\cdot 4\cdots 2\nu}{2^\nu\,\nu!} = 2\pi\,\frac{1\cdot 3\cdots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdots 2\nu}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung (1313) ein, so erhält man nach naheliegenden Umformungen

$$(1314)\qquad l = 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\varepsilon^4 - \frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\varepsilon^6 - \cdots\right]$$

und hat damit einen Ausdruck der gesuchten Länge durch eine unendliche Reihe gewonnen, die wenigstens so lange gut konvergiert und zur zahlenmäßigen Berechnung geeignet ist, als die Exzentrizität ε nicht zu nahe bei 1 liegt.

Für den entgegengesetzten Fall liefert die Lehre von den elliptischen Integralen andere Reihenentwicklungen von l, die gerade dann um so besser konvergieren, je näher ε bei 1 liegt. Von einer näheren Erörterung dieses Falles muß jedoch hier abgesehen werden.

Anmerkung 1. — Gibt man der Gleichung (1312) die Form

$$l = 2a\int_0^{\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos t^2}\,dt$$

und setzt man sodann $\cos t = u$, so erhält man nach einfachen Zwischenrechnungen

$$l = 2a\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2 u^2}}{\sqrt{1-u^2}}\,du = 2a\int_{-1}^{1}\frac{1-\varepsilon^2 u^2}{\sqrt{(1-u^2)(1-\varepsilon^2 u^2)}}\,du,$$

kommt also auf das Integral eines Ausdruckes, der aus der Integrationsveränderlichen u und einer Quadratwurzel aus einer ganzen rationalen Funktion vierten Grades von u rational zusammengesetzt ist. Das Vorkommen eines solchen Integrales bei der Längenberechnung einer Ellipse hat dazu geführt, jedes bestimmte oder unbestimmte Integral eines Ausdruckes von der angegebenen Art als ein **elliptisches Integral** zu bezeichnen, vorausgesetzt natürlich, daß es nicht etwa infolge besonderer Umstände möglich ist, das betreffende unbestimmte Integral in geschlossener Form darzustellen. In weiterem Sinne nennt man ferner ein Integral auch dann ein elliptisches, wenn es dadurch, daß man für die Integrationsveränderliche eine durch einen geschlossenen analytischen Ausdruck darstellbare Funktion einer neuen Veränderlichen einsetzt, auf eines der eben gekennzeichneten Integrale zurückgeführt oder umgekehrt aus einem solchen Integrale abgeleitet werden kann.

Anmerkung 2. — Auch bei der Längenberechnung eines Hyperbelbogens kommt man stets auf ein elliptisches Integral.

466. Abszissen auf einer krummen Linie. — Man sagt, ein einfaches Linienstück $\mathfrak{l}$ sei **orientiert**, wenn man für seine Endpunkte eine bestimmte Reihenfolge festgesetzt hat, und sagt dann auch, ein auf $\mathfrak{l}$ liegender Punkt P gehe einem anderen derartigen Punkte Q voran, oder umgekehrt, der Punkt Q folge dem Punkte P nach, oder auch, er folge auf P im positiven Sinne, wenn P entweder mit dem Anfangspunkt A von $\mathfrak{l}$ zusammenfällt oder auf $\mathfrak{l}$ zwischen A und Q liegt (vgl. Nr. **342** Ende).

Allgemeiner nennt man ein Linienstück $\mathfrak{l}$, welches aus einer endlichen Anzahl aneinander gereihter einfacher Linienstücke zusammengesetzt ist, dann **orientiert**, wenn jedes einzelne dieser Linienstücke orientiert ist und das Ende eines jeden vorangehenden Linienstückes mit dem Anfang des nächstfolgenden Stückes zusammenfällt. Auch bei diesen Annahmen steht fest, was man unter demjenigen Teile von $\mathfrak{l}$ zu verstehen hat, der zwischen zwei gegebenen Punkten A und B von $\mathfrak{l}$ liegt, und wann der Punkt A dem Punkte B vorangeht. Nur muß natürlich, wenn einer dieser Punkte, etwa der Punkt A, sich mit einem mehrfachen Punkte von $\mathfrak{l}$ deckt, irgendwie angegeben sein, welches der durch den mehrfachen Punkt gehenden einfachen Linienstücke als Träger des Punktes A gelten soll.

Sind auf einem orientierten Linienstück $\mathfrak{l}$, dem eine Länge zukommt, zwei Punkte A, P in dieser Reihenfolge gegeben, so versteht man unter der Länge des von A bis P erstreckten Teiles von $\mathfrak{l}$ sehr oft diejenige positive oder negative Zahl, deren absoluter Wert die Länge des Bogens AP von $\mathfrak{l}$ in dem bisherigen Sinne angibt und deren Vorzeichen $+$ oder $-$ ist, je nachdem der Punkt P auf $\mathfrak{l}$ dem Punkte A nachfolgt oder ihm vorangeht. Die so erklärte mit einem bestimmten Vorzeichen versehene Länge des Bogens AP wird auch als die **auf $\mathfrak{l}$ gemessene Abszisse des Punktes P** in bezug auf den Punkt A bezeichnet.

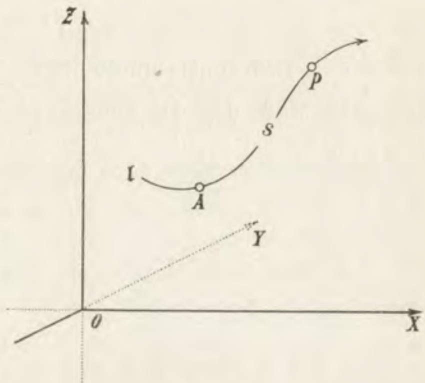


Fig. 32.

Ist für ein Linienstück $\mathfrak{l}$ (Fig. 32) eine Parameterdarstellung

$$x = \varphi(t); \qquad y = \chi(t); \qquad z = \psi(t)$$

möglich, bei welcher die Funktionen $\varphi(t)$, $\chi(t)$, $\psi(t)$ für jeden in Betracht kommenden Wert des Parameters t differenzierbar und ihre Ableitungen durchweg stetig sind, und ist das Linienstück im Anschluß an diese Darstellung so orientiert, daß wachsenden Werten von t auf $\mathfrak{l}$ Punkte entsprechen, die dort im positiven Sinne aufeinander folgen, so wird die Abszisse s des zu dem veränderlichen Parameterwert t gehörenden Punktes P von $\mathfrak{l}$ in bezug auf den zu einem gegebenen festen Parameterwert a gehörenden Punkt A von $\mathfrak{l}$ stets durch die Gleichung

$$(1315) \qquad s = \int_a^t \sqrt{[\varphi'(\tau)]^2 + [\chi'(\tau)]^2 + [\psi'(\tau)]^2}\, d\tau$$

gegeben, und zwar auch dem Vorzeichen nach. Diese Abszisse ist somit eine differenzierbare Funktion des Parameters t, und ihre Ableitung ergibt sich aus der Gleichung

$$(1316) \qquad \frac{ds}{dt}=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Das zum Differential dt des Parameters gehörende Differential ds der Bogenlänge s ist daher bei den gemachten Annahmen mit den zugehörigen Differentialen dx, dy, dz der Koordinaten durch die Gleichung

$$(1317) \qquad \boldsymbol{ds^2=dx^2+dy^2+dz^2}$$

verbunden. Sein absoluter Wert kann also, sobald wenigstens einer der Differentialquotienten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ von Null verschieden ist, als Maß der Diagonale eines Parallelepipedons angesehen werden, dessen Kanten die absoluten Werte der Differentiale der Koordinaten zu Maßzahlen haben. In diesem Sinne gilt der Satz, daß ein unendlich kleines Stück einer krummen Linie als geradlinig angesehen werden darf.

Ist außer den bisher gemachten Annahmen noch die weitere Voraussetzung erfüllt, daß die Ableitungen $\varphi'(t), \chi'(t), \psi'(t)$ für keinen der in Betracht kommenden Werte von t gleichzeitig verschwinden, so ist s eine bei wachsendem t stets zunehmende Funktion von t mit nie verschwindender Ableitung, folglich auch umgekehrt t eine differenzierbare mit wachsendem s beständig zunehmende Funktion von s. Man erhält daher aus der gegebenen Darstellung des Linienstückes $\mathfrak{l}$, wenn man statt des Parameters t die Abszisse s als neuen Parameter einführt, eine neue Darstellung von $\mathfrak{l}$, bei der die Koordinaten x, y, z ebenfalls als differenzierbare Funktionen des Parameters erscheinen. Diese neue Darstellung bietet den Vorteil, daß sich für die Richtungskosinus α, β, γ der positiven Richtung der Tangente von $\mathfrak{l}$ in dem zu dem veränderlichen Parameterwert s gehörenden Punkte besonders einfache Ausdrücke ergeben. Da nämlich

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1$$

ist, so erhält man nach Nr. **357**

$$(1318) \qquad \boldsymbol{\alpha=\frac{dx}{ds}; \qquad \beta=\frac{dy}{ds}; \qquad \gamma=\frac{dz}{ds}.}$$

Ist in einem System ebener rechtwinkeliger Koordinaten x, y ein einfaches Linienstück $\mathfrak{l}$ durch zwei Gleichungen

$$x=\varphi(t); \qquad y=\chi(t)$$

von solcher Beschaffenheit gegeben, daß die Funktionen $\varphi(t)$, $\chi(t)$ für alle in Betracht kommenden Werte des Parameters t wenigstens zweimal differenzierbar sind und daß die Determinante $[\varphi'(t)\chi''(t) - \varphi''(t)\chi'(t)]$ niemals gleich Null wird, so ergibt sich, wenn man die auf $\mathfrak{l}$ von einem festen Punkte an zu zählende und in der Richtung der wachsenden t positiv zu rechnende Bogenlänge s als neuen Parameter einführt, auch für die Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ von $\mathfrak{l}$ in dem zu dem veränderlichen Parameterwert s gehörenden Punkte ein sehr einfacher Ausdruck. Man erhält nämlich nach Nr. **360**, da $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$ ist,

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds}. \tag{1319}$$

Übungsaufgabe. — Den folgenden Lehrsatz zu beweisen: Wenn ein einfaches Linienstück $\mathfrak{l}$ in einem System rechtwinkeliger räumlicher Koordinaten x, y, z derart durch drei Gleichungen

$$x = \varphi(t); \qquad y = \chi(t); \qquad z = \psi(t)$$

dargestellt ist, daß

1. — die Funktionen $\varphi(t)$, $\chi(t)$, $\psi(t)$ für jeden zulässigen Wert des Parameters t wenigstens dreimal differenzierbar sind und
2. — die Ableitungen $\varphi'(t)$, $\chi'(t)$, $\psi'(t)$ niemals gleichzeitig gleich Null werden,

so ist der Unterschied zwischen der Länge eines unendlich kleinen Bogens von $\mathfrak{l}$ und der Länge seiner Sehne, vorausgesetzt daß man die eine dieser beiden Längen als eine unendlich kleine Zahl erster Ordnung ansieht, von der **dritten** oder von noch höherer Ordnung unendlich klein.

467. Bogendifferentiale in Polarkoordinaten. — Formeln ähnlicher Art wie die im vorangehenden gewonnene Gleichung (1317) gelten auch bei Benutzung von ebenen oder räumlichen Polarkoordinaten. Ist nämlich zunächst in einem System ebener Polarkoordinaten ein orientiertes Linienstück $\mathfrak{l}$ dadurch gegeben, daß die Polarkoordinaten ϱ, φ eines ihm angehörenden Punktes P als differenzierbare Funktionen eines Parameters t mit durchweg stetigen und niemals gleichzeitig verschwindenden Ableitungen dargestellt sind, so besteht zwischen dem Differential ds der auf $\mathfrak{l}$ von einem festen Anfangspunkt an gemessenen Abszisse s des

Punktes P und den zugehörigen Differentialen $d\varrho$, $d\varphi$ von ϱ und φ die Gleichung

$$ds^2 = d\varrho^2 + (\varrho\, d\varphi)^2. \tag{1320}$$

Denn nimmt man in der Ebene des gegebenen Polarkoordinatensystems auch noch ein System rechtwinkeliger Koordinaten derart an, daß die rechtwinkeligen Koordinaten x, y des Punktes P durch die Gleichungen

$$x = \varrho \cos\varphi; \qquad y = \varrho \sin\varphi$$

gegeben werden, so wird

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\varrho}{dt}\cos\varphi - \varrho\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\varrho}{dt}\sin\varphi + \varrho\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt},$$

und hieraus folgt die mit (1320) gleichwertige Gleichung

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 + \left(\varrho\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Denkt man sich (Fig. 33) unter der Voraussetzung, daß P nicht mit dem Koordinatenanfang zusammenfällt, die Strahlen gezogen, die vom Koordinatenanfang zum Punkte P und zu einem unendlich nahe benachbarten Punkte Q von $\mathfrak{l}$ führen, der dort die Abszisse $(s + ds)$ hat, und bringt man diese Strahlen mit den beiden um den Anfang beschriebenen Kreisen zum Durchschnitt, welche durch P und Q gehen, so entsteht ein unendlich kleines teilweise krummlinig begrenztes Rechteck, in welchem die von P ausgehenden Seiten durch die absoluten Werte von $d\varrho$ und $\varrho\, d\varphi$ gemessen werden. Wie die vorangehenden Entwickelungen zeigen, darf man dieses Rechteck bei der Längenberechnung seiner gekrümmten Diagonale PQ wie ein gewöhnliches Rechteck behandeln, wofern man die gesuchte Länge nur bis auf einen Fehler zu kennen braucht, der im Verhältnis zu ihr selbst schließlich unendlich klein wird.

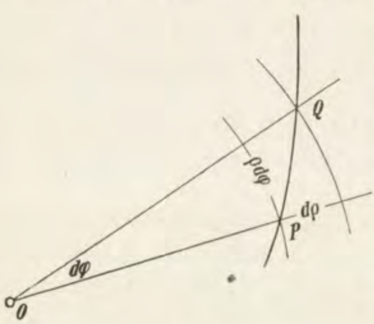


Fig. 33.

Zweitens werde angenommen, daß ein einfaches orientiertes Linienstück $\mathfrak{l}$ in einem System räumlicher Polarkoordinaten durch drei Gleichungen gegeben sei, welche die Polarkoordinaten r, λ, φ eines ihm angehörenden Punktes P als durchweg differenzierbare Funktionen eines Parameters mit stetigen und niemals gleichzeitig verschwindenden Ableitungen darstellen. Wenn dann s die gleiche Bedeutung hat wie zuvor, so besteht zwischen den zusammengehörenden Differentialen ds, dr, $d\lambda$, $d\varphi$ die Gleichung

$$(1321)\qquad \boldsymbol{ds^2 = dr^2 + (r\cos\varphi\, d\lambda)^2 + (r\, d\varphi)^2.}$$

Der Beweis läßt sich nach Einführung rechtwinkeliger Koordinaten x, y, z mittels der Gleichungen

$$x = r\cos\varphi\cos\lambda; \qquad y = r\cos\varphi\sin\lambda; \qquad z = r\sin\varphi$$

ganz ähnlich erbringen wie im vorigen Fall, wenn auch etwas mehr Rechnung erforderlich ist.

Legt man (Fig. 34) unter der Voraussetzung, daß P nicht mit dem Koordinatenanfang zusammenfällt und auch nicht die geographische Breite $\pm\frac{\pi}{2}$ hat, durch den Punkt P und einen unendlich nahe benachbarten Punkt Q von $\mathfrak{l}$, der dort die Abszisse $(s + ds)$ hat,

1. — die beiden Kugeln, welche den Koordinatenanfang als Mittelpunkt haben,
2. — die beiden Meridianebenen,
3. — die beiden Umdrehungskegel, welche den Koordinatenanfang als Spitze und die durch die Pole gehende Achse als Achse haben,

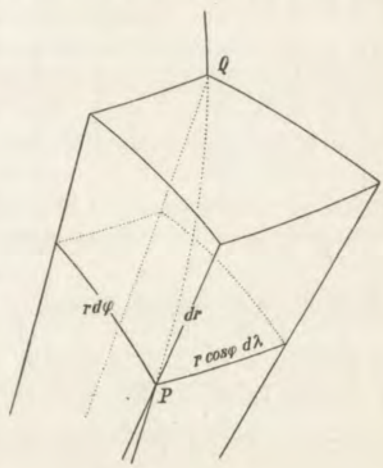


Fig. 34.

so entsteht am Punkte P eine nahezu mit einem rechtwinkeligen Parallelepipedon übereinstimmende Figur, deren von P ausgehende Kanten durch die absoluten Werte von dr, $r\cos\varphi\, d\lambda$, $r\, d\varphi$ gemessen werden. Wie die Gleichung (1321) zeigt, darf man diese Figur bei der Längenberechnung ihrer gekrümmten Diagonale PQ wie ein gewöhnliches rechtwinkeliges Parallelepipedon behandeln, wofern ein Fehler zulässig ist, der im Verhältnis zu der gesuchten Länge selbst schließlich unendlich klein wird.

468. Gewöhnliche Linienstücke und Bereiche. — Erklärung: Ein einfaches Linienstück soll fortan **gewöhnlich** genannt werden, wenn für dasselbe in einem System rechtwinkeliger Koordinaten x, y, z eine Parameterdarstellung

$$x = \varphi(t); \qquad y = \chi(t); \qquad z = \psi(t)$$

möglich ist, bei der

1. — der Parameter t ein abgeschlossenes Intervall $\mathfrak{J}$ zu durchlaufen hat,
2. — die Funktionen $\varphi(t)$, $\chi(t)$, $\psi(t)$ in $\mathfrak{J}$ überall differenzierbar und
3. — die Ableitungen $\varphi'(t)$, $\chi'(t)$, $\psi'(t)$ in $\mathfrak{J}$ stetig und nirgends sämtlich gleich Null sind.

Ferner soll eine einfache geschlossene Linie **gewöhnlich** heißen, wenn jedes in ihr als Teil enthaltene einfache Linienstück gewöhnlich ist.

Gibt es für ein Linienstück in einem System rechtwinkeliger Koordinaten eine Parameterdarstellung der eben gekennzeichneten Art, so ist eine solche Parameterdarstellung, wie leicht einzusehen, auch in jedem anderen rechtwinkeligen Koordinatensystem möglich, dessen Achsenkreuz gegen das Linienstück fest ist.

Bei den Anwendungen der Infinitesimalrechnung setzt man von den in Betracht zu ziehenden einfachen Linienstücken und einfachen geschlossenen Linien fast immer voraus, daß sie diesen Forderungen entsprechen, und eben deswegen empfiehlt es sich, das Erfülltsein dieser Voraussetzung durch ein einziges Eigenschaftswort zu kennzeichnen.

Durch die den Funktionen $\varphi(t)$, $\chi(t)$, $\psi(t)$ auferlegten Bedingungen wird nach früheren Sätzen bei jedem gewöhnlichen einfachen Linienstück

1. — das Vorhandensein einer Bogenlänge,
2. — für jeden Punkt des Linienstückes das Vorhandensein einer Tangente und
3. — stetige Änderung der positiven Tangentenrichtung bei stetiger Verschiebung des Berührungspunktes

gewährleistet. Damit ist bei gewöhnlichen einfachen Linienstücken das Auftreten von Ecken ausgeschlossen und ebenso auch das Auftreten von Spitzen, in denen zwar noch eine Tangente vorhanden ist, aber die positive Tangentenrichtung eine plötzliche Umkehrung erfährt.

Ferner gilt für ebene gewöhnliche einfache Linienstücke der folgende wichtige

Lehrsatz: *Ein ebenes gewöhnliches einfaches Linienstück* $\mathfrak{l}$ *läßt sich, nachdem man in seiner Ebene irgendein System rechtwinkeliger Koordinaten* x, y *angenommen hat, stets in eine endliche Anzahl aneinander gereihter Teile zerlegen, von denen jeder einzelne derart durch eine Gleichung von der Form*

$$y = f(x) \qquad \textit{oder der Form} \qquad x = g(y)$$

darstellbar ist, daß x *beziehungsweise* y *ein abgeschlossenes Intervall zu durchlaufen hat und* $f(x)$ *beziehungsweise* $g(y)$ *eine in diesem Intervall differenzierbare Funktion mit durchweg stetiger Ableitung bedeutet.*

Beweis: Ist

$$x = \varphi(t); \qquad y = \chi(t)$$

eine den obigen Anforderungen genügende Parameterdarstellung von $\mathfrak{l}$, so hat die Summe

$$[\varphi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2$$

in dem Intervall $\mathfrak{J}$, welches der Parameter t zu durchlaufen hat, ein positives Minimum M. Es ist daher möglich, das Intervall $\mathfrak{J}$ derart in eine endliche Anzahl von Teilen zu zerlegen, daß für jeden einzelnen derselben sowohl die größte Schwankung der Funktion $\varphi'(t)$ als auch die der Funktion $\chi'(t)$ kleiner als $\sqrt{\frac{1}{2} M}$, ist. Nachdem dies geschehen, ist in jedem Teilintervall, auch wenn man ihm seine beiden Endpunkte zurechnet, entweder $\varphi'(t)$ oder $\chi'(t)$ dauernd von Null verschieden. Denn gäbe es ein Teilintervall, in welchem, wenn auch nur bei Hinzurechnung der Endpunkte, sowohl $\varphi'(t)$ als $\chi'(t)$ gleich Null werden könnte, so wäre in diesem Intervall überall sowohl $|\varphi'(t)| < \sqrt{\frac{1}{2} M}$ als auch $|\chi'(t)| < \sqrt{\frac{1}{2} M}$ folglich

$$[\varphi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 < M$$

gegen die Annahme. Ist nun aber in einem Teilintervall einschließlich seiner Grenzen $\varphi'(t)$ dauernd von Null verschieden, so ist die Gleichung $x = \varphi(t)$ für dieses Intervall umkehrbar, und wenn man sich aus ihr t als Funktion von x bestimmt denkt und dann diese Funktion in die Gleichung $y = \chi(t)$ einsetzt, so erhält man für den entsprechenden Teil von $\mathfrak{l}$ eine Darstellung durch eine Gleichung von der Form $y = f(x)$, die den oben gestellten Anforderungen genügt. Aus ähnlichen Gründen gehört zu jedem Teilintervall, in welchem $\chi'(t)$ dauernd von Null verschieden ist, ein Teil von $\mathfrak{l}$, der sich durch eine den obigen Anforderungen entsprechende Gleichung von der Form $x = g(y)$ darstellen läßt.

Aus dem hiermit bewiesenen Lehrsatz folgt mit Rücksicht auf Nr. **424** sofort:

Jedes ebene gewöhnliche einfache Linienstück läßt sich in ein Vieleck von beliebig kleinem Flächeninhalt einschließen.

Hieraus ergibt sich weiter:

Jedem endlichen ebenen Bereiche, dessen Grenze aus einer endlichen Anzahl gewöhnlicher einfacher Linienstücke besteht, kommt ein Flächeninhalt zu.

Auf dem Begriff des gewöhnlichen einfachen Linienstückes beruht endlich auch der bei den Anwendungen manchmal bequeme Begriff eines **gewöhnlichen ebenen Bereiches.** Ein ebener Bereich soll nämlich fortan **gewöhnlich** genannt werden, wenn er aus einem endlichen ebenen Kontinuum durch Hinzufügung aller Grenzpunkte des Kontinuums abgeleitet werden kann und seine Grenze aus einer endlichen Anzahl gewöhnlicher einfacher Linienstücke besteht. Beispiele sind die Fläche eines Dreiecks, eines Rechtecks, eines Kreises usw., falls man der Fläche auch alle Punkte ihres Umfangs zurechnet. Ausgeschlossen ist dagegen beispielsweise eine Kreisfläche, aus der man alle Punkte eines Radius herausgenommen oder zu der man alle Punkte einer Strecke hinzugefügt hat, die mit dem Umfang in einem Punkte zusammentrifft, sonst aber außerhalb des Kreises verläuft. Ebenso würde auch ein Bereich, der aus den Flächen zweier einander von außen berührenden Kreise besteht, nicht zu den gewöhnlichen Bereichen zu rechnen sein.

469. Zusätze zur Lehre von der Krümmung. — Unter Benutzung des Begriffes der Bogenlänge kann man für den in den Nummern **360** bis **362** bereits auf verschiedene Weise erklärten Begriff der Krümmung einer ebenen Linie noch eine neue besonders einfache Erklärung aufstellen, die deswegen wichtig ist, weil sie sich auf Flächen ausdehnen läßt, während dies bei den früheren Erklärungen nicht zutrifft. Man gelangt zu der neuen Erklärung durch folgende Überlegungen: In einer Ebene mit einem System rechtwinkeliger Koordinaten x, y sei ein einfaches Linienstück $\mathfrak{l}$ (Fig. 35) durch zwei Gleichungen

$$x=\varphi(t)\,; \qquad y=\chi(t)$$

von solcher Beschaffenheit gegeben, daß die Funktionen $\varphi(t)$, $\chi(t)$ für jeden in Betracht kommenden Wert des Parameters t wenigstens zweimal differenzierbar und die Ableitungen $\varphi'(t)$, $\chi'(t)$ niemals gleichzeitig gleich Null sind. Wie üblich sei das Linienstück $\mathfrak{l}$ dadurch orientiert, daß man diejenige Richtung, in welcher der Parameter t wächst, als positive Richtung erklärt hat. Ferner sei in der Ebene des Koordinatensystems um den Anfang O mit dem Radius 1 ein Kreis beschrieben (**Einheitskreis**). Dann kann man jedem Punkte P von $\mathfrak{l}$ denjenigen Punkt P' dieses Kreises zuordnen, zu

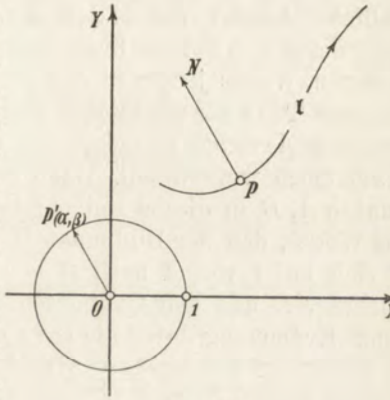


Fig. 35.

dem man gelangt, wenn man von O aus den zur positiven Normale PN von $\mathfrak{l}$ in P parallelen und gleichgerichteten Radius zieht (**Abbildung auf den Einheitskreis durch parallele Normalen**). Ist t der dem Punkte P entsprechende Parameterwert, so werden bei dieser Abbildung die Koordinaten α, β des Bildpunktes P' durch die Gleichungen

$$\alpha=-\frac{\chi'(t)}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}}\,; \qquad \beta=\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}}$$

gegeben. Ferner ist, wie man durch einfache Zwischenrechnungen findet,

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{-\varphi'(t)[\varphi'(t)\chi''(t)-\varphi''(t)\chi'(t)]}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}^{\,3}}\,; \qquad \frac{d\beta}{dt}=\frac{-\chi'(t)[\varphi'(t)\chi''(t)-\varphi''(t)\chi'(t)]}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}^{\,3}}\,.$$

Bei stetiger Verschiebung des Punktes P auf $\mathfrak{l}$ im positiven Sinne schreitet daher, solange die Determinante $[\varphi'(t)\chi''(t)-\varphi''(t)\chi'(t)]$ von Null verschieden bleibt, auch der Bildpunkt P' auf dem Einheitskreise fort, und zwar in der positiven oder der negativen Drehungsrichtung, je nachdem die erwähnte Determinante positiv oder negativ ist.

Nunmehr werde vorausgesetzt, daß auch die zweiten Ableitungen $\varphi''(t)$, $\chi''(t)$ durchweg stetig seien und daß die Determinante $[\varphi'(t)\chi''(t) - \varphi''(t)\chi'(t)]$ nur für eine endliche Anzahl von Werten des Parameters t gleich Null werden könne, so daß der Punkt P', wenn P das Linienstück $\mathfrak{l}$ stetig und immer im gleichen Sinne fortschreitend durchläuft, seine Bewegungsrichtung nur eine endliche Anzahl von Malen umzukehren vermag. Zugleich sei festgesetzt, daß bei der Berechnung der Länge eines von P' zurückgelegten Weges jedem in der positiven Drehungsrichtung zurückgelegten Teile desselben eine positive und jedem in der negativen Drehungsrichtung zurückgelegten Teile eine negative Länge zugeschrieben werden soll. Dann nennt man, falls auf $\mathfrak{l}$ irgend zwei Punkte A, B in dieser Reihenfolge gegeben sind, die Gesamtlänge des Weges, den der Bildpunkt P' des Punktes P zurücklegt, wenn P sich auf $\mathfrak{l}$ von A nach B bewegt, die **ganze Krümmung** des Bogens AB und den Quotienten, den man erhält, wenn man diese ganze Krümmung durch die auf $\mathfrak{l}$ gemessene Abszisse des Punktes B in bezug auf den Punkt A dividiert, die **mittlere Krümmung** des Bogens AB.

Ist die ganze Krümmung des Bogens AB absolut genommen kleiner als π, so ist sie nichts weiter als der hohle Winkel zwischen den positiven Tangentenrichtungen (oder auch den positiven Normalenrichtungen) im Anfangspunkt A und im Endpunkt B des Bogens. Anderenfalls ergibt sie sich aus diesem hohlen Winkel durch Hinzufügung eines positiven oder negativen ganzzahligen Vielfachen von 2π.

Von dem Begriff der mittleren Krümmung gelangt man endlich durch einen einfachen Grenzübergang zu dem früher auf andere Weise erklärten Begriff der Krümmung schlechthin. Nimmt man nämlich auf $\mathfrak{l}$ einen festen Punkt P_0 nach Belieben an und läßt man sodann zwei bewegliche Punkte P_1, P_2 von $\mathfrak{l}$ gleichzeitig dem Punkte P_0 irgendwie unbegrenzt nahe rücken, jedoch so, daß sie niemals miteinander zusammenfallen, so kommt die mittlere Krümmung des Bogens P_1P_2 immer zuletzt der Krümmung von $\mathfrak{l}$ in P_0 unbegrenzt nahe, so daß diese letztere auch als der Grenzwert der mittleren Krümmung des Bogens P_1P_2 erklärt werden kann. In der Tat wird ja, wenn t_1, t_2 die zu den Punkten P_1, P_2 gehörenden Parameterwerte bedeuten, die ganze Krümmung des Bogens P_1P_2 durch das mit dem richtigen Vorzeichen zu versehende Integral $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2}\, dt$ dargestellt. Dieses letztere stimmt aber nach dem obigen stets überein mit dem Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\varphi'(t)\chi''(t) - \varphi''(t)\chi'(t)}{[\varphi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\,dt,$$

also auch mit dem Ausdruck

$$(t_2 - t_1)\,\frac{\varphi'(t')\chi''(t') - \varphi''(t')\chi'(t')}{[\varphi'(t')]^2 + [\chi'(t')]^2},$$

wo t' einen passend zu wählenden Mittelwert zwischen t_1 und t_2 bezeichnet. Ferner wird die auf $\mathfrak{l}$ gemessene Abszisse von P_2 in bezug auf P_1 durch das Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\,dt = (t_2 - t_1)\sqrt{[\varphi'(t'')]^2 + [\chi'(t'')]^2}$$

gegeben, wo auch t'' einen Mittelwert zwischen t_1 und t_2 bedeutet. Folglich ist die mittlere Krümmung des Bogens P_1P_2 gleich dem Quotienten

$$\frac{\varphi'(t')\chi''(t') - \varphi''(t')\chi'(t')}{\{[\varphi'(t')]^2 + [\chi'(t')]^2\}\sqrt{[\varphi'(t'')]^2 + [\chi'(t'')]^2}}$$

und strebt daher, wenn t_1 und t_2 und mit ihnen auch t' und t'' unbegrenzt nahe an den zum Punkte P_0 gehörenden Parameterwert t_0 heranrücken, stets dem Grenzwert

$$\frac{\varphi'(t_0)\chi''(t_0) - \varphi''(t_0)\chi'(t_0)}{\sqrt{[\varphi'(t_0)]^2 + [\chi'(t_0)]^2}^{\,3}}$$

zu. Dieser letztere stellt aber nach Gleichung (983), Nr. **360**, die Krümmung von $\mathfrak{l}$ in P_0 dar.

Das hiermit gewonnene Ergebnis kann als eine Erweiterung des elementaren Satzes angesehen werden, daß bei einem Kreise vom Radius r die zum Zentriwinkel τ gehörende Bogenlänge s durch die Gleichung

(1322) $$s = r\tau$$

gegeben wird. Sind nämlich auf einem Linienstück $\mathfrak{l}$, für welches die bisher gemachten Voraussetzungen sämtlich erfüllt sind, ein Punkt P, in welchem die Krümmung von Null verschieden ist, und ein zweiter ihm unendlich nahe rückender Punkt Q gegeben, so besteht zwischen dem Krümmungsradius ϱ von $\mathfrak{l}$ in P und den (positiven oder negativen) Zahlen ds, $d\tau$, welche den Bogen PQ

und den Winkel zwischen den positiven Normalen von $\mathfrak{l}$ in P und Q messen, nach dem vorangehenden die Gleichung

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\varrho} + \varepsilon,$$

wo ε eine zugleich mit ds unendlich klein werdende Zahl bedeutet. Diese Gleichung erhält aber, wenn man die Nenner wegschafft und den auch im Verhältnis zu ds unendlich klein werdenden Fehler $\varepsilon\varrho ds$ vernachlässigt, die der Gleichung (1322) genau entsprechende Form

(1323) $$ds = \varrho\, d\tau.$$

Eine Anwendung findet diese Formel beispielsweise in der Geodäsie. Sind nämlich auf ein und demselben Meridian der als abgeplattetes Umdrehungsellipsoid betrachteten Erde irgend zwei Punkte von hinlänglich wenig verschiedener geographischer Breite gegeben, so erhält man die Länge des sie verbindenden Meridianbogens hinreichend genau, wenn man für $d\tau$ den Breitenunterschied dieser Punkte und für ϱ den Krümmungsradius der Meridianellipse in irgendeinem Punkte des Bogens einsetzt.

Mit Hilfe der Gleichung (1316) läßt sich endlich auch die schon am Schluß der Nr. **364** ausgesprochene Behauptung beweisen, daß ein durch zwei Gleichungen

$$x = \varphi(t); \qquad y = \chi(t)$$

gegebenes Linienstück $\mathfrak{l}$ (Fig. 36) unter den dort angegebenen Voraussetzungen im allgemeinen aus seiner Evolute λ durch Ab- oder Aufwickelung eines vollkommen biegsamen, unausdehnbaren, gespannt bleibenden Fadens abgeleitet werden kann. Zwischen den Koordinaten $\varphi(t)$, $\chi(t)$ des zu dem veränderlichen Parameterwert t gehörenden Punktes P von l, dem zugehörigen Krümmungsradius ϱ und den Koordinaten ξ, η des zu P gehörenden Krümmungsmittelpunktes M bestehen nämlich die Gleichungen

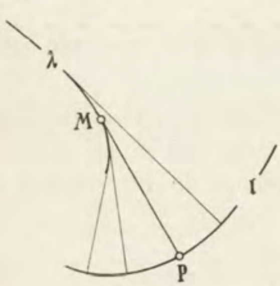


Fig. 36.

$$\xi = \varphi - \frac{\chi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \chi'^2}}\varrho; \qquad \eta = \chi + \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \chi'^2}}\varrho,$$

deren Differentiation zunächst die Gleichungen

$$\xi' = \varphi' - \varrho \frac{d \dfrac{\chi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \chi'^2}}}{dt} - \frac{\chi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \chi'^2}} \varrho'$$

$$\eta' = \chi' + \varrho \frac{d \dfrac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \chi'^2}}}{dt} + \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \chi'^2}} \varrho'$$

liefert. Hier heben sich aber die beiden ersten Glieder der rechten Seiten jedesmal weg, wie man leicht erkennt, wenn man die im zweiten Gliede nur angedeutete Differentiation wirklich ausführt und zugleich für ϱ den durch die Gleichung

$$\varrho = \frac{(\varphi'^2 + \chi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi'\chi'' - \varphi''\chi'}$$

gegebenen Wert einsetzt. Man erhält daher schließlich die einfachen Gleichungen

$$\xi' = -\frac{\chi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \chi'^2}} \varrho'; \qquad \eta' = \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \chi'^2}} \varrho'.$$

Nun war ausdrücklich vorausgesetzt worden, daß zu verschiedenen Punkten von $\mathfrak{l}$ auch verschiedene Krümmungsmittelpunkte gehören. Daher können die Ableitungen ξ', η' in keinem noch so kleinen Teilintervall des Wertbereiches des Parameters t beide dauernd gleich Null sein. Es lassen sich vielmehr in diesem Wertbereich stets Stellen und wegen der Stetigkeit der Ableitungen ξ', η' auch Teilintervalle finden, wo ξ' und η' nicht gleichzeitig gleich Null werden. Sind aber ξ', η' für irgendeinen Wert von t nicht beide gleich Null, so hat die Evolute λ in dem entsprechenden Punkte M eine Tangente, und diese Tangente fällt mit der geraden Verbindungslinie des Punktes M und des zugehörigen Punktes P von $\mathfrak{l}$ zusammen. Denn sie steht auf der das Linienstück $\mathfrak{l}$ in P berührenden Tangente senkrecht, da ξ', η' zu den Richtungskosinus $\frac{-\chi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \chi'^2}}$, $\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \chi'^2}}$ der positiven Normale von $\mathfrak{l}$ in P proportional sind. Läßt man ferner den Parameter t stetig zunehmend irgendein Intervall durchlaufen, in welchem ξ' und η' nie gleichzeitig verschwinden, also auch die Ableitung ϱ' von Null verschieden bleibt und daher als stetige Funktion von t ihr Vorzeichen nicht wechselt, so bewegt sich der Punkt M, falls ϱ' positiv ist, beständig in der positiven, und falls ϱ' negativ ist, beständig in der negativen Normalenrichtung von $\mathfrak{l}$. Zugleich ist die Länge des von M zurückgelegten Weges infolge der Gleichung

$$\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2} = \pm \varrho'$$

im ersten Falle stets gleich der Zunahme und im zweiten stets gleich der Abnahme, welche der Krümmungsradius erfährt, so daß der Punkt P in der Tat stets als Endpunkt eines gespannt bleibenden Fadens angesehen werden kann, der sich von dem betrachteten Evolutenteil ab- oder auf ihn aufwickelt.

470. Linienintegrale. — Auf dem Begriff der Bogenlänge eines Linienstückes beruht auch die folgende sowohl in der reinen Mathematik als bei deren Anwendungen viel gebrauchte Erweiterung des Begriffes eines bestimmten Integrales: Man denke sich ein einfaches oder aus einer endlichen Anzahl aneinander gereihter einfacher Linienstücke zusammengesetztes Linienstück $\mathfrak{l}$ gegeben, welchem eine Bogenlänge zukommt. Ferner denke man sich unter Zugrundelegung eines Systems rechtwinkeliger räumlicher[1]) Koordinaten x, y, z für einen Bereich, der das Linienstück $\mathfrak{l}$ enthält und außerdem noch andere Punkte enthalten kann, aber nicht notwendig zu enthalten braucht, eine Funktion $f(x, y, z)$ gegeben, die auf $\mathfrak{l}$ selbst zwischen endlichen Grenzen enthalten bleibt. Nimmt man sodann auf $\mathfrak{l}$ eine beliebige Anzahl $(n+1)$ voneinander verschiedener Punkte

$$P_0, P_1, P_2, \cdots P_n$$

irgendwie so an, daß P_0 mit dem einen und P_n mit dem anderen Endpunkt von $\mathfrak{l}$ zusammenfällt, während die übrigen Punkte auf $\mathfrak{l}$ im Sinne von P_0 gegen P_n aufeinander folgen, und versteht man für $\lambda = 1, 2, \cdots n$ unter s_λ die positiv zu nehmende Länge des Bogens $P_{\lambda-1}P_\lambda$ und unter g_λ und G_λ beziehentlich die untere und die obere Grenze der Funktion $f(x, y, z)$ für den Bogen $P_{\lambda-1}P_\lambda$ mit Einschluß seiner Endpunkte, so ist die obere Grenze aller Werte, welche die Summe $\sum\limits_{\lambda=1}^{n} g_\lambda s_\lambda$ anzunehmen vermag, niemals größer als die untere Grenze aller möglichen Werte der Summe $\sum\limits_{\lambda=1}^{n} G_\lambda s_\lambda$. Dies ergibt sich durch Überlegungen, die Wort für Wort denjenigen

1) Da die Spezialisierung für die Ebene sich von selbst ergibt, sind die nachfolgenden Betrachtungen gleich für den Raum durchgeführt.

entsprechen, die in Nr. **420** zum Zweck der Erklärung des Begriffes eines bestimmten Integrales angestellt wurden, so daß hier von einem besonderen Beweise abgesehen werden kann.

Fällt nun die obere Grenze aller möglichen Werte der Summe $\sum_{\lambda=1}^{n} g_\lambda s_\lambda$ mit der unteren Grenze aller möglichen Werte der Summe $\sum_{\lambda=1}^{n} G_\lambda s_\lambda$ zusammen, so sagt man, die Funktion $f(x, y, z)$ sei über das Linienstück $\mathfrak{l}$ integrierbar, nennt den gemeinsamen Wert der eben erwähnten Grenzen das über $\mathfrak{l}$ erstreckte **Linienintegral** der Funktion $f(x, y, z)$ und gebraucht zu dessen Darstellung das Zeichen

$$\int^{(\mathfrak{l})} f(x, y, z)\, ds\,.$$

Das Linienstück $\mathfrak{l}$ selbst wird dann meistens als der **Integrationsweg** bezeichnet.

Sind unter Beibehaltung der bisherigen Voraussetzungen und Bezeichnungen $x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda$ für $\lambda = 1, 2, \cdots n$ jedesmal die Koordinaten eines auf dem Bogen $P_{\lambda-1}P_\lambda$ nach Belieben angenommenen Punktes Q_λ, so liegt die Summe

$$S = \sum_{\lambda=1}^{n} f(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda) s_\lambda$$

niemals außerhalb der Grenzen $\sum_{\lambda=1}^{n} g_\lambda s_\lambda$ und $\sum_{\lambda=1}^{n} G_\lambda s_\lambda$. Und wenn die Funktion $f(x, y, z)$ über $\mathfrak{l}$ integrierbar ist, so darf das Integral $\int^{(\mathfrak{l})} f(x, y, z)\, ds$ auch als der Grenzwert der Summe S für den Fall einer unbegrenzten Verfeinerung der Teilung des Linienstückes $\mathfrak{l}$ bezeichnet werden. Nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen positiven Konstanten ε kann man nämlich stets eine zugeordnete positive Konstante h so bestimmen, daß der Unterschied zwischen dem Integral $\int^{(\mathfrak{l})} f(x, y, z)\, ds$ und der Summe S für jede Teilung von $\mathfrak{l}$, bei der die Bogenlängen $s_1, s_2, \cdots s_n$ sämtlich kleiner als h sind, absolut genommen kleiner als ε ausfällt, ganz einerlei wie die fragliche Teilung im übrigen beschaffen sein mag und wie die Punkte $Q_1, Q_2, \cdots Q_n$ auf den einzelnen Teilen ausgewählt sind. Auch der Beweis hierfür ergibt sich genau so wie der des entsprechenden Satzes in Nr. 421 und braucht daher hier nicht besonders erbracht zu werden.

Ist die Funktion $f(x, y, z)$ bei Einschränkung der Stelle (x, y, z) auf irgend einen zusammenhängenden und abgeschlossenen das Linienstück $\mathfrak{l}$ enthaltenden Bereich $\mathfrak{B}$ in diesem Bereiche stetig, so ist sie nach Nr. 422 daselbst auch gleichmäßig stetig und daher über $\mathfrak{l}$ integrierbar. Und wenn es möglich ist, den Bereich $\mathfrak{B}$ so zu wählen, daß er nicht nur die Punkte des Linienstückes $\mathfrak{l}$ selbst, sondern außerdem noch andere Punkte umfaßt, so kann man der Erklärung des über $\mathfrak{l}$ zu erstreckenden Linienintegrales $\int^{(\mathfrak{l})} f(x, y, z)\,ds$ eine Fassung geben, die noch etwas allgemeiner ist als die bisherige und daher manchmal den Vorzug verdient. Denkt man sich nämlich für $\lambda = 1, 2, \cdots n$ jedesmal über der Strecke $P_{\lambda-1}P_\lambda$ als Durchmesser eine Kugel konstruiert und sodann im Innern oder auf der Oberfläche dieser Kugel einen Punkt $(\xi_\lambda, \eta_\lambda, \zeta_\lambda)$, der zugleich dem Bereiche $\mathfrak{B}$ angehört, nach Belieben angenommen, so kann das Integral $\int^{(\mathfrak{l})} f(x, y, z)\,ds$ auch als der Grenzwert der Summe

$$S' = \sum_{\lambda=1}^{n} f(\xi_\lambda, \eta_\lambda, \zeta_\lambda)\, s_\lambda$$

für den Fall einer unbegrenzten Verfeinerung der Teilung des Integrationsweges $\mathfrak{l}$ erklärt werden. Denn wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktion $f(x, y, z)$ in dem Bereiche $\mathfrak{B}$ kann man durch hinreichend weitgehende Verfeinerung der Teilung von $\mathfrak{l}$ stets erreichen, daß sich die Summen S und S' beliebig wenig voneinander unterscheiden, einerlei wie die Punkte $(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)$ und $(\xi_\lambda, \eta_\lambda, \zeta_\lambda)$ gemäß den angegebenen Bedingungen gewählt sein mögen.

Will man ein Linienintegral $\int^{(\mathfrak{l})} f(x, y, z)\,ds$ zahlenmäßig ausrechnen, so muß man dasselbe zunächst in ein einfaches Integral verwandeln, was stets auf unendlich viele verschiedene Weisen möglich ist. Eine dieser Möglichkeiten besteht darin, daß man, nachdem man dem Integrationsweg $\mathfrak{l}$ eine Orientierung gegeben hat, die Koordinaten x, y, z eines den Integrationsweg in positiver

Richtung durchlaufenden Punktes als Funktionen der Länge s des Bogens darstellt, den dieser Punkt seit dem Verlassen des Anfangspunktes von $\mathfrak{l}$ durchlaufen hat. Dann wird nämlich, wenn l die ganze Länge des Integrationsweges bedeutet,

$$\text{(1324)} \qquad \int^{(\mathfrak{l})} f(x, y, z)\, ds = \int_0^l f(x, y, z) ds,$$

wie aus den Erklärungen dieser beiden Integrale ohne weiteres folgt. Und aus dieser ersten Möglichkeit ergeben sich durch Einführung einer neuen Integrationsveränderlichen unendlich viele andere. Insbesondere kann man, wenn der Integrationsweg $\mathfrak{l}$ derart durch drei Gleichungen

$$x = \varphi(t); \qquad y = \chi(t); \qquad z = \psi(t)$$

dargestellt ist, daß der Parameter t ein abgeschlossenes Intervall zu durchlaufen hat und daß die Funktionen $\varphi(t)$, $\chi(t)$, $\psi(t)$ in diesem Intervall differenzierbar und ihre Ableitungen daselbst stetig sind und wachsenden Werten von t auch wachsende Werte der zuvor erwähnten Bogenlänge s entsprechen, den Parameter t als neue Integrationsveränderliche einführen und erhält dann, wenn a die untere und b die obere Grenze des Intervalles bedeutet, welches der Parameter t zu durchlaufen hat,

$$\text{(1325)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int^{(\mathfrak{l})} f(x, y, z)\, ds \\ \displaystyle= \int_a^b f[\varphi(t), \chi(t), \psi(t)] \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt. \end{cases}$$

Anmerkung. — Bei den Anwendungen des Begriffes Linienintegral hat man es öfters mit dem Fall zu tun, daß der Integrationsweg ein gewöhnliches einfaches orientiertes Linienstück und daß die unter dem Integralzeichen stehende Funktion als ein Produkt zweier Faktoren gegeben ist, von denen der eine mit einem der Richtungskosinus α, β, γ der positiven Tangentenrichtung des Integrationsweges im Punkte (x, y, z) übereinstimmt. Trifft dies zu, so schreibt man statt

$$\int^{(\mathfrak{l})} f(x, y, z)\, \alpha\, ds; \qquad \int^{(\mathfrak{l})} f(x, y, z) \beta\, ds; \qquad \int^{(\mathfrak{l})} f(x, y, z) \gamma\, ds$$

sehr oft kürzer

$$\int^{(\mathfrak{l})} f(x, y, z) dx; \qquad \int^{(\mathfrak{l})} f(x, y, z) dy; \qquad \int^{(\mathfrak{l})} f(x, y, z)\, dz$$

und fügt in Worten hinzu, daß diese letzteren Integrale in der positiven Richtung zu erstrecken sind. Man kommt hierzu, indem man die Koordinaten x, y, z eines den Weg $\mathfrak{l}$ in positiver Richtung durchlaufenden Punktes P als Funktionen der Länge s des von P bereits beschriebenen Teiles von $\mathfrak{l}$ ansieht. Dann wird nämlich

$$\alpha = \frac{dx}{ds}; \qquad \beta = \frac{dy}{ds}; \qquad \gamma = \frac{dz}{ds},$$

und es liegt nahe, die Produkte $\frac{dx}{ds}ds$, $\frac{dy}{ds}ds$, $\frac{dz}{ds}ds$ durch die einfachen Differentiale dx, dy, dz zu ersetzen. Da aber diese letzteren positiv oder negativ sein können, bedarf es zur Bestimmung ihrer Vorzeichen einer besonderen Angabe darüber, in welcher Richtung integriert werden soll. Gerade bei den soeben erwähnten Integralen liegt der schon oben angedeutete Fall vor, daß unter dem Integralzeichen eine Funktion steht, die, wie z. B. das Produkt $f(x, y, z)\frac{dx}{ds}$, nur für die Punkte von $\mathfrak{l}$ selbst, aber für keine anderen Punkte erklärt ist.

471. Beispiele von Linienintegralen. — **1.** — Arbeit einer Kraft. — Auf dem Begriff eines Linienintegrales beruht die allgemeine Erklärung des Begriffes der Arbeit einer Kraft: Man stelle sich vor, daß der Angriffspunkt P einer Kraft k ein gewöhnliches einfaches Linienstück $\mathfrak{l}$ in gegebener Richtung durchläuft. Wenn dann die Tangentialkomponente der Kraft, d. h. die senkrechte Projektion der die Kraft darstellenden Strecke auf die das Linienstück $\mathfrak{l}$ in P berührende und mit der Fortschreitungsrichtung von P gleichgerichtete Tangente, derart von der Lage des Punktes P abhängt, daß sie über $\mathfrak{l}$ integrierbar ist, so bezeichnet man das über $\mathfrak{l}$ erstreckte Integral dieser Tangentialkomponente als die **Arbeit**, welche die Kraft k leistet, während ihr Angriffspunkt das Linienstück $\mathfrak{l}$ in der gegebenen Richtung durchläuft.

Sind die dieser Erklärung zugrunde liegenden Voraussetzungen erfüllt und sind nach Einführung eines Systems rechtwinkeliger räumlicher Koordinaten, dessen Achsenkreuz gegen $\mathfrak{l}$ fest ist,

x, y, z die veränderlichen Koordinaten des Angriffspunktes P,

α, β, γ die Richtungskosinus der den Weg $\mathfrak{l}$ in P berührenden und mit der Bewegungsrichtung von P gleichgerichteten Tangente und

k_x, k_y, k_z diejenigen Funktionen von x, y, z, welche die Komponenten der Kraft k nach den Koordinatenachsen darstellen,

so wird die eben erklärte Arbeit, wie man leicht einsieht, durch das Linienintegral

$$\int^{(\mathfrak{l})}(\alpha k_x + \beta k_y + \gamma k_z)ds$$

dargestellt, wofür man etwas kürzer auch

$$\int^{(\mathfrak{l})}(k_x dx + k_y dy + k_z dz)$$

schreiben kann, mit dem Zusatz, daß die Integration in der Richtung der Bewegung zu erstrecken ist.

Sehr oft ist der Angriffspunkt P einer Kraft k in einem dreifach ausgedehnten Bereiche $\mathfrak{B}$ frei beweglich und zugleich die Kraft, wie man sagt, aus einem Potential ableitbar. Das heißt, die Komponenten k_x, k_y, k_z von k in bezug auf ein System rechtwinkeliger Koordinaten können in $\mathfrak{B}$ als die partiellen Ableitungen ein und derselben, gewöhnlich als Potential bezeichneten Funktion V der Koordinaten x, y, z des Angriffspunktes P dargestellt werden, so daß

$$k_x = \frac{\partial V}{\partial x}; \qquad k_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \qquad k_z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

ist. Trifft dies zu und sind außerdem, was praktisch allein vorkommt, k_x, k_y, k_z durchweg stetige Funktionen von x, y, z, so kann die Arbeit, welche die Kraft k leistet, wenn ihr Angriffspunkt von einer gegebenen Anfangslage A längs eines einfachen in $\mathfrak{B}$ verlaufenden gewöhnlichen Linienstückes $\mathfrak{l}$ zu einer gleichfalls gegebenen Endlage B übergeht, sehr einfach berechnet werden. Denkt man sich nämlich die Koordinaten x, y, z des auf $\mathfrak{l}$ fortschreitenden Punktes P als Funktionen der Länge s des Bogens AP dargestellt und dadurch auch den zum Punkte P gehörenden Wert V des Potentials in eine Funktion von s verwandelt, so wird

$$\alpha k_x + \beta k_y + \gamma k_z = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{ds} = \frac{dV}{ds}$$

und daher, wenn l die Länge von $\mathfrak{l}$ bedeutet,

$$\int^{(\mathfrak{l})}(\alpha k_x + \beta k_y + \gamma k_z)ds = \int_0^l \frac{dV}{ds}ds = V_B - V_A,$$

wo V_A und V_B die zu den Punkten A und B gehörenden Werte des Potentials bedeuten. Die geleistete Arbeit ist daher nur von der Lage der Punkte A und B abhängig, nicht aber von der Gestalt des Weges, auf welchem der Punkt P vom einen zum anderen übergeht, so lange nur dieser Weg nicht aus dem Bereich $\mathfrak{B}$ heraustritt, für den die gemachten Voraussetzungen gelten.

Die Darlegung der Gründe, auf denen die Wichtigkeit des Begriffes Arbeit beruht, muß natürlich der Mechanik überlassen bleiben.

2. — Wirkung eines Stromes auf einen Magnetpol. — Wenn sich der Leiter eines konstanten elektrischen Stromes mit hinreichender Genauigkeit durch eine gewöhnliche einfache geschlossene Linie $\mathfrak{l}$ abbilden läßt und sich in bezug auf das Achsenkreuz eines rechtwinkeligen räumlichen Koordinatensystems, für welches das Trägheitsgesetz gilt, in Ruhe befindet, so kann man die Komponenten der Kraft, welche der Strom auf einen ruhenden Magnetpol ausübt, durch Linienintegrale ausdrücken. Ist nämlich das angenommene Koordinatensystem ein Rechtssystem und ist unter Zugrundelegung des elektromagnetischen C. G. S.-Systems

J die Stärke des Stromes und

m die Stärke des Magnetpoles,

sind ferner

x, y, z die Koordinaten eines auf $\mathfrak{l}$ beweglichen Punktes P,

α, β, γ die Richtungskosinus der mit der Richtung des Stromes übereinstimmenden Richtung der Tangente von $\mathfrak{l}$ in P,

ξ, η, ζ die Koordinaten des Punktes M, in dem sich der Magnetpol befindet, und ist endlich zur Abkürzung

$$\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2} = r$$

gesetzt, so werden die in Dynen ausgedrückten Werte $\mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_z$ der erwähnten Kraftkomponenten, wie zuerst die von J. B. Biot und F. Savart im Jahre 1820 angestellten Versuche[1]) erwiesen haben, durch die Gleichungen

1) Näheres hierüber nebst Literaturangaben findet sich in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. V, D, 12, Nr. 2 = Zweiter Teil des fünften Bandes, S. 8.

$$\mathfrak{H}_x = Jm \int^{(\mathfrak{l})} \frac{(\zeta - z)\beta - (\eta - y)\gamma}{r^3} ds$$

(1326)
$$\mathfrak{H}_y = Jm \int^{(\mathfrak{l})} \frac{(\xi - x)\gamma - (\zeta - z)\alpha}{r^3} ds$$

$$\mathfrak{H}_z = Jm \int^{(\mathfrak{l})} \frac{(\eta - y)\alpha - (\xi - x)\beta}{r^3} ds$$

gegeben, die man auch in der etwas kürzeren Form

$$\mathfrak{H}_x = Jm \int^{(\mathfrak{l})} \frac{(\zeta - z)dy - (\eta - y)dz}{r^3}$$

(1326a)
$$\mathfrak{H}_y = Jm \int^{(\mathfrak{l})} \frac{(\xi - x)dz - (\zeta - z)dx}{r^3}$$

$$\mathfrak{H}_z = Jm \int^{(\mathfrak{l})} \frac{(\eta - y)dx - (\xi - x)dy}{r^3}$$

schreiben kann, wenn man hinzufügt, daß die rechtsstehenden Integrale in der Richtung des Stromes über $\mathfrak{l}$ zu erstrecken sind.

Man kommt auf diese Gleichungen, wenn man annimmt, daß jedes einzelne Bogenelement des Stromleiters auf den Magnetpol eine Kraft mit den Komponenten

$$Jm \frac{(\zeta - z)\beta - (\eta - y)\gamma}{r^3} ds; \qquad Jm \frac{(\xi - x)\gamma - (\zeta - z)\alpha}{r^3} ds;$$
$$Jm \frac{(\eta - y)\alpha - (\xi - x)\beta}{r^3} ds$$

ausübt, wo ds die Länge des Elementes und x, y, z die Koordinaten eines ihm angehörenden Punktes P bedeuten. Diese Kraft hat die Größe

$$\frac{Jm}{r^2}\sqrt{\left(\frac{\zeta - z}{r}\beta - \frac{\eta - y}{r}\gamma\right)^2 + \left(\frac{\xi - x}{r}\gamma - \frac{\zeta - z}{r}\alpha\right)^2 + \left(\frac{\eta - y}{r}\alpha - \frac{\xi - x}{r}\beta\right)^2}\, ds$$

und kann, wie leicht einzusehen, auch durch den kürzeren Ausdruck

$$\frac{Jm}{r^2} \sin v \, ds$$

dargestellt werden, wenn man unter v den Winkel zwischen den Richtungen mit den Richtungskosinus

$$\alpha, \beta, \gamma \qquad \text{und} \qquad \frac{\xi - x}{r}, \frac{\eta - y}{r}, \frac{\zeta - z}{r},$$

d. h. zwischen der mit der Stromrichtung übereinstimmenden

Richtung der Tangente von l in P und der Richtung PM versteht (vgl. Nr. **119**). Ferner steht die fragliche Kraft, wie man leicht einsieht, auf jeder der beiden eben erwähnten Richtungen senkrecht und folgt auf dieselben, vorausgesetzt daß man den positiven Drehungssinn im Raume gemäß einer Rechtsschraube festgelegt hat, im positiven Sinne.

Aber neben der eben beschriebenen Annahme über die Wirkung eines einzelnen Stromelementes wären noch manche andere, wenn auch verwickeltere Annahmen möglich. Aus der Erfahrung kann man eine Entscheidung über diese verschiedenen Möglichkeiten nicht ableiten, da man niemals die Wirkung eines einzelnen Stromelementes, sondern immer nur die eines geschlossenen Stromes beobachten kann, also auch nur die Gültigkeit der Gleichungen (1326) aber nicht die des angegebenen Elementargesetzes zu bestätigen vermag.

3. — Anziehung eines mit Masse belegten Linienstückes. — Nach C. F. Gauss[1]) sind die sogenannten Säkularveränderungen einer Planetenbahn durch die Störung eines anderen Planeten unter gewissen Voraussetzungen dieselben, wie wenn statt des störenden und in seiner durch eine Ellipse abgebildeten Bahn nach Keplers Gesetzen wirklich umlaufenden Planeten ein materieller elliptischer Ring vorhanden wäre, den man erhält, wenn man die Masse des störenden Planeten derart über seine Bahn verteilt, daß auf je zwei in gleich langen Zeiten beschriebene Bogen gleiche Anteile der Masse entfallen.

Man wird also in der Astronomie auf die Aufgabe geführt, die Größe und die Richtung derjenigen Anziehung zu ermitteln, welche eine gegebene und in gegebener Weise mit Masse belegte Ellipse auf einen gegebenen materiellen Punkt ausübt. Dies ist ein besonderer Fall der folgenden allgemeinen Aufgabe: Ein gegebenes gewöhnliches einfaches Linienstück $\mathfrak{l}$ (oder auch eine gewöhnliche einfache geschlossene Linie) ist derart mit Masse belegt, daß dieser Belegung überall eine Dichte zukommt. D. h. der Quotient, den man erhält, wenn man die Masse des von einem beliebigen festen Punkte P des Linienstückes bis zu einem beweg-

1) Vgl. C. F. Gauss, Determinatio attractionis usw. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores, Vol. IV, Göttingen 1818 = Werke, Bd. III, Göttingen 1876, S. 333, oder die Anzeige dieser Abhandlung, Göttingische gelehrte Anzeigen, 1818, S. 233 = Werke, Bd. III, S. 357.

lichen Punkte Q desselben erstreckten Bogens durch die Länge dieses Bogens dividiert, soll bei unbegrenzter Annäherung des Punktes Q an den Punkt P stets einem Grenzwert zustreben, der dann eben als die Dichte der Belegung in P bezeichnet wird. Diese Dichte sei ferner eine als bekannt anzusehende stetige Funktion $f(x, y, z)$ der Koordinaten x, y, z des Punktes P in bezug auf ein rechtwinkeliges räumliches Koordinatensystem, dessen Achsenkreuz mit $\mathfrak{l}$ fest verbunden ist. Man soll unter Zugrundelegung des nämlichen Koordinatensystems die Komponenten k_x, k_y, k_z der Anziehnung berechnen, welche die über $\mathfrak{l}$ verteilte Masse nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz auf einen materiellen Punkt mit der gegebenen Masse m und den gegebenen Koordinaten ξ, η, ζ ausübt.

Als Lösung dieser Aufgabe ergeben sich, von konstanten Faktoren abgesehen, drei über $\mathfrak{l}$ zu erstreckende Linienintegrale. Versteht man nämlich unter G die Gravitationskonstante (vgl. Nr. **141**) und setzt man zur Abkürzung

$$\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}=r,$$

so wird

$$k_x = Gm\int^{(\mathfrak{l})}\frac{(x-\xi)\,f(x,y,z)}{r^3}\,ds; \qquad k_y = Gm\int^{(\mathfrak{l})}\frac{(y-\eta)\,f(x,y,z)}{r^3}\,ds;$$

$$k_z = Gm\int^{(\mathfrak{l})}\frac{(z-\zeta)\,f(x,y,z)}{r^3}\,ds.$$

Denn denkt man sich die Masse irgend eines Stückes von $\mathfrak{l}$, welches die Länge ds hat, in einem beliebigen Punkte (x, y, z) dieses Stückes vereinigt, so hat die von diesem Punkte ausgehende Kraft die Größe $Gm\frac{f(x,y,z)}{r^2}ds$ und den ersten Richtungskosinus $\frac{x-\xi}{r}$, folglich die x-Komponente $Gm\frac{(x-\xi)f(x,y,z)}{r^3}ds$. Nun versteht man aber unter der x-Komponente, die ein in der angegebenen Weise mit Masse belegtes Linienstück $\mathfrak{l}$ nach Newtons Gesetz auf einen materiellen Punkt ausübt, den Grenzwert, den man erhält, wenn man $\mathfrak{l}$ in Teile zerlegt, die Masse jedes einzelnen Teiles in einem seiner Punkte vereinigt, sodann die x-Komponenten der von diesen Punkten ausgehenden Anziehungen in der eben beschriebenen Weise berechnet und nach Addition derselben zur Grenze für den Fall einer unbegrenzten Verfeinerung der Teilung von $\mathfrak{l}$ übergeht. Das Endergebnis aller dieser Operationen ist, wie man leicht erkennt, der oben für k_x angegebene Ausdruck, und entsprechendes gilt für die Komponenten k_y, k_z. Die zahlenmäßige Ausrechnung der bei dieser Lösung vorkommenden Linienintegrale ist natürlich in jedem Einzelfalle noch eine Aufgabe für sich.

472. Effektivstärke eines Wechselstromes. — Wenn ein konstanter Strom durch einen linearen Leiter fließt, d. h. einen Leiter, der mit ausreichender Genauigkeit durch ein gewöhnliches Linienstück abgebildet werden kann, so wird das mechanische Äquivalent der dort während T Sekunden entwickelten Wärmemenge in Erg (= Zentimeter-Dyne) nach dem Gesetz von Joule stets durch den Ausdruck

$$RJ^2T$$

gegeben, wo R den Widerstand des Leiters und J die Stromstärke bedeutet, vorausgesetzt daß beide im elektromagnetischen oder beide im elektrostatischen C. G. S.-System gemessen werden. Daraus folgt für einen durch den nämlichen Leiter fließenden periodisch verlaufenden Wechselstrom, dessen augenblickliche Stärke zu der in Sekunden ausgedrückten Zeit t eine stetige Funktion $i(t)$ von t ist, daß das mechanische Äquivalent der von ihm während einer Periode in dem Leiter erzeugten Wärmemenge, wenn jetzt T die Länge einer Periode in Sekunden bedeutet, durch den Ausdruck

$$R\int_0^T [i(t)]^2\,dt$$

dargestellt wird. Als **Effektivstärke** oder schlechthin **Stärke** dieses Wechselstromes bezeichnet man nun diejenige Stärke, die ein konstanter durch den nämlichen Leiter fließender Gleichstrom haben muß, wenn er dort während der Dauer einer Periode dieselbe Wärmemenge erzeugen soll wie der Wechselstrom. Nach dem vorangehenden ist, wenn jetzt J diese Effektivstärke bedeutet,

$$J^2T = \int_0^T [i(t)]^2\,dt$$

oder

$$J = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [i(t)]^2\,dt}.$$

Nimmt man insbesondere an, daß der Wechselstrom einen sinusartigen Verlauf habe, und versteht man unter I seine Maximalstärke, so ist, wenn man den Anfangspunkt der Zeitrechnung passend wählt,

$$i(t) = I \sin\frac{2\pi t}{T}.$$

Man wird daher in diesem Falle auf das Integral

$$\int_0^T \left[\sin\frac{2\pi t}{T}\right]^2 dt = \frac{T}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin z^2\, dz$$

geführt und erhält, da nach Nr. **443**, Gleichung (1216) oder (1216[a]),

$$\int_0^{2\pi} \sin z^2\, dz = \pi$$

ist, bei der gemachten Annahme

$$J = \sqrt{\frac{I^2}{T}\frac{T}{2\pi}\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} I.$$

473. Mercatorkarte. — Der Herstellung solcher geographischen Karten, welche größere nicht mehr als eben anzusehende Gebiete darstellen, liegt gewöhnlich die Voraussetzung zugrunde, daß die nicht ganz regelmäßige mathematische Oberfläche der Erde zunächst auf die regelmäßige Oberfläche einer Kugel abgebildet sei, auf der man die Endpunkte eines Durchmessers als die Bilder von Nord- und Südpol und einen sie verbindenden Halbkreis als den Anfangsmeridian für die Zählung geographischer Längen angenommen hat. Dabei denkt man sich einem beliebigen Punkte P der Erdoberfläche jedesmal denjenigen Punkt der Kugel zugewiesen, dessen geographische Länge auf der Kugel dem Unterschied der Ortszeiten in P und einem ein für allemal festgesetzten Beobachtungsort, etwa Greenwich, entspricht und dessen geographische Breite auf der Kugel mit der in P beobachteten Polhöhe übereinstimmt. Man erhält dann, wie die Erfahrung lehrt, ein zwar nicht genau, aber doch so weit ähnliches Bild, daß die Abweichungen von der Ähnlichkeit in vielen Fällen, namentlich bei Aufgaben der Schiffahrtskunde, vernachlässigt werden dürfen. Noch größere Annäherung an die Ähnlichkeit kann man erreichen, wenn man die Oberfläche der Erde in entsprechender Weise auf ein abgeplattetes Umdrehungsellipsoid abbildet, für dessen Abplattung[1]) man einen passenden Wert angenommen hat, etwa den 1841 von F. W. Bessel berechneten Wert

1) Ist a die große und b die kleine Halbachse der Meridianellipse, so versteht man unter der Abplattung den Quotienten $\frac{a-b}{a}$.

$$\frac{1}{299{,}1528} = 0{,}003342773\,.$$

Natürlich hat man dann unter der geographischen Breite eines auf dem Ellipsoid liegenden Punktes Q (Fig. 37) den auf der nördlichen Hälfte als positiv und auf der südlichen als negativ anzusehenden Winkel φ zu verstehen, den die in Q auf dem Ellipsoid senkrecht stehende nach außen gerichtete Gerade mit der Ebene des Äquators bildet, und nicht etwa den Winkel, unter welchem die den Mittelpunkt des Ellipsoides mit Q verbindende Gerade gegen die Äquatorebene geneigt ist.

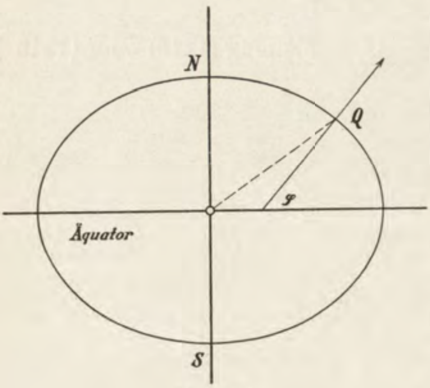


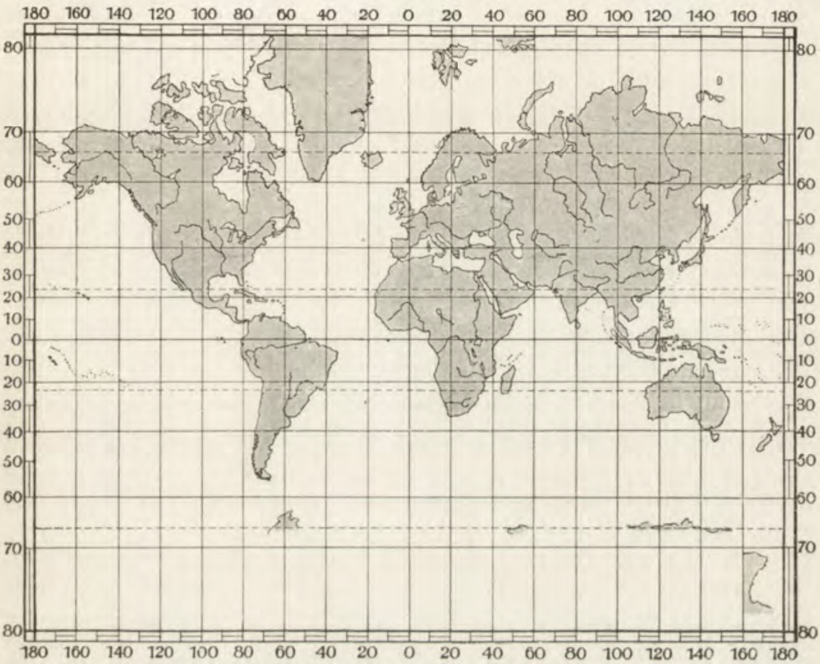
Fig. 37.

Nach der wenn auch nur in Gedanken vollzogenen Herstellung eines kugelförmigen oder ellipsoidischen Abbildes der Erde (Globus) handelt es sich zweitens darum, die ganze Oberfläche des Globus oder einen Teil derselben durch eine ebene Karte (Fig. 38) darzustellen. Dabei ist es in vielen Fällen, namentlich bei Seekarten, zweckmäßig, diese Darstellung so einzurichten, daß

1. — der Äquator des Globus längentreu durch eine gerade Strecke AB,
2. — jeder Meridian durch eine zu AB senkrechte Gerade,
3. — jeder Parallelkreis durch eine der Strecke AB gleiche und parallele Strecke

dargestellt wird, wobei natürlich die Bilder der nördlichen Parallelkreise alle auf die eine und die der südlichen unter Wahrung der Symmetrie auf die andere Seite von AB zu legen und höheren Breiten auch größere Abstände von AB zuzuweisen sind.

Aber auch wenn man sich diesen Anforderungen unterwirft, behält man immer noch eine gewisse Freiheit. Man kann nämlich eine stetige Funktion $f(\varphi)$ eines zwischen $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ und $\frac{\pi}{2}$ frei veränderlichen Argumentes φ ganz nach Belieben annehmen, nur so, daß $f(-\varphi) = -f(\varphi)$, also $f(0) = 0$ ist und daß $f(\varphi)$ bei wachsendem Argument beständig zunimmt, und dann festsetzen, daß die zu AB parallele Strecke, welche in der Karte den zur Breite φ gehörenden Parallelkreis darstellt, von AB jedesmal den Abstand $f(\varphi)$ haben soll, mit der Maßgabe, daß den positiven Abständen



Weltkarte in Mercators Projektion.
Fig. 38.

die Strecken auf der einen und den negativen Abständen die Strecken auf der anderen Seite von AB zuzuweisen sind.

Diese Freiheit kann man benutzen, um die Karte so einzurichten, daß sie sich für die Zwecke der Schiffahrt möglichst gut eignet. Nun wird aber ein Schiff auf hoher See, wo Landmarken nicht sichtbar sind, mit Hilfe des Kompasses in der Regel möglichst so gesteuert, daß seine Bahn die Südnordrichtung beständig unter dem gleichen Winkel schneidet. Der Weg, den das Schiff dabei beschreibt, ist zwar im allgemeinen nicht die allerkürzeste auf der Erdoberfläche mögliche Verbindungs-

13*

linie zwischen seinen Endpunkten, doch fällt der Unterschied selbst unter der Breite der Polarkreise bei Entfernungen bis zu 500 Seemeilen und unter niedrigeren Breiten auch bei erheblich größeren Entfernungen praktisch nicht ins Gewicht. Eben deswegen besteht eine der wichtigsten Aufgaben der Schiffahrtskunde darin, den (in der Richtung von Norden nach Osten positiv zu rechnenden) Winkel zu ermitteln, unter welchem die Bahn eines in der angegebenen Weise gesteuerten Schiffes die Südnordrichtung schneiden muß, damit das Schiff von einem gegebenen Orte P ausgehend einen anderen gegebenen Ort Q erreicht. Es kommt darauf an, daß gerade diese Aufgabe mit Hilfe der Seekarte leicht gelöst werden kann. Das ist der Fall, sobald die Karte ein winkeltreues Abbild des Globus liefert. Dann hat man nämlich nur nötig, auf der Karte die Bilder P', Q' der Punkte P und Q aufzusuchen und von P' nach Q' eine gerade Linie zu ziehen. Der Winkel v zwischen der Nordrichtung der Meridiane der Karte und dieser Geraden ist mit einer weit über die Bedürfnisse der Praxis hinausgehenden Genauigkeit zugleich auch derjenige, den das Schiff gegen die Nordrichtung einhalten muß[1]).

1) Die Nordrichtung in einem Punkte P der mathematischen Erdoberfläche ist erklärt als die nach Norden weisende Richtung der Schnittlinie des Horizonts mit der Verbindungsebene der beiden von P nach dem Zenit und nach dem Himmelspol gehenden Geraden. Der Meridian von P ist erklärt als der geometrische Ort aller Punkte der mathematischen Erdoberfläche, die gegen ein und denselben festen Beobachtungsort (z. B. Greenwich) den gleichen Zeitunterschied wie P haben. Infolge der sogenannten Lotablenkungen braucht die Nordrichtung in P nicht genau mit der nördlichen Richtung der Tangente übereinzustimmen, welche den Meridian von P in P berührt. Aber eine etwaige Verschiedenheit beider Richtungen ist stets so gering, daß sie nur mit den allerschärfsten Beobachtungsmitteln nachgewiesen werden kann. Daher ist eine Schiffsbahn, deren Winkel mit der Nordrichtung überall denselben Wert hat, auch überall gegen die nördlichen Richtungen der Meridiane nahezu unter eben diesem Winkel geneigt. Da ferner der Globus erfahrungsgemäß ein nahezu ähnliches Bild der mathematischen Erdoberfläche darstellt, so schneidet auch das Bild der Schiffsbahn auf dem Globus oder der winkeltreuen Karte deren Meridiane nahezu unter dem nämlichen Winkel. Das Kartenbild einer von dem gegebenen Punkte P ausgehenden Schiffsbahn, die mit der Nordrichtung überall den gegebenen konstanten Winkel v bildet, ist daher eine von dem Bildpunkt P' ausgehende Linie, welche die Meridiane der Karte überall nahezu unter dem Winkel v schneidet, und da diese Linie, falls sie nicht genau durch Q' geht, doch sehr nahe daran vorbeiführt, so führt auch die wirkliche Schiffsbahn entweder genau oder doch hinreichend genau nach Q.

Eben deswegen ist es praktisch von Wichtigkeit, zu entscheiden, ob und wie man durch passende Wahl der oben mit $f(\varphi)$ bezeichneten Funktion Winkeltreue der Abbildung erreichen kann. Dabei genügt es zu fordern, daß diejenigen einander entsprechenden Winkel auf dem Globus und auf der Karte übereinstimmen sollen, bei denen ein Schenkel mit der Nordrichtung des Meridians zusammenfällt. Denn bilden in der Karte irgend zwei von ein und demselben Punkte ausgehende Halbstrahlen mit der Nordrichtung des Meridians ebenso große und ebenso gelegene Winkel wie die ihnen entsprechenden Tangenten des Globus mit der nach Norden weisenden Tangente des Meridians, so bilden sie auch miteinander den gleichen Winkel wie die letzteren.

Nun werde, um mit dem einfacheren Fall zu beginnen, zunächst vorausgesetzt, daß der abzubildende Globus eine Kugel sei, deren Radius r heißen möge. Denkt man sich dann auf dem Globus ein durch keinen Pol gehendes gewöhnliches einfaches orientiertes Linienstück $\mathfrak{l}$ gegeben, so kann man den Winkel, den dieses Linienstück in einem gegebenen Punkte mit der Nordrichtung bildet, folgendermaßen berechnen: Man verstehe unter P einen beweglichen Punkt von $\mathfrak{l}$, unter s seine auf $\mathfrak{l}$ gemessene Abszisse in bezug auf einen festen Anfangspunkt und unter λ und φ seine geographische Länge und Breite, wobei die erstere so bestimmt sein möge, daß sie sich mit s stetig ändert und in der Richtung nach Osten wächst. Ferner nehme man ein rechtwinkeliges räumliches Koordinatensystem $OXYZ$ derart an, das sein Anfang O mit dem Mittelpunkt des Globus und die Richtung OZ mit der Richtung von O gegen den Nordpol zusammenfällt, daß die Halbachse OX in der Halbebene des Anfangsmeridians liegt und daß die Drehungsrichtung von OX gegen OY mit der Richtung der wachsenden Längen übereinstimmt. Dann werden die rechtwinkeligen Koordinaten x, y, z des Punktes P durch die Gleichungen

$$x = r\cos\varphi\cos\lambda; \qquad y = r\cos\varphi\sin\lambda; \qquad z = r\sin\varphi$$

gegeben, und da x, y, z, also auch λ und φ differenzierbare Funktionen von s sind, so ergeben sich hieraus für die Richtungskosinus $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ der positiven Tangentenrichtung von $\mathfrak{l}$ in P die Gleichungen

$$(1327)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= -r\cos\varphi\sin\lambda\frac{d\lambda}{ds} - r\sin\varphi\cos\lambda\frac{d\varphi}{ds} \\ \frac{dy}{ds} &= r\cos\varphi\cos\lambda\frac{d\lambda}{ds} - r\sin\varphi\sin\lambda\frac{d\varphi}{ds} \\ \frac{dz}{ds} &= \phantom{-r\cos\varphi\cos\lambda\frac{d\lambda}{ds}-{}} r\cos\varphi\frac{d\varphi}{ds}, \end{aligned}$$

aus denen durch Addition der Quadrate beider Seiten

$$(1328)\qquad 1 = r^2\cos\varphi^2\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2$$

folgt.

Zweitens erhält man für die Richtungskosinus α, β, γ der Nordrichtung in P, indem man in den Gleichungen (1327) $\frac{d\lambda}{ds} = 0$ und zugleich gemäß der Gleichung (1328) $r\frac{d\varphi}{ds} = 1$ setzt,

$$\alpha = -\sin\varphi\cos\lambda; \qquad \beta = -\sin\varphi\sin\lambda; \qquad \gamma = \cos\varphi.$$

Nunmehr ergibt sich zur Bestimmung des Winkels v, den die positive Richtung der Tangente von $\mathfrak{l}$ in P mit der Nordrichtung bildet, mittels der Formel

$$\cos v = \frac{dx}{ds}\alpha + \frac{dy}{ds}\beta + \frac{dz}{ds}\gamma$$

nach leichten Zwischenrechnungen die Gleichung

$$(1329)\qquad \cos v = r\frac{d\varphi}{ds}\,{}^{1)}.$$

---

1) Nimmt man auf $\mathfrak{l}$ (Fig. 39) in der Nähe von P einen anderen Punkt Q an, der auf P im positiven Sinne folgt, und bringt man den durch P gehenden Meridian mit dem durch Q gehenden Parallelkreis in R zum Durchschnitt, so entsteht ein kleines krummliniges Dreieck, welches an der Ecke P den Winkel v oder dessen Nebenwinkel enthält. Versteht man nun unter ds die Länge des Bogens PQ und unter $(\lambda + d\lambda)$ und $(\varphi + d\varphi)$ die geographische Länge und Breite des Punktes Q, so stellt das Produkt $r d\varphi$ die Länge des Meridianbogens PR dar, versehen mit den Vorzeichen $+$ oder $-$, je nachdem der Winkel v spitz oder stumpf ist. Die Gleichung (1329) sagt daher aus, daß man für den Winkel v auch dann den richtigen

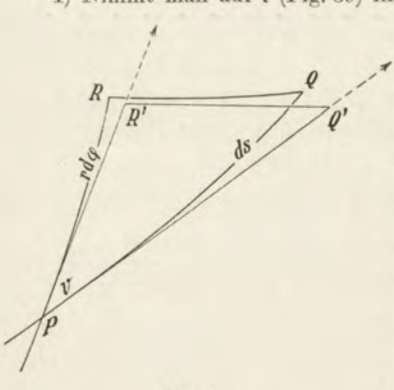


Fig. 39.

Ist $\frac{d\varphi}{ds} \neq 0$, so folgt hieraus

$$\operatorname{tg} v = \frac{\pm\sqrt{1 - r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}}{r\frac{d\varphi}{ds}}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (1328)

$$\text{(1330)} \qquad \operatorname{tg} v = \frac{\cos\varphi \frac{d\lambda}{ds}}{\frac{d\varphi}{ds}}.$$

Andererseits wird das Kartenbild $\mathfrak{l}'$ des Linienstückes $\mathfrak{l}$, nachdem man in der Ebene der Karte ein System rechtwinkeliger Koordinaten ξ, η angenommen hat, dessen Abszissenachse mit dem Äquator zusammenfällt und mit der Richtung der wachsenden Längen gleichgerichtet ist und dessen Ordinatenachse durch die Punkte von der Länge 0 geht und nach Norden weist, durch die Gleichungen

$$\xi = r\lambda; \qquad \eta = f(\varphi)$$

Wert erhält, wenn man das krummlinige Dreieck PQR wie ein geradliniges Dreieck behandelt und dann zur Grenze für den Fall übergeht, daß Q unendlich nahe an P heranrückt. Eben dieses Verfahren läßt sich auch geometrisch rechtfertigen, und zwar, falls der Winkel v von Null verschieden ist, in folgender Weise: Man denke sich die Bogen PQ und PR auf den in P an sie gelegten Tangenten abgewickelt und die Endpunkte Q', R' der so erhaltenen Strecken durch eine Gerade verbunden. Dann entsteht ein gewöhnliches Dreieck, welches an der Ecke R' nahezu rechtwinkelig ist. Denn sieht man die Länge ds als eine unendlich kleine Zahl erster Ordnung an, so sind auch die gerade Strecke RQ und der Winkel zwischen dieser Strecke und der in R auf der Meridianebene von R senkrecht stehenden Geraden unendlich klein erster Ordnung. Dagegen ist die Strecke RR' unendlich klein zweiter Ordnung und dasselbe gilt auch von der Strecke QQ', falls λ und φ, wie hier vorausgesetzt werden möge, wenigstens zweimal differenzierbare Funktionen von s mit stetigen zweiten Ableitungen sind. (Anderenfalls müßte der Wortlaut des nachfolgenden etwas geändert werden.) Nun kann aber die Richtung einer unendlich kleinen Strecke erster Ordnung durch eine Verschiebung ihrer Endpunkte um unendlich kleine Strecken zweiter Ordnung nur um einen unendlich kleinen Winkel erster oder höherer Ordnung geändert werden. Also weicht der Winkel $PR'Q'$ von einem Rechten höchstens um einen unendlich kleinen Winkel erster Ordnung ab, und es ist daher die Projektion $ds\cos v$ der Strecke PQ' auf den Strahl PR' von der Zahl $\overline{PR'} = rd\varphi$ höchstens um eine unendlich kleine Zahl zweiter Ordnung verschieden, deren Einfluß bei dem schließlich vorzunehmenden Grenzübergang verschwindet.

dargestellt, in denen man λ und φ als Funktionen von s zu betrachten hat. Ist nun die Funktion $f(\varphi)$ durchweg differenzierbar, so hat $\mathfrak{l}'$ im Bildpunkt P' des Punktes P eine Tangente, und die Tangente des (von Norden nach Osten positiv zu rechnenden) Winkels, den diese mit der Nordrichtung bildet, ist gleich

$$\frac{\frac{d\xi}{ds}}{\frac{d\eta}{ds}} = \frac{r\frac{d\lambda}{ds}}{f'(\varphi)\frac{d\varphi}{ds}}.$$

Umgekehrt ist dafür, daß $\mathfrak{l}'$ in jedem Punkte eine Tangente habe, durchgängige Differenzierbarkeit von $f(\varphi)$ erforderlich, und wenn die Abbildung winkeltreu sein soll, so muß immer die Gleichung

$$\frac{\cos\varphi\frac{d\lambda}{ds}}{\frac{d\varphi}{ds}} = \frac{r\frac{d\lambda}{ds}}{f'(\varphi)\frac{d\varphi}{ds}}$$

bestehen, einerlei welche Werte die Ableitungen $\frac{d\lambda}{ds}$, $\frac{d\varphi}{ds}$ haben mögen. Dies erfordert, daß

$$f'(\varphi) = \frac{r}{\cos\varphi}$$

sei, und wegen der Anfangsbedingung $f(0) = 0$ folgt hieraus

(1331) $$\eta = f(\varphi) = r\int_0^{\varphi}\frac{d\chi}{\cos\chi}$$

und mit Hilfe der schon in Nr. **443** gewonnenen Gleichung (1219)

(1332) $$\boldsymbol{\eta = f(\varphi) = r \lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Da

$$r\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = r\lg\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = -r\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

ist, so erfüllt diese Funktion alle gestellten Anforderungen. Die für die praktische Brauchbarkeit der Karte so wichtige Eigenschaft der Winkeltreue läßt sich also in der Tat verwirklichen, wenn man in der Karte den Abstand eines Parallelkreises vom Äquator gemäß der Gleichung (1332) von der geographischen Breite φ abhängen läßt. Freilich muß man dann darauf verzichten, die Pole und deren nächste Umgebung mit zur Darstellung zu bringen, da der absolute Wert des Ausdruckes $r\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$ über alle Grenzen wächst, wenn φ zunehmend dem Wert $\frac{\pi}{2}$ oder abnehmend dem Wert $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ unbegrenzt nahe rückt.

Jede nach dem eben gefundenen Gesetz entworfene Karte eines Teiles der Erdoberfläche heißt eine Karte in **Mercators Projektion** oder auch eine **Mercatorkarte**, nach dem seit 1552 in Duisburg lebenden Geographen Gerhard Kremer gen. Mercator (1512—1594), der zuerst eine Karte dieser Art, und zwar eine Weltkarte (Fig. 38) zum Gebrauche der Seefahrer veröffentlicht hat. Der Stich derselben wurde im August 1569 vollendet. Der Name Mercators Projektion für das von Mercator herrührende Verfahren zur Kartenzeichnung ist allerdings insofern irreführend, als gerade bei der Mercatorkarte die Beziehung zwischen Original und Bild nicht durch eine Projektion im gewöhnlichen Sinne des Wortes, ja überhaupt nicht durch eine geometrische Konstruktion vermittelt wird, die sich mittels einer endlichen Anzahl von Anwendungen des Lineals und des Zirkels erledigen ließe. Die Mercatorkarte kann insbesondere nicht etwa dadurch erhalten werden, daß man die Oberfläche des Globus vom Mittelpunkte aus auf den längs des Äquators berührenden Zylinder projiziert und dann diesen längs einer Erzeugenden aufschneidet und in eine Ebene abwickelt.

Zur Zeit Mercators war der Begriff eines Integrales und der des natürlichen Logarithmus noch unbekannt, so daß das für die Mercatorkarte geltende Gesetz der Abbildung noch nicht durch die Gleichung (1332) ausgedrückt werden konnte. Daher ist die Frage wohl berechtigt, wie denn eigentlich Mercator selbst beim Entwerfen seiner Weltkarte zu Werke gegangen ist. In allen Einzelheiten ist dies nicht bekannt, da eine von Mercator hinterlassene Schrift über geographische Kunst, die hierüber Näheres enthalten haben dürfte, leider nicht auf uns gekommen ist. Aber glücklicherweise befinden sich auf dem in Paris aufbewahrten einzigen bekannten noch vorhandenen Original der 1569 herausgegebenen Weltkarte in eingerahmten Feldern Legenden[1]), die wenigstens in großen Zügen über Mercators Verfahren Auskunft geben. Aus diesen ist zu ersehen, daß Mercator bewußtermaßen den Zweck verfolgt hat, eine den Bedürfnissen der Schiffahrt angepaßte Karte zu schaffen. Nun nimmt auf dem Globus die Länge eines Parallelkreises mit zunehmender Entfernung vom Äquator fortgesetzt ab. Dagegen werden in der

1) Den lateinischen Text dieser Legenden nebst deutscher Übersetzung gibt A. Breusing, Gerhard Kremer gen. Mercator, der deutsche Geograph, 2. Ausgabe, Duisburg 1878, Seite 56—57 und Nachtrag, Seite 4—8.

Karte bei der oben unter 3. angegebenen Festsetzung alle Parallelkreise durch Strecken von der gleichen Länge wie der Äquator dargestellt. Jeder vom Äquator verschiedene Parallelkreis und jeder längs eines solchen gemessene Abstand zweier Punkte gleicher geographischer Breite erscheint daher in der Karte vergrößert, und zwar um so mehr, je höher die betreffende geographische Breite ist. Mercator erkannte, daß man, um Winkeltreue oder, was dasselbe ist, Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen zu erreichen, in der Karte die Dimension von Süden nach Norden überall in dem gleichen Verhältnis dehnen müsse, in welchem die Dimension von Westen nach Osten von selbst gedehnt erscheint. Diesem Grundgedanken hat er in den eben erwähnten Legenden, nachdem er die Mangelhaftigkeit der älteren Karten besprochen hatte, mit folgenden Worten Ausdruck gegeben: „In Erwägung dieser Umstände habe ich die Breitengrade nach beiden Polen zu allmählich ebenso vergrößert, wie die Breitenparallele über ihr Verhältnis zum Äquator hinaus vergrößert erscheinen."

Da der zur geographischen Breite φ gehörende Parallelkreis des Globus die Länge $2\pi r \cos\varphi$ hat, erscheint er in der Karte, wenn er dort ebenso wie der Äquator durch eine Strecke von der Länge $2\pi r$ dargestellt wird, $\frac{1}{\cos\varphi}$ mal vergrößert. Man kann daher das von Mercator angedeutete Ziel, wofern man sich zunächst auf die Herstellung des Gradnetzes beschränkt, näherungsweise erreichen, wenn man in die zu entwerfende Karte als Darstellung des Äquators eine Strecke AB von der Länge $2\pi r$ und senkrecht zu ihr die zu $0^0, 1^0, 2^0, \cdots$ östlicher und westlicher Länge gehörenden Meridiane einzeichnet und sodann von AB nach beiden Seiten fortschreitend Parallelstrecken zu AB als Bilder der den einzelnen vollen Breitengraden entsprechenden Parallelkreise derart einträgt, daß der Abstand der zu k^0 und $(k+1)^0$ nördlicher oder südlicher Breite gehörenden Strecken jedesmal durch das Produkt $\frac{\pi r}{180} \frac{1}{\cos k^0}$ gemessen wird, also $\frac{1}{\cos k^0}$ mal so groß ist als die Länge $\frac{\pi r}{180}$ eines Längengrades auf dem Äquator. Noch größere Genauigkeit läßt sich erzielen, wenn man die Meridiane und Parallelkreise, deren Bilder man in die Karte einzeichnet, unter Vermehrung ihrer Anzahl in noch kleineren Abständen aufeinander folgen läßt und dann entsprechend verfährt. Wie leicht einzusehen, ist der oben für die Ordinate η gefundene genaue Ausdruck $r\int_0^{\varphi}\frac{d\chi}{\cos\chi}$ bei positivem Werte von φ nichts weiter als die obere Grenze aller Werte, welche der Abstand der zur Breite φ gehörenden Parallelstrecke vom Äquator der Karte bei dem Näherungsverfahren erreichen kann, wie eng man auch die dargestellten Meridiane und Parallelkreise aneinander rückt.

Auch die Abplattung der Erde läßt sich bei der Herstellung einer Mercatorkarte berücksichtigen. Um dies näher nachzuweisen, werde jetzt zweitens vorausgesetzt, daß die mathematische Oberfläche der Erde zunächst in der oben beschriebenen Weise auf einen abgeplatteten ellipsoidischen Globus abgebildet sei, dessen Meridianellipse die große Halbachse a und die kleine Halbachse b hat. Zugleich werde ein rechtwinkeliges Koordinatensystem $OXYZ$ genau so wie früher (S. 197) angenommen. Dann läßt sich der in der zx-Ebene liegende Anfangsmeridian durch die Gleichungen

$$x = a\cos t; \qquad z = b\sin t \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

darstellen. Ferner gelten, da die geographische Breite φ des zum Parameterwert t gehörenden Punktes mit dem ersten Richtungswinkel des dort auf der Meridianellipse errichteten nach außen weisenden Lotes in dem ebenen Koordinatensystem OXZ übereinstimmt, die Gleichungen (vgl. Nr. 358, 6)

$$(1333) \qquad \cos\varphi = \frac{b\cos t}{\sqrt{a^2\sin t^2 + b^2\cos t^2}}; \qquad \sin\varphi = \frac{a\sin t}{\sqrt{a^2\sin t^2 + b^2\cos t^2}}.$$

Umgekehrt ist, wie eine einfache Zwischenrechnung lehrt,

$$(1334) \qquad \cos t = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2}}; \qquad \sin t = \frac{b\sin\varphi}{\sqrt{a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2}}.$$

Setzt man

$$b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2),$$

wo $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ die numerische Exzentrizität der Meridianellipse bedeutet, so erhalten diese Gleichungen die für das nachfolgende bequemere Form

$$(1335) \qquad \cos t = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin\varphi^2}}; \qquad \sin \; = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}\sin\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin\varphi^2}}.$$

Denkt man sich nun wieder auf dem Globus ein gewöhnliches einfaches durch keinen Pol gehendes orientiertes Linienstück $\mathfrak{l}$ gegeben und versteht man wieder unter

x, y, z die rechtwinkeligen Koordinaten eines auf $\mathfrak{l}$ beweglichen Punktes P, unter

λ, φ die geographische Länge und Breite dieses Punktes und unter

s die auf $\mathfrak{l}$ gemessene Abszisse des Punktes P in bezug auf einen festen Anfangspunkt,

so gelten, wenn die Bezeichnungen $\cos t$ und $\sin t$ zunächst noch als bequeme Abkürzungen für die rechten Seiten der Gleichungen (1335) beibehalten werden, die Gleichungen

$$x = a\cos t\cos\lambda; \qquad y = a\cos t\sin\lambda; \qquad z = b\sin t.$$

Hieraus folgt, wenn man λ und φ und vermöge der Gleichungen (1335) auch t als Funktionen von s ansieht,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= -a\cos t\sin\lambda\frac{d\lambda}{ds} - a\sin t\cos\lambda\frac{dt}{ds}\\ \frac{dy}{ds} &= a\cos t\cos\lambda\frac{d\lambda}{ds} - a\sin t\sin\lambda\frac{dt}{ds}\\ \frac{dz}{ds} &= \phantom{-a\cos t\cos\lambda\frac{d\lambda}{ds} - a\sin t\sin\lambda}\, b\cos t\frac{dt}{ds}\end{aligned} \tag{1336}$$

und nach Addition der Quadrate

$$1 = a^2\cos t^2\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + (a^2\sin t^2 + b^2\cos t^2)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2. \tag{1337}$$

Setzt man in diesen Gleichungen $\frac{d\lambda}{ds} = 0$ und zugleich gemäß der Gleichung (1337)

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2\sin t^2 + b^2\cos t^2}},$$

so erhält man für die Richtungskosinus α, β, γ der Nordrichtung in P mit Rücksicht auf die Gleichungen (1333) die Gleichungen

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2\sin t^2 + b^2\cos t^2}}\cos\lambda = -\sin\varphi\cos\lambda\\ \beta &= -\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2\sin t^2 + b^2\cos t^2}}\sin\lambda = -\sin\varphi\sin\lambda\\ \gamma &= \frac{b\cos t}{\sqrt{a^2\sin t^2 + b^2\cos t^2}} \qquad = \cos\varphi.\end{aligned}$$

Hierauf ergibt sich zur Bestimmung des Winkels v zwischen der Nordrichtung und der positiven Richtung der Tangente von $\mathfrak{l}$ in P mittels der Formel $\cos v = \frac{dx}{ds}\alpha + \frac{dy}{ds}\beta + \frac{dz}{ds}\gamma$ nach naheliegenden Vereinfachungen die Gleichung

$$\cos v = (a \sin t \sin\varphi + b \cos t \cos\varphi)\frac{dt}{ds}. \tag{1338}$$

Nun folgt aber aus den Gleichungen (1335) durch Differentiation

$$\sin t \cdot \frac{dt}{ds} = \left\{\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}} - \frac{\varepsilon^2\sin\varphi\cos\varphi^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}^3}\right\}\frac{d\varphi}{ds}$$

$$= \frac{(1-\varepsilon^2)\sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}^3}\frac{d\varphi}{ds}$$

$$\cos t \cdot \frac{dt}{ds} = \sqrt{1-\varepsilon^2}\left\{\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}} + \frac{\varepsilon^2\sin\varphi^2\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}^3}\right\}\frac{d\varphi}{ds}$$

$$= \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}^3}\frac{d\varphi}{ds}.$$

Setzt man diese Werte sowohl in die Gleichung (1338) als in die Gleichung (1337) ein und ersetzt man zugleich b durch $a\sqrt{1-\varepsilon^2}$, so erhält man nach kurzer Zwischenrechnung aus (1338)

$$\cos v = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}^3}\frac{d\varphi}{ds}$$

und aus (1337)

$$1 = \frac{a^2\cos\varphi^2}{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \frac{a^2(1-\varepsilon^2)^2}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^3}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2,$$

also

$$\sin v = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}\frac{d\lambda}{ds}.$$

Folglich wird

$$\operatorname{tg} v = \frac{\cos\varphi(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)}{1-\varepsilon^2}\frac{\frac{d\lambda}{ds}}{\frac{d\varphi}{ds}}.$$

Andererseits werden die Koordinaten ξ, η des Kartenbildes P' von P in bezug auf ein in der Ebene der Karte angenommenes rechtwinkeliges System, dessen Achsenkreuz in der gleichen Weise wie früher festgelegt ist, durch die Gleichungen

$$\xi = a\lambda; \qquad \eta = f_1(\varphi)$$

gegeben, wo $f_1(\varphi)$ die vorläufig unbekannte Funktion bedeutet, die jetzt bei Berücksichtigung der Abplattung an die Stelle der früher mit $f(\varphi)$ bezeichneten Funktion tritt. Für die Winkeltreue der Abbildung ist daher notwendig und hinreichend, daß $f_1(\varphi)$ durchweg differenzierbar sei und daß immer die Gleichung

$$\frac{\cos\varphi\,(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)}{1-\varepsilon^2}\,\frac{\frac{d\lambda}{ds}}{\frac{d\varphi}{ds}}=\frac{a\frac{d\lambda}{ds}}{f_1'(\varphi)\frac{d\varphi}{ds}}$$

bestehe, das heißt, daß

$$f_1'(\varphi)=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{\cos\varphi\,(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)}$$

sei. Mit Rücksicht auf die Anfangsbedingung $f_1(0)=0$ folgt hieraus

$$f_1(\varphi)=a(1-\varepsilon^2)\int_0^{\varphi}\frac{d\chi}{\cos\chi\,(1-\varepsilon^2\sin\chi^2)}. \tag{1339}$$

Das rechts stehende Integral ist am einfachsten dadurch zu finden, daß man mittels der Gleichung $\sin\chi=u$ eine neue Integrationsveränderliche u einführt. Man erhält dann

$$\begin{aligned}f_1(\varphi)&=a(1-\varepsilon^2)\int_0^{\sin\varphi}\frac{du}{(1-u^2)(1-\varepsilon^2u^2)}\\ &=a\int_0^{\sin\varphi}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{1-u}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+u}-\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{1}{1-\varepsilon u}-\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{1}{1+\varepsilon u}\right]du\\ &=\frac{a}{2}\lg\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}-\frac{a\varepsilon}{2}\lg\frac{1+\varepsilon\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}\\ &=a\left[\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)-\frac{\varepsilon}{2}\lg\frac{1+\varepsilon\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}\right].\end{aligned}$$

Nimmt man für die Abplattung den oben angegebenen von Bessel berechneten Wert $\delta=\frac{1}{299{,}1528}=0{,}003342773$, so wird

$$\varepsilon=\sqrt{\delta(2-\delta)}=0{,}08169683<\frac{1}{12}.$$

Daher darf man nach Nr. **263**, Gleichung (511), mit einer für alle Bedürfnisse der Praxis ausreichenden Genauigkeit

$$f_1(\varphi)=a\left[\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)-\varepsilon^2\sin\varphi-\frac{1}{3}\,\varepsilon^4\sin\varphi^3\right]$$

setzen.

Übungsaufgabe. Man denke sich ein Gebiet der Erdoberfläche, welches sich über einen Längengrad und einen Breitengrad erstrekt in Mercators Projektion durch ein Kartenblatt von 1 m Breite dargestellt, und zwar erstens ohne und zweitens mit Berücksichtigung der Abplattung. Wie groß kann dann der Höhenunterschied beider Karten höchstens werden, wenn man für die Abplattung den Besselschen Wert nimmt?

Antwort: Der Höhenunterschied wird am größten, wenn die Mitte des darzustellenden Gebietes auf dem Äquator liegt, und die Karte mit Berücksichtigung der Abplattung wird dann um 6,6743 mm kürzer als die Karte ohne Berücksichtigung der Abplattung.

Achtzehnter Abschnitt.

Bestimmte Integrale mit komplexen Grenzen.

474. Ausdehnung des Begriffes eines bestimmten Integrales auf Funktionen komplexen Argumentes. — In der Ebene einer komplexen Veränderlichen z sei ein gewöhnliches einfaches

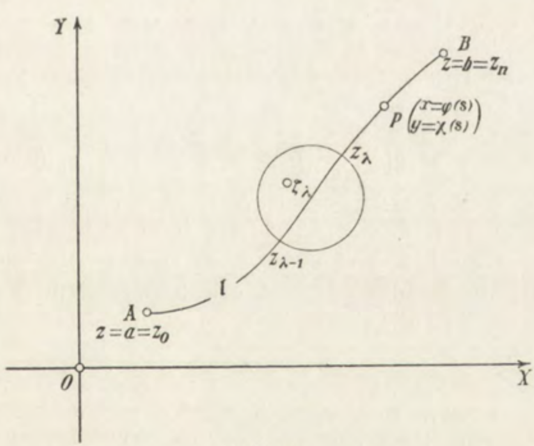


Fig. 40.

orientiertes Linienstück $\mathfrak{l}$ (Fig. 40) gegeben, und für einen das Linienstück $\mathfrak{l}$ enthaltenden abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}$ sei eine daselbst stetige Funktion $f(z)$ von z erklärt.[1]) Der Anfangspunkt von $\mathfrak{l}$ heiße A, der Endpunkt B, und die diesen Punkten entsprechenden komplexen Zahlen seien beziehentlich a und b. Ferner sei n eine beliebige ganze oberhalb 1 liegende Zahl und $z_1, z_2, \cdots z_{n-1}$ irgend eine Reihe sowohl von a und b als auch voneinander verschiedener komplexer Zahlen, deren Bildpunkte auf $\mathfrak{l}$ liegen und dort im positiven Sinne aufeinander folgen. Um gewisse Abkürzungen zu ermöglichen, sei überdies $a = z_0$ und $b = z_n$ gesetzt. Endlich sei für $\lambda = 1, 2, \cdots n$ jedesmal eine komplexe Zahl ζ_λ irgendwie so angenommen, daß ihr Bildpunkt sowohl auf der Fläche des Kreises, welcher die Verbindungsstrecke der Punkte $z_{\lambda-1}$ und z_λ als Durchmesser hat, als auch in $\mathfrak{B}$ liegt, und sodann aus den bisher erklärten komplexen Zahlen die Summe

$$S = \sum_{\lambda=1}^{n} f(\zeta_\lambda)(z_\lambda - z_{\lambda-1}) \tag{1340}$$

zusammengesetzt. Sind dann

$$z = x + yi; \qquad z_\lambda = x_\lambda + y_\lambda i; \qquad \zeta_\lambda = \xi_\lambda + \eta_\lambda i$$
$$f(z) = u(x, y) + v(x, y) i$$

die Gleichungen, die sich durch Zerlegung der links stehenden komplexen Zahlen in ihre reellen und ihre imaginären Teile ergeben, so ist

$$S = \sum_{\lambda=1}^{n} [u(\xi_\lambda, \eta_\lambda)(x_\lambda - x_{\lambda-1}) - v(\xi_\lambda, \eta_\lambda)(y_\lambda - y_{\lambda-1})]$$
$$+ i \sum_{\lambda=1}^{n} [u(\xi_\lambda, \eta_\lambda)(y_\lambda - y_{\lambda-1}) + v(\xi_\lambda, \eta_\lambda)(x_\lambda - x_{\lambda-1})].$$

Daraus folgt, daß die Summe S bei unbegrenzter Vermehrung der Zwischenwerte $z_1, z_2, \cdots z_{n-1}$ und unbegrenzter Verfeinerung der durch sie bewirkten Teilung des Linienstückes $\mathfrak{l}$ immer dem Grenzwert

1) Die hinsichtlich des Linienstückes $\mathfrak{l}$ und der Funktion $f(z)$ gemachten Voraussetzungen ließen sich allenfalls durch etwas weniger weit gehende Annahmen ersetzen. Doch gewährt eine solche Verallgemeinerung keinen praktischen Nutzen.

$$(1341)\qquad J = \int^{(\mathfrak{l})} u(x,y)\,dx - \int^{(\mathfrak{l})} v(x,y)\,dy + i\left[\int^{(\mathfrak{l})} u(x,y)\,dy + \int^{(\mathfrak{l})} v(x,y)\,dx\right]$$

zustrebt, einerlei wie man bei der Vermehrung der Zwischenwerte und der Auswahl der Zahlen ζ_λ zu Werke geht. Denkt man sich nämlich die Koordinaten x, y eines auf $\mathfrak{l}$ frei beweglichen Punktes P als Funktionen der Länge s des Bogens AP von $\mathfrak{l}$ durch die Zeichen $\varphi(s)$, $\chi(s)$ dargestellt, so ist, wenn l die ganze Länge von $\mathfrak{l}$ bedeutet,

$$\int^{(\mathfrak{l})} u(x,y)\,dx = \int_0^l u[\varphi(s), \chi(s)]\,\varphi'(s)\,ds\,.$$

Ferner gibt es, wenn $s_0 = 0$, s_1, s_2, $\cdots s_n$ die zu den Punkten $z_0, z_1, z_2, \cdots z_n$ gehörenden Werte von s bedeuten, für $\lambda = 1, 2, \cdots n$ auf dem Intervall $(s_{\lambda-1} \cdots s_\lambda)$ stets wenigstens eine Stelle σ_λ von solcher Beschaffenheit, daß

$$x_\lambda - x_{\lambda-1} = \varphi(s_\lambda) - \varphi(s_{\lambda-1}) = \varphi'(\sigma_\lambda)\,(s_\lambda - s_{\lambda-1})$$

ist. Nun kann man aber nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen reellen positiven Konstanten ε stets eine zweite reelle positive Konstante h so wählen, daß der Unterschied zwischen dem Integral $\int^{(\mathfrak{l})} u(x,y)\,dx$ und der Summe

$$\sum_{\lambda=1}^{n} u[\varphi(\sigma_\lambda), \chi(\sigma_\lambda)]\,\varphi'(\sigma_\lambda)(s_\lambda - s_{\lambda-1}) = \sum_{\lambda=1}^{n} u[\varphi(\sigma_\lambda), \chi(\sigma_\lambda)](x_\lambda - x_{\lambda-1})$$

für jede Einteilung des Linienstückes $\mathfrak{l}$, bei welcher die absoluten Werte der Differenzen $(z_\lambda - z_{\lambda-1})$ sämtlich unterhalb h liegen, absolut genommen kleiner als $\frac{\varepsilon}{8}$ ist. Zugleich kann man, da die Funktion $f(z)$, also auch die Funktion $u(x, y)$ in $\mathfrak{B}$ stetig, also daselbst auch gleichmäßig stetig ist, durch geeignete Wahl von h erreichen, daß bei jeder Einteilung von $\mathfrak{l}$, die der erwähnten Bedingung genügt, für jeden möglichen Wert von λ immer

$$|u(\xi_\lambda, \eta_\lambda) - u[\varphi(\sigma_\lambda), \chi(\sigma_\lambda)]| < \frac{\varepsilon}{8l}$$

wird, einerlei wie die Stelle $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$ in dem ihr zugänglichen Bereiche angenommen sein mag. Dann gilt für jede solche Einteilung die Ungleichung

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{n} u(\xi_\lambda, \eta_\lambda)(x_\lambda - x_{\lambda-1}) - {}^{(\mathfrak{l})}\!\!\int u(x, y)\,dx\right|$$

$$\leqq \left|\sum_{\lambda=1}^{n}\Big\{u(\xi_\lambda, \eta_\lambda) - u[\varphi(\sigma_\lambda), \chi(\sigma_\lambda)]\Big\}(x_\lambda - x_{\lambda-1})\right|$$

$$+\left|\sum_{\lambda=1}^{n} u[\varphi(\sigma_\lambda), \chi(\sigma_\lambda)]\,(x_\lambda - x_{\lambda-1}) - {}^{(\mathfrak{l})}\!\!\int u(x, y)\,dx\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{8l}\sum_{\lambda=1}^{n}(x_\lambda - x_{\lambda-1}) + \frac{\varepsilon}{8}$$

$$< \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Genau Entsprechendes gilt hinsichtlich der Summen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} v(\xi_\lambda, \eta_\lambda)(y_\lambda - y_{\lambda-1}); \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} u(\xi_\lambda, \eta_\lambda)(y_\lambda - y_{\lambda-1});$$

$$\sum_{\lambda=1}^{n} v(\xi_\lambda, \eta_\lambda)(x_\lambda - x_{\lambda-1})$$

und der Integrale

$${}^{(\mathfrak{l})}\!\!\int v(x, y)\,dy; \qquad {}^{(\mathfrak{l})}\!\!\int u(x, y)\,dy; \qquad {}^{(\mathfrak{l})}\!\!\int v(x, y)\,dx.$$

Folglich läßt sich die der Konstanten ε zugeordnete positive Zahl h auch so bestimmen, daß

$$|S - J| < \varepsilon$$

wird, sobald die absoluten Werte der Differenzen $(z_\lambda - z_{\lambda-1})$ sämtlich kleiner als h sind. In dem hiermit festgestellten Sinne kann daher die Zahl J in der Tat als der Grenzwert der Summe S für den Fall einer unbegrenzten Verfeinerung der Teilung von $\mathfrak{l}$ bezeichnet werden.

Eben dieser Grenzwert heißt **das von a bis b über $\mathfrak{l}$ erstreckte bestimmte Integral der Funktion $f(z)$** und wird durch das Zeichen

$${}^{(\mathfrak{l})}\!\!\int_a^b f(z)\,d(z)$$

dargestellt.

Indem man die auf der rechten Seite der Gleichung (1341) stehenden Linienintegrale durch Einführung der Bogenlänge s in eigentliche Integrale umwandelt, erhält man für das Integral $\overset{(\mathfrak{l})}{\int_a^b} f(z)\,dz$ nach naheliegenden Zusammenziehungen die Darstellung

$$\overset{(\mathfrak{l})}{\int_a^b} f(z)\,dz = \int_0^l f[\varphi(s) + i\chi(s)]\,[\varphi'(s) + i\chi'(s)]\,ds \tag{1342}$$

oder kürzer

$$\overset{(\mathfrak{l})}{\int_a^b} f(z)\,dz = \int_0^l f(z)\frac{dz}{ds}\,ds. \tag{1342a}$$

Hieraus kann man ferner, indem man für s eine andere Integrationsveränderliche einführt, noch manche andere Darstellungen des links stehenden Integrales durch eigentliche Integrale ableiten.

Eine naheliegende Erweiterung dieser Erklärung liefert der folgende

Zusatz: Ist in einem Bereiche, für den eine daselbst stetige Funktion $f(z)$ der komplexen Veränderlichen z erklärt ist, ein orientiertes Linienstück $\mathfrak{l}$ gegeben, welches aus einer endlichen Anzahl aneinandergereihter gewöhnlicher einfacher Linienstücke besteht, und ist wieder a die dem Anfangs- und b die dem Endpunkt von $\mathfrak{l}$ entsprechende komplexe Zahl, so versteht man unter $\overset{(\mathfrak{l})}{\int_a^b} f(z)\,dz$ die Summe der über die einzelnen Bestandteile von $\mathfrak{l}$ jeweils vom Anfangs- bis zum Endpunkt erstreckten Integrale der Funktion $f(z)$.

Das Linienstück $\mathfrak{l}$ heißt in allen Fällen, mag es einfach oder zusammengesetzt sein, der **Integrationsweg** und die seinem Anfangs- und seinem Endpunkt entsprechenden komplexen Zahlen heißen immer beziehentlich die **untere** und die **obere Integrationsgrenze.**

Der vorstehenden Begriffsbestimmung entsprechend soll auch im nachfolgenden unter einem **Integrationsweg** nicht ein ganz beliebiges Linienstück, sondern stets ein Weg verstanden werden, der sich in eine endliche Anzahl aneinander gereihter gewöhnlicher einfacher Linienstücke zerlegen läßt.

475. Einfachste Umformungen. — Für die eben erklärten

Integrale gelten, wie man leicht zeigen kann, die folgenden Erweiterungen früher gefundener Sätze:

1. — Hat man auf dem Integrationsweg $\mathfrak{l}$ eines bestimmten Integrales $\overset{(\mathfrak{l})}{\int_a^b} f(z)dz$ einer Funktion komplexen Argumentes eine Stelle c nach Belieben angenommen und dadurch den Integrationsweg in die beiden Teile $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ zerlegt, so ist immer

$$\overset{(\mathfrak{l})}{\int_a^b} f(z)dz = \overset{(\mathfrak{l}_1)}{\int_a^c} f(z)dz + \overset{(\mathfrak{l}_2)}{\int_c^b} f(z)dz. \tag{1343}$$

2. — Leitet man aus einem gegebenen bestimmten Integral $\overset{(\mathfrak{l})}{\int_a^b} f(z)dz$ ein zweites Integral dadurch ab, daß man die Richtung des Integrationsweges umkehrt, ohne jedoch sonst etwas zu ändern, so erhält man den entgegengesetzten Wert. Es ist also immer

$$\overset{(\mathfrak{l})}{\int_a^b} f(z)dz = -\overset{(\mathfrak{l})}{\int_b^a} f(z)dz. \tag{1344}$$

3. — Ein bestimmtes Integral $\overset{(\mathfrak{l})}{\int_a^b} Cf(z)dz$, bei welchem die zu integrierende Funktion als das Produkt einer Konstanten C mit einer auf dem Integrationswege stetigen Funktion $f(z)$ gegeben ist, kann stets gemäß der Gleichung

$$\overset{(\mathfrak{l})}{\int_a^b} Cf(z)dz = C\overset{(\mathfrak{l})}{\int_a^b} f(z)dz \tag{1345}$$

in das Produkt der Konstanten C mit dem Integral der Funktion $f(z)$ umgeformt werden.

4. — Der absolute Wert eines bestimmten Integrales $\overset{(\mathfrak{l})}{\int_a^b} f(z)dz$ einer Funktion komplexen Argumentes ist niemals größer als das Produkt der Länge l des Integrationsweges mit dem größten Wert M, den der absolute Betrag der unter dem Integralzeichen stehenden Funktion auf dem Integrationswege zu erwerben vermag. Man darf daher immer

$$\overset{(\mathfrak{l})}{\int_a^b} f(z)dz = \delta l M \tag{1346}$$

setzen, wo δ eine komplexe Zahl bedeutet, deren absoluter Wert nicht größer als 1 ist.

Wenn eine Funktion $f(z)$ eines komplexen Argumentes in einem Kontinuum stetig ist, so sind zwei verschiedene Möglichkeiten denkbar, nämlich erstens die Möglichkeit, daß das bestimmte Integral der Funktion $f(z)$, erstreckt über einen in dem Kontinuum verlaufenden Integrationsweg immer nur von der Lage des Anfangs- und des Endpunktes dieses Integrationsweges abhängt, aber sonst von der Gestalt des Integrationsweges unabhängig ist, zweitens die Möglichkeit, daß verschiedenen in dem Kontinuum verlaufenden Integrationswegen, welche den gleichen Anfangspunkt a mit dem gleichen Endpunkt b verbinden, auch verschiedene Werte des von a bis b erstreckten Integrales der Funktion $f(z)$ entsprechen können. Gerade die Frage, wann das eine und wann das andere stattfindet, wird durch die nächstfolgenden Nummern entschieden werden.

476. Annäherung durch ein Treppenintegral. — Erklärung: Eine in der Ebene einer komplexen Veränderlichen liegende gebrochene Linie heißt ein **Treppenweg**, wenn sie (Fig. 41) aus einer endlichen Anzahl aneinander gereihter abwechselnd zur einen und zur anderen Koordinatenachse parallel laufender Strecken zusammengesetzt ist, und als einfachster Fall wird dem Begriff eines Treppenweges auch eine einzelne Strecke untergeordnet, sobald sie zu einer der Koordinatenachsen parallel ist. Im Anschluß an diese Erklärung nennt man ferner jedes Integral, welches dadurch entsteht, daß man eine auf einem Treppenweg stetige Funktion komplexen Argumentes über diesen Weg integriert, ein **Treppenintegral.**

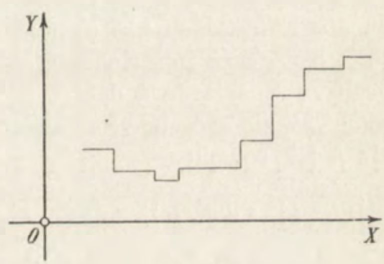


Fig. 41.

Lehrsatz: *Es sei $f(z)$ eine in einem zweifach ausgedehnten Bereiche $\mathfrak{B}$ stetige Funktion einer komplexen Veränderlichen z und $\mathfrak{l}$ ein ganz im Innern dieses Bereiches liegender orientierter Integrationsweg* (Nr. **474**). *Dann ist es nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen reellen positiven Konstanten ε immer möglich, einen vom Anfangspunkt a nach dem Endpunkt b von $\mathfrak{l}$ führenden in $\mathfrak{B}$ verlaufenden Treppenweg $\mathfrak{l}'$ so zu bestimmen, daß die Differenz der von a bis b über die Wege $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ erstreckten Integrale der Funktion $f(z)$ absolut genommen kleiner als ε ausfällt.*

Beweis: Unter den gemachten Voraussetzungen ist es immer möglich, eine reelle positive Konstante ϱ so zu bestimmen, daß die Fläche und der Umfang eines jeden Kreises, der um einen beliebigen Punkt von $\mathfrak{l}$ mit dem Radius ϱ beschrieben ist, ganz innerhalb $\mathfrak{B}$ liegen.

Nachdem nun ϱ dieser Forderung gemäß, aber sonst nach Belieben angenommen ist, denke man sich um jeden Punkt von $\mathfrak{l}$ mit dem Radius ϱ einen Kreis beschrieben und hierauf einen abgeschlossenen Teilbereich $\mathfrak{B}'$ des Bereiches $\mathfrak{B}$ durch die Festsetzung erklärt, daß er alle diejenigen, aber auch nur diejenigen Punkte enthalten soll, welche im Innern oder auf der Grenze des von den Flächen dieser Kreise überdeckten Gebietes liegen. Sind sodann wie in Nr. **474**

$$z = x + yi \qquad \text{und} \qquad f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$$

diejenigen Gleichungen, die sich durch Zerlegung der links stehenden komplexen Zahlen in ihre reellen und ihre imaginären Teile ergeben, und ist l die Länge des Linienstückes $\mathfrak{l}$, so kann man, da die Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ in $\mathfrak{B}'$ gleichmäßig stetig sind, der gegebenen Konstanten ε eine unterhalb ϱ liegende reelle positive Konstante h derart zuordnen, daß für je zwei dem Bereiche $\mathfrak{B}'$ angehörende Stellen (x, y), (x', y'), deren Abstand kleiner als h ist, sowohl

$$|u(x, y) - u(x', y')| < \frac{\varepsilon}{8l} \qquad \text{als auch} \qquad |v(x, y) - v(x', y')| < \frac{\varepsilon}{8l}$$

ist. Hierauf kann man auf $\mathfrak{l}$ eine gewisse Anzahl $(n+1)$ im positiven Sinne aufeinander folgender Punkte

$$z_0 = a,\ z_1,\ z_2, \cdots z_n = b$$

so wählen, daß für $\lambda = 1, 2, \cdots n$ jedesmal die Ungleichung $|z_\lambda - z_{\lambda-1}| < h$ besteht und daß zugleich die Differenz des Integrales $\int_a^{(\mathfrak{l})\,b} f(z)dz$ und der durch die Gleichung (1340) in Nr. **474** erklärten Summe S stets absolut genommen kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist, einerlei wie die Stellen $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n$ in den ihnen zugänglichen Bereichen gewählt sein mögen. Nimmt man sodann (Fig. 42), für $\lambda = 1, 2, \cdots n$ unter x_λ, y_λ die Koordinaten des Punktes z_λ verstehend, zu den Stellen $(x_{\lambda-1}, y_{\lambda-1})$ und $(x_\lambda\ y_\lambda)$ jedesmal noch die Stelle $(x_\lambda, y_{\lambda-1})$ hinzu und denkt man sich die Strecken gezogen, welche die beiden ersteren mit der letzteren verbinden, so erhält man, indem man diese Strecken aneinander reiht und in solchen Fällen, wo eine von ihnen die Länge Null hat, jedesmal die beiden benachbarten zu einer einzigen Strecke vereinigt, einen von a nach b führenden Treppenweg $\mathfrak{l}'$ von der oben verlangten Beschaffenheit. Denn das über diesen Treppenweg erstreckte Integral der Funktion $f(z)$ ist gleich der Summe der über die einzelnen Teilstrecken des Treppenweges erstreckten Integrale, und wenn man für diese letzteren die durch die Formel (1341) der Nr. **474** gegebenen Werte einsetzt und dabei bedenkt, daß für jede horizontale Strecke $dy=0$ und für jede vertikale Strecke $dx=0$ ist, so erhält man die Gleichung

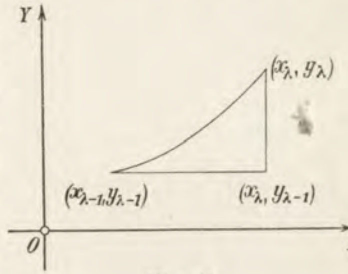


Fig. 42.

$$\overset{(\mathfrak{l}')}{\int_a^b} f(z)\,dz = \sum_{\lambda=1}^{n} \left\{ \int_{x_{\lambda-1}}^{x_\lambda} u(x, y_{\lambda-1})\,dx - \int_{y_{\lambda-1}}^{y_\lambda} v(x_\lambda, y)\,dy \right.$$
$$\left. + i\left[\int_{x_{\lambda-1}}^{x_\lambda} v(x, y_{\lambda-1})\,dx + \int_{y_{\lambda-1}}^{y_\lambda} u(x_\lambda, y)\,dy \right] \right\}.$$

Nun ist aber nach dem ersten Mittelwertsatz, wenn x'_λ und x''_λ passend gewählte zwischen $x_{\lambda-1}$ und x_λ liegende Mittelwerte und y'_λ und y''_λ passend gewählte Mittelwerte zwischen $y_{\lambda-1}$ und y_λ bedeuten,

$$\int_{x_{\lambda-1}}^{x_\lambda} u(x, y_{\lambda-1})\,dx = u(x'_\lambda, y_{\lambda-1})(x_\lambda - x_{\lambda-1})$$

$$\int_{x_{\lambda-1}}^{x_\lambda} v(x, y_{\lambda-1})\,dx = v(x''_\lambda, y_{\lambda-1})(x_\lambda - x_{\lambda-1})$$

$$\int_{y_{\lambda-1}}^{y_\lambda} u(x_\lambda, y)\,dy = u(x_\lambda, y'_\lambda)(y_\lambda - y_{\lambda-1})$$

$$\int_{y_{\lambda-1}}^{y_\lambda} v(x_\lambda, y)\,dy = v(x_\lambda, y''_\lambda)(y_\lambda - y_{\lambda-1}),$$

also

$$\overset{(\mathrm{I}')}{\int_a^b} f(z)\,dz = \sum_{\lambda=1}^{n} \Big\{ u(x'_\lambda, y_{\lambda-1})(x_\lambda - x_{\lambda-1}) - v(x_\lambda, y''_\lambda)(y_\lambda - y_{\lambda-1})$$
$$+ i\,[v(x''_\lambda, y_{\lambda-1})(x_\lambda - x_{\lambda-1}) + u(x_\lambda, y'_\lambda)(y_\lambda - y_{\lambda-1})] \Big\},$$

und daraus folgt, daß sich das links stehende Integral von der Summe

$$S_1 = \sum_{\lambda=1}^{n} \Big\{ u(x_\lambda, y_{\lambda-1})(x_\lambda - x_{\lambda-1}) - v(x_\lambda, y_{\lambda-1})(y_\lambda - y_{\lambda-1})$$
$$+ i\,[v(x_\lambda, y_{\lambda-1})(x_\lambda - x_{\lambda-1}) + u(x_\lambda, y_{\lambda-1})(y_\lambda - y_{\lambda-1})] \Big\}$$

nur um eine Differenz unterscheiden kann, die absolut genommen kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist. Da nämlich der Abstand der Punkte $(x'_\lambda, y_{\lambda-1})$ und $(x_\lambda, y_{\lambda-1})$ kleiner als h ist, so ist

$$\left| \sum_{\lambda=1}^{n} [u(x'_\lambda, y_{\lambda-1}) - u(x_\lambda, y_{\lambda-1})]\,(x_\lambda - x_{\lambda-1}) \right|$$
$$< \frac{\varepsilon}{8l} \sum_{\lambda=1}^{n} |x_\lambda - x_{\lambda-1}| < \frac{\varepsilon}{8},$$

und da ähnliche Ungleichungen für die drei übrigen Paare einander entsprechender Bestandteile der in den vorangehenden Gleichungen rechts stehenden Summen gelten, so ist in der Tat

$$\left| \overset{(\mathrm{I}')}{\int_a^b} f(z)\,dz - S_1 \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zugleich ist aber auch

$$\left| \overset{(\mathrm{I})}{\int_a^b} f(z)\,dz - S_1 \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

da die Stelle $(x_\lambda + y_{\lambda-1} i)$ jedesmal zu denjenigen Stellen gehört, mit denen die Stelle ζ_λ zusammenfallen darf, also die Summe S_1 einen der möglichen Werte der Summe S darstellt. Folglich ist wirklich

$$\left| \overset{(\mathrm{I}')}{\int_a^b} f(z)\,dz - \overset{(\mathrm{I})}{\int_a^b} f(z)\,dz \right| < \varepsilon,$$

wie gefordert wurde.

477. Hilfssätze.[1]) — Die Frage, ob ein bestimmtes Integral einer Funktion $f(z)$ einer komplexen Veränderlichen eine Wertänderung erfahren kann, wenn man die Grenzen festhält, aber den Integrationsweg ändert, läßt sich in zwei Fällen direkt beantworten, nämlich erstens, wenn $f(z)$ konstant, und zweitens, wenn $f(z) = z$ ist. Die Antwort lautet in beiden Fällen verneinend und wird durch die beiden folgenden Hilfssätze gegeben:

Hilfssatz 1. — *Sind a und b beliebige Stellen in der Ebene einer komplexen Veränderlichen z und ist $\mathfrak{l}$ ein beliebiger dieselben verbindender Integrationsweg und C eine beliebige Konstante, so ist immer*

$$\text{(1347)} \qquad {}^{(\mathfrak{l})}\!\!\int_a^b C\,dz = C(b-a),$$

einerlei wie der Integrationsweg gestaltet sein mag.

Nimmt man nämlich eine beliebige Anzahl $(n+1)$ komplexer Zahlen

$$z_0 = a,\ z_1,\ z_2, \cdots z_n = b$$

so an, daß ihre Bildpunkte alle auf $\mathfrak{l}$ liegen und dort im positiven Sinne aufeinander folgen, so ist immer

$$\sum_{\lambda=1}^{n} C(z_\lambda - z_{\lambda-1}) = C(z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \cdots + z_n - z_{n-1})$$
$$= C(z_n - z_0) = C(b-a).$$

Also ist auch der Grenzwert, dem die links stehende Summe bei unbegrenzter Verfeinerung der Teilung von $\mathfrak{l}$ zustrebt, d. h. das Integral ${}^{(\mathfrak{l})}\!\!\int_a^b C\,dz$ gleich $C(b-a)$, wie behauptet wurde.

Hilfssatz 2. — *Sind a und b beliebige Stellen in der Ebene einer komplexen Veränderlichen z und ist $\mathfrak{l}$ ein beliebiger dieselben verbindender Integrationsweg, so ist unabhängig von der Gestalt dieses Weges immer*

$$\text{(1348)} \qquad {}^{(\mathfrak{l})}\!\!\int_a^b z\,dz = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2.$$

1) Die nachfolgenden Hilfssätze und der auf ihnen beruhende Beweis des wichtigen Integralsatzes von Cauchy (Nr. **479**) sind zuerst von E. Goursat, Acta mathematica 4, Stockholm 1884, Seite 197, und Transactions of the american mathematical society 1, Lancaster, Pa. and New York 1900, Seite 14, angegeben worden.

Haben nämlich $z_0, z_1, z_2, \cdots z_n$ die gleiche Bedeutung wie eben und ist ebenso wie früher für $\lambda = 1, 2, \cdots n$ jedesmal ζ_λ eine beliebige Zahl auf der Fläche desjenigen Kreises, der die Punkte $z_{\lambda-1}, z_\lambda$ als Endpunkte eines Durchmessers hat, so ist $\int_a^{(\mathfrak{l})\,b} z\,dz$ der Grenzwert der Summe

$$S = \sum_{\lambda=1}^{n} \zeta_\lambda (z_\lambda - z_{\lambda-1})$$

bei unbegrenzter Verfeinerung der Teilung von $\mathfrak{l}$. Nun darf man aber den Punkt ζ_λ insbesondere mit dem Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der Punkte $z_{\lambda-1}, z_\lambda$ zusammenfallen lassen, d. h.

$$\zeta_\lambda = \frac{z_\lambda + z_{\lambda-1}}{2}$$

setzen. Dann wird

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{1}{2}(z_\lambda + z_{\lambda-1})(z_\lambda - z_{\lambda-1}) = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{n}(z_\lambda^2 - z_{\lambda-1}^2) \\ &= \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2 + z_2^2 - z_1^2 + \cdots + z_n^2 - z_{n-1}^2) \\ &= \frac{1}{2}(z_n^2 - z_0^2) = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2, \end{aligned}$$

einerlei wie fein der Integrationsweg geteilt sein mag. Also ist auch der Grenzwert von S, d. h. das Integral $\int_a^{(\mathfrak{l})\,b} z\,dz$ gleich $\left(\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2\right)$, wie behauptet wurde.

Die vorstehenden Hilfssätze gelten insbesondere auch dann, wenn b mit a zusammenfällt, und führen in diesem Fall zu dem Ergebnis, daß die über einen beliebigen geschlossenen Integrationsweg $\mathfrak{g}$ erstreckten Integrale

$$\int^{(\mathfrak{g})} C\,dz \quad \text{und} \quad \int^{(\mathfrak{g})} z\,dz$$

immer gleich Null sind.

Hiermit ist nun die Möglichkeit gewonnen, einen weiteren wichtigen Satz zu beweisen, nämlich den

Hilfsatz 3. — *Wenn eine Funktion $f(z)$ einer komplexen Veränderlichen z in einem zweifach ausgedehnten Bereiche* $\mathfrak{B}$

differenzierbar ist, so hat ihr Integral, erstreckt über den Umfang einer Rechtecksfläche $\mathfrak{R}$, *die samt ihrer Begrenzung ganz im Innern von* $\mathfrak{B}$ *liegt und deren Seiten zu den Koordinatenachsen parallel sind, immer den Wert* 0.

Beweis: Man denke sich (Fig. 43) die gegebene Rechtecksfläche durch die Strecken, welche die Mitten ihrer Gegenseiten verbinden, in vier kleinere Rechtecke zerlegt und erstrecke das Integral der Funktion $f(z)$ über den Umfang einer jeden dieser letzteren in der positiven Umlaufungsrichtung. Dann hat man über jede der im Innern von $\mathfrak{R}$ liegenden Rechtecksseiten zweimal in entgegengesetztem Sinne zu integrieren. Bei der Addition der vier über die Umfänge der kleineren Rechtecksflächen erstreckten Integrale heben sich daher die Beiträge, die von den innerhalb

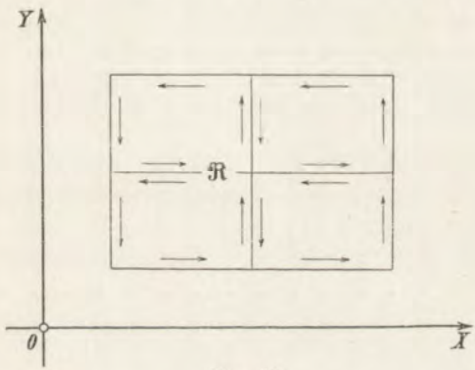


Fig. 43.

$\mathfrak{R}$ liegenden Strecken herrühren, gegenseitig auf, und es bleiben nur die Beiträge der auf dem Umfang von $\mathfrak{R}$ liegenden Seiten übrig. Dies hat zur Folge, daß die Summe der vier erwähnten Integrale mit dem über den Umfang von $\mathfrak{R}$ in der positiven Umlaufungsrichtung erstreckten Integrale der Funktion $f(z)$ übereinstimmt.

Angenommen nun, dieses letztere Integral wäre nicht gleich Null, sondern hätte einen positiven absoluten Wert ω, so müßte sich unter den vier kleineren Rechtecksflächen wenigstens eine finden, bei welcher der absolute Wert des über den Umfang erstreckten Integrales der Funktion $f(z)$ nicht kleiner als $\frac{\omega}{4}$ wäre, und man könnte, wenn es nur eine solche Fäche gäbe, unter $\mathfrak{R}_1$

eben diese Fläche, und wenn es mehrere gäbe, unter $\mathfrak{R}_1$ diejenige von ihnen verstehen, die am weitesten links und am tiefsten liegt.

Nun wären auf die Rechtecksfläche $\mathfrak{R}_1$ genau dieselben Überlegungen noch einmal anwendbar und würden zu einer Rechtecksfläche $\mathfrak{R}_2$ führen, bei welcher der absolute Wert des über den Umfang erstreckten Integrales nicht kleiner als $\frac{\omega}{4^2}$ wäre, und so fort. Nach einer beliebigen Anzahl n von Schritten käme man so zu einer Rechtecksfläche $\mathfrak{R}_n$, bei welcher das über den Umfang erstreckte Integral der Funktion $f(z)$ absolut genommen $\geqq \frac{\omega}{4^n}$ wäre. Zugleich gäbe es eine und nur eine komplexe Zahl z_0, deren Bildpunkt einer jeden dieser Rechtecksflächen als innerer oder als Randpunkt angehörte. Denn wären x, y die Koordinaten der komplexen Veränderlichen z und wären für jeden positiven Wert von n

$$a_n \leqq x \leqq a'_n; \qquad b_n \leqq y \leqq b'_n$$

diejenigen Ungleichungen, durch welche die Rechtecksfläche $\mathfrak{R}_n$ analytisch abgegrenzt wird, so hätte diejenige komplexe Zahl z_0, deren Koordinaten durch die Reihenzahlen

$$(a_1;\ a_2;\ a_3;\ \cdots \mid \cdots;\ a'_3;\ a'_2;\ a'_1); \quad (b_1;\ b_2;\ b_3;\ \cdots \mid \cdots;\ b'_3;\ b'_2;\ b'_1)$$

dargestellt werden, in der Tat die verlangte Eigenschaft, und außer ihr gäbe es keine andere derartige Zahl.

An der Stelle z_0 wäre aber die Funktion $f(z)$ differenzierbar, d. h. nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen reellen positiven Konstanten ε ließe sich eine zweite reelle positive Konstante ϱ so bestimmen, daß für $|z - z_0| \leqq \varrho$ immer

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

wäre. Nach Einschränkung der Veränderlichen z auf die der Bedingung $|z - z_0| \leqq \varrho$ genügenden Werte könnte dann

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + (z - z_0)\eta \\ &= [f(z_0) - z_0 f'(z_0)] + f'(z_0) z + (z - z_0)\eta \end{aligned}$$

gesetzt werden, wo η eine stetige Funktion von z bedeutet, deren absoluter Wert beständig $< \varepsilon$ bleibt. Ferner wäre die Rechtecksfläche $\mathfrak{R}_n$ für jeden oberhalb einer gewissen Grenze liegenden

Wert von n ganz im Innern des um den Punkt z_0 mit dem Radius ϱ beschriebenen Kreises enthalten. Für jeden derartigen Wert von n könnte man daher das über den Umfang $\mathfrak{u}_n$ von $\mathfrak{R}_n$ in der positiven Umlaufungsrichtung erstreckte Integral $\int^{(\mathfrak{u}_n)} f(z)\,dz$ gemäß der Gleichung

$$\int^{(\mathfrak{u}_n)} f(z)\,dz = \int^{(\mathfrak{u}_n)} [f(z_0) - z_0 f'(z_0)]\,dz + f'(z_0)\int^{(\mathfrak{u}_n)} z\,dz + \int^{(\mathfrak{u}_n)} (z - z_0)\eta\,dz$$

in drei Teile zerlegen. Von diesen würde aber der erste nach Hilfssatz 1 und der zweite nach Hilfssatz 2 wegfallen. Man erhielte also die Gleichung

$$\int^{(\mathfrak{u}_n)} f(z)\,dz = \int^{(\mathfrak{u}_n)} (z - z_0)\eta\,dz$$

und könnte nun, indem man unter U die Länge des Umfanges der ursprünglich gegebenen Rechtecksfläche $\mathfrak{R}$ versteht, folgendermaßen weiter schließen: Der Umfang $\mathfrak{u}_n$ hat die Länge $\frac{1}{2^n}U$, und für jeden auf diesem Umfang liegenden Wert von z ist der Abstand der Punkte z_0 und z kleiner als die halbe Länge des Umfanges $\mathfrak{u}_n$, also

$$|z - z_0| < \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}U.$$

Folglich ist nach dem Satz 4 der Nr. **475**

$$\left|\int^{(\mathfrak{u}_n)} f(z)\,dz\right| < \frac{1}{2^n}U \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}U\varepsilon = \frac{1}{4^n}\cdot\frac{1}{2}U^2\varepsilon.$$

Andererseits wäre nach dem früheren

$$\left|\int^{(\mathfrak{u}_n)} f(z)\,dz\right| > \frac{1}{4^n}\omega.$$

Diese Ungleichung stände aber mit der vorangehenden in Widerspruch, sobald man ε so angenommen hat, daß $\frac{1}{2}U^2\varepsilon < \omega$, also $\varepsilon < \frac{2\omega}{U^2}$ ist. Folglich ist die Annahme, daß das über den Umfang von $\mathfrak{R}$ erstreckte Integral der Funktion $f(z)$ von Null verschieden sei, zu verwerfen, und es bleibt keine andere Möglichkeit, als daß dieses Integral den Wert 0 hat.

Durch wiederholte Anwendung des hiermit bewiesenen Satzes ergibt sich endlich:

Hilfssatz 4. — *Wenn eine Funktion $f(z)$ einer komplexen Veränderlichen z in einem zweifach ausgedehnten Bereich $\mathfrak{B}$ differenzierbar ist, so hat ihr Integral, erstreckt über einen geschlossenen sich selbst nicht schneidenden und ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ verlaufenden Treppenweg, immer den Wert 0, sobald auch die von dem Treppenweg umschlossene Fläche $\mathfrak{F}$*[1]) *ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ liegt.*

Die Fläche $\mathfrak{F}$ läßt sich nämlich (Fig. 44) auf mannigfach verschiedene Weise in nebeneinander liegende Rechtecksflächen zerlegen, deren Seiten zu den Koordinatenachsen parallel sind. Beispielsweise kann eine solche Zerlegung dadurch erfolgen, daß man bei jeder Seite des Treppenweges, die sich in das Innere von $\mathfrak{F}$ hinein verlängern läßt, diese Verlängerung bis zum Wiederaustritt aus $\mathfrak{F}$ wirklich ausführt. Das über den Umfang von $\mathfrak{F}$ im positiven Umlaufungsinn erstreckte Integral der Funktion $f(z)$ ist dann wieder gleich der Summe der über die Umfänge der einzelnen Teilflächen jeweils im positiven Sinne erstreckten Integrale, da jede im Innern von $\mathfrak{F}$ liegende Rechtecksseite zu dieser Summe zwei entgegengesetzt gleiche Beiträge liefert. Nun ist aber für jede Teilfläche das über den Umfang erstreckte Integral nach dem vorangehenden Hilfssatz gleich Null. Folglich muß auch das über den Umfang von $\mathfrak{F}$ erstreckte Integral den Wert 0 haben.

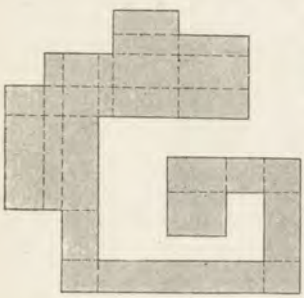


Fig. 44.

478. Einfach und mehrfach zusammenhängende Kontinua. — Ein Kontinuum $\mathfrak{T}$ in der Ebene einer komplexen Veränderlichen und ein in seinem Innern liegender geschlossener sich selbst nicht schneidender Treppenweg können (Fig. 45) so gestaltet sein,

1) Der Satz, daß jedes einfache ebene Vieleck seine Ebene in zwei Teile zerlegt, einen inneren und äußeren, wird hier als in der Elementarmathematik bewiesen vorausgesetzt.

daß die von dem Treppenweg umschlossene Fläche nicht ganz im Innern von $\mathfrak{T}$ liegt. Beispielsweise gilt dies für das Ringgebiet zwischen zwei konzentrischen Kreisen und einen innerhalb desselben liegenden den inneren Kreis umschließenden Treppenweg. Ja man brauchte, um ein Beispiel zu erhalten, aus der Fläche eines Kreises oder eines einfachen Vielecks nicht einmal ein Flächenstück herauszunehmen; es würde vielmehr schon genügen, wenn man nur einen einzigen inneren Punkt daraus entfernte.

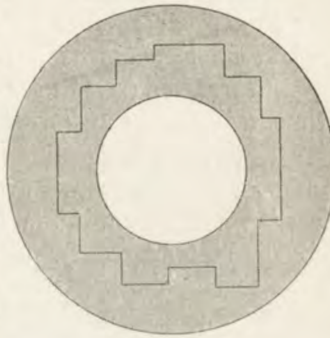


Fig. 45.

In Fällen der eben gekennzeichneten Art sind nun solche Schlüsse, wie sie zum Beweise des Hilfssatzes 4 der Nr. **477** gedient haben, nicht mehr möglich. Der Beweis wird also hinfällig, und zwar nicht allein der Beweis, sondern, wie sich an geeigneten Beispielen zeigen läßt (vgl. Nr. **481**), auch die Behauptung selbst. Eben deswegen muß man in manchen Teilen der Lehre von den Funktionen eines komplexen Argumentes Kontinua von zwei verschiedenen Arten unterscheiden, nämlich einfach und mehrfach zusammenhängende, gemäß der folgenden

Erklärung: *Ein ebenes Kontinuum heißt* **einfach zusammenhängend**, *wenn die Fläche eines jeden einfachen Vielecks, dessen Umfang innerhalb des Kontinuums liegt, ebenfalls ganz im Innern des Kontinuums enthalten ist, sonst* **mehrfach zusammenhängend.**

Beispiele einfach zusammenhängender Kontinua sind die ganze unendliche Ebene, das Innere einer Halbebene, eines Dreiecks, eines einfachen Vierecks und allgemeiner jedes einfachen Vielecks, sowie das Innere eines Kreises, einer Ellipse, usw.

Beispiele mehrfach zusammenhängender Kontinua ergeben sich, wenn man aus irgend einem einfach zusammenhängenden Kontinuum einen inneren Punkt oder ein ganz im Innern liegendes abgeschlossenes Flächenstück oder mehrere solche Punkte oder Flächenstücke herausnimmt.

Für manche Zwecke empfiehlt es sich, noch weitere Unterscheidungen dadurch vorzunehmen, daß man ein mehrfach zusammenhängendes Kontinum zweifach, dreifach, $\cdots$ zusammenhängend nennt, je nachdem man dasselbe durch einen, zwei, $\cdots$ Querschnitte in ein einfach zusammenhängendes Kontinuum verwandeln kann. Hier ist es jedoch nicht erforderlich, auf diese weiteren Unterscheidungen näher einzugehen.

479. Der Integralsatz von Cauchy.[1]) — Lehrsatz: *Wenn eine Funktion $f(z)$ einer komplexen Veränderlichen z in einem einfach zusammenhängenden Kontinuum $\mathfrak{T}$ differenzierbar ist, so ist ihr Integral, erstreckt über einen beliebigen ganz in $\mathfrak{T}$ verlaufenden geschlossenen Integrationsweg* $\mathfrak{l}$ (Nr. **474**), *immer gleich Null.*

Beweis: Für den Integrationsweg $\mathfrak{l}$ sei eine bestimmte Durchlaufungsrichtung vorgeschrieben, in der sich die Integration erstrecken soll. Dann kann man nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen reellen positiven Konstanten ε stets einen ganz in $\mathfrak{T}$ verlaufenden geschlossenen Treppenweg $\mathfrak{l}'$ von bestimmter Durchlaufungsrichtung so bestimmen, daß

$$\left| \int^{(\mathfrak{l})} f(z)\,dz - \int^{(\mathfrak{l}')} f(z)\,dz \right| < \varepsilon \tag{1349}$$

wird. Nun ist aber immer

$$\int^{(\mathfrak{l}')} f(z)\,dz = 0 .$$

Denn dies folgt, falls der Treppenweg $\mathfrak{l}'$ sich nicht selbst schneidet, aus dem Hilfssatz 4 der Nr. **477** und anderenfalls daraus, daß man den Weg $\mathfrak{l}'$ in eine endliche Anzahl geschlossener sich selbst nicht schneidender Treppenwege zerlegen kann. Denkt man sich nämlich einen beweglichen Punkt P, der von einem festen Punkt von $\mathfrak{l}'$ ausgeht und dann auf $\mathfrak{l}'$ in der Integrationsrichtung stetig fortschreitet, bis er zum erstenmal eine Lage A, die er schon einmal angenommen hatte, wieder erreicht, so ist (Fig. 46) der Teil $\mathfrak{l}_1$ von $\mathfrak{l}'$, den der Punkt P durchläuft, während er von A bis wieder zu A zurück geht, ein geschlossener sich selbst nicht schneidender Treppenweg, der aus mindestens vier ver-

---

1) So genannt, weil A. Cauchy im § 3 der im August 1825 in Paris als besonderes Werk erschienenen Abhandlung „Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires" zuerst einen annähernd gleichwertigen Satz aufgestellt hat. In deutscher Übersetzung ist diese Abhandlung mit Anmerkungen herausgegeben von P. Stäckel in Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 112, Leipzig 1900.

schiedenen Strecken besteht und daher wenigstens zwei zu $\mathfrak{l}'$ gehörende Strecken vollständig enthält. Es kann sein, daß die erste von A ausgehende Strecke des Weges $\mathfrak{l}_1$ nur einen Bruchteil einer Strecke des Weges $\mathfrak{l}'$ bildet, und dasselbe ist bei der letzten, in A endigenden Strecke von $\mathfrak{l}_1$ möglich; aber alle übrigen zu $\mathfrak{l}_1$ gehörenden Strecken sind vollständig in $\mathfrak{l}'$ enthalten. Daher bleibt, wenn man den Weg $\mathfrak{l}_1$ von dem Wege $\mathfrak{l}'$ abtrennt, ein geschlossener Treppenweg $\mathfrak{l}_2$ von bestimmter Durchlaufungsrichtung übrig, der wenigstens zwei Strecken weniger enthält als $\mathfrak{l}'$. Auf den Weg $\mathfrak{l}_2$ sind dann die nämlichen Überlegungen noch einmal anwendbar, und indem man so fortfährt, gelangt man nach einer endlichen Anzahl von Schritten zu einer Auflösung des Treppenweges $\mathfrak{l}'$ in eine endliche Anzahl geschlossener sich selbst nicht schneidender Treppenwege. Das Integral $\int^{(\mathfrak{l}')} f(z)\,dz$ ist dann als Summe der über diese Teile zu erstreckenden Integrale auch im vorliegenden Falle gleich Null. Daher folgt aus der Ungleichung (1349)

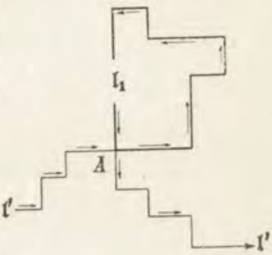


Fig. 46.

$$\left|\int^{(\mathfrak{l})} f(z)\,dz\right| < \varepsilon,$$

und da ε beliebig klein angenommen werden konnte, bleibt keine andere Möglichkeit, als daß $\int^{(\mathfrak{l})} f(z)\,dz = 0$ ist, wie behauptet wurde.

Das hiermit gewonnene Ergebnis läßt sich in etwas anderer Form auch folgendermaßen aussprechen:

Wenn eine Funktion $f(z)$ einer komplexen Veränderlichen z in einem einfach zusammenhängenden Kontinuum differenzierbar ist und $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ irgend zwei verschiedene in diesem Kontinuum liegende Integrationswege bedeuten, welche die gleichen Endpunkte a und b miteinander verbinden, so ist immer

$$(1350) \qquad \int_a^{(\mathfrak{l}_1)\,b} f(z)\,dz = \int_a^{(\mathfrak{l}_2)\,b} f(z)\,dz.$$

Bei festgehaltenen Grenzen ist also die Gestalt des Integrationsweges auf den Wert des Integrales ohne Einfluß.

Denkt man sich nämlich den Weg $\mathfrak{l}_1$ in der Richtung von a gegen b, den Weg $\mathfrak{l}_2$ dagegen in der Richtung von b gegen a genommen und dann den Weg $\mathfrak{l}_2$ an den Weg $\mathfrak{l}_1$ angesetzt, so erhält man einen geschlossenen in dem gegebenen Kontinuum verlaufenden Integrationsweg. Folglich ist

$$\overset{(\mathfrak{l}_1)}{\int_a^b} f(z)\,dz + \overset{(\mathfrak{l}_2)}{\int_b^a} f(z)\,dz = 0\,.$$

Nun ist aber

$$\overset{(\mathfrak{l}_2)}{\int_b^a} f(z)\,dz = -\overset{(\mathfrak{l}_2)}{\int_a^b} f(z)\,dz\,,$$

so daß in der Tat die zu beweisende Gleichung (1350) besteht.

480. Zusammenhang zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral. — Lehrsatz 1. — *Wenn eine Funktion $f(z)$ einer komplexen Veränderlichen z in einem einfach zusammenhängenden Kontinuum $\mathfrak{T}$ differenzierbar ist, so kann sie stets als Ableitung einer zweiten daselbst differenzierbaren Funktion von z angesehen werden, hat also ein unbestimmtes Integral.*

Beweis: Ist a eine feste und z eine veränderliche in $\mathfrak{T}$ liegende komplexe Zahl und $\mathfrak{l}$ ein beliebiger ganz in $\mathfrak{T}$ verlaufender von a nach z führender Integrationsweg (Nr. 474), so ist das Integral $\overset{(\mathfrak{l})}{\int_a^z} f(\zeta)\,d\zeta$ nach dem vorangehenden eine Funktion $F(z)$ seiner oberen Grenze z. Diese Funktion ist nun in $\mathfrak{T}$ überall differenzierbar und hat in der Tat die Ableitung $f(z)$. Ist nämlich $(z+h)$ eine von z verschiedene, aber gleichfalls in $\mathfrak{T}$ liegende komplexe Zahl, die so nahe bei z liegt, daß auch die Verbindungsstrecke $\mathfrak{s}$ der Stellen z und $(z+h)$ ganz in $\mathfrak{T}$ verläuft, so kann man den Funktionswert $F(z+h)$ bilden, indem man erst von a bis z über $\mathfrak{l}$ und dann von z bis $(z+h)$ über $\mathfrak{s}$ integriert. Folglich ist

$$\begin{aligned} F(z+h) - F(z) &= \overset{(\mathfrak{s})}{\int_z^{z+h}} f(\zeta)\,d\zeta \\ &= hf(z) + \overset{(\mathfrak{s})}{\int_z^{z+h}} [f(\zeta) - f(z)]\,d\zeta\,. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Satzes 4 der Nr. 475 folgt hieraus

$$F(z+h) - F(z) = hf(z) + \delta h M\,,$$

wo M den Maximalwert des absoluten Betrages der Differenz

$[f(\zeta)-f(z)]$ für die auf der Strecke $\mathfrak{s}$ liegenden Werte von ζ bezeichnet und δ eine komplexe Zahl bedeutet, deren absoluter Wert nicht größer als 1 ist. Nun ist aber

$$\lim_{h=0} M = 0$$

und daher

$$\lim_{h=0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z).$$

Das heißt, die Funktion $F(z)$ ist in $\mathfrak{B}$ überall differenzierbar und hat in der Tat die Ableitung $f(z)$.

Jede in einem einfach zusammenhängenden Kontinuum differenzierbare Funktion eines komplexen Argumentes hat also wirklich ein unbestimmtes Integral, und aus einem solchen ergibt sich, wie schon in Nr. **439** gezeigt wurde, jedes andere durch Hinzufügung einer Konstanten.

Lehrsatz 2. — *Ist $F(z)$ ein unbestimmtes Integral einer in einem einfach zusammenhängenden Kontinuum $\mathfrak{T}$ differenzierbaren Funktion $f(z)$ einer komplexen Veränderlichen z und sind a und b irgend zwei in $\mathfrak{T}$ liegende komplexe Zahlen und $\mathfrak{l}$ ein dieselben verbindender ganz in $\mathfrak{T}$ verlaufender Integrationsweg, so ist immer*

$$\text{(1351)} \qquad {}^{(\mathfrak{l})}\!\!\int_a^b f(z)\,dz = F(b) - F(a).$$

Denn setzt man

$$\Phi(z) = \int_a^z f(\zeta)\,d\zeta,$$

wo die Integration über einen beliebigen in $\mathfrak{T}$ liegenden von a nach z führenden Integrationsweg zu erstrecken ist, so ist

$$\Phi(z) = F(z) + C,$$

wo C eine Konstante bedeutet. Nun ist aber $\Phi(a)=0$, also

$$C = -F(a),$$

folglich

$${}^{(\mathfrak{l})}\!\!\int_a^b f(z)\,dz = \Phi(b) = F(b) - F(a),$$

wie behauptet wurde.

481. Funktionswert im Innern ausgedrückt durch die Randwerte. — Lehrsatz: *Ist $f(z)$ eine in einem einfach zu-*

sammenhängenden Kontinuum $\mathfrak{T}$ *differenzierbare Funktion und* $\mathfrak{k}$ *irgend ein in* $\mathfrak{T}$ *verlaufender Kreis,*[1]) *so ist für jeden Wert von* z, *der innerhalb der von* $\mathfrak{k}$ *umschlossenen Fläche liegt,*

$$(1352) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \overset{(\mathfrak{k})}{\int} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

vorausgesetzt, daß die Integration über $\mathfrak{k}$ *im Sinne eines positiven Umlaufs um die von* $\mathfrak{k}$ *umschlossene Fläche erstreckt wird.*

Beweis: Man denke sich, unter z irgend eine feste im Innern des Kreises $\mathfrak{k}$ liegende Zahl verstehend, um z als Mittelpunkt irgend einen ganz im Innern von $\mathfrak{k}$ verlaufenden Kreis $\mathfrak{k}'$ beschrieben (Fig. 48) und sodann das Ringgebiet zwischen den Kreisen $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}'$ durch die Verlängerungen irgend zweier Radien des Kreises $\mathfrak{k}'$ in zwei getrennte Bereiche $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ zerlegt. Dann erhält man jedesmal Null, wenn man das Integral der Funktion $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ des Argumentes ζ über die Begrenzung eines dieser Bereiche

1) Der ausgesprochene Lehrsatz bleibt auch dann bestehen, wenn man unter $\mathfrak{k}$ einen ganz beliebigen in $\mathfrak{T}$ verlaufenden geschlossenen sich selbst nicht schneidenden Integrationsweg versteht, und läßt sich auch in ähnlicher Weise beweisen, wenn man die beiden folgenden Sätze der Analysis situs als bekannt voraussetzt:

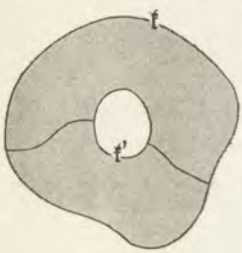


Fig. 47.

1. — Jeder geschlossene sich selbst nicht schneidende Integrationsweg zerlegt die Ebene in zwei getrennte Kontinua, ein inneres und ein äußeres;

2. — Wenn im Innern der von einem solchen Integrationsweg $\mathfrak{k}$ (Fig. 47) umschlossenen Fläche ein zweiter sich selbst nicht schneidender geschlossener Integrationsweg $\mathfrak{k}'$ gegeben ist, so zerfällt das zwischen $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}'$ enthaltene Ringgebiet in zwei getrennte Teile, wenn durch dasselbe zwei weder sich selbst noch einander schneidende Integrationswege gelegt werden, von denen jeder einen Punkt von $\mathfrak{k}$ mit einem Punkte von $\mathfrak{k}'$ verbindet.

Nun ist aber der strenge Beweis dieser allgemeinen Sätze trotz der Anschaulichkeit ihres Inhaltes nicht ganz einfach (vgl. W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. 1, zweite Auflage, Leipzig und Berlin 1912, S. 160—176, wo der Beweis durchgeführt ist und sich auch weitere Literaturangaben finden). Lediglich zur Vermeidung von Weitläufigkeiten ist daher im Text vorausgesetzt worden, daß $\mathfrak{k}$ ein Kreis sei. Die Erledigung dieses Spezialfalles genügt für das nachfolgende, so daß der Verlust an Allgemeinheit hier keinen Schaden bringt.

erstreckt. Denn man kann jedesmal in mannigfach verschiedener Weise ein einfach zusammenhängendes in $\mathfrak{T}$ als Teil enthaltenes Kontinuum so bestimmen, daß es die fragliche Begrenzung, nicht aber den Punkt z enthält und daß daher der Ausdruck $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ eine in diesem Kontinuum differenzierbare Funktion der Veränderlichen ζ darstellt. Addiert man nun die jedesmal im positiven Umlaufungssinn über die Begrenzungen der Bereiche $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ erstreckten Integrale, so heben sich diejenigen Bestandteile dieser Integrale, die von den geradlinigen Teilen der Begrenzungen herrühren, gegenseitig auf, weil über jeden solchen Teil zweimal zu integrieren ist, und zwar in entgegengesetzten Richtungen. Dagegen schließen sich die von den gekrümmten Teilen der Begrenzungen herrührenden Bestandteile zu den über die Kreise $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}'$ erstreckten Integralen zusammen, und zwar ist dabei das Integral über $\mathfrak{k}$ im positiven und das über $\mathfrak{k}'$ im negativen Drehungssinn zu erstrecken. Ersetzt man nun dieses letztere Integral durch den entgegengesetzten Wert des im umgekehrten Sinne über $\mathfrak{k}'$ erstreckten Integrales, so erhält man die Gleichung

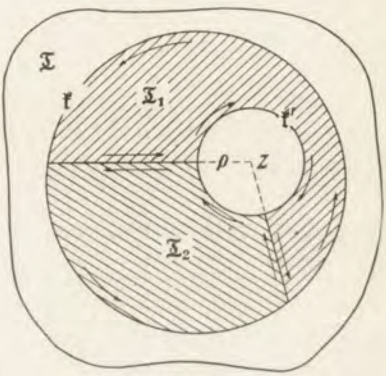


Fig. 48.

$$\int^{(\mathfrak{k})} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int^{(\mathfrak{k}')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$$

oder

$$\int^{(\mathfrak{k})} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int^{(\mathfrak{k}')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{1353}$$

wo jetzt beide Integrale im Sinne eines positiven Umlaufs um den Punkt z zu erstrecken sind.

Hier läßt sich aber das rechts stehende Integral sehr leicht in ein eigentliches Integral verwandeln und ausrechnen. Ist nämlich ϱ der Radius des Kreises $\mathfrak{k}'$, so hat man, damit ζ den Kreis $\mathfrak{k}'$ im positiven Sinne durchlaufe, nur nötig

$$\zeta = z + \varrho e^{i\varphi}$$

zu setzen und dann die Veränderliche φ stetig von 0 bis 2π zunehmen zu lassen. Versteht man dann für jeden Wert von φ unter s die Länge des hierbei von dem Punkte ζ durchlaufenen Bogens, so erhält man mit Hilfe der Gleichung (1342ª) der Nr. 474

$$\int^{(\mathfrak{k}')}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_0^{2\pi}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{ds}\frac{ds}{d\varphi}d\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{d\varphi}d\varphi$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{f(z+\varrho e^{i\varphi})}{\varrho e^{i\varphi}}i\varrho e^{i\varphi}d\varphi=i\int_0^{2\pi}f(z+\varrho e^{i\varphi})d\varphi$$
$$=i\int_0^{2\pi}f(z)d\varphi+i\int_0^{2\pi}[f(z+\varrho e^{i\varphi})-f(z)]d\varphi$$
$$=2\pi i f(z)+i\int_0^{2\pi}[f(z+\varrho e^{i\varphi})-f(z)]d\varphi.$$

Nun kann man aber den Radius ϱ so klein annehmen, als man will, und daher nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen reellen positiven Konstanten ε stets erreichen, daß für jeden Wert von φ

$$\left|f(z+\varrho e^{i\varphi})-f(z)\right|<\varepsilon,$$

also

$$\left|\int_0^{2\pi}[f(z+\varrho e^{i\varphi})-f(z)]d\varphi\right|<2\pi\varepsilon$$

wird. Folglich kann das Integral $\int^{(\mathfrak{k}')}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}dz$ nicht von dem Produkt $2\pi i f(z)$ verschieden sein, und dasselbe gilt dann nach (1353) auch von dem Integral $\int^{(\mathfrak{k})}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$. Der Wert der Funktion $f(z)$ an einer beliebigen im Innern des Kreises $\mathfrak{k}$ liegenden Stelle z läßt sich also in der Tat mittels der Gleichung (1352) durch diejenigen Werte ausdrücken, welche dieselbe Funktion auf dem Umfang des Kreises $\mathfrak{k}$ annimmt.

482. Darstellbarkeit differenzierbarer Funktionen durch Potenzreihen. — Lehrsatz: *Wenn eine Funktion $f(z)$ einer komplexen Veränderlichen z in einem Kontinuum $\mathfrak{T}$ differenzierbar ist, so ist sie in der Umgebung eines jeden festen in $\mathfrak{T}$ liegenden Wertes z_0 als Summe einer konvergenten nach Potenzen der Differenz $(z-z_0)$ fortschreitenden Reihe darstellbar, und zwar erstreckt sich dabei die Konvergenz der Reihe und die Gültigkeit der Darstellung, falls $\mathfrak{T}$ unbegrenzt ist, über die ganze unendliche Ebene* *und sonst zum mindesten über das Innere des größten um z_0 als Mittelpunkt möglichen Kreises, dessen Inneres ganz in $\mathfrak{T}$ liegt, in vielen Fällen aber auch noch auf den ganzen Umfang dieses Kreises oder wenigstens einen Teil seiner Punkte.*

Beweis: Es sei z eine beliebige komplexe Zahl, deren Bildpunkt, falls $\mathfrak{T}$ begrenzt ist, im Innern des eben erwähnten Kreises liegt und anderenfalls keiner Einschränkung unterworfen zu werden braucht. Dann kann man immer eine reelle positive Konstante ϱ so bestimmen, daß der mit dem Radius ϱ um den Punkt z_0 als Mittelpunkt beschriebene Kreis $\mathfrak{k}$ den Punkt z im Innern enthält, aber doch noch ganz in $\mathfrak{T}$ verläuft. Ist dies geschehen, so ist nach Nr. **481**

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \overset{(\mathfrak{k})}{\int} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

wo die Integration über $\mathfrak{k}$ im Sinne eines positiven Umlaufs um den Punkt z_0 zu erstrecken ist. Nun ist aber

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 - (z - z_0)}$$

und zugleich für jeden auf $\mathfrak{k}$ liegenden Wert von ζ

$$|\zeta - z_0| > |z - z_0|.$$

Folglich kann der Bruch $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ für alle diese Werte gemäß folgender Gleichung in eine konvergente Potenzreihe entwickelt werden:

$$\begin{aligned}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \\ &= \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\left[1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^2 + \cdots\right] \\ &= \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} + \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}(z - z_0) + \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^3}(z - z_0)^2 + \cdots.\end{aligned}$$

Diese Reihe ist ferner auf $\mathfrak{k}$ gleichmäßig konvergent, denn sie konvergiert daselbst nirgends langsamer als die aus konstanten, d. h. von ζ unabhängigen Gliedern zusammengesetzte konvergente geometrische Reihe

$$\frac{M}{\varrho}; \quad \frac{M}{\varrho}\left|\frac{z - z_0}{\varrho}\right|; \quad \frac{M}{\varrho}\left|\frac{z - z_0}{\varrho}\right|^2; \quad \cdots,$$

wo M den Maximalwert des absoluten Betrages der Funktion $f(\zeta)$

auf dem Kreise $\mathfrak{k}$ bedeutet. Folglich ist gliedweise Integration zulässig und daher wirklich

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots, \tag{1354}$$

wenn allgemein für $\lambda = 0, 1, 2, \cdots$

$$\frac{1}{2\pi i} \int^{(\mathfrak{k})} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{\lambda+1}} d\zeta = a_\lambda \tag{1355}$$

gesetzt wird.

Mit diesem Beweise für die Entwickelbarkeit der gegebenen Funktion $f(z)$ in eine Potenzreihe ist zugleich eine praktisch wichtige Abschätzung der Koeffizienten der Reihe gewonnen. Ist nämlich g eine reelle positive Konstante von solcher Größe, daß $|f(z)|$ auf dem Kreise $\mathfrak{k}$ nirgends $> g$ wird, so folgt aus Gleichung (1355) mit Hilfe des Satzes 4 der Nr. **475**

$$|a_\lambda| \leqq \frac{g}{\varrho^\lambda}. \tag{1356}$$

Sobald man also eine Funktion $f(z)$, die in der Umgebung einer Stelle z_0 differenzierbar ist, so weit beherrscht, daß man für einen dieser Umgebung angehörenden, um z_0 als Mittelpunkt beschriebenen Kreis eine positive Konstante g angeben kann, welche daselbst vom absoluten Betrage der Funktion $f(z)$ niemals übertroffen wird, hat man durch die Ungleichung (1356) ein gewisses Urteil über die absolute Größe der Koeffizienten in der Entwickelung von $f(z)$ nach Potenzen von $(z - z_0)$ und hiermit auch darüber, wie schnell diese Entwickelung innerhalb jenes Kreises konvergiert.

Aus der Darstellbarkeit einer jeden innerhalb eines Kreises differenzierbaren Funktion durch eine konvergente Potenzreihe folgt ferner die Richtigkeit einer schon in Nr. **404** ausgesprochenen Behauptung. Nach Nr. **406** darf man nämlich die Summe einer solchen Potenzreihe durch gliedweise Differentiation differenzieren und erhält dadurch eine neue Potenzreihe, die im Innern des Konvergenzbereiches der ursprünglichen Reihe ebenfalls konvergiert. Auf diese neue Reihe ist aber der gleiche Satz noch einmal anwendbar, und so fort. Daher folgt aus dem vorhergehenden:

Wenn eine Funktion einer komplexen Veränderlichen in einem Kontinuum überhaupt differenzierbar ist, so ist sie daselbst auch beliebig oft differenzierbar.

Nachdem dies festgestellt, ergibt sich endlich dadurch, daß man beide Seiten der Gleichung (1354) eine beliebige Anzahl λ von Malen nacheinander differenziert und dann $z = z_0$ setzt,

$$f^{(\lambda)}(z_0) = \lambda(\lambda - 1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot a_\lambda$$

oder

$$a_\lambda = \frac{f^{(\lambda)}(z_0)}{\lambda!} \tag{1357}$$

und daher, solange z hinreichend nahe bei z_0 liegt,

$$\left| \begin{aligned} f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 \\ + \frac{f'''(z_0)}{3!}(z - z_0)^3 + \cdots . \end{aligned} \right. \tag{1358}$$

In diesem Sinne ist also der Satz von Taylor auf Funktionen komplexen Argumentes übertragbar.

483. Umkehrung des Integralsatzes von Cauchy. — Lehrsatz: *Wenn eine Funktion $f(z)$ einer komplexen Veränderlichen z in einem einfach zusammenhängenden Kontinuum $\mathfrak{T}$ stetig und so beschaffen ist, daß ihr Integral, erstreckt über einen beliebigen ganz in $\mathfrak{T}$ verlaufenden geschlossenen Integrationsweg immer gleich Null ist, so ist sie in $\mathfrak{T}$ differenzierbar.*

Unter den gemachten Voraussetzungen ist nämlich das von einer festen in $\mathfrak{T}$ liegenden Stelle a über einen beliebigen ganz in $\mathfrak{T}$ liegenden Integrationsweg $\mathfrak{l}$ bis zu einer veränderlichen zu $\mathfrak{T}$ gehörenden Stelle z erstreckte Integral $\overset{(\mathfrak{l})}{\int_a^z} f(\zeta)\,d\zeta$ bei festgehaltenem Werte von z von der Gestalt des Integrationsweges unabhängig, also eine Funktion $F(z)$ seiner oberen Grenze z. Diese Funktion ist ferner in $\mathfrak{T}$ differenzierbar und hat daselbst die Ableitung $f(z)$, denn die Angaben der Nr. **480** lassen sich ohne weiteres auf die hier mit $F(z)$ bezeichnete Funktion übertragen. Da nun aber eine in einem Kontinuum einmal differenzierbare Funktion eines komplexen Argumentes daselbst auch beliebig oft differenzierbar ist, so ist die Ableitung $F'(z) = f(z)$ in $\mathfrak{T}$ ebenfalls differenzierbar, wie behauptet wurde.

Neunzehnter Abschnitt.

Mehrfache Integrale.

Differentiation und Integration eines bestimmten Integrales in bezug auf einen Parameter.

484. Differentiation unter dem Integralzeichen. — Lehrsatz: *Im Gebiet von zwei reellen Veränderlichen x, y, von denen die zweite als Parameter bezeichnet werden möge, sei ein Bereich $\mathfrak{B}$* (Fig. 49) *durch die Bestimmung abgegrenzt, daß er diejenigen Stellen enthalten soll, bei denen die erste Koordinate x einem gegebenen abgeschlossenen Intervall* $(a \cdots b)$ *und zugleich die zweite Koordinate y einem gleichfalls gegebenen abgeschlossenen oder nicht abgeschlossenen Intervall $\mathfrak{J}$ angehört. Wenn dann $f(x, y)$ eine in dem Bereich $\mathfrak{B}$ stetige (reelle) Funktion bedeutet, so ist die für das Intervall $\mathfrak{J}$ durch das Integral*

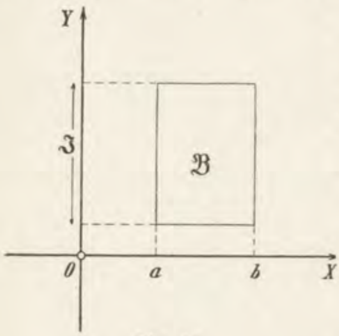


Fig. 49.

$$\int_a^b f(x, y)\,dx$$

erklärte Funktion des Parameters y in $\mathfrak{J}$ stetig. Hat ferner die Funktion $f(x,y)$ in $\mathfrak{B}$ überall eine partielle Ableitung in bezug auf y und ist diese in $\mathfrak{B}$ stetig, so ist die Funktion $\int_a^b f(x,y)\,dx$ in dem Intervall $\mathfrak{J}$ auch differenzierbar, und ihre Ableitung kann mittels der Formel

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx \tag{1359}$$

berechnet werden, d. h. dadurch, daß man unter dem Integralzeichen partiell nach dem Parameter differenziert.

Beweis: Es seien y und $(y+k)$ irgend zwei dem Intervall $\mathfrak{J}$ angehörende Zahlen. Dann ist

$$\int_a^b f(x, y+k)\,dx - \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b [f(x,y+k) - f(x,y)]\,dx.$$

Ist nun $\mathfrak{J}$ abgeschlossen, so ist auch $\mathfrak{B}$ ein abgeschlossener Bereich, also die Funktion $f(x, y)$ in $\mathfrak{B}$ gleichmäßig stetig und daher nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen positiven Konstanten ε eine zweite positive Konstante δ so bestimmbar, daß immer

$$|f(x, y+k) - f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{|b-a|}$$

wird, sobald $|k| < \delta$ ist, einerlei mit welcher Stelle des Bereiches $\mathfrak{B}$ die Stelle (x, y) zusammenfällt. Folglich ist für $|k| < \delta$ auch

$$\left|\int_a^b f(x, y+k)\,dx - \int_a^b f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{|b-a|}\,|b-a| = \varepsilon,$$

womit die behauptete Stetigkeit bewiesen ist.

Aber auch wenn das Intervall $\mathfrak{J}$ nicht abgeschlossen ist, bleibt die Behauptung richtig. Sie gilt dann nämlich zunächst für jeden abgeschlossenen Teil von $\mathfrak{J}$ und gerade deswegen, wie leicht einzusehen, auch für $\mathfrak{J}$ selbst.

Fügt man nun zweitens zu den bisherigen Voraussetzungen noch die weitere hinzu, daß $f(x, y)$ in $\mathfrak{B}$ überall nach y partiell differenzierbar und daß die partielle Ableitung $f_y(x, y)$ in $\mathfrak{B}$ stetig sei, so ergibt sich, wenn y und $(y+k)$ irgend zwei verschiedene in $\mathfrak{J}$ liegende Zahlen bedeuten,

$$(1360)\quad \begin{cases} \frac{1}{k}\left[\int_a^b f(x,y+k)\,dx - \int_a^b f(x,y)\,dx\right] = \int_a^b \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}\,dx \\ \qquad = \int_a^b f_y(x, y+\vartheta k)\,dx \\ \qquad = \int_a^b f_y(x,y)\,dx + \int_a^b [f_y(x, y+\vartheta k) - f_y(x,y)]\,dx, \end{cases}$$

wo ϑ eine im allgemeinen zugleich mit x veränderliche, aber stets zwischen 0 und 1 liegende Zahl bedeutet. Denkt man sich jetzt die Veränderlichen y und $(y+k)$ zunächst wieder auf einen abgeschlossenen Teil des Intervalles $\mathfrak{J}$ beschränkt, so erhält man, da die Funktion $f_y(x, y)$ in dem entsprechenden Teile von $\mathfrak{B}$ gleichmäßig stetig ist, durch ganz ähnliche Schlüsse wie eben die Gleichung

$$\lim_{k=0} \int_a^b [f_y(x, y+\vartheta k) - f_y(x,y)]\, dx = 0.$$

Also nähert sich auch die linke Seite der Gleichung (1360) bei verschwindendem k einem Grenzwert, und zwar dem Grenzwert $\int_a^b f_y(x,y)\,dx$, d. h. die Funktion $\int_a^b f(x,y)\,dx$ ist in dem betrachteten Teile des Intervalles $\mathfrak{J}$ und, da dieser Teil nach Belieben abgegrenzt werden konnte, auch in dem Intervall $\mathfrak{J}$ selbst differenzierbar, und ihre Ableitung wird in der Tat durch die Gleichung (1359) gegeben.

485. Ausdehnung auf den Fall veränderlicher Grenzen. — Die in der vorigen Nummer gewonnenen Ergebnisse lassen eine Erweiterung zu für den Fall, daß an die Stelle der Konstanten a, b Integrationsgrenzen treten, die sich zugleich mit y ändern können. Sind nämlich $\varphi(y), \chi(y)$ zwei in ein und demselben abgeschlossenen Intervall $\mathfrak{J}$ stetige Funktionen von y und ist $f(x,y)$ eine Funktion, welche an allen denjenigen Stellen stetig ist, bei denen (Fig. 50) y in $\mathfrak{J}$ und zugleich x nicht außerhalb der Grenzen $\varphi(y)$, $\chi(y)$ liegt, so ist die für das Intervall $\mathfrak{J}$ durch das Integral

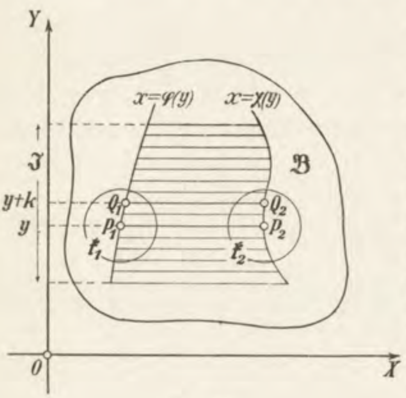


Fig. 50.

$$\int_{\varphi(y)}^{\chi(y)} f(x,y)\,dx$$

erklärte Funktion von y in $\mathfrak{J}$ stetig. Sind ferner $\varphi(y)$ und $\chi(y)$ in $\mathfrak{J}$ differenzierbar und ist zugleich die Funktion $f(x,y)$ nicht nur für das soeben abgegrenzte Wertgebiet der Veränderlichen x, y, sondern für einen größeren[1]), dasselbe ganz im Innern enthaltenden Bereich $\mathfrak{B}$ erklärt und daselbst mit einer stetigen partiellen

[1]) Diese Voraussetzung läßt sich durch weniger weitgehende Annahmen ersetzen, doch wird dann sowohl der Ausdruck der Behauptung als ihr Beweis umständlicher. Vgl. W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. 1, zweite Aufl. Leipzig und Berlin 1912, S. 113 f.

Ableitung $f_y(x, y)$ in bezug auf y ausgestattet, so ist die Funktion $\int_{\varphi(y)}^{\chi(y)} f(x, y)\,dx$ in dem Intervall $\mathfrak{J}$ auch differenzierbar, und zwar wird ihre Ableitung gegeben durch die Formel

$$(1361)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\chi(y)} f(x,y)\,dx = &\int_{\varphi(y)}^{\chi(y)} f_y(x,y)\,dx \\ &+ f[\chi(y), y]\chi'(y) - f[\varphi(y), y]\varphi'(y). \end{aligned} \right.$$

Führt man nämlich an Stelle von x eine neue Integrationsveränderliche t ein, indem man

$$x = \varphi(y) + t[\chi(y) - \varphi(y)]$$

setzt, so wird

$$\int_{\varphi(y)}^{\chi(y)} f(x,y)\,dx = \int_0^1 f\{\varphi(y) + t[\chi(y) - \varphi(y)], y\}[\chi(y) - \varphi(y)]\,dt.$$

Hier ist aber das rechts stehende Integral, auch wenn man von den Funktionen $\varphi(y)$, $\chi(y)$ und $f(x, y)$ zunächst nichts weiter als die Stetigkeit voraussetzt, nach den Ergebnissen der Nr. **484** eine in $\mathfrak{J}$ stetige Funktion von y, denn seine Grenzen sind konstant und die unter dem Integralzeichen stehende Funktion ist stetig, solange y in $\mathfrak{J}$ liegt und $0 \leqq t \leqq 1$ ist. Also ist auch die in dem Intervall $\mathfrak{J}$ durch das links stehende Integral dargestellte Funktion daselbst stetig, wie behauptet wurde.

Sind ferner auch noch die übrigen oben angegebenen Voraussetzungen erfüllt, so kann man bei gegebenem Werte von y stets eine positive Zahl ϱ so bestimmen, daß die Flächen der beiden Kreise $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ vom Radius ϱ (Fig. 50), welche die Punkte P_1, P_2 mit den Koordinaten $\varphi(y), y$ und $\chi(y), y$ zu Mittelpunkten haben, ganz in $\mathfrak{B}$ liegen, und dann dadurch, daß man für den absoluten Wert des Zuwachses k eine hinreichend kleine obere Grenze vorschreibt, stets erreichen, daß der Punkt Q_1 mit den Koordinaten $\varphi(y+k), (y+k)$ innerhalb $\mathfrak{k}_1$ und zugleich der Punkt Q_2 mit den Koordinaten $\chi(y+k), (y+k)$ innerhalb $\mathfrak{k}_2$ liegt. Sobald dies erreicht ist, kann man aber die vier Punkte P_1, P_2, Q_1, Q_2 in ein Rechteck einschließen, dessen Seiten zu den Koordinatenachsen parallel sind und dessen Fläche ganz in $\mathfrak{B}$ liegt, und dann, solange k von Null verschieden bleibt, die folgende Umformung vornehmen:

$$\frac{1}{k}\left[\int_{\varphi(y+k)}^{\chi(y+k)} f(x,y+k)\,dx - \int_{\varphi(y)}^{\chi(y)} f(x,y)\,dx\right] = \int_{\varphi(y)}^{\chi(y)} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}\,dx$$
$$+\frac{1}{k}\int_{\chi(y)}^{\chi(y+k)} f(x,y+k)\,dx - \frac{1}{k}\int_{\varphi(y)}^{\varphi(y+k)} f(x,y+k)\,dx.$$

Hieraus folgt aber mit Hilfe des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung leicht

$$\frac{1}{k}\left[\int_{\varphi(y+k)}^{\chi(y+k)} f(x,y+k)\,dx - \int_{\varphi(y)}^{\chi(y)} f(x,y)\,dx\right] = \int_{\varphi(y)}^{\chi(y)} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}\,dx$$
$$+\frac{\chi(y+k)-\chi(y)}{k} f[\chi(y+\vartheta k), y+k]$$
$$-\frac{\varphi(y+k)-\varphi(y)}{k} f[\varphi(y+\vartheta' k), y+k)],$$

wo ϑ und ϑ' zwischen 0 und 1 liegende Zahlen bedeuten. Nunmehr braucht man nur k gegen Null konvergieren zu lassen, um sofort die Richtigkeit der zu beweisenden Gleichung (1361) zu erkennen.

486. Begriff eines Doppelintegrals. — Nach der vorangehenden Nummer stellt ein bestimmtes Integral, in welchem die unter dem Integralzeichen stehende Funktion nicht nur von der Integrationsveränderlichen, sondern außerdem noch von einem Parameter abhängt und auch die Grenzen zugleich mit diesem Parameter veränderlich sein können, in vielen Fällen eine in einem Intervall stetige Funktion des Parameters dar und kann daher sehr oft in bezug auf den Parameter abermals über ein Intervall integriert werden. Diese Möglichkeit führt zu der folgenden

Erklärung: *Jedes bestimmte Integral, welches dadurch entsteht, daß man ein von einem Parameter abhängendes bestimmtes Integral in bezug auf diesen Parameter abermals über ein Intervall integriert, heißt ein* **Doppelintegral.**

Die allgemeine Form eines Doppelintegrals ist hiernach

$$\int_b^B \int_{\varphi(y)}^{\chi(y)} f(x,y)\,dx\,dy,$$

und zwar ist hierbei die unter den Integralzeichen stehende Funktion $f(x,y)$ zuerst in bezug auf x zwischen den im allgemeinen zugleich mit y veränderlichen Grenzen $\varphi(y), \chi(y)$ und dann die so entstehende Funktion von y zwischen den konstanten Grenzen b und B zu integrieren, so daß sich das innere Integralzeichen auf das innere Differential dx und das äußere Integralzeichen auf das äußere Differential dy bezieht.

487. Umkehrung der Integrationsfolge. — Da man bei der Differentiation eines von einem Parameter abhängenden bestimmten Integrales mit konstanten Grenzen unter gewissen Voraussetzungen die Reihenfolge der vorzunehmenden Integration und Differentiation umkehren darf, so liegt die Frage nahe, ob und unter welchen Bedingungen eine ähnliche Vertauschung bei einem Doppelintegral zulässig ist. Eine allgemeine Antwort hierauf wird sich später in der Lehre von den Flächenintegralen ganz von selbst ergeben. Aber für den besonderen Fall, daß die inneren Integrationsgrenzen konstant sind, läßt sich auch ohne Heranziehung des Begriffs eines Flächenintegrals lediglich durch Benutzung des Satzes der Nr. **484** eine Antwort gewinnen. Sie lautet in allen praktisch vorkommenden Fällen bejahend und wird gegeben durch den folgenden

Lehrsatz: *In einem Doppelintegral mit konstanten Grenzen*

$$\int_b^B \int_a^A f(x,y)\,dx\,dy$$

ist die Reihenfolge der Integrationen umkehrbar, sobald die unter den Integralzeichen stehende Funktion $f(x,y)$ in dem ganzen Integrationsgebiet, d. h. im Innern und auf dem Umfang desjenigen Rechtecks stetig ist, dessen Gegenseiten auf den Geradenpaaren $x=a$, $x=A$ und $y=b$, $y=B$ liegen. Es gilt also dann die Gleichung

$$\int_b^B \int_a^A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^A \int_b^B f(x,y)\,dy\,dx. \tag{1362}$$

Der Beweis ergibt sich durch eine Vergleichung der Integrale

$$J_1 = \int_b^t \int_a^A f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{und} \qquad J_2 = \int_a^A \int_b^t f(x,y)\,dy\,dx,$$

in denen unter t eine dem abgeschlossenen Intervall $(b \cdots B)$ angehörende, aber sonst nicht weiter beschränkte Veränderliche zu verstehen ist. Die durch diese Integrale dargestellten Funktionen von t sind nämlich in dem Intervall $(b \cdots B)$ beide differenzierbar und haben beide die gleiche Ableitung. In der Tat ist ja nach Nr. **429**

$$\frac{dJ_1}{dt} = \int_a^A f(x,t)\,dx.$$

Zugleich ist aber auch

$$\frac{dJ_2}{dt} = \int_a^A f(x,t)\,dx,$$

da man die Ableitung $\frac{dJ_2}{dt}$ nach Nr. 484 dadurch erhält, daß man unter dem Integralzeichen differenziert. Folglich ist die Differenz $(J_1 - J_2)$ eine Konstante, und da J_1 und J_2 für $t = b$ beide gleich Null werden, ist diese Konstante gleich Null, also $J_1 = J_2$ für jeden Wert von t. Insbesondere gilt dies für $t = B$, d. h. es besteht die zu beweisende Gleichung (1362).

488. Anwendbarkeit zur Berechnung einfacher Integrale. — Mit Hilfe des eben bewiesenen Satzes kann man ein gegebenes bestimmtes Integral zuweilen auch dann ausrechnen, wenn man das unbestimmte Integral der unter dem Integralzeichen stehenden Funktion nicht in geschlossener Form darzustellen vermag. Um hierfür ein Beispiel zu geben, sei nach willkürlicher Annahme zweier voneinander verschiedenen positiven Konstanten a, b eine Funktion einer Veränderlichen x für das abgeschlossene Intervall $(0 \cdots 1)$ durch den Ausdruck

$$\frac{x^b - x^a}{\lg x}$$

erklärt, mit dem Zusatz, daß diesem Ausdruck für $x = 0$ der Wert 0 und für $x = 1$ der Wert $(b - a)$ beigelegt werden soll, so daß die Funktion an jeder der Grenzen des Intervalls $(0 \cdots 1)$ mit dem zugehörigen Grenzwert des im Innern geltenden Ausdrucks übereinstimmt. Dann kann man das Integral

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\lg x}\,dx$$

nicht auf dem üblichen Wege ermitteln. Aber man kann dasselbe zunächst in ein Doppelintegral verwandeln, indem man für die unter dem Integralzeichen stehende Funktion den damit übereinstimmenden Ausdruck $\int_a^b x^y\,dy$ einsetzt. So erhält man

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\lg x}\,dx = \int_0^1 \int_a^b x^y\,dy\,dx,$$

und nun liefert die Umkehrung der Reihenfolge der Integrationen

$$(1363)\qquad \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\lg x}\,dx = \int_a^b \int_0^1 x^y\,dx\,dy = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \lg\frac{b+1}{a+1},$$

womit das links stehende Integral gefunden ist.

Ein anderes Beispiel bietet das in der Lehre vom sogenannten logarithmischen Potential vorkommende Integral

$$J = \int_0^\pi \lg(1 - 2r\cos\varphi + r^2)\,d\varphi,$$

wo r eine zwischen (-1) und 1 liegende Konstante bedeutet. Man hat nämlich

$$J = \int_0^\pi \int_0^r \frac{-2\cos\varphi + 2\varrho}{1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2}\,d\varrho\,d\varphi$$

und erhält durch Umkehrung der Integrationsfolge

$$J = \int_0^r \int_0^\pi \frac{-2\cos\varphi + 2\varrho}{1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2}\,d\varphi\,d\varrho.$$

Damit ist erreicht, daß es sich bei der Integration in bezug auf φ nur darum handelt, eine rationale Funktion von $\cos\varphi$ zu integrieren. Um dies auszuführen, empfiehlt es sich, den zu integrierenden Ausdruck unter vorläufigem Ausschluß des Falles $\varrho = 0$ zunächst mittels der Gleichung

$$\frac{-2\cos\varphi + 2\varrho}{1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2} = \frac{1}{\varrho}\left(1 + \frac{\varrho^2 - 1}{1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2}\right)$$

umzuformen. Nachdem dies geschehen, braucht man nur an Stelle von φ durch die Gleichung $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = u$ eine neue Integrationsveränderliche u einzuführen. Dann ergibt sich nach einfachen Zwischenrechnungen die für $0 \leqq \varphi < \pi$ geltende Gleichung

$$(1364)\qquad \int \frac{-2\cos\varphi + 2\varrho}{1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2}\,d\varphi = \frac{1}{\varrho}\left[\varphi - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\right],$$

wo das Zeichen arctg den Hauptwert bedeutet. Eine kleine Nebenschwierigkeit besteht nun noch darin, daß die rechte Seite dieser Gleichung streng genommen für $\varphi = \pi$ ihren Sinn verliert, indem dann das Zeichen $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ keine Bedeutung mehr hat. Aber diese Schwierigkeit verschwindet sofort, wenn man bedenkt, daß man

$$\int_0^\pi \frac{-2\cos\varphi + 2\varrho}{1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2}\,d\varphi = \lim_{\varepsilon = +0} \int_0^{\pi - \varepsilon} \frac{-2\cos\varphi + 2\varrho}{1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2}\,d\varphi$$

setzen darf. Tut man dies, so erhält man mittels der Gleichung (1364)

$$\int_0^\pi \frac{-2\cos\varphi + 2\varrho}{1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2}\, d\varphi = 0,$$

und dieses Endergebnis bleibt auch für $\varrho = 0$ bestehen, da $\int_0^\pi (-2\cos\varphi)\, d\varphi = 0$ ist. Folglich ist auch das obige Doppelintegral gleich Null und daher

$$(1365) \qquad \int_0^\pi \lg(1 - 2r\cos\varphi + r^2)\, d\varphi = 0 \quad \text{für} \quad -1 < r < 1,$$

womit wieder ein Integral gefunden ist, welches sich sonst nicht ohne weiteres berechnen läßt.[1])

Anmerkung. — Ist R eine Konstante, deren absoluter Wert größer als Eins ist, so ist

$$\lg(1 - 2R\cos\varphi + R^2) = \lg(R^2) + \lg\left[1 - 2\frac{1}{R}\cos\varphi + \left(\frac{1}{R}\right)^2\right].$$

Nun ist aber jetzt $-1 < \frac{1}{R} < 1$, und eben deswegen ergibt sich

$$(1366) \qquad \int_0^\pi \lg(1 - 2R\cos\varphi + R^2)\, d\varphi = \pi \lg(R^2) \quad \text{für} \quad R^2 > 1.$$

Nach Anleitung dieser Beispiele kann man, wenn man ein vorgelegtes bestimmtes Integral nicht in der üblichen Weise zu berechnen vermag, den Versuch machen, der unter dem Integralzeichen stehenden Funktion die Form eines bestimmten Integrales zu geben, welches die ursprüngliche Integrationsveränderliche als Parameter enthält, und dann durch Umkehrung der Reihenfolge der Integrationen zum Ziel zu gelangen. Hiermit hat man ein neues Hilfsmittel zur Berechnung bestimmter Integrale, welches beim Versagen anderer Hilfsmittel in der Tat zuweilen mit Erfolg angewendet werden kann. Aber leider ist dieses neue Hilfsmittel nur in ganz vereinzelten Fällen von Nutzen. So gewährt es z. B.

1) Andere Beispiele, die sich in ähnlicher Weise behandeln lassen, wenn es sich dabei auch meistens um uneigentliche Integrale (Nr. **531**—**536**) handelt, finden sich in O. Schloemilch, Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis, 2. Teil, Leipzig 1870, § 21, 4. Auflage, bearbeitet von R. Henke, Leipzig 1900, § 23, sowie in manchen Lehrbüchern der Integralrechnung.

schon dann keinen Vorteil mehr, wenn man statt des ersten der eben berechneten Integrale das Integral $\int_0^c \frac{x^a - x^b}{\lg x}\,dx$ betrachtet, welches sich von dem durch die Gleichung (1363) gewonnenen Integral nur dadurch unterscheidet, daß die obere Grenze nicht den Wert 1, sondern irgend einen anderen positiven Wert c hat. Allerdings kann man das neue Integral mittels der Gleichung

$$\int_0^c \frac{x^a - x^b}{\lg x}\,dx = \int_0^c \int_a^b x\;dy\,dx = \int_a^b \int_0^c x\;dx\,dy = \int_a^b \frac{c^{y+1}}{y+1}\,dy$$

in ähnlicher Weise umformen wie das frühere, kommt aber nun nicht mehr weiter, da jetzt das unbestimmte Integral $\int \frac{c^{y+1}}{y+1}\,dy$ nicht in geschlossener Form darstellbar ist.

Flächen- und Raumintegrale.

489. Volumen eines räumlichen Bereiches. — Im nachfolgenden möge der Begriff eines einfachen Polyeders und der Begriff des Rauminhalts eines solchen Polyeders[1]) nebst den damit zusammenhängenden Sätzen über die Inhaltsberechnung einfacher Polyeder als aus der elementaren Stereometrie bekannt angesehen werden. Ferner soll ein räumlicher Bereich ebenflächig begrenzt heißen, wenn er aus dem Innenraum eines einfachen Polyeders besteht, oder aus demjenigen Teil eines solchen Innenraumes, der nach Ausschneiden einer endlichen Anzahl einfacher Polyeder übrig bleibt, oder aus einer endlichen Anzahl von Bereichen dieser Arten, von denen keine zwei einen inneren Punkt gemein haben. Dann läßt sich der Begriff des Rauminhalts für einen endlichen räumlichen Bereich von beliebiger Begrenzung fast wörtlich ebenso feststellen wie in Nr. **418** der allgemeine Begriff des Flächeninhalts eines ebenen Bereiches. Ist nämlich im Raume ein endlicher dreifach ausgedehnter Bereich $\mathfrak{K}$ gegeben, so gibt es einerseits eingeschlossene ebenflächig begrenzte Bereiche, d. h. solche, deren Punkte sämtlich zu $\mathfrak{K}$ gehören, und

1) Eingehende Angaben über die Erklärung dieser Begriffe und die dabei zu überwindenden Schwierigkeiten finden sich in W. Killing und H. Hovestadt, Handbuch des mathematischen Unterrichts, I, Leipzig und Berlin 1910, § 6 und 7, Seite 101—146.

andererseits umschließende ebenflächig begrenzte Bereiche. d. h. solche, die jeden Punkt von $\mathfrak{K}$ im Innern oder auf der Oberfläche enthalten. Ferner kann der Rauminhalt eines eingeschlossenen ebenflächig begrenzten Bereiches niemals größer sein als der eines umschließenden. Daher hat die Menge aller Rauminhalte von eingeschlossenen ebenflächig begrenzten Bereichen eine endliche obere Grenze g und die Menge der Rauminhalte aller umschließenden ebenflächig begrenzten Bereiche eine endliche untere Grenze G, und es ist immer $g \leqq G$.

Ist nun $g = G$, so schreibt man auch dem Bereich $\mathfrak{K}$ selbst einen **Rauminhalt** oder ein **Volumen** zu und versteht darunter den gemeinsamen Wert der Grenzen g und G. Man sagt dann auch kurz der Bereich $\mathfrak{K}$ sei **meßbar**. Ist dagegen $g < G$, so kann bei dem Bereich $\mathfrak{K}$ von einem Volumen schlechthin nicht mehr die Rede sein, sondern höchstens noch von einem inneren Volumen g und einem äußeren Volumen G.

Auf Grund dieser Erklärung überzeugt man sich leicht, daß jeder gerade oder schiefe Zylinder, dessen ebene Begrenzungsflächen ganz im Endlichen liegen und parallel sind, ein Volumen hat, sobald seiner Grundfläche ein Flächeninhalt zukommt, und daß dann das Zylindervolumen dem Produkt der Höhe mit dem Inhalt der Grundfläche gleich ist.

Nachdem dies festgestellt, braucht man sich bei der Entscheidung der Frage, ob einem gegebenen zusammenhängenden und endlichen räumlichen Bereiche $\mathfrak{K}$ ein Volumen zukommt, und im Bejahungsfall auch bei der Berechnung dieses Volumens nicht mehr streng an den Wortlaut der ursprünglichen Erklärung zu binden. Man darf vielmehr statt der eingeschlossenen ebenflächig begrenzten Bereiche auch solche eingeschlossene Bereiche betrachten, die sich in endlich viele Zylinder von der eben vorausgesetzten Beschaffenheit und möglicherweise auch noch endlich viele einfache Polyeder zerlegen lassen. Ebenso darf man die umschließenden ebenflächig begrenzten Bereiche durch umschließende Bereiche ersetzen, die in ähnlicher Weise zerlegbar sind. Sobald man dann zeigen kann, daß die obere Grenze aller Volumina von eingeschlossenen und die untere Grenze aller Volumina von umschließenden Bereichen dieser allgemeineren Art zusammenfallen, kommt auch dem Bereich $\mathfrak{K}$ selbst ein Volumen zu, und zwar ist dieses gleich dem gemeinsamen Wert der beiden eben erwähnten Grenzen.

490. Zusammenhang der Begriffe Volumen und Flächenintegral. — In der allgemeinen Aufgabe der Volumenberechnung räumlicher Bereiche ist als ein besonderer Fall, der aber deswegen wichtig ist, weil manche verwickeltere Fälle auf ihn zurückgeführt werden können, die folgende Aufgabe enthalten:

Nach Annahme eines Systems rechtwinkeliger räumlicher Koordinaten x, y, z (Fig. 51), sei in der xy-Ebene ein zusammenhängender abgeschlossener meßbarer (Nr. **418**) Bereich $\mathfrak{B}$ gegeben und für diesen Bereich eine daselbst nirgends negative Funktion $f(x, y)$ mit endlicher oberer Grenze erklärt. Ferner sei ein räumlicher Bereich $\mathfrak{K}$ durch die Bestimmung abgegrenzt, daß ein be-

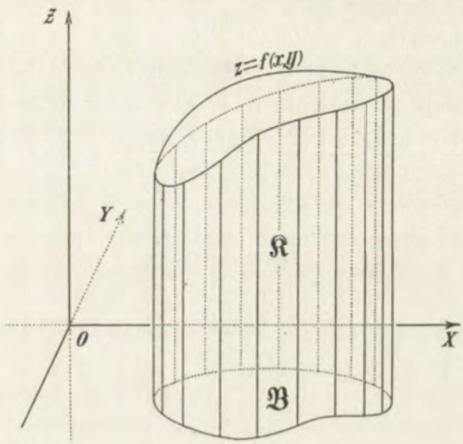


Fig. 51.

liebiger Punkt (x, y, z) ihm dann, aber auch nur dann angehören soll, wenn

erstens der in der xy-Ebene liegende Punkt mit den Koordinaten x, y zu $\mathfrak{B}$ gehört und zugleich

zweitens $\quad 0 \leqq z \leqq f(x, y) \quad$ ist,

so daß der Bereich $\mathfrak{K}$ in dem praktisch allein in Betracht kommenden Fall, daß der Rand von $\mathfrak{B}$ eine einfache geschlossene Linie und die Funktion $f(x, y)$ in $\mathfrak{B}$ stetig ist, unten von der xy-Ebene, seitlich von der durch den Rand von $\mathfrak{B}$ gehenden zur xy-Ebene senkrechten Zylinderfläche und oben von der durch die Gleichung $z = f(x, y)$ dargestellten Fläche begrenzt wird. Man soll entscheiden, wann einem Bereich dieser Art ein Volumen zukommt, und gegebenenfalls dieses Volumen ermitteln.

Es liegt nahe, den Bereich $\mathfrak{B}$ in mehrere meßbare Teile zu zerlegen, sodann über jeden Teil als Grundfläche zwei gerade Zylinder zu stellen, von denen der eine nur Punkte von $\mathfrak{K}$ umfaßt, aber dabei doch möglichst hoch ist, während der andere alle senkrecht über seiner Grundfläche liegenden Punkte von $\mathfrak{K}$ enthält, aber dabei doch möglichst niedrig ist, hierauf durch Zusammenfassung der niedrigeren Zylinder einen eingeschlossenen und durch Zusammenfassung der höheren Zylinder einen umschließenden Körper zu bilden und schließlich zu fragen, wann man die Volumina dieser beiden Körper durch Verfeinerung der Teilung des Bereiches $\mathfrak{B}$ einander beliebig nähern und wie man dann ihren gemeinsamen Grenzwert berechnen kann. So kommt man auf ähnliche Überlegungen wie bei der Erklärung des Begriffes eines bestimmten Integrales und gelangt dadurch auch zu einem ähnlichen neuen Begriff, der als Flächenintegral bezeichnet wird.

491. Begriff eines Flächenintegrals. — Im Anschluß an die eben angedeuteten geometrischen Betrachtungen, aber ohne Benutzung geometrischer Sätze, gelangt man zu dem Begriff eines Flächenintegrals durch den folgenden Gedankengang: In einer Ebene mit einem System rechtwinkeliger Koordinaten x, y sei ein endlicher meßbarer Bereich $\mathfrak{B}$ gegeben, und für diesen Bereich sei eine reellwertige Funktion $f(x, y)$ erklärt, die daselbst beschränkt ist, d. h. zwischen endlichen Grenzen enthalten bleibt.[1]) Ferner seien nach Zerlegung des Bereiches $\mathfrak{B}$ in eine beliebige Anzahl n von meßbaren Teilen und Festsetzung irgend einer Rangordnung zwischen ihnen

$$\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_n$$

die Flächeninhalte der einzelnen Teile und für $\lambda = 1, 2, \cdots n$ jedesmal g_λ und G_λ die untere und die obere Grenze der Funktion $f(x, y)$ für den λ-ten Teil unter der Voraussetzung, daß jedem Teil

1) Der Bereich $\mathfrak{B}$ kann abgeschlossen oder nicht abgeschlossen sein. In letzterem Falle kann man ihn durch Hinzunahme seiner bisher ausgeschlossenen Grenzpunkte zu einem abgeschlossenen Bereich ergänzen und zugleich die ursprüngliche Erklärung der Funktion $f(x, y)$ in mannigfach verschiedener Weise auf diese Grenzpunkte ausdehnen. Man darf nämlich nach willkürlicher Annahme zweier festen Grenzen die Werte, welche die Funktion $f(x, y)$ an den erwähnten Grenzpunkten annehmen soll, zwischen jenen Grenzen ganz nach Belieben vorschreiben, ohne daß die Wahl dieser Werte auf die nachfolgenden Betrachtungen und Erklärungen irgend einen Einfluß hätte.

auch alle seine Grenzpunkte zugerechnet werden. Dann gelten für die aus den so erklärten Zahlen gebildeten Summen

$$E = \sum_{\lambda=1}^{n} g_\lambda \sigma_\lambda \tag{1367}$$

und

$$U = \sum_{\lambda=1}^{n} G_\lambda \sigma_\lambda \tag{1368}$$

die folgenden Sätze:

1. — *Es ist immer*

$$E \leqq U.$$

2. — *Wenn man die Teilung des Bereiches* $\mathfrak{B}$ *dadurch verfeinert, daß man einen oder mehrere der bereits vorhandenen Teile abermals in meßbare Teile zerlegt, so kann an die Stelle der Summe* E *niemals eine kleinere und an die Stelle der Summe* U *niemals eine größere Zahl treten.*

3. — *Ist außer der bisher vorausgesetzten Teilung des Bereiches* $\mathfrak{B}$ *noch irgend eine andere den gleichen Voraussetzungen genügende Teilung dieses Bereiches gegeben und sind* E' *und* U' *diejenigen Summen, welche für diese zweite Teilung die gleiche Bedeutung haben wie die Summen* E *und* U *für die erste, so ist immer*

$$E \leqq U' \qquad \text{und} \qquad E' \leqq U.$$

Denkt man sich nämlich die beiden gegebenen Teilungen übereinander gelegt, so entsteht eine dritte Teilung des Bereiches $\mathfrak{B}$, welche sich aus jeder der beiden gegebenen Teilungen durch weitere Zerlegung der vorhandenen Teile ableiten läßt. Nun kann zwar, wenn ein Teil σ der ersten Teilung von einem Teile σ' der zweiten teilweise überdeckt wird, sehr wohl der Fall eintreten, daß die Gesamtheit der gemeinsamen Punkte in mehrere getrennte Stücke zerfällt, ja man könnte, indem man zur Begrenzung von σ oder σ' Stücke von Wellenlinien benutzt wie diejenige, die durch die Gleichungen $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ und $y = 0$ für $x = 0$ dargestellt wird, auch Beispiele von Fällen herstellen, in denen die Gesamtheit der sowohl zu σ als zu σ' gehörenden Punkte aus unendlich vielen getrennten Stücken besteht. Aber es steht nichts im Wege, festzusetzen, daß bei der Abzählung der Teile der dritten Teilung die Gesamtheit aller Punkte, welche ein und demselben

Teil der ersten und ein und demselben Teil der zweiten Teilung gemeinsam sind, stets als ein einziger Teil gelten soll, einerlei ob sie zusammenhängend ist oder nicht. Dann zerfällt der Bereich $\mathfrak{B}$ auch bei der dritten Teilung in eine endliche Anzahl meßbarer Teile, und wenn nun E'' und U'' diejenigen Summen bedeuten, die für die dritte Teilung die gleiche Bedeutung haben wie E und U für die erste, so ist

$$E \leqq E'' \leqq U'' \leqq U' \quad \text{und} \quad E' \leqq E'' \leqq U'' \leqq U,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Daraus folgt

4. — *Die Menge aller Werte, deren die Summe E für verschiedene Teilungen fähig ist, hat eine endliche obere Grenze E^*, und die Menge aller Werte, deren die Summe U fähig ist, hat eine endliche untere Grenze U^*, und es ist immer*

$$E^* \leqq U^*.$$

Hierauf gründet sich nunmehr die folgende

Erklärung: *Wenn die Funktion $f(x, y)$ in dem Bereich $\mathfrak{B}$ nicht nur beschränkt, sondern auch so beschaffen ist, daß die eben erklärten Grenzen E^* und U^* einander gleich sind, so sagt man, sie sei über diesen Bereich* **integrierbar**. *Zugleich nennt man dann den gemeinsamen Wert von E^* und U^* das über $\mathfrak{B}$ erstreckte* **Flächenintegral** *der Funktion $f(x, y)$ und bezeichnet dasselbe durch*

$$\int^{(\mathfrak{B})} f(x, y)\, d\sigma.$$

Genau so wie den Satz von der Integrierbarkeit stetiger Funktionen einer Veränderlichen beweist man mit Hilfe des Begriffes der gleichmäßigen Stetigkeit auch den folgenden

Lehrsatz: *Wenn eine Funktion von zwei Veränderlichen in einem abgeschlossenen meßbaren Bereiche stetig ist, so ist sie auch über diesen Bereich integrierbar.*

Natürlich ist die Stetigkeit nur eine hinreichende Bedingung der Integrierbarkeit, aber keine notwendige. Denn man sieht sofort, daß eine in einem abgeschlossenen meßbaren Bereiche zwischen endlichen Grenzen enthalten bleibende Funktion auch dann über diesen Bereich integrierbar ist, wenn sie daselbst nur im allgemeinen stetig ist, aber auch Unstetigkeitsstellen hat, sobald man nur diese letzteren in endlich viele Flächenstücke von beliebig kleinem Gesamtinhalt einschließen kann, sobald also z. B. Unstetigkeiten nur in einer endlichen Anzahl von Punkten und gewöhnlichen Linienstücken stattfinden.

Mit Rücksicht auf die Ausführungen der Nr. **489** ergibt sich endlich aus dem vorangehenden der folgende

Lehrsatz: *Wenn in der xy-Ebene eines Systems rechtwinkeliger räumlicher Koordinaten x, y, z ein zusammenhängender abgeschlossener meßbarer Bereich $\mathfrak{B}$ abgegrenzt und für denselben irgend eine durchweg stetige und nirgends negative Funktion $f(x,y)$ gegeben ist, so kommt dem endlichen räumlichen Bereich, der von dem Bereich $\mathfrak{B}$, den von seinen Grenzpunkten bis zur Fläche $z=f(x,y)$ gehenden Parallelen zur z-Achse und dieser Fläche selbst begrenzt wird, ein Volumen zu, und dieses wird durch das Flächenintegral* $\int^{(\mathfrak{B})} f(x,y)\,d\sigma$ *dargestellt.*

492. Hilfssätze. — Bei der Beantwortung der Frage, wie man ein vorgelegtes Flächenintegral zahlenmäßig ausrechnen kann, leisten die folgenden Hilfssätze gute Dienste:

1. — *Wenn ein Kreis von einem unveränderlichen Radius ϱ sich in seiner Ebene so bewegt, daß sein Mittelpunkt eine Strecke durchläuft, und l die Länge dieser Strecke bedeutet, so wird der*

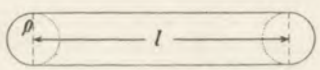


Fig. 52.

Inhalt des von der Fläche des Kreises überstrichenen Bereiches durch den Ausdruck

$$2\varrho l + \pi\varrho^2$$

dargestellt.

Denn der überstrichene Bereich läßt sich (Fig. 52) in ein Rechteck von den Seitenlängen l und 2ϱ und zwei Halbkreisflächen vom Radius ϱ zerlegen.

2. — *Wenn ein Kreis von einem unveränderlichen Radius ϱ sich in seiner Ebene so bewegt, daß sein Mittelpunkt zwei aneinander stoßende, nicht in ein und derselben Geraden liegende Strecken durchläuft, und l_1 und l_2 die Längen dieser Strecken bezeichnen, so ist der Inhalt des von der Fläche des Kreises überstrichenen Bereiches kleiner als*

$$2\varrho(l_1 + l_2) + \pi\varrho^2.$$

Denn der Inhalt des überstrichenen Bereiches (Fig. 53) ergibt sich, wenn man die Inhalte der Bereiche, die beim Durchlaufen der beiden Strecken überstrichen werden, zusammenzählt und dann den Inhalt des ihnen gemeinsamen Flächenstücks abzieht. Nun enthält aber dieses letztere eine volle Kreisfläche vom Radius ϱ

Fig, 53.

und wird durch diese noch nicht gänzlich erschöpft, hat also einen Inhalt, der größer ist als $\pi\varrho^2$. Folglich ist der Inhalt des beim Durchlaufen der beiden Strecken überstrichenen Bereiches kleiner als

$$(2\varrho l_1 + \pi\varrho^2) + (2\varrho l_2 + \pi\varrho^2) - \pi\varrho^2 = 2\varrho(l_1 + l_2) + \pi\varrho^2,$$

wie behauptet wurde.

Durch wiederholte Anwendung des gleichen Schlusses ergibt sich

3. — *Wenn ein Kreis von einem unveränderlichen Radius ϱ sich in seiner Ebene so bewegt, daß sein Mittelpunkt einen nicht ganz in ein und derselben Geraden enthaltenen Streckenzug durchläuft und L die Gesamtlänge dieses Streckenzuges bedeutet, so ist der Inhalt des hierbei von der Fläche des Kreises überstrichenen Bereiches kleiner als*

$$2\varrho L + \pi\varrho^2$$

und, wenn der Streckenzug geschlossen ist (Fig. 54), *sogar kleiner als $2\varrho L$.*

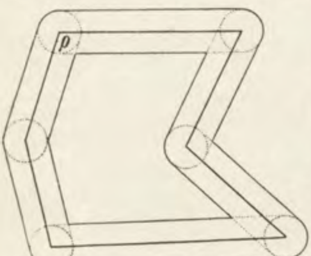


Fig. 54.

Mit Hilfe dieser einfachen geometrischen Sätze läßt sich endlich noch ein vierter Satz begründen, der etwas verwickelter, aber für das Nachfolgende besonders wichtig ist, nämlich

4. — *Wenn ein endlicher ebener zweifach ausgedehnter Bereich $\mathfrak{B}$ einen Flächeninhalt hat, so ist es nach willkürlicher Annahme einer beliebig klei-*

nen positiven Konstanten ε immer möglich, eine zugeordnete positive Konstante ϱ und zwei ebene Bereiche $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ *so zu bestimmen, daß folgende Bedingungen erfüllt werden:*

1. — *Der Bereich* $\mathfrak{B}_1$ *liegt ganz im Innern von* $\mathfrak{B}$, *und seine Grenze besteht aus einer endlichen Anzahl von Strecken und Kreisbogen.*
2. — *Der Bereich* $\mathfrak{B}_2$ *enthält den Bereich* $\mathfrak{B}$ *im Innern, ist aber endlich, und seine Begrenzung besteht ebenfalls aus einer endlichen Anzahl von Strecken und Kreisbogen.*
3. — *Der Inhalt des Ringgebietes, welches übrig bleibt, wenn man den Bereich* $\mathfrak{B}_1$ *aus dem Bereiche* $\mathfrak{B}_2$ *heraushebt, ist kleiner als ε.*
4. — *Das Innere eines jeden Kreises vom Radius ϱ, welcher einen Punkt der Begrenzung von* $\mathfrak{B}$ *als Mittelpunkt hat, gehört ganz dem eben erwähnten Ringgebiet an.*

Beweis. Der Ausdruck geradlinig begrenzter Bereich werde auch hier in dem in Nr. **418** erklärten Sinne gebraucht. Dann gilt folgendes: Da der Bereich $\mathfrak{B}$ meßbar ist, kann man einen geradlinig begrenzten eingeschlossenen Bereich $\mathfrak{g}$ und einen geradlinig begrenzten umschließenden Bereich $\mathfrak{G}$ so bestimmen, daß der Unterschied der Flächeninhalte von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{g}$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ ist. Hebt man nun den Bereich $\mathfrak{g}$ aus dem Bereiche $\mathfrak{G}$ heraus, so erhält man bereits ein Ringgebiet, dessen Inhalt $< \varepsilon$ ist. Aber dieses Ringgebiet genügt noch nicht allen Anforderungen, da seine Breite an einer oder mehreren Stellen bis auf Null heruntergehen kann, z. B. wenn, wie in Fig. 55 am Punkte A, eine Ecke von $\mathfrak{g}$ auf einer Seite von $\mathfrak{G}$ liegt. Es kommt darauf an, zu zeigen, daß man diesen Übelstand, der sich in der Lehre von den Flächenintegralen hinderlich bemerkbar machen würde, vermeiden kann, wie klein auch ε sein mag. Gerade darin besteht ein wesentlicher Teil der Behauptung.

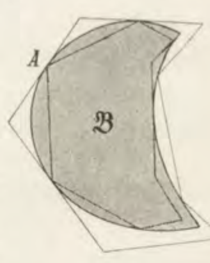


Fig. 55.

Das hiermit festgestellte Ziel läßt sich nun mittels der vorangehenden Hilfssätze folgendermaßen erreichen: Es sei l die Länge des Umfangs von $\mathfrak{g}$, L die des Umfangs von $\mathfrak{G}$ und r der Radius irgendeines (nicht in einen einzigen Punkt ausgearteten) Kreises, dessen Fläche ganz in $\mathfrak{g}$ liegt. Dann kann man immer eine positive Konstante ϱ so bestimmen, daß sie die drei Ungleichungen

$$2\varrho l < \frac{\varepsilon}{3}; \qquad 2\varrho L < \frac{\varepsilon}{3}; \qquad \varrho < r$$

gleichzeitig befriedigt, und hierauf einen in der Ebene von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{G}$ liegenden Kreis vom Radius ϱ ein erstes Mal so bewegen, daß sein Mittelpunkt den Umfang von $\mathfrak{g}$ durchläuft, und ein zweites Mal so, daß sein Mittelpunkt den Umfang von $\mathfrak{G}$ beschreibt. Schneidet man dann von $\mathfrak{g}$ alle von der Fläche dieses Kreises bei der ersten Bewegung überstrichenen Teile ab und setzt man andererseits zu $\mathfrak{G}$ alle diejenigen außerhalb liegenden Flächenstücke zu, die bei der zweiten Bewegung des Kreises von dessen Fläche überstrichen werden, so erhält man zwei Bereiche $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, die in der Tat allen obigen Anforderungen genügen. Denn die Begrenzungen dieser Bereiche bestehen aus einer endlichen Anzahl von Strecken und Kreisbogen, und ihre Inhalte unterscheiden sich um weniger als ε, da der Inhalt von $\mathfrak{B}_1$ hinter dem von $\mathfrak{g}$ um weniger als $\frac{\varepsilon}{3}$ zurückbleibt und der Inhalt von $\mathfrak{B}_2$ den von $\mathfrak{G}$ um weniger als $\frac{\varepsilon}{3}$ übertrifft. Endlich gehört auch jeder innere Punkt eines Kreises vom Radius ϱ, dessen Mittelpunkt auf der Grenze von $\mathfrak{B}$ liegt, dem Äußern von $\mathfrak{B}_1$, aber dem Innern von $\mathfrak{B}_2$ an, wie aus der Konstruktion der Bereiche $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ ohne weiteres folgt.

493. Das Flächenintegral als Grenzwert einer Summe. — Unter Beibehaltung der im Anfang der Nr. **491** eingeführten Bezeichnungen und Voraussetzungen denke man sich auf jedem der Teile, in welche der Bereich $\mathfrak{B}$ zerlegt ist, einen Punkt nach Belieben ausgewählt und hierauf, indem man für $\lambda = 1, 2, \cdots n$ unter x_λ, y_λ jedesmal die Koordinaten des auf dem λ-ten Teile angenommenen Punktes versteht, die Summe

$$S = \sum_{\lambda=1}^{n} f(x_\lambda, y_\lambda)\sigma_\lambda \tag{1369}$$

gebildet. Dann können sich für diese Summe, wenn die Funktion $f(x,y)$ nicht konstant ist, je nach der Beschaffenheit der Teilung und der Wahl der Punkte (x_λ, y_λ) verschiedene Werte ergeben. Aber wenn die Funktion $f(x,y)$ über $\mathfrak{B}$ integrierbar ist, so kann man den Bereich der möglichen Werte der Summe S dadurch auf eine beliebig enge Umgebung des Wertes $\int\limits^{(\mathfrak{B})} f(x,y)\,d\sigma$ einschränken, daß man für die Teilung des Bereiches $\mathfrak{B}$ einen hinreichend weitgehenden Grad der Feinheit vorschreibt. Bezeichnet man die obere Grenze aller Werte, die der Abstand zweier Punkte ein und desselben Teiles annehmen kann, kurz als den **Durchmesser** dieses Teiles, so findet die aufgestellte Behauptung ihren genauen Ausdruck durch den folgenden

Lehrsatz: *Wenn die Funktion $f(x,y)$ über den endlichen meßbaren Bereich $\mathfrak{B}$ integrierbar ist, so kann man nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen positiven Konstanten ε lediglich durch die Vorschrift, daß die Durchmesser der Teile, in welche man sich den Bereich $\mathfrak{B}$ zerlegt denkt, sämtlich kleiner sein sollen als eine gewisse der Konstanten ε zugeordnete positive Konstante h, stets erreichen, daß der Unterschied*

$$S - \int\limits^{(\mathfrak{B})} f(x,y)\,d\sigma$$

immer absolut genommen kleiner als ε ausfällt, einerlei wie die Teilung von $\mathfrak{B}$ im übrigen beschaffen ist und wie die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\cdots$ auf den einzelnen Teilen ausgewählt sein mögen.

In diesem Sinne darf also das Integral $\int\limits^{(\mathfrak{B})} f(x,y)\,d\sigma$ als der Grenzwert der Summe S für den Fall einer unbegrenzten Verfeinerung der Teilung des Bereiches $\mathfrak{B}$ bezeichnet werden.

Ist $\mathfrak{B}$ abgeschlossen und die Funktion $f(x,y)$ in $\mathfrak{B}$ stetig, so ist der Beweis sehr einfach. Man kann dann nämlich, weil die Funktion $f(x,y)$ in $\mathfrak{B}$ auch gleichmäßig stetig ist, eine positive Konstante h so bestimmen, daß für je zwei zu $\mathfrak{B}$ gehörende Stellen (x,y), (x', y'), deren Abstand $< h$ ist, die Ungleichung

$$|f(x,y) - f(x', y')| < \frac{\varepsilon}{J}$$

besteht, wo J den Inhalt des Bereiches $\mathfrak{B}$ bedeutet. Denkt man sich sodann den Bereich $\mathfrak{B}$ irgendwie in endlich viele meßbare Teile zerlegt, deren Durchmesser sämtlich kleiner als h sind, und rechnet man jedem Teil auch alle Punkte seiner Begrenzung zu, so ist für jeden einzelnen Teil der Unterschied zwischen dem größten und dem kleinsten Wert der Funktion $f(x,y)$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{J}$. Die auf die fragliche Einteilung bezüglichen Summen E und U (Gl. 1367 und 1368) erfüllen daher die Ungleichung

$$U - E < \frac{\varepsilon}{J} \sum_{\lambda=1}^{n} \sigma_\lambda = \frac{\varepsilon}{J} J = \varepsilon,$$

und eben deswegen ist für die nämliche Teilung erst recht

$$\left| S - \int^{(\mathfrak{B})} f(x,y)\, d\sigma \right| < \varepsilon,$$

wie verlangt wurde.

Die ursprüngliche Behauptung gilt aber nicht bloß im Falle der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{B}$ und der Stetigkeit der Funktion $f(x,y)$, sondern allgemeiner auch dann, wenn der Bereich $\mathfrak{B}$ und die Funktion $f(x,y)$ nur die Bedingungen der Meßbarkeit und der Integrierbarkeit erfüllen. Freilich ist dann der Beweis verwickelter, doch läßt er sich in engem Anschluß an den in Nr. **421** durchgeführten Beweis der entsprechenden Behauptung für Funktionen einer Veränderlichen in folgender Weise erbringen: Da die Funktion $f(x,y)$ über $\mathfrak{B}$ integrierbar ist, so ist es möglich, eine erste Zerlegung des Bereiches $\mathfrak{B}$ in eine endliche Anzahl ν von meßbaren Teilen so auszuführen, daß die dieser Teilung entsprechenden Werte E_1, U_1 der Summen E und U die Ungleichung

$$U_1 - E_1 < \frac{\varepsilon}{3}$$

erfüllen. Ferner ist es nach dem Hilfssatz 4 der Nr. **492** möglich, für $\lambda = 1, 2, \cdots \nu$ jedesmal dem λ-ten Teile $\mathfrak{T}_\lambda$ des Bereiches $\mathfrak{B}$ ein seine Begrenzung im Innern enthaltendes, von endlich vielen Strecken und Kreisbogen begrenztes Ringgebiet und eine positive Konstante ϱ_λ derart zuzuordnen, daß der Inhalt des Ringgebietes $< \frac{\varepsilon}{3\nu A}$ ist, wo A die größte Schwankung der Funktion $f(x,y)$ für den ganzen Bereich $\mathfrak{B}$ bedeutet, daß aber das Innere eines jeden Kreises vom Radius ϱ_λ, der einen Punkt der Begrenzung von $\mathfrak{T}_\lambda$ zum Mittelpunkt hat, dem Ringgebiet angehört. Setzt man dann die positive Konstante h gleich der kleinsten der Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_\nu$, so genügt sie der gestellten Anforderung. Denn ist bei irgendeiner zweiten Zerlegung des Bereiches $\mathfrak{B}$ in endlich viele meßbare Teile der Durchmesser jedes einzelnen Teiles $< h$, so ist der Unterschied $(U_2 - E_2)$ der zu dieser Teilung gehörenden Werte

E_2, U_2 der Summen E und U in der Tat stets kleiner als ε, also erst recht für diese Teilung

$$\left| S - \int^{(\mathfrak{B})} f(x,y)\,d\sigma \right| < \varepsilon.$$

Bildet man nämlich durch Übereinanderlegung der ersten und der zweiten Teilung noch eine dritte Teilung und versteht man unter E_3, U_3 die dieser dritten Teilung entsprechenden Werte der Summen E und U, so ist

$$U_2 - E_2 = (U_2 - U_3) + (U_3 - E_3) + (E_3 - E_2).$$

Nun ist aber, da die dritte Teilung als eine Fortsetzung der ersten angesehen werden kann, zunächst

$$U_3 - E_3 \leqq U_1 - E_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ferner ist auch

$$E_3 - E_2 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Denn die dritte Teilung entsteht aus der zweiten durch Hinzunahme der ersten. Dabei werden aber nur solche bereits vorhandene Teile der zweiten Teilung weiter zerlegt, die innerhalb der den Teilen der ersten Zerlegung zugeordneten Ringgebiete liegen. Der Gesamtinhalt der zu zerlegenden Flächenstücke ist daher kleiner als der Gesamtinhalt der Ringgebiete, d. h. kleiner als $\nu \frac{\varepsilon}{3\nu A} = \frac{\varepsilon}{3A}$. Zugleich ist die erforderliche Vermehrung des zu dem Flächeninhalt hinzutretenden Faktors niemals größer als A, also der Zuwachs, den die Summe E beim Übergang von der zweiten zur dritten Teilung erfährt, kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$.

Aus ähnlichen Gründen ist endlich auch

$$U_2 - U_3 < \frac{\varepsilon}{3},$$

also wirklich

$$U_2 - E_2 < \varepsilon,$$

wie behauptet wurde.

494. Beitrag der Randelemente. — Wenn man einen zweifach ausgedehnten endlichen und meßbaren Bereich $\mathfrak{B}$, welcher in einer Ebene mit einem System rechtwinkeliger Koordinaten x, y gegeben ist, in eine hinreichend große Anzahl meßbarer Teile mit hinreichend kleinem Durchmesser zerlegen will, so kann man in der Weise verfahren, daß man (Fig. 56) zu jeder der beiden Koordinatenachsen hinreichend viele und hinreichend nahe beieinander liegende Parallellinien zieht, die durch das Innere von $\mathfrak{B}$ hindurchgehen. Man erhält dann bei hinreichender Feinheit der Teilung zwei Arten von Teilen, nämlich erstens rechteckige, also regelmäßig gestaltete, ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ liegende Teile, deren Inhalte sich ohne weiteres angeben lassen, und zweitens sogenannte Randelemente, d. h. Flächenstücke, welche wenigstens einen Punkt des Randes von $\mathfrak{B}$ enthalten und im allgemeinen unregelmäßige Gestalten haben, so daß ihre genaue Inhaltsberechnung unter Umständen erhebliche Schwierigkeiten darbieten könnte. Um so wichtiger ist es, sich ein für allemal davon zu überzeugen, daß man für die Berechnung des über $\mathfrak{B}$ erstreckten Flächenintegrals einer über $\mathfrak{B}$ integrierbaren Funktion $f(x,y)$ auf die Inhaltsberechnung der Randelemente überhaupt nicht einzugehen braucht.

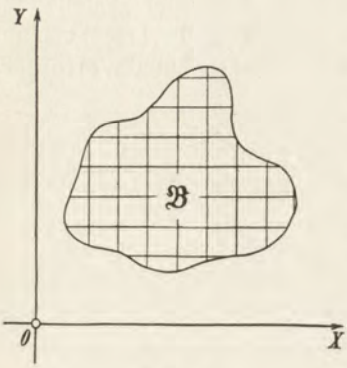


Fig. 56.

Dies folgt aus dem Hilfssatz 4 der Nr. **492**. Wird nämlich die Teilung von $\mathfrak{B}$ so fein gemacht, daß die Durchmesser der einzelnen Teile sämlich kleiner sind als die in jenem Hilfssatz erwähnte Konstante ϱ, so liegen die Randelemente sämtlich innerhalb des in dem Hilfssatz erwähnten Ringgebietes. Man kann also dadurch, daß man für die Durchmesser der einzelnen Teile eine hinlänglich kleine obere Grenze vorschreibt, stets erreichen, daß der Gesamtinhalt aller Randelemente beliebig klein wird, und da die Funktion $f(x,y)$ in $\mathfrak{B}$ beschränkt ist, kann man auf diese Weise auch die Summe der Beiträge, welche die Randelemente zu der durch die Gleichung (1369) erklärten Summe S liefern, absolut genommen beliebig klein machen.

Statt der einfachen Vernachlässigung der Beiträge der Randelemente ist indessen bei der Berechnung von Flächenintegralen zuweilen ein anderes Verfahren vorzuziehen. Dieses besteht darin, daß man (Fig. 57) die zur Teilung von $\mathfrak{B}$ benutzten Parallelstrecken über ihre Endpunkte hinaus verlängert und unter gleichzeitiger Hinzunahme noch weiterer Parallelstrecken, die mit $\mathfrak{B}$

keinen Punkt gemeinsam haben, ein den Bereich $\mathfrak{B}$ nicht nur vollkommen bedeckendes, sondern auch noch darüber hinausragendes Netz von rechteckigen Maschen herstellt und nun je nach den Umständen des gerade vorliegenden Falles nur einen Teil der Randelemente vernachlässigt, zu jedem beibehaltenen Randelement dagegen das zur Ergänzung zu einer vollen Masche des Netzes nötige Flächenstückchen hinzufügt. Ändert man dann die Summe S dadurch ab, daß man den Inhalt jedes vernachlässigten Randelementes durch 0 und den Inhalt jedes beibehaltenen durch den vollen Inhalt der zugehörigen Masche ersetzt, so erhält man eine leichter zu berechnende Summe, die deswegen für S eintreten kann, weil auch sie sich durch Verfeinerung der Teilung dem Integral $\int^{(\mathfrak{B})} f(x,y)\,d\sigma$ beliebig nahe bringen läßt.

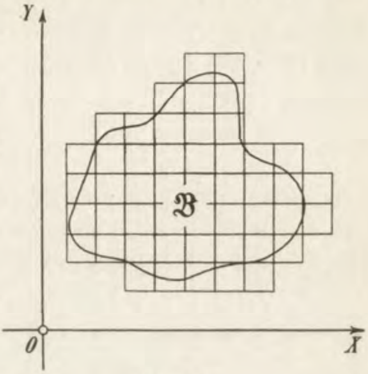


Fig. 57.

Nun benutzt man bei der Berechnung eines Flächenintegrals zur Zerlegung des Integrationsgebietes und seiner nächsten Umgebung in Elemente von hinreichend kleinen Durchmessern

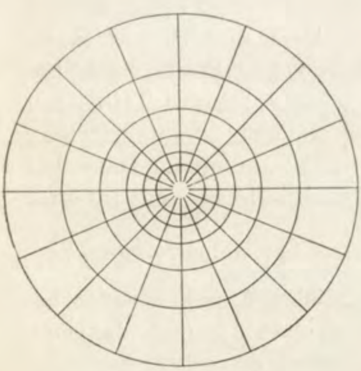


Fig. 58.

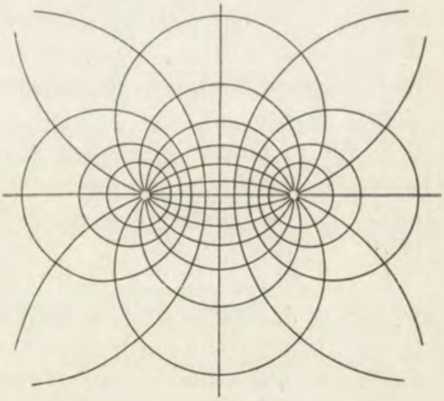


Fig. 59.

und für die Inhaltsberechnung bequemen Gestalten durchaus nicht immer zwei zueinander senkrechte Scharen von Parallellinien.

Man zerschneidet vielmehr die Ebene sehr oft auch in anderer Weise, z. B. (Fig. 58) durch eine Schar von Halbstrahlen, die alle von ein und demselben Punkte ausgehen, und die Schar der konzentrischen Kreise, welche diesen Punkt zum Mittelpunkt haben, oder (Fig. 59) durch ein Büschel von Kreisen, die durch zwei feste Punkte gehen, und die Schar der sie senkrecht schneidenden Kreise (Nr. **413**), oder (Fig. 60) durch eine Schar von Ellipsen, welche alle die nämlichen Brennpunkte haben, und eine Schar von Hyperbeln, denen dieselben beiden Punkte als Brennpunkte zukommen, und so fort. Aber auch für alle diese anderen Arten der Zerlegung lassen sich aus dem Hilfssatz 4 der Nr. **492** genau dieselben Folgerungen ziehen wie für die Zerlegung durch zwei zueinander senkrechte Scharen von Parallelen.

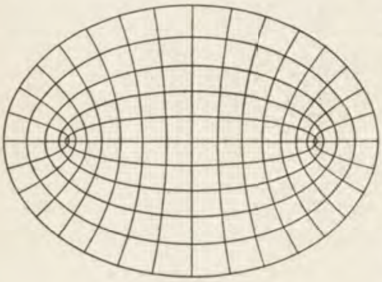


Fig. 60.

Ganz allgemein gilt also folgende Regel: Nachdem das Integrationsgebiet $\mathfrak{B}$ in einen dasselbe ganz im Innern enthaltenden meßbaren Bereich $\mathfrak{B}'$ eingeschlossen ist, werde dieser letztere irgendwie in endlich viele meßbare Teile zerlegt, deren Durchmesser sämtlich kleiner sind als eine gegebene positive Konstante h. Von diesen Teilen denke man sich alle diejenigen beibehalten, die ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ liegen, und außerdem beliebig viele von denen, welche wenigstens einen Punkt der Begrenzung von $\mathfrak{B}$ enthalten. Hierauf denke man sich auf jedem beibehaltenen Teil eine zugleich in $\mathfrak{B}$ liegende Stelle nach Belieben ausgewählt und sodann den Flächeninhalt des Teiles mit dem Werte multipliziert, den die gegebene, über $\mathfrak{B}$ integrierbare Funktion $f(x,y)$ an der ausgewählten Stelle annimmt. Dann hat auch die Summe S' der so gebildeten Produkte das Integral $\int^{(\mathfrak{B})} f(x,y)\,d\sigma$ als Grenzwert für den Fall einer unbegrenzten Verfeinerung der Teilung, d. h. nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen positiven Konstanten ε kann man dadurch, daß man die Konstante h klein genug annimmt, immer erreichen, daß

$$\left| \int^{(\mathfrak{B})} f(x,y)\,d\sigma - S' \right| < \varepsilon$$

wird, einerlei wie die Teilung von $\mathfrak{B}'$ beschaffen sein mag und einerlei wie viele und welche der Randelemente man beibehalten und wie man über die Auswahl der auf den beibehaltenen Teilen anzunehmenden Stellen verfügt hat.

495. Übertragbarkeit früherer Sätze. — Wie man mit Hilfe der in den vorangehenden Nummern gewonnenen Ergebnisse leicht erkennt, können die in Nr. **425** zusammengestellten einfachsten Sätze über bestimmte Integrale nebst ihren Beweisen mit verhältnismäßig geringen Änderungen des Wortlautes auf Flächenintegrale übertragen werden. Dasselbe gilt, wie man ebenso leicht erkennt, auch von dem in Nr. **426** aufgestellten ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung und der in Nr. **427** angegebenen Erweiterung desselben. Insbesondere ist es hiernach stets gestattet, ein über einen zusammenhängenden Bereich erstrecktes Flächenintegral $\int^{(\mathfrak{B})} f(x,y)\,d\sigma$, bei welchem die zu integrierende Funktion $f(x,y)$ in dem Integrationsbereich $\mathfrak{B}$ stetig ist, dem Produkt aus dem Flächeninhalt des Bereiches $\mathfrak{B}$ und einem Werte gleichzusetzen, den die Funktion $f(x,y)$ an einer passend gewählten Stelle von $\mathfrak{B}$ annimmt.

496. Verwandlung in ein Doppelintegral. — Ein oft benutztes Verfahren zur Ausrechnung eines Flächenintegrals besteht darin, daß man das Flächenintegral in ein Doppelintegral verwandelt und dann die zur Berechnung dieses letzteren nötigen Integrationen ausführt. Die Grundlage dieses Verfahrens bildet der folgende

Lehrsatz: *Für ein abgeschlossenes Intervall, dessen untere Grenze a und dessen obere Grenze A heißen möge, seien zwei stetige Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ gegeben, die daselbst die Ungleichung*

$$\varphi_1(x) \leqq \varphi_2(x)$$

erfüllen. Ferner sei nach Annahme eines Systems rechtwinkeliger ebener Koordinaten x, y in der Ebene dieses Systems ein Bereich $\mathfrak{B}$ (Fig. 61) *durch die Festsetzung abgegrenzt, daß er einen Punkt (x, y) dann und nur dann enthalten soll, wenn dessen Koordinaten die Ungleichungen*

$$a \leqq x \leqq A \qquad \text{und} \qquad \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x) \tag{1370}$$

erfüllen, so daß $\mathfrak{B}$ einerseits von den durch die Gleichungen $x = a$ und $x = A$ dargestellten Parallelen zur Ordinatenachse und andererseits von den durch die Gleichungen $y = \varphi_1(x)$ und $y = \varphi_2(x)$ dar-

gestellten Linienstücken begrenzt wird. Dann ist, wenn $f(x,y)$ eine in $\mathfrak{B}$ stetige[1]) *Funktion bedeutet, stets*

$$\int^{(\mathfrak{B})} f(x,y)\,d\sigma = \int_a^A \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx. \tag{1371}$$

Beweis: Das Intervall $(a \cdots A)$ sei irgendwie in eine beliebige

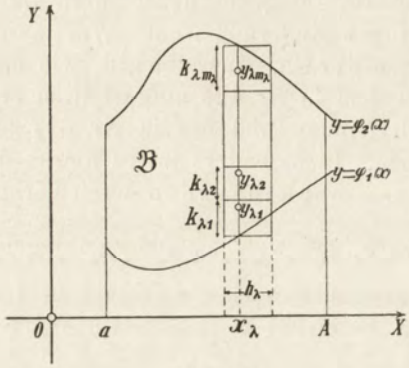


Fig. 61.

endliche Anzahl n von Teilen zerlegt, deren Längen der Reihe nach

$$h_1, h_2, \cdots h_n$$

heißen mögen. Dann ist es immer möglich, n beziehentlich auf diesen Teilen liegende spezielle Werte

$$x_1, x_2, \cdots x_n$$

der Veränderlichen x so zu bestimmen, daß

$$\int_a^A \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \sum_{\lambda=1}^{n} \int_{\varphi_1(x_\lambda)}^{\varphi_2(x_\lambda)} f(x_\lambda, y)\,dy \cdot h_\lambda \tag{1372}$$

wird. Denn das links stehende, von a bis A zu erstreckende Integral ist gleich der Summe der über die einzelnen Teilintervalle erstreckten Integrale, und von diesen ist jedes einzelne nach dem ersten Mittelwertsatz gleich der Länge des betreffenden Teil-

1) Über die Möglichkeit einer Ausdehnung der Gleichung (1371) auf den Fall, daß die Funktion $f(x,y)$ nicht mehr in $\mathfrak{B}$ stetig ist, vgl. C. Jordan, Journal de mathématiques pures et appliquées, Série IV, Tome 8, 1892, Seite 84—87.

intervalls multipliziert mit dem Wert, den die stetige Funktion $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ des Argumentes x für einen passend gewählten, dem Teilintervall angehörenden Wert von x annimmt.

In ähnlicher Weise und aus ähnlichen Gründen läßt sich aber auch jedes einzelne der Integrale $\int_{\varphi_1(x_\lambda)}^{\varphi_2(x_\lambda)} f(x_\lambda, y)dy$ in eine Summe verwandeln. Denn nach Zerlegung des Intervalls $[\varphi_1(x_\lambda) \cdots \varphi_2(x_\lambda)]$ in eine beliebige endliche Anzahl m_λ von Teilen ist es jedesmal möglich, m_λ spezielle Werte

$$y_{\lambda 1}, y_{\lambda 2}, \cdots y_{\lambda m_\lambda}$$

von y, die der Reihe nach auf den einzelnen Teilen liegen, so zu wählen, daß, wenn

$$k_{\lambda 1}, k_{\lambda 2}, \cdots k_{\lambda m_\lambda}$$

die Längen der Teilintervalle bedeuten,

$$\int_{\varphi_1(x_\lambda)}^{\varphi_2(x_\lambda)} f(x_\lambda, y)\,dy = \sum_{\mu=1}^{m_\lambda} f(x_\lambda, y_{\lambda\mu})\,k_{\lambda\mu}$$

wird. Durch Ausführung dieser Umwandlung geht dann die Gleichung (1372) über in

$$\int_a^A \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m_\lambda} f(x_\lambda, y_{\lambda\mu})\,h_\lambda k_{\lambda\mu}.$$

Hier gehört aber die rechts stehende Summe nach Nr. **494** zu denjenigen, die durch hinreichend weitgehende Verfeinerung der Teilung dem Flächenintegral $\overset{(\mathfrak{B})}{\int} f(x,y)\,d\sigma$ beliebig nahe gebracht werden können. Also kann auch der Wert dieses Flächenintegrals von dem Wert des links stehenden Doppelintegrals nicht verschieden sein.

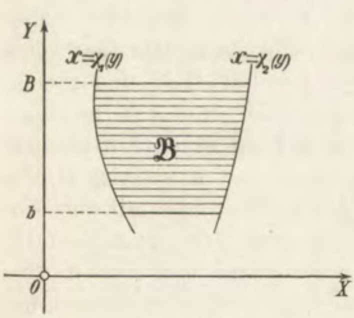


Fig. 62.

Die Anwendbarkeit des hiermit bewiesenen Satzes wird durch die Einschränkungen, denen die Begrenzung des Bereiches $\mathfrak{B}$ unterworfen wurde, nur wenig beeinträchtigt. Denn bei den Anwendungen kommen immer nur solche Integrationsgebiete vor, welche entweder die gemachten Voraussetzungen bereits vollständig erfüllen oder sich in eine endliche Anzahl von Bereichen zerlegen lassen, die diesen Voraussetzungen genügen.

Ist der Bereich $\mathfrak{B}$ so beschaffen (Fig. 62), daß er sich durch zwei Ungleichungen

$$b \leqq y \leqq B \quad \text{und} \quad \chi_1(y) \leqq x \leqq \chi_2(y) \tag{1373}$$

abgrenzen läßt, in denen b und B Konstante und $\chi_1(y)$ und $\chi_2(y)$ Funktionen bedeuten, die für $b \leqq y \leqq B$ stetig sind, so ergibt sich, falls auch die Funktion $f(x,y)$ in $\mathfrak{B}$ stetig ist, durch ähnliche Überlegungen wie oben die Gleichung

$$\int^{(\mathfrak{B})} f(x,y)\,d\sigma = \int_b^B \int_{\chi_1(y)}^{\chi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy. \tag{1374}$$

Hieraus folgt für den Fall, daß das Integrationsgebiet $\mathfrak{B}$ sowohl auf die durch die Ungleichungen (1370) als auch auf die durch die Ungleichungen (1373) dargestellte Art abgegrenzt werden kann und daß $f(x,y)$ in $\mathfrak{B}$ stetig ist, das Bestehen der Gleichung

$$\int_a^A \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_b^B \int_{\chi_1(y)}^{\chi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Damit findet die schon in Nr. 487 berührte Frage nach der Umkehrbarkeit der Reihenfolge der Integrationen in einem Doppelintegral, dessen Grenzen nicht alle konstant sind, eine zwar nicht ganz erschöpfende, aber doch praktisch ausreichende Antwort.

497. Beispiele. — **1.** — Nach Annahme eines Systems rechtwinkeliger räumlicher Koordinaten x, y, z sei (Fig. 63) auf der positiven Hälfte der x-Achse ein Punkt A nach Belieben angenommen und von ihm aus eine zur y-Achse parallele und gleichgerichtete Strecke AB gezogen. Endlich sei um einen Mittelpunkt M, der auf der negativen Hälfte der z-Achse liegt oder mit dem Koordinatenanfang O zusammenfällt, in der zx-Ebene mit dem Radius MA der kürzeste Kreisbogen beschrieben, der von A bis zu einem

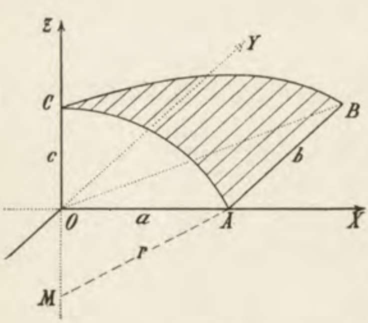


Fig. 63.

auf der positiven Hälfte der z-Achse liegenden Punkte C reicht. Man soll unter der Voraussetzung, daß die Längen a, b, c der Strecken OA, AB, OC gegeben sind, das Volumen des Körpers $OABC$ berechnen, der von der xy-Ebene, der zx-Ebene, der Ebene BOC und demjenigen durch den Kreisbogen AC gehenden Zylinder begrenzt wird, dessen Erzeugende zur y-Achse parallel sind.

Lösung: Die Betrachtung des rechtwinkeligen Dreiecks OAM liefert für die Länge r des Radius MA die Gleichung

$$r^2 = a^2 + (r - c)^2,$$

aus welcher nach leichter Zwischenrechnung

$$r = \frac{a^2 + c^2}{2c} \tag{1375}$$

folgt. Ferner ergibt sich, wenn man das Zeichen r als eine bequeme Abkürzung für die rechte Seite der Gleichung (1375) einstweilen noch beibehält, für den den Bogen AC enthaltenden Kreis in dem Koordinatensystem OZX die Gleichung

$$(z + r - c)^2 + x^2 = r^2$$

oder

$$z = -(r - c) + \sqrt{r^2 - x^2},$$

wobei für die Punkte des Bogens AC unter der Quadratwurzel der positive Wert zu verstehen ist. Dieselbe Gleichung stellt, wenn man sie als eine Gleichung zwischen den räumlichen Koordinaten x, y, z auffaßt, auch die durch den Bogen AC gehende Zylinderfläche dar, deren Erzeugende zur y-Achse parallel sind. Nach dem am Schluß der Nr. **491** angegebenen Lehrsatz wird daher das gesuchte Volumen V dargestellt durch das über die Fläche des Dreiecks OAB zu erstreckende Flächenintegral

$$\int^{(OAB)} [-(r - c) + \sqrt{r^2 - x^2}]\, d\sigma.$$

Nun ist das Dreieck OAB einerseits zwischen den Geraden $x = 0$ und $x = a$ und andererseits zwischen den Geraden $y = 0$ und $y = \frac{b}{a} x$ enthalten. Folglich ist

$$V = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} \left[-(r-c)+\sqrt{r^2-x^2}\right] dy\,dx$$
$$= \int_0^a \left[-(r-c)+\sqrt{r^2-x^2}\right] \frac{b}{a}\,x\,dx$$
$$= -(r-c)\frac{b}{a}\int_0^a x\,dx + \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{r^2-x^2}\,x\,dx$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung (1164), Seite 58,

$$V = -\frac{1}{2}(r-c)\,b\,a + \frac{b}{a}\left[-\frac{1}{3}\sqrt{r^2-x^2}^{\,3}\right]_0^a$$
$$= -\frac{1}{2}(r-c)\,b\,a + \frac{b}{3a}\left(r^3-\sqrt{r^2-a^2}^{\,3}\right).$$

Setzt man nun für r den durch die Gleichung (1375) gegebenen Wert ein, so erhält man

$$r^2-a^2 = \frac{a^4+2a^2c^2+c^4-4a^2c^2}{4c^2} = \left(\frac{a^2-c^2}{2c}\right)^2$$

und bekommt daher nach einfachen Zwischenrechnungen schließlich

$$V = \frac{bc}{12a}(3a^2+c^2).$$

2. — Volumen eines schief abgeschnittenen elliptischen Zylinders. — In der xy-Ebene (Fig. 64) eines Systems rechtwinkeliger räumlicher Koordinaten x, y, z sei eine Ellipse mit den Halbachsen a, b durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

gegeben, und durch diese Ellipse sei ein Zylinder gelegt, dessen Erzeugende zur z-Achse parallel sind. Endlich sei eine Ebene $\mathfrak{E}$ durch eine Gleichung

$$z = \lambda x + \mu y + \nu$$

gegeben, in welcher λ, μ, ν Konstante bedeuten und ν so groß ist, daß die Summe $(\lambda x + \mu y + \nu)$ für kein der Bedingung $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqq 1$ genügendes Wertepaar x, y negativ wird. Man soll das Volumen des-

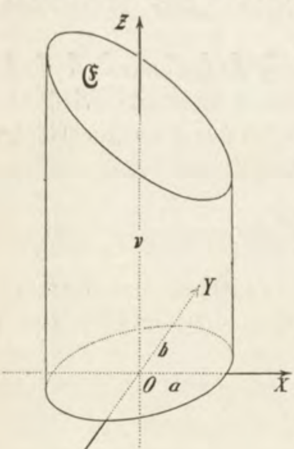


Fig. 64.

jenigen Körpers berechnen, der unten von der xy-Ebene, seitwärts von dem erwähnten Zylinder und oben von der Ebene $\mathfrak{E}$ begrenzt wird.

Lösung: Das gesuchte Volumen V ist gleich dem über die elliptische Grundfläche erstreckten Flächenintegral der Funktion $(\lambda x + \mu y + \nu)$. Nun sind aber die äußersten Werte, welche die Abszisse x eines dem Integrationsgebiet angehörenden Punktes annehmen kann, gleich $(-a)$ und a. Ferner werden die obere und die untere Hälfte der begrenzenden Ellipse beziehentlich durch die Gleichungen

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{und} \qquad y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

dargestellt. Folglich führt die Umwandlung des Flächenintegrals in ein Doppelintegral zu der Gleichung

$$V = \int_{-a}^{a}\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} (\lambda x + \mu y + \nu)\,dy\,dx,$$

aus der sich durch Ausrechnung des inneren Integrals und Weglassung entgegengesetzt gleicher Bestandteile desselben

$$V = \int_{-a}^{a}\left(2\frac{b}{a}\lambda x\sqrt{a^2 - x^2} + 2\frac{b}{a}\nu\sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$$

ergibt. Die nun noch zu berechnenden unbestimmten Integrale sind aus den Gleichungen (1164) und (1268) bereits bekannt. Indem man hiervon Gebrauch macht, erhält man schließlich

$$V = \frac{b}{a}\left[-\lambda\frac{2}{3}\sqrt{a^2 - x^2}^{\,3} + \nu x\sqrt{a^2 - x^2} + \nu a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right]_{-a}^{a}$$
$$= \nu a b \pi.$$

Das Volumen V ist hiernach von den Werten der Koeffizienten λ und μ unabhängig und lediglich durch die Halbachsen a, b der Grundfläche und die Höhe ν bestimmt, in welcher sich der Mittelpunkt der oberen Begrenzungsfläche über dem Mittelpunkt der Grundfläche befindet. Bei einem Kreiszylinder ist die Richtigkeit dieser Behauptung geometrisch ohne weiteres einleuchtend. Für den betrachteten elliptischen Zylinder liegt sie nicht ganz so auf der Hand, läßt sich aber auch elementar beweisen, wenn man bedenkt, daß der elliptische Zylinder aus einem Kreiszylinder durch eine affine, in der Richtung der kleineren Achse erfolgende Zusammenziehung abgeleitet werden kann.

498. Verwandlung in ein Randintegral. — Für ein abgeschlossenes Intervall mit der unteren Grenze a und der oberen

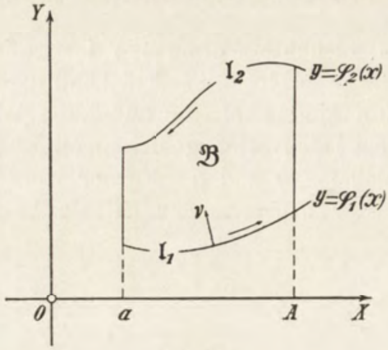


Fig. 65.

Grenze A seien zwei stetige Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ gegeben, die daselbst die Ungleichung

$$\varphi_1(x) \leqq \varphi_2(x)$$

erfüllen und so beschaffen sind, daß in einem System rechtwinkeliger ebener Koordinaten x, y (Fig. 65) durch die Gleichungen

$$y = \varphi_1(x) \qquad \text{und} \qquad y = \varphi_2(x)$$

in Verbindung mit der Ungleichung $a \leqq x \leqq A$ zwei gewöhnliche Linienstücke $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ dargestellt werden. Ist dann ebenso wie in Nr. **496** in der Ebene des angenommenen Koordinatensystems durch die Ungleichungen

$$a \leqq x \leqq A; \qquad \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)$$

ein Bereich $\mathfrak{B}$ abgegrenzt und für denselben eine stetige und in bezug auf y differenzierbare Funktion $U(x, y)$ gegeben und ist endlich die partielle Ableitung $U_y(x, y)$ in $\mathfrak{B}$ ebenfalls stetig, so gilt nach Nr. **496** die Gleichung

$$\int^{(\mathfrak{B})} U_y(x, y)\, d\sigma = \int_a^A \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} U_y(x, y)\, dy\, dx.$$

Führt man nun hier auf der rechten Seite die innere Integration wirklich aus, was ohne weiteres möglich ist, so erhält man

$$\begin{aligned}\int^{(\mathfrak{B})} U_y(x, y)\, d\sigma &= \int_a^A \{U[x, \varphi_2(x)] - U[x, \varphi_1(x)]\}\, dx \\ &= -\int_a^A U[x, \varphi_1(x)]\, dx - \int_A^a U[x, \varphi_2(x)]\, dx.\end{aligned}$$

Von den beiden rechts stehenden Integralen ist aber nach Nr. **470** das erste gleichbedeutend mit dem über $\mathfrak{l}_1$ in der Richtung der wachsenden Abszissen erstreckten Linienintegral $\int^{(\mathfrak{l}_1)} U(x,y)\frac{dx}{ds}ds$ und das zweite mit dem über $\mathfrak{l}_2$ in der Richtung der abnehmenden Abszissen erstreckten Linienintegral $\int^{(\mathfrak{l}_2)} U(x,y)\frac{dx}{ds}ds$, wobei unter dx und ds jedesmal zusammengehörende Differentiale der Abszisse und der auf $\mathfrak{l}_1$ beziehungsweise $\mathfrak{l}_2$ in der Richtung der Integration gezählten Bogenlänge zu verstehen sind; und wenn die Begrenzung von $\mathfrak{B}$ außer den Linienstücken $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ noch eine oder zwei zur y-Achse parallele Strecken enthält, so darf man zu den beiden eben erwähnten Integralen auch noch die über diese Strecken im Sinne eines positiven Umlaufs um $\mathfrak{B}$ erstreckten Integrale des Produktes $U(x,y)\frac{dx}{ds}$ hinzufügen, da der Faktor $\frac{dx}{ds}$ auf jeder zur y-Achse parallelen Strecke gleich Null ist. Dadurch erhält man das über die ganze Begrenzungslinie $\mathfrak{l}$ des Bereiches $\mathfrak{B}$ im positiven Umlaufungssinn erstreckte Linienintegral $\int^{(\mathfrak{l})} U(x,y)\frac{dx}{ds}ds$, gelangt also zu einer Umwandlung des über den Bereich $\mathfrak{B}$ erstreckten Flächenintegrals der partiellen Ableitung $U_y(x,y)$ in ein über den Umfang von $\mathfrak{B}$ zu erstreckendes **Randintegral.** Die Regel. nach der diese Umwandlung zu erfolgen hat, findet ihren Ausdruck durch die Gleichung

$$\int^{(\mathfrak{B})} U_y(x,y)\,d\sigma = -\int^{(\mathfrak{l})} U(x,y)\frac{dx}{ds}ds \tag{1376}$$

oder kürzer

$$\int^{(\mathfrak{B})} U_y(x,y)\,d\sigma = -\int^{(\mathfrak{l})} U(x,y)\,dx, \tag{1377}$$

wo das rechts stehende Linienintegral jedesmal in positiver Richtung über die Begrenzung von $\mathfrak{B}$ zu erstrecken ist.

Nun gibt es auf $\mathfrak{l}$ höchstens vier Stellen, wo verschiedenartige Bestandteile von $\mathfrak{l}$ aneinander stoßen und daher eine Ecke vorhanden sein kann. An jeder anderen Stelle ist die gegen das Innere von $\mathfrak{B}$ gerichtete Normale ν der Randlinie $\mathfrak{l}$ eindeutig bestimmt und zugleich der erste Richtungswinkel der mit dem positiven Umlaufungssinn übereinstimmenden Tangentenrichtung von $\mathfrak{l}$ gleich dem Winkel (ν, y), unter welchem die Normale ν gegen die y-Achse geneigt ist, also auch

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\nu, y).$$

Man kann daher, indem man sich die Bedeutung der Normale ν für die etwaigen Ecken von $\mathfrak{l}$ durch irgendeine nach Willkür getroffene Verfügung festgesetzt denkt, der gefundenen Regel für die Umwandlung eines Flächenintegrals in ein Randintegral auch die Form geben

$$(1378) \qquad {}^{(\mathfrak{B})}\!\!\int U_y(x,y)\,d\sigma = -{}^{(\mathfrak{l})}\!\!\int U(x,y)\cos(\nu,y)\,ds.$$

Diese Gleichung ist deswegen leichter zu merken als die vorangehenden, weil der Wert des rechts stehenden Linienintegrals nicht mehr von der Integrationsrichtung abhängt und weil zweitens die Veränderliche y, in bezug auf welche links differenziert ist, zugleich auch die Achse bezeichnet, deren Winkel mit der Normalen ν in dem rechts stehenden Integral vorkommt.

Die im vorangehenden gewonnenen Gleichungen (1376) bis (1378) sind noch einer Erweiterung fähig. Sie gelten nämlich auch für jeden Bereich $\mathfrak{B}$, der, wie es die Fig. 66 andeutet, in eine endliche Anzahl aneinander stoßender Bereiche der bisher betrachteten Art zerlegt werden kann, vorausgesetzt, daß die Funktion $U(x, y)$ in $\mathfrak{B}$ dieselben Bedingungen wie bisher erfüllt. Denn bei der Addition der über die Grenzen der einzelnen Teilbereiche in positiver Richtung erstreckten Linienintegrale des Produktes $U(x, y)\frac{dx}{ds}$ wird jedes Integral, welches über ein im Innern von $\mathfrak{B}$ liegendes Linienstück zu erstrecken ist, wofern es nicht schon von selbst den Wert 0 hat, durch ein entgegengesetzt gleiches Integral aufgehoben, so daß nur das Integral über die äußere Begrenzungslinie übrig bleibt.

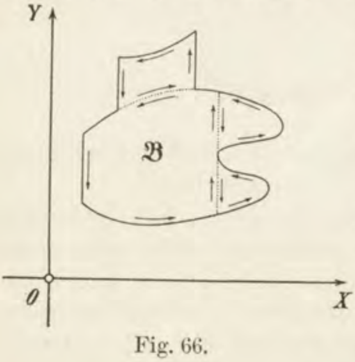


Fig. 66.

In ähnlicher Weise wie eben läßt sich ein Flächenintegral, bei welchem die Begrenzung des Integrationsgebietes und die zu integrierende Funktion gewisse Voraussetzungen erfüllen, auch dann in ein Randintegral verwandeln, wenn die zu integrierende Funktion der Koordinaten x, y in der Form einer nach der ersten Koordinate x genommenen partiellen Ableitung gegeben ist. Um dies näher auszuführen, sei in einer Ebene mit einem System rechtwinkeliger Koordinaten x, y ähnlich wie am Schluß der Nr. **496** ein Bereich $\mathfrak{B}$ (Fig. 62) durch zwei Ungleichungen

$$b \leqq y \leqq B \qquad \text{und} \qquad \chi_1(y) \leqq x \leqq \chi_2(y)$$

abgegrenzt, in denen b und B Konstante und $\chi_1(y)$ und $\chi_2(y)$ Funktionen bedeuten, die für $b \leqq y \leqq B$ stetig sind. Ferner sei jedes der beiden durch die Gleichungen

$$x = \chi_1(y) \qquad \text{und} \qquad x = \chi_2(y)$$

in Verbindung mit der Ungleichung $b \leqq y \leqq B$ dargestellten Linienstücke ein gewöhnliches. Ist dann $U(x, y)$ eine in $\mathfrak{B}$ stetige und nach x differenzierbare Funktion und ist die partielle Ableitung $U_x(x, y)$ in $\mathfrak{B}$ ebenfalls stetig, so gilt, wie eine der vorangehenden genau entsprechende Betrachtung zeigt, die Gleichung

$$(1379) \qquad \int^{(\mathfrak{B})} \boldsymbol{U_x(x, y)\,d\sigma = \int^{(\mathfrak{l})} U(x, y)\,\frac{dy}{ds}\,ds = \int^{(\mathfrak{l})} U(x, y)\,dy},$$

wobei die Linienintegrale über die ganze Begrenzung $\mathfrak{l}$ des Bereiches $\mathfrak{B}$ im positiven Umlaufungssinn zu erstrecken sind. Ferner ist, wenn ν wieder die nach dem Innern von $\mathfrak{B}$ weisende Normale von $\mathfrak{l}$ bedeutet,

$$\frac{dy}{ds} = -\cos(\nu, x),$$

so daß die Gleichung (1379) auch in der der Gleichung (1378) genau entsprechenden Form

$$(1380) \qquad \int^{(\mathfrak{B})} \boldsymbol{U_x(x, y)\,d\sigma = -\int^{(\mathfrak{l})} U(x, y)\cos(\nu, x)\,ds}$$

geschrieben werden kann.

Auch die Gleichungen (1379) und (1380) bleiben bestehen, wenn $\mathfrak{B}$ einen Bereich bedeutet, der zwar nicht ganz den bisherigen Annahmen entspricht, wohl aber in eine endliche Anzahl derartiger Bereiche zerlegt werden kann, sobald nur die Funktion $U(x, y)$ in $\mathfrak{B}$ die gemachten Voraussetzungen erfüllt.

499. Umformung durch Einführung von neuen Veränderlichen. — Lehrsatz: *In einer Ebene mit einem System rechtwinkeliger Koordinaten u, v* (Fig. 67) *sei ein endlicher meßbarer Bereich $\mathfrak{B}'$ abgegrenzt, und für einen größeren den Bereich $\mathfrak{B}'$ und seine Grenzpunkte ganz im Innern enthaltenden Bereich $\mathfrak{B}'_1$ seien zwei Funktionen $\varphi(u, v)$, $\chi(u, v)$ gegeben, deren partielle Ableitungen erster Ordnung $\varphi_u(u, v)$, $\chi_u(u, v)$, $\varphi_v(u, v)$, $\chi_v(u, v)$ im In-*

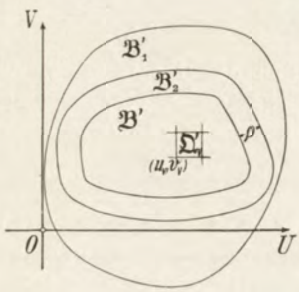


Fig. 67.

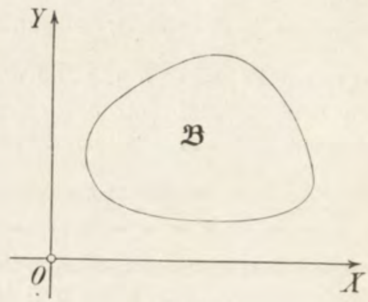


Fig. 68.

nern von $\mathfrak{B}'_1$ überall vorhanden, stetig und so beschaffen sind, daß die sogenannte Funktionaldeterminante der Funktionen $\varphi(u, v)$, $\chi(u, v)$, d. h. die Determinante

$$\varDelta(u, v) = \begin{vmatrix} \varphi_u(u, v) & \chi_u(u, v) \\ \varphi_v(u, v) & \chi_v(u, v) \end{vmatrix} \tag{1381}$$

im Innern von $\mathfrak{B}'$ überall positiv ist. Ferner sei nach Annahme eines zweiten Systems rechtwinkeliger Koordinaten x, y, welches auch mit dem bisherigen übereinstimmen darf,

$$x = \varphi(u, v); \qquad y = \chi(u, v)$$

gesetzt und dadurch eine Abbildung des Bereiches $\mathfrak{B}'$ auf einen Bereich $\mathfrak{B}$ (Fig. 68) *im Gebiet der Veränderlichen x, y vermittelt. Schließlich werde vorausgesetzt, daß je zwei verschiedenen inneren Punkten von $\mathfrak{B}'$ auch verschiedene Punkte von $\mathfrak{B}$ entsprechen. Dann kommt auch dem Bereich $\mathfrak{B}$ ein Inhalt J zu, und zwar ist*

$$\boldsymbol{J} = {}^{(\mathfrak{B}')}\!\!\int \boldsymbol{\varDelta(u, v)\, d\sigma'}, \tag{1382}$$

wo $d\sigma'$ das Flächenelement des Bereiches $\mathfrak{B}'$ bedeutet. Und wenn *für den Bereich $\mathfrak{B}$ eine über denselben integrierbare Funktion $f(x, y)$ gegeben ist, so gilt die Gleichung*

$$(1383) \qquad \int^{(\mathfrak{B})} f(x, y)\, d\sigma = \int^{(\mathfrak{B}')} f[\varphi(u, v), \chi(u, v)]\, \Delta(u, v)\, d\sigma' .$$

Unter den gemachten Annahmen kann man also das über $\mathfrak{B}$ zu erstreckende Flächenintegral $\int^{(\mathfrak{B})} f(x, y)\, d\sigma$ durch Einführung der neuen Integrationsveränderlichen u, v in ähnlicher Weise umformen wie ein einfaches Integral, und zwar hat man dazu nur nötig,

1. — die alten Integrationsveränderlichen x, y durch die neuen u, v auszudrücken,
2. — das Flächenelement $d\sigma$ des ursprünglichen Integrationsbereiches $\mathfrak{B}$ durch das Produkt der Funktionaldeterminante $\Delta(u, v)$ mit dem Flächenelement $d\sigma'$ des entsprechenden Integrationsbereiches $\mathfrak{B}'$ im Gebiet der neuen Veränderlichen u, v und
3. — den alten Integrationsbereich $\mathfrak{B}$ durch den neuen $\mathfrak{B}'$ zu ersetzen.

Beweis[1]): Hat man in der uv-Ebene durch Ziehen von geraden Linien ein innerhalb des Bereiches $\mathfrak{B}_1'$ liegendes Netz von Dreiecken hergestellt, welches die Ebene nirgends mehrfach überdeckt, so entspricht diesem Netz in der xy-Ebene ein Netz von Dreiecken, deren Seiten im allgemeinen krumm sind. Auch dieses Netz bedeckt die xy-Ebene, soweit es über dieselbe ausgebreitet ist, nur einfach. Aber wenn man nun jede seiner Maschen durch dasjenige geradlinig begrenzte Dreieck ersetzt, welches dieselben Ecken hat, so kann es vorkommen, daß diese Dreiecke die Ebene stellenweise mehrfach überdecken. Einen Fall dieser Art veranschaulicht die Fig. 69. Hier hat nämlich das von den Bogen AB, BC und CA begrenzte Dreieck bei B eine einspringende

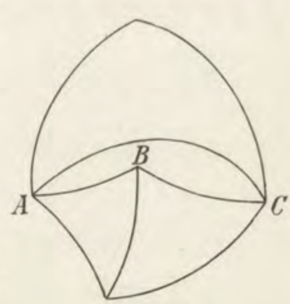


Fig. 69.

1) Der im Text angegebene Beweis stammt von C. Jordan, Journal de mathématiques pures et appliquées, Série IV, Tome 8, 1892, Seite 94—99 und Cours d'analyse I, 2. éd. Paris 1893, oder 3. éd. 1909, S. 138 ff.

Ecke, und man sieht sofort, daß man stellenweise eine doppelte Bedeckung der Ebene erhält, wenn man jedes der in der Figur gezeichneten krummlinig begrenzten Dreiecke durch das entsprechende geradlinige Dreieck ersetzt. Auf diese Möglichkeit, beziehungsweise ihren Ausschluß ist nun bei dem nachfolgenden Beweise Rücksicht zu nehmen. Dadurch wird die ganze Anlage des Beweises wesentlich beeinflußt. Insbesondere dienen diesem Zwecke die folgenden vorbereitenden Überlegungen und Festsetzungen:

Man denke sich, was immer zulässig ist, eine positive Konstante ϱ so bestimmt, daß jeder Punkt, dessen Abstand von einem zu $\mathfrak{B}'$ oder zur Grenze von $\mathfrak{B}'$ gehörenden Punkte nicht größer als ϱ ist, im Innern von $\mathfrak{B}_1'$ liegt, und denke sich sodann den Bereich $\mathfrak{B}'$ durch Hinzunahme aller ihm noch nicht angehörenden Punkte der eben erwähnten Art zu einem immer noch ganz im Innern von $\mathfrak{B}_1'$ enthaltenen Bereiche $\mathfrak{B}_2'$ (Fig. 67) erweitert. Dann ist der Bereich $\mathfrak{B}_2'$, wie man leicht nachweisen kann[2]), notwendig abgeschlossen, und es ist daher möglich, eine positive Konstante M so groß anzunehmen, daß in $\mathfrak{B}_2'$ überall die Ungleichungen

$$|\varphi_u(u, v)| \leqq M; \qquad |\chi_u(u, v)| \leqq M;$$
$$|\varphi_v(u, v)| \leqq M; \qquad |\chi_v(u, v)| \leqq M$$

gelten. Nun werde zunächst vorausgesetzt, daß die Determinante $\Delta(u, v)$ auch auf der Grenze von $\mathfrak{B}'$ überall positiv sei. Dann ist es möglich, eine positive Konstante p so zu wählen, daß im Innern und auf der Begrenzung von $\mathfrak{B}'$ überall

$$\Delta(u, v) \geqq p$$

ist.

Nachdem dies geschehen, denke man sich eine positive Konstante ε, die von vornherein der Ungleichung

$$\varepsilon < \frac{p}{16 M} \tag{1384}$$

unterworfen sein möge, nach Belieben angenommen und sodann eine zugeordnete positive Konstante τ so bestimmt, daß für je

---

2) Der Abstand eines beliebigen festen Grenzpunkes G des Bereiches $\mathfrak{B}_2'$ von einem im Innern und auf der Grenze von $\mathfrak{B}'$ frei beweglichen Punkte erreicht für wenigstens eine Lage dieses letzteren einen kleinsten Wert, und dieser kann nicht größer als ϱ sein, so daß G zu $\mathfrak{B}_2'$ gehören muß.

zwei dem Bereiche $\mathfrak{B}_2'$ angehörende Stellen (u, v), (u', v'), deren Abstand kleiner als τ ist, die vier Ungleichungen

$$|\varphi_u(u', v') - \varphi_u(u, v)| < \varepsilon; \qquad |\chi_u(u', v') - \chi_u(u, v)| < \varepsilon$$
$$|\varphi_v(u', v') - \varphi_v(u, v)| < \varepsilon; \qquad |\chi_v(u', v') - \chi_v(u, v)| < \varepsilon$$

bestehen. Endlich verstehe man unter s eine positive Konstante, die kleiner ist als jede der beiden Zahlen $\frac{\varrho}{\sqrt{2}}$, $\frac{\tau}{\sqrt{2}}$, und denke sich die Ebene der Veränderlichen u, v durch Parallellinien zu den Koordinatenachsen in Quadrate von der Seitenlänge s zerlegt. Von diesen Quadraten behalte man zunächst nur diejenigen bei, deren Flächen ganz zu $\mathfrak{B}'$ gehören, und verstehe unter n die Anzahl dieser Quadrate und nach Herstellung irgend einer Rangordnung unter ihnen für $\nu = 1, 2, \cdots n$ jedesmal unter $\mathfrak{Q}_\nu'$ (Fig. 67) die abgeschlossene Fläche des ν-ten Quadrates und unter u_ν, v_ν die Koordinaten seiner linken unteren Ecke. Denkt man sich dann zu den Koordinaten u_ν, v_ν zwei Vermehrungen h, k zugefügt und läßt man jede derselben unabhängig von der anderen das abgeschlossene Intervall $(0 \cdots s)$ durchlaufen, so beschreibt derjenige Punkt der xy-Ebene, welcher dort die Koordinaten

$$\varphi(u_\nu + h,\ v_\nu + k), \qquad \chi(u_\nu + h,\ v_\nu + k)$$

hat, den in Fig. 70 durch das krummlinige Viereck $ABCD$ dargestellten Bereich $\mathfrak{Q}_\nu$, welcher der Fläche $\mathfrak{Q}_\nu'$ entspricht. Es kommt darauf an, den Inhalt dieses Bereiches zwischen zwei hinreichend nahe beieinander liegende Grenzen einzuschließen. Eben dazu dienen folgende Überlegungen: Nach der Ausdehnung des Mittelwertsatzes auf Funktionen von mehreren Veränderlichen (Nr. **329**) ist

$$\begin{aligned}\varphi(u_\nu + h,\ v_\nu + k) &= \varphi(u_\nu,\ v_\nu)\\ &\quad + h\varphi_u(u_\nu + \vartheta h,\ v_\nu + \vartheta k) + k\varphi_v(u_\nu + \vartheta h,\ v_\nu + \vartheta k)\\ \chi(u_\nu + h,\ v_\nu + k) &= \chi(u_\nu,\ v_\nu)\\ &\quad + h\chi_u(u_\nu + \vartheta' h,\ v_\nu + \vartheta' k) + k\chi_v(u_\nu + \vartheta' h,\ v_\nu + \vartheta' k),\end{aligned}$$

wo ϑ und ϑ' zwischen 0 und 1 liegen, und da die Abstände der Punkte $(u_\nu + \vartheta h,\ v_\nu + \vartheta k)$ und $(u_\nu + \vartheta' h,\ v_\nu + \vartheta' k)$ vom Punkte $(u_\nu,\ v_\nu)$ kleiner als $s\sqrt{2}$, also auch kleiner als τ sind, kann man diesen Gleichungen auch die Form

$$\varphi(u_\nu + h,\ v_\nu + k) = \varphi(u_\nu, v_\nu) + h\varphi_u(u_\nu, v_\nu) + k\varphi_v(u_\nu, v_\nu) + h\alpha + k\beta$$
$$\chi(u_\nu + h,\ v_\nu + k) = \chi(u_\nu, v_\nu) + h\chi_u(u_\nu, v_\nu) + k\chi_v(u_\nu, v_\nu) + h\gamma + k\delta$$

geben, wo jede der vier Zahlen α, β, γ, δ absolut genommen kleiner als ε ist. Demgemäß kann man die Abbildung des Quadrates $\mathfrak{Q}'_\nu$ auf den Bereich $\mathfrak{Q}_\nu$ dadurch in zwei einfachere nacheinander vorzunehmende Abbildungen zerlegen, daß man demjenigen Punkte von $\mathfrak{Q}'_\nu$, der in der uv-Ebene die veränderlichen Koordinaten $u_\nu + h$, $v_\nu + k$ hat, zunächst den Punkt der xy-Ebene zuweist, dessen Koordinaten ξ, η in bezug auf das dort angenommene Koordinatensystem durch die Gleichungen

$$(1385)\qquad \begin{aligned} \xi &= \varphi(u_\nu, v_\nu) + h\varphi_u(u_\nu, v_\nu) + k\varphi_v(u_\nu, v_\nu) \\ \eta &= \chi(u_\nu, v_\nu) + h\chi_u(u_\nu, v_\nu) + k\chi_v(u_\nu, v_\nu) \end{aligned}$$

gegeben werden, und sodann diesem Punkte denjenigen Punkt der gleichen Ebene zuordnet, dessen Koordinaten x, y in bezug auf das nämliche Koordinatensystem mit ξ, η durch die Gleichungen

$$(1386)\qquad \begin{aligned} x &= \xi + h\alpha + k\beta \\ y &= \eta + h\gamma + k\delta \end{aligned}$$

verbunden sind.

Von diesen beiden Abbildungen ist nun die erste nichts weiter als eine *affine* Verwandlung. Sind nämlich h und k durch eine lineare Gleichung verbunden, so gilt dasselbe auch von ξ und η. Jeder Geraden der uv-Ebene entspricht also in der xy-Ebene wieder eine Gerade, und je zwei parallelen Geraden entsprechen, wie leicht einzusehen, parallele Gerade. Die quadratische Fläche $\mathfrak{Q}'_\nu$ wird daher durch die Gleichungen (1385) auf die Fläche $\mathfrak{P}_\nu$ eines Parallelogramms abgebildet (vgl. Nr. **186**), und zwar desjenigen Parallelogramms, dessen Ecken A_1, B_1, C_1, D_1 (Fig. 70) beziehentlich folgende Koordinaten haben:

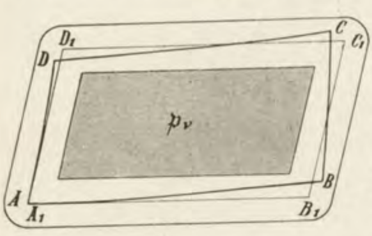


Fig. 70.

$$
\begin{array}{lll}
(A_1) & \varphi(u_\nu, v_\nu); & \chi(u_\nu, v_\nu) \\
(B_1) & \varphi(u_\nu, v_\nu) + s\varphi_u(u_\nu, v_\nu); & \chi(u_\nu, v_\nu) + s\chi_u(u_\nu, v_\nu) \\
(C_1) & \varphi(u_\nu, v_\nu) + s\varphi_u(u_\nu, v_\nu) + s\varphi_v(u_\nu, v_\nu); & \\
 & & \chi(u_\nu, v_\nu) + s\chi_u(u_\nu, v_\nu) + s\chi_v(u_\nu, v_\nu) \\
(D_1) & \varphi(u_\nu, v_\nu) + s\varphi_v(u_\nu, v_\nu); & \chi(u_\nu, v_\nu) + s\chi_v(u_\nu, v_\nu).
\end{array}
$$

Der Inhalt dieses Parallelogramms ist doppelt so groß wie der des Dreiecks $A_1 B_1 D_1$ und wird daher durch den Ausdruck

$$\begin{vmatrix} s\varphi_u(u_\nu, v_\nu) & s\chi_u(u_\nu, v_\nu) \\ s\varphi_v(u_\nu, v_\nu) & s\chi_v(u_\nu, v_\nu) \end{vmatrix} = s^2 \Delta(u_\nu, v_\nu)$$

dargestellt. Er ist somit mindestens gleich ps^2. Ferner sind die Komponenten jeder einzelnen Seite in bezug auf die Koordinatenachsen beide absolut genommen kleiner als Ms, also die Länge jeder Seite kleiner als $\sqrt{2}Ms$, folglich die zugehörige Höhe größer als $\frac{ps^2}{\sqrt{2}Ms} = \frac{ps}{\sqrt{2}M}$.

Wird nun zweitens der im allgemeinen von krummen Linien begrenzte Bereich $\mathfrak{Q}_\nu$ aus dem Parallelogramm $\mathfrak{P}_\nu$ durch die Gleichungen (1386) abgeleitet, so wird jeder Punkt von $\mathfrak{P}_\nu$ nur um eine Strecke verschoben, deren Komponenten beide absolut genommen kleiner als $2\varepsilon s$, deren Länge also kleiner als $2\sqrt{2}\varepsilon s$ ist. Die Bildpunkte A, B, C, D der Ecken A_1, B_1, C_1, D_1 und die Bildpunkte der übrigen Punkte des Randes von $\mathfrak{P}_\nu$ liegen daher sämtlich in demjenigen Ringgebiet $\mathfrak{R}_\nu$, welches von der Fläche eines Kreises vom Radius $2\sqrt{2}\varepsilon s$ überstrichen wird, wenn sein Mittelpunkt den Umfang von $\mathfrak{P}_\nu$ durchläuft. Nun ist infolge der Ungleichung (1384)

$$2\sqrt{2}\varepsilon s < \frac{2\sqrt{2}ps}{16M} = \frac{1}{4}\frac{ps}{\sqrt{2}M}.$$

D. h. der Radius des eben erwähnten Kreises ist kleiner als der vierte Teil der kleinsten Höhe des Parallelogramms $\mathfrak{P}_\nu$. Folglich kann das Ringgebiet $\mathfrak{R}_\nu$ die Fläche $\mathfrak{P}_\nu$ nicht vollständig überdecken. Dasselbe läßt vielmehr im Innern von $\mathfrak{P}_\nu$ die Fläche $\mathfrak{p}_\nu$ eines Parallelogramms frei, dessen kleinste Höhe immer noch größer als $\frac{1}{2}\frac{ps}{\sqrt{2}M}$ ist, und da der Inhalt des Ringgebietes $\mathfrak{R}_\nu$ nach

Nr. **492**, 3 kleiner ist als die Länge des Umfangs von $\mathfrak{P}_\nu$ multipliziert mit dem Durchmesser des das Ringgebiet überstreichenden Kreises, also erst recht kleiner als das Produkt

$$4\sqrt{2}Ms\cdot 4\sqrt{2}\varepsilon s = 32M\varepsilon s^2,$$

so kann der Flächeninhalt von $\mathfrak{p}_\nu$ durch einen Ausdruck von der Form

$$[\Delta(u_\nu, v_\nu) - \vartheta_\nu 32M\varepsilon]s^2$$

dargestellt werden, wo ϑ_ν eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl bedeutet.

Die Fläche $\mathfrak{p}_\nu$ ist ferner ganz in $\mathfrak{Q}_\nu$ enthalten. Denn gäbe es in $\mathfrak{p}_\nu$ einen nicht zu $\mathfrak{Q}_\nu$ gehörenden Punkt R, so könnte man diesen Punkt mit dem sicher in $\mathfrak{p}_\nu$ liegenden Punkt S, welcher durch die Abbildung (1386) aus dem Mittelpunkt von $\mathfrak{P}_\nu$ hervorgeht, durch eine gerade Strecke verbinden, und es müßte dann auf der Strecke SR einen Punkt T von solcher Beschaffenheit geben, daß jeder von T verschiedene Punkt der Strecke ST im Innern von $\mathfrak{Q}_\nu$, der Punkt T dagegen auf der Grenze von $\mathfrak{Q}_\nu$ läge. Dabei müßte nun der Punkt T zu $\mathfrak{Q}_\nu$ gehören und könnte nicht etwa ein von dem Bereich $\mathfrak{Q}_\nu$ ausgeschlossener Grenzpunkt desselben sein. Denn wären x_1, y_1 die Koordinaten von T, so hätte die Funktion $\sqrt{[x_1 - \varphi(u, v)]^2 + [y_1 - \chi(u, v)]^2}$ der Veränderlichen u, v in dem Quadrat $\mathfrak{Q}'_\nu$ die untere Grenze 0 und müßte, da sie in $\mathfrak{Q}'_\nu$ stetig und $\mathfrak{Q}'_\nu$ abgeschlossen ist, diese untere Grenze auch an einer zu $\mathfrak{Q}'_\nu$ gehörenden Stelle wirklich erreichen. Der Punkt T wäre also Bildpunkt eines Punktes von $\mathfrak{Q}'_\nu$. Dies ist aber unmöglich, denn T kann als Grenzpunkt von $\mathfrak{Q}_\nu$ nicht Bildpunkt eines inneren Punktes von $\mathfrak{Q}'_\nu$ sein und kann auch nicht Bildpunkt eines Randpunktes von $\mathfrak{Q}'_\nu$ sein, da die Bildpunkte dieser Randpunkte sämtlich außerhalb $\mathfrak{p}_\nu$ liegen.

Die Flächen der Parallelogramme $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_n$ bilden also zusammengenommen einen von dem Bereich $\mathfrak{B}$ eingeschlossenen geradlinig begrenzten Bereich. Der Inhalt dieses Bereiches wird durch die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{n}[\Delta(u_\nu, v_\nu) - \vartheta_\nu 32M\varepsilon]s^2$$

dargestellt und kann, wie man mit einem Blick erkennt, dadurch dem Flächenintegral

$$J = \int^{(\mathfrak{B}')} \Delta(u, v)\, d\sigma'$$

beliebig nahe gebracht werden, daß man die Konstanten ε und s hinreichend klein annimmt.

Zweitens füge man zu den bisher beibehaltenen Quadraten der uv-Ebene auch noch alle diejenigen hinzu, die mit dem Bereich $\mathfrak{B}'$ wenigstens einen inneren oder Randpunkt gemein haben, wodurch die Anzahl der in Betracht zu ziehenden Quadrate auf den Wert $m > n$ steigen möge, denke sich zwischen diesen Quadraten wieder eine Rangordnung hergestellt und verstehe dann für $\nu = 1, 2, \cdots m$ unter u_ν, v_ν, $\mathfrak{P}_\nu$, $\mathfrak{R}_\nu$ jedesmal diejenigen Zahlen und Flächen, welche für das ν-te Quadrat die gleiche Bedeutung haben wie zuvor. Hierauf fasse man alle diejenigen Teile der xy-Ebene zusammen, welche von den Flächen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_m$ und $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \cdots \mathfrak{R}_m$ überdeckt werden, ohne dabei zwischen einfach und mehrfach überdeckten Punkten einen Unterschied zu machen. Dann erhält man einen den Bereich $\mathfrak{B}$ ganz im Innern enthaltenden endlichen Bereich, dessen Grenzen aus einer endlichen Anzahl von geraden Strecken und Kreisbogen bestehen und dessen Inhalt kleiner ist als die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{m} [\Delta(u_\nu, v_\nu) + 32 M\varepsilon] s^2 .$$

Nun kann man aber, wie man ebenfalls mit einem Blick erkennt, auch diese obere Grenze für den Inhalt des erwähnten umschließenden Bereiches dadurch dem Wert J beliebig nahe bringen, daß man die Konstanten ε und s hinlänglich klein annimmt. Folglich kommt auch dem Bereich $\mathfrak{B}$ ein Inhalt zu, und dieser Inhalt wird durch das Integral J dargestellt, wie behauptet wurde.

Nachdem dies festgestellt, kann man sich von der bisher festgehaltenen Einschränkung, daß die Determinante $\Delta(u, v)$ auch auf der Grenze von $\mathfrak{B}'$ überall positiv sein soll, nachträglich leicht befreien. Wenn nämlich diese Bedingung nicht mehr erfüllt ist, so kann man nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen positiven Konstanten η den Bereich $\mathfrak{B}'$ auf mannigfach verschiedene Weise derart in zwei meßbare Teile $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ zerlegen, daß die Determinante $\Delta(u, v)$ im Innern und auf der Grenze von $\mathfrak{T}_1$ überall positiv und daß zugleich der Flächeninhalt von $\mathfrak{T}_2$ kleiner als η ist, und sodann folgendermaßen weiter schließen:

1. — Demjenigen Bereich der xy-Ebene, welcher dem Teil $\mathfrak{T}_1$ entspricht, kommt nach dem vorangehenden ein Inhalt zu, nämlich der Inhalt $\int^{(\mathfrak{T}_1)} \Delta(u,v)\,d\sigma$, und dieser kann dadurch, daß man die Konstante η hinreichend klein annimmt, dem Wert J beliebig nahe gebracht werden.

2. — Der dem Teil $\mathfrak{T}_2$ entsprechende Bereich der xy-Ebene kann in einen meßbaren Bereich eingeschlossen werden, dessen Inhalt durch passende Wahl der Konstanten η beliebig klein gemacht werden kann.

Denn bedeckt man die uv-Ebene mit einem Netz gleich großer Quadrate, deren Seiten den Koordinatenachsen parallel laufen, so kann man dadurch, daß man die gemeinsame Seitenlänge s dieser Quadrate hinreichend klein annimmt, stets erreichen, daß die Fläche eines jeden Quadrates, dessen Fläche oder Umfang mit $\mathfrak{T}_2$ einen Punkt gemein hat, ganz innerhalb des oben erklärten Bereiches $\mathfrak{B}_2'$ liegt und daß zugleich die Summe der Inhalte aller dieser Quadrate kleiner als 2η ausfällt. Nun sind aber die Komponenten der Strecke, welche den Mittelpunkt A eines Quadrates der eben gekennzeichneten Art mit irgendeinem anderen im Innern oder auf dem Umfang des Quadrates liegenden Punkte B verbindet, absolut genommen niemals größer als $\frac{1}{2}s$. Also sind die Komponenten der Strecke, welche die den Punkten A, B entsprechenden Punkte der xy-Ebene verbindet, wie man wieder mit Hilfe der Ausdehnung des Mittelwertsatzes auf Funktionen von zwei Veränderlichen (Nr. **329**) leicht erkennt, absolut genommen kleiner als $2M\frac{s}{2} = Ms$, folglich die Länge dieser Strecke kleiner als $\sqrt{2}Ms$. Derjenige Bereich der xy-Ebene, welcher irgendeinem der erwähnten Quadrate entspricht, läßt sich also immer in einen Kreis vom Radius $\sqrt{2}Ms$, also dem Inhalt $2\pi M^2 s^2$ einschließen, d. h. einen Kreis, dessen Inhalt sich aus dem Inhalt des Quadrates durch Multiplikation mit dem festen Faktor $2\pi M^2$ ergibt. Folglich läßt sich derjenige Bereich der xy-Ebene, welcher der obigen den Teil $\mathfrak{T}_2$ überdeckenden Quadratsumme entspricht, in einen meßbaren Bereich einschließen, dessen Inhalt kleiner als $2\pi M^2 \cdot 2\eta = 4\pi M^2 \eta$ ist, und dasselbe gilt erst recht für den dem Teil $\mathfrak{T}_2$ entsprechenden Bereich der xy-Ebene.

Hiermit ist die oben unter 2 ausgesprochene Behauptung bewiesen. Aus ihr und dem zuvor unter 1 Bemerkten folgt aber sofort, daß die Gleichung (1382) auch dann noch richtig bleibt, wenn man die Voraussetzung, daß die Determinante $\Delta(u, v)$ auch auf der Grenze von $\mathfrak{B}'$ überall positiv sei, fallen läßt.

Infolge der Stetigkeit der Determinante $\Delta(u, v)$ ist der Inhalt eines jeden zusammenhängenden meßbaren Teiles des Bereiches $\mathfrak{B}$ nach Nr. **495** gleich dem Produkt aus dem Inhalt des entsprechenden Teiles von $\mathfrak{B}'$ und dem Wert, den die Funktionaldeterminante $\Delta(u, v)$ in einem passend gewählten Punkte dieses Teiles annimmt. Dies gilt insbesondere von den Inhalten $d\sigma$, $d\sigma'$ zweier einander entsprechenden Flächenelemente. Es gibt also auf dem zweiten Element stets wenigstens eine Stelle (u, v), für welche die Gleichung

$$d\sigma = \Delta(u, v)\, d\sigma' \tag{1387}$$

genau richtig ist. Hiermit ist aber, wie man leicht erkennt, auch der Beweis der allgemeinen, durch die Gleichung (1383) ausgedrückten Umformungsregel erbracht.

Zusatz: Wenn die Determinante $\Delta(u, v)$ im Innern von $\mathfrak{B}'$ dauernd negativ ist, so stimmen die Integrale

$$\int^{(\mathfrak{B}')} \Delta(u, v)\, d\sigma' \qquad \text{und} \qquad \int^{(\mathfrak{B}')} f[\varphi(u, v), \chi(u, v)]\, \Delta(u, v)\, d\sigma'$$

beziehentlich mit den entgegengesetzten Werten des Flächeninhalts von $\mathfrak{B}$ und des Integrales $\int^{(\mathfrak{B})} f(x, y)\, d\sigma$ überein.

500. Einführung von Polarkoordinaten. — Ein besonders häufig vorkommender Fall der Umformung eines Flächenintegrals ist der, daß man statt der ursprünglich benutzten rechtwinkeligen Koordinaten x, y Polarkoordinaten ϱ, φ einzuführen hat, die mit den rechtwinkeligen durch die Gleichungen

$$x = \varrho \cos\varphi; \qquad y = \varrho \sin\varphi$$

verbunden sind. In diesem Falle gilt innerhalb eines jeden Kontinuums im Gebiet der Veränderlichen ϱ, φ die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho} & \frac{\partial y}{\partial \varrho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\varrho\sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{vmatrix} = \varrho.$$

Ist nun in der xy-Ebene ein Bereich $\mathfrak{B}$ derart als Bild eines Bereiches $\mathfrak{B}'$ im Gebiet der Veränderlichen ϱ, φ gegeben, daß je zwei verschiedenen inneren Punkten von $\mathfrak{B}'$ auch verschiedene Punkte von $\mathfrak{B}$ entsprechen, und ist der Bereich $\mathfrak{B}'$, falls man auch ϱ und φ als rechtwinkelige Koordinaten deutet, endlich und meßbar, so kommt auch dem Bereich $\mathfrak{B}$ ein Inhalt zu, da ja die Veränderliche ϱ, also auch die eben erwähnte Funktionaldeterminante, im Innern von $\mathfrak{B}'$ beständig positiv bleibt. Zugleich gilt, wenn $f(x,y)$ irgendeine über $\mathfrak{B}$ integrierbare Funktion bedeutet, immer die Gleichung

$$\text{(1388)} \qquad \int^{(\mathfrak{B})} f(x,y)\,d\sigma = \int^{(\mathfrak{B}')} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\,\varrho\,d\sigma'.$$

Dieses Endergebnis läßt sich auch ohne Berufung auf die allgemeine Umformungsregel der Nr. **499** durch einfache geometrische Überlegungen gewinnen. Denkt man sich nämlich den Bereich $\mathfrak{B}$ und seine nächste Umgebung durch Halbstrahlen, die vom Nullpunkt ausgehen, und durch Kreise, die diesen Punkt zum Mittelpunkt haben, in Elemente zerschnitten, so hat dasjenige Element, welches (Fig. 71) zwischen den benachbarten Kreisen mit den Radien ϱ und $(\varrho + d\varrho)$ und zwischen den zu den benachbarten Abweichungen φ und $(\varphi + d\varphi)$ gehörenden Halbstrahlen enthalten ist, bei positiven Werten der Vermehrungen $d\varrho$, $d\varphi$ den Flächeninhalt

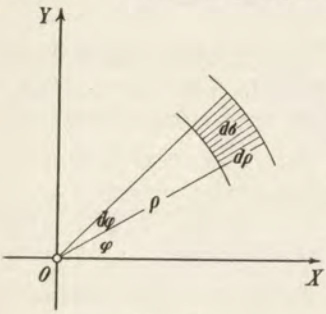


Fig. 71.

$$d\sigma = \frac{1}{2}(\varrho + d\varrho)^2 d\varphi - \frac{1}{2}\varrho^2 d\varphi = \left(\varrho + \frac{1}{2}d\varrho\right) d\varrho\, d\varphi.$$

Nun ist aber das Produkt $d\varrho\, d\varphi$ gleich dem Flächeninhalt $d\sigma'$ desjenigen Elementes, welches dem eben gekennzeichneten Element der xy-Ebene in der $\varrho\varphi$-Ebene entspricht. Ferner verschwindet der Einfluß des in der Klammer $\left(\varrho + \frac{1}{2}d\varrho\right)$ an zweiter Stelle stehenden Summanden bei unbegrenzter Verfeinerung der Teilung. Man darf daher mit einer durchaus zulässigen Vernachlässigung $d\sigma = \varrho\, d\sigma'$ setzen und gelangt dann sofort zu der Gleichung (1388).

501. Beispiele. — **1.** — Im Innern einer Kugel (Fig. 72) von dem gegebenen Radius r ist ein Kreis $\mathfrak{k}$ gegeben, der einen Radius der Kugel als Durchmesser hat, und durch diesen Kreis ist der auf der Ebene desselben senkrecht stehende Zylinder gelegt. Man soll das Volumen V desjenigen Körpers berechnen, der durch diesen Zylinder aus der Kugel ausgebohrt wird.

Lösung: Nimmt man ein System rechtwinkeliger räumlicher Koordinaten x, y, z so an, daß der Anfang mit dem Mittelpunkt

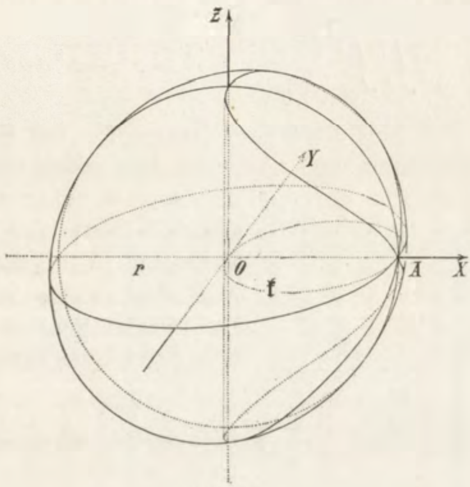


Fig. 72.

der Kugel und die xy-Ebene mit der Ebene des Kreises $\mathfrak{k}$ zusammenfällt und daß die positive Hälfte der x-Achse durch denjenigen Punkt A geht, wo der Kreis $\mathfrak{k}$ die Oberfläche der Kugel berührt, so wird der betrachtete Körper durch die xy-Ebene in zwei gleich große Teile zerlegt. Ferner wird die oberhalb der xy-Ebene liegende Hälfte der Kugelfläche durch die Gleichung

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

dargestellt. Das gesuchte Volumen V wird daher durch die Gleichung

$$V = 2\int \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, d\sigma$$

gegeben, in der das rechts stehende Integral über die Fläche des Kreises $\mathfrak{k}$ zu erstrecken ist.

Zerschneidet man den Integrationsbereich durch Parallellinien zur x- und zur y-Achse in Elemente, so erhält man, da der Kreis $\mathfrak{k}$ durch die Gleichung

$$\left(x-\frac{r}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{r}{2}\right)^2$$

oder

$$y=\pm\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2-\left(x-\frac{r}{2}\right)^2}=\pm\sqrt{x(r-x)}$$

dargestellt wird, die Gleichung

$$V=2\int_0^r\int_{-\sqrt{x(r-x)}}^{\sqrt{x(r-x)}}\sqrt{r^2-x^2-y^2}\,dy\,dx.$$

Hier läßt sich nun die innere Integration mit Hilfe der Gleichung (1268) erledigen, und nachdem dies geschehen, kann auch die äußere Integration durchgeführt werden, aber nur mit einem ziemlich erheblichen Aufwand von Rechnung. Einfacher kommt man zum Ziel, wenn man statt der rechtwinkeligen Koordinaten mittels der Gleichungen

$$x=\varrho\cos\varphi;\qquad y=\varrho\sin\varphi$$

Polarkoordinaten ϱ, φ einführt. Dann wird nämlich

$$\sqrt{r^2-x^2-y^2}=\sqrt{r^2-\varrho^2}.$$

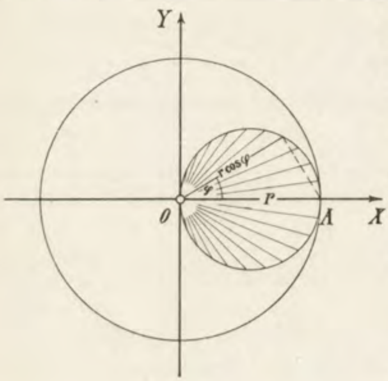


Fig. 73.

Zugleich ist das Flächenelement $d\sigma$ nach Nr. **500** durch das Produkt $\varrho\,d\varrho\,d\varphi$ und die Fläche des Kreises $\mathfrak{k}$ durch den entsprechenden Integrationsbereich im Gebiet der Veränderlichen ϱ, φ zu ersetzen. Diesen letzteren erhält man, wie die Fig. 73 zeigt, wenn man den Winkel φ das Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}\cdots\frac{\pi}{2}\right)$ durchlaufen und bei gegebenem Werte von φ den Leitstrahl ϱ jedesmal von 0 bis $r\cos\varphi$ zunehmen läßt. Somit ergibt sich

$$V=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{r\cos\varphi}\sqrt{r^2-\varrho^2}\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi. \tag{1389}$$

Hier sind aber die einzelnen Integrationen leicht durchzuführen, wenn auch an einer Stelle die Gefahr eines Vorzeichenfehlers nahe liegt. Zunächst ist nämlich

$$\int \sqrt{r^2-\varrho^2}\,\varrho\,d\varrho = -\frac{1}{2}\Big[\int u^{\frac{1}{2}}du\Big]_{u=r^2-\varrho^2} = -\frac{1}{3}\sqrt{r^2-\varrho^2}^{\,3},$$

also

$$\int_0^{r\cos\varphi} \sqrt{r^2-\varrho^2}\,\varrho\,d\varrho = -\frac{1}{3}r^3\sqrt{1-\cos\varphi^2}^{\,3} + \frac{1}{3}r^3$$
$$= \frac{1}{3}r^3\left(1-\sqrt{1-\cos\varphi^2}^{\,3}\right).$$

Aber man würde einen Fehler begehen, wenn man jetzt einfach $\sqrt{1-\cos\varphi^2} = \sin\varphi$ setzen wollte. Denn die beiden Seiten dieser Gleichung stimmen nur für die positiven Werte von φ überein, sind dagegen für die negativen Werte von φ einander entgegengesetzt gleich. Man muß daher positive und negative Werte von φ sorgfältig unterscheiden und hat nur für die ersteren

$$\sqrt{1-\cos\varphi^2} = \sin\varphi,$$

für die letzteren dagegen

$$\sqrt{1-\cos\varphi^2} = -\sin\varphi$$

zu setzen. Indem man dies berücksichtigt, erhält man aus (1389) die Gleichung

$$V = \frac{2}{3}r^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi^3)\,d\varphi + \frac{2}{3}r^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(1+\sin\varphi^3)\,d\varphi.$$

Hier ist aber der zweite Teil der rechten Seite ebenso groß wie der erste. Denn er geht in den ersten über, wenn man an Stelle von φ mittels der Gleichung $\varphi = -\chi$ eine neue Veränderliche χ einführt und, nachdem dies geschehen, statt χ wieder φ schreibt. Auch geometrisch folgt die Übereinstimmung leicht daraus, daß der erste Teil das Volumen der auf der positiven und der zweite das Volumen der auf der negativen Seite der zx-Ebene liegenden Hälfte des betrachteten Körpers darstellt. Demgemäß ist

$$V = \frac{4}{3}r^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi^3)\,d\varphi,$$

und hieraus erhält man mit Hilfe der Gleichung (1211) oder der Gleichung (1211ᵃ) sofort

$$V = \frac{4}{3} r^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3} \pi r^3 - \frac{8}{9} r^3.$$

Denkt man sich den eben betrachteten Körper durch die zx-Ebene halbiert und dann die beiden Hälften, so wie es die Fig. 74 andeutet, aus einer Halbkugel vom Radius r herausgebohrt, so bleibt ein krummflächig begrenzter Körper übrig, dessen Volumen durch die Differenz

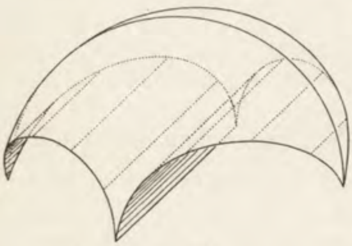


Fig. 74.

$$\frac{2}{3} \pi r^3 - \left(\frac{2}{3} \pi r^3 - \frac{8}{9} r^3 \right) = \frac{8}{9} r^3$$

gegeben wird, also zu dem Volumen des Würfels von der Kantenlänge r in dem rationalen Verhältnis $\frac{8}{9}$ steht. Damit hat sich zu den bekannten Möndchen des Hippokrates ein räumliches Analogon ergeben. (Vgl. auch Nr. **511**, Beispiel 2.)

2. — Ein größeres Schwungrad wird in der Regel nicht in einem Stück gegossen, sondern in der Weise hergestellt, daß man die Hälften, die zu beiden Seiten einer durch die Achse des Rades gehenden Ebene liegen, einzeln anfertigt und nachträglich miteinander verbindet. Will man dann wissen, wie stark man diese Verbindung machen muß, so ist es wichtig, die Antwort auf die folgende Frage zu kennen:

Der Radkranz eines mit der gegebenen konstanten Winkelgeschwindigkeit ω umlaufenden Schwungrades besteht aus einem homogenen Material von der gegebenen Dichte μ und wird von zwei Kreiszylindern, deren Achsen mit der Umdrehungsachse des Rades zusammenfallen, und zwei zu dieser Achse senkrechten Ebenen begrenzt. Der innere Zylinder hat den gegebenen Radius r_1, der äußere den gegebenen Radius r_2, und die beiden Ebenen haben den gegebenen Abstand a. Wie groß ist dann, wenn man sich durch die Umdrehungsachse eine mit dem Rade fest verbundene Ebene $\mathfrak{E}$ gelegt und den Radkranz durch diese Ebene halbiert denkt, die Resultante aller Fliehkräfte, denen die einzelnen Massenelemente der einen Hälfte des Radkranzes unterworfen sind?

Lösung: Man denke sich ein System rechtwinkeliger Koordinaten x, y, z so angenommen, daß die z-Achse mit der Umdrehungsachse des Rades zusammenfällt, daß ferner die xy-Ebene in der Mitte zwischen den beiden parallelen Begrenzungsebenen des Radkranzes liegt und daß endlich diejenige Hälfte der zx-Ebene, welche auf der gleichen Seite der z-Achse liegt wie die positive Hälfte der x-Achse, den in Betracht gezogenen Teil des Radkranzes in zwei kongruente Stücke zerlegt. Dann liegt die gesuchte Resultante in der x-Achse, ist mit dieser gleichgerichtet und wird, wenn $\mathfrak{q}$ die Fläche des Querschnitts (Fig. 75) bedeutet, in welchem die xy-Ebene die betrachtete Radkranzhälfte schneidet, der Größe nach durch den Ausdruck

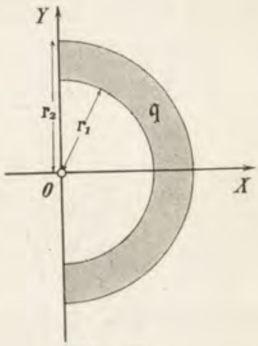


Fig. 75.

$$R = \mu a \omega^2 \int^{(\mathfrak{q})} x \, d\sigma$$

dargestellt. Unter der Resultante aller auf die einzelnen Teile der betrachteten Radkranzhälfte wirkenden Fliehkräfte hat man nämlich folgendes zu verstehen: Man denke sich den Querschnitt $\mathfrak{q}$ in eine beliebige Anzahl n von meßbaren Teilen und dementsprechend die betrachtete Radkranzhälfte in diejenigen n zylindrischen Säulen zerschnitten, die sich ergeben, wenn man durch die Ränder der einzelnen Teile von $\mathfrak{q}$ parallel zur z-Achse Zylinder legt. Hierauf denke man sich die Masse jeder einzelnen Säule in einem beliebigen Punkte ihres in der xy-Ebene liegenden Querschnitts vereinigt und stelle sich vor, daß statt der betrachteten Hälfte des Radkranzes das so erzeugte System materieller Punkte um die Achse rotiere. Sind dann nach Herstellung irgendeiner Rangordnung zwischen den einzelnen Teilen von $\mathfrak{q}$ für $\lambda = 1, 2, \cdots n$ jedesmal σ_λ der Flächeninhalt des λ-ten Teiles und x_λ, y_λ die Koordinaten des auf demselben angenommenen Punktes, so wird die diesem Punkte zukommende Masse durch das Produkt $\mu a \sigma_\lambda$, also die Größe der auf ihn wirkenden Fliehkraft durch den Ausdruck

$$\mu a \sigma_\lambda \sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2}\, \omega^2$$

dargestellt, und da diese Kraft nach außen wirkt, hat sie in bezug auf die Koordinatenachsen die Komponenten

$$\mu a \omega^2 x_\lambda \sigma_\lambda; \qquad \mu a \omega^2 y_\lambda \sigma_\lambda; \qquad 0.$$

Alle diese Fliehkräfte lassen sich ferner, da sie durch ein und denselben Punkt gehen, zu einer Resultante zusammensetzen. Diese liegt in der xy-Ebene und hat in den Richtungen der x- und der y-Achse die Komponenten

$$\mu a \omega^2 \sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda \sigma_\lambda \qquad \text{und} \qquad \mu a \omega^2 \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \sigma_\lambda .$$

Die letzteren können aber dadurch, daß man die Teilung des Querschnitts $\mathfrak{q}$ fein genug macht, den Grenzwerten

$$\mu a \omega^2 \int^{(\mathfrak{q})} x\, d\sigma = R \qquad \text{und} \qquad \mu a \omega^2 \int^{(\mathfrak{q})} y\, d\sigma = 0$$

beliebig nahe gebracht werden, und es ist nun eben die zu diesen Grenzwerten gehörende Kraft, die man, falls man sich die betrachtete Radkranzhälfte lückenlos mit Masse von der konstanten Dichte μ erfüllt denkt, als die Resultante aller auf die Teile dieser Hälfte wirkenden Fliehkräfte bezeichnet.

Die zahlenmäßige Ausrechnung des Flächenintegrals $\int^{(\mathfrak{q})} x\, d\sigma$ würde ziemlich umständlich werden, wenn man zur Zerschneidung des Integrationsbereiches Parallellinien zu den Koordinatenachsen benutzen wollte. Sie wird dagegen sehr einfach, wenn man mittels der Gleichungen

$$x = \varrho \cos \varphi ; \qquad y = \varrho \sin \varphi$$

Polarkoordinaten ϱ, φ einführt. Dann erhält man nämlich sofort

$$R = \mu a \omega^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r_1}^{r_2} \varrho^2 \cos \varphi \, d\varrho \, d\varphi$$

und nach Ausführung der Integrationen

$$R = \frac{2}{3} \mu a \omega^2 (r_2^3 - r_1^3) .$$

502. Raumintegrale. — Ist im Raum ein endlicher meßbarer Bereich $\mathfrak{K}$ gegeben und hat man nach Annahme eines Systems rechtwinkeliger Koordinaten x, y, z für den Bereich $\mathfrak{K}$ eine zwischen endlichen Grenzen enthalten bleibende Funktion $f(x, y, z)$ erklärt, so kann man nach Zerlegung des Bereiches $\mathfrak{K}$ in eine beliebige Anzahl von Teilbereichen, denen ebenfalls Volumina zukommen, aus den Produkten dieser Volumina mit den zugehörigen unteren beziehungsweise oberen Grenzen der Funktion $f(x, y, z)$ zwei Summen bilden und in bezug auf diese ganz ähnliche Überlegungen anstellen wie diejenigen, welche in Nr. **420** zum Zweck der Erklärung des Begriffs eines einfachen Integrals und in Nr. **491** zum Zweck der Erklärung des Begriffs eines Flächenintegrals angestellt wurden. Man gelangt dadurch zu dem Begriff eines **Raumintegrals,** für den sich im Anschluß an die eben erwähnten Nummern leicht eine genaue Erklärung aufstellen läßt, und kann dann auch ohne viel Mühe nachweisen, daß die in den Nummern **491—496** entwickelten Sätze auf Raumintegrale übertragbar sind. Zur Vermeidung von Wiederholungen möge indessen davon abgesehen werden, diese nirgends Schwierigkeiten bietenden Betrachtungen hier im Einzelnen durchzuführen.

Auch die in Nr. **499** bewiesene Regel für die Umformung eines Flächenintegrals durch Einführung von neuen Integrationsveränderlichen kann auf Raumintegrale ausgedehnt werden, und zwar führt diese Erweiterung zu dem folgenden

Lehrsatz: *Nach Annahme eines ersten Systems rechtwinkeliger räumlicher Koordinaten u, v, w sei ein endlicher räumlicher Bereich $\mathfrak{K}'$, dem ein Volumen zukommt, irgendwie abgegrenzt, und es seien dann für einen größeren, den Bereich $\mathfrak{K}'$ und seine Grenzpunkte ganz im Innern enthaltenden Bereich $\mathfrak{K}'_1$ drei Funktionen $\varphi(u, v, w)$, $\chi(u, v, w)$, $\psi(u, v, w)$ gegeben, deren partielle Ableitungen erster Ordnung im Innern von $\mathfrak{K}'_1$ überall vorhanden, stetig und so beschaffen sind, daß die aus ihnen gebildete Funktionaldeterminante*

$$\Delta(u, v, w) = \begin{vmatrix} \varphi_u(u, v, w) & \chi_u(u, v, w) & \psi_u(u, v, w) \\ \varphi_v(u, v, w) & \chi_v(u, v, w) & \psi_v(u, v, w) \\ \varphi_w(u, v, w) & \chi_w(u, v, w) & \psi_w(u, v, w) \end{vmatrix}$$

positiv ist. Ferner sei nach Annahme eines zweiten Systems rechtwinkeliger Koordinaten x, y, z, welches auch mit dem bisherigen übereinstimmen darf,

$$x = \varphi(u, v, w); \qquad y = \chi(u, v, w); \qquad z = \psi(u, v, w)$$

gesetzt und dadurch eine Abbildung des Bereiches $\mathfrak{K}'$ auf einen Bereich $\mathfrak{K}$ im Gebiet der Veränderlichen x, y, z vermittelt. Schließlich werde vorausgesetzt, daß je zwei verschiedenen inneren Punkten von $\mathfrak{K}'$ auch verschiedene Punkte von $\mathfrak{K}$ entsprechen. Dann kommt auch dem Bereich $\mathfrak{K}$ ein Volumen V zu, und zwar ist

$$V = \int^{(\mathfrak{K}')} \Delta(u, v, w)\,dS', \tag{1390}$$

wo dS' *das Volumenelement des Bereiches* $\mathfrak{K}'$ *bedeutet und das rechts stehende Integral über den Bereich* $\mathfrak{K}'$ *zu erstrecken ist. Und wenn für den Bereich* $\mathfrak{K}$ *eine über denselben integrierbare Funktion* $f(x, y, z)$ *gegeben ist, so gilt für das über* $\mathfrak{K}$ *erstreckte Integral* $\int^{(\mathfrak{K})} f(x, y, z)\,dS$ *dieser Funktion die Gleichung*

$$\left|\begin{aligned} &\int^{(\mathfrak{K})} f(x,y,z)\,dS \\ &= \int^{(\mathfrak{K}')} f[\varphi(u,v,w),\, \chi(u,v,w),\, \psi(u,v,w)]\,\Delta(u,v,w)\,dS'. \end{aligned}\right. \tag{1391}$$

Der Beweis läßt sich dem in Nr. **499** durchgeführten Beweise Schritt für Schritt nachbilden, aber von seiner wirklichen Durchführung möge hier der Kürze wegen ebenfalls abgesehen werden. Dies ist um so eher zulässig, als man in den praktisch am häufigsten vorkommenden besonderen Fällen die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes mit ganz elementaren Mitteln beweisen kann. Insbesondere gilt dies, wenn man sich ein und denselben endlichen meßbaren räumlichen Bereich $\mathfrak{K}$ einmal auf ein System rechtwinkeliger Koordinaten x, y, z und ein zweites Mal auf ein System mit den ersteren durch die Gleichungen

$$x = r\cos\varphi\cos\lambda; \qquad y = r\cos\varphi\sin\lambda; \qquad z = r\sin\varphi$$

verbundener räumlicher Polarkoordinaten r, λ, φ bezogen denkt und dabei der Bereich $\mathfrak{K}$ derart als Bild eines endlichen und gleichfalls meßbaren Bereiches $\mathfrak{K}'$ im Gebiet der Veränderlichen r, λ, φ erscheint, daß jeder innere Punkt von $\mathfrak{K}$ nur einem einzigen Punkte von $\mathfrak{K}'$ entspricht. Dann ist nämlich

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\varphi \\ -r\cos\varphi\sin\lambda & r\cos\varphi\cos\lambda & 0 \\ -r\sin\varphi\cos\lambda & -r\sin\varphi\sin\lambda & r\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= r^2\sin\varphi^2\cos\varphi + r^2\cos\varphi^3 = r^2\cos\varphi,$$

so daß sich, wenn $f(x, y, z)$ eine über $\mathfrak{K}$ integrierbare Funktion bedeutet, aus (1391) die Gleichung

$$(1392)\quad \left\{ \begin{aligned} & \overset{(\mathfrak{K})}{\int} f(x, y, z)\, dS \\ & = \overset{(\mathfrak{K}')}{\int} f(r\cos\varphi\cos\lambda,\, r\cos\varphi\sin\lambda,\, r\sin\varphi)\, r^2\cos\varphi\, dS' \end{aligned} \right.$$

ergibt. Nun kann man aber das Volumen dS eines Raumelementes (Fig. 76), welches zwischen zwei um den Koordinatenanfang mit den Radien r und $(r+dr)$ beschriebenen Kugeln, zwischen zwei zu den geographischen Längen λ und $(\lambda+d\lambda)$ gehörenden Meridianebenen und zwischen zwei Rotationskegeln enthalten ist, welche die z-Achse als Achse haben und zu den geographischen Breiten φ und $(\varphi+d\varphi)$ gehören, auf elementarem Wege berechnen. Man findet dann für dasselbe bei positiven Werten der Differentiale dr, $d\lambda$, $d\varphi$ den Ausdruck

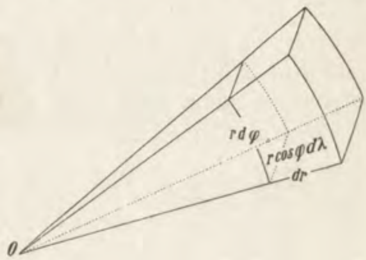


Fig. 76.

$$\begin{aligned} dS &= \frac{4}{3}\pi\left[(r+dr)^3 - r^3\right]\cdot\frac{2\pi r^2[\sin(\varphi+d\varphi)-\sin\varphi]}{4\pi r^2}\cdot\frac{d\lambda}{2\pi} \\ &= \frac{1}{3}\left[(r+dr)^3 - r^3\right]\left[\sin(\varphi+d\varphi)-\sin\varphi\right]d\lambda \end{aligned}$$

und kann nun leicht nachweisen, daß man, ohne einen Fehler befürchten zu müssen, auch

$$(1393)\qquad dS = r^2\cos\varphi\, dr\, d\lambda\, d\varphi$$

setzen darf, da beide Seiten dieser Gleichung sich nur um Glieder unterscheiden, deren Einfluß verschwindet, wenn man die Zerlegung des Körpers $\mathfrak{K}$ in Elemente der erwähnten Art unbegrenzt verfeinert. So kommt man also in dem vorliegenden besonderen Falle verhältnismäßig leicht zu einer direkten Bestätigung der Gleichung (1392).

503. Differentiation nach einem Parameter. Lehrsatz: *Es sei $f(x, y, z; p)$ eine Funktion der Koordinaten x, y, z eines auf einen abgeschlossenen meßbaren Bereich $\mathfrak{K}$ eingeschränkten Punktes und eines Parameters p, der höchstens der Einschränkung unterliegt, einem gegebenen begrenzten Intervall $\mathfrak{J}$ anzugehören. Wenn dann die Funktion $f(x, y, z; p)$ für alle zulässigen Wert-*

systeme ihrer Argumente stetig ist, so stellt das über den Bereich $\mathfrak{K}$ erstreckte Raumintegral

$$\int^{(\mathfrak{K})} f(x, y, z; p)\, dS$$

eine in dem Intervall $\mathfrak{J}$ stetige Funktion des Parameters p dar. Und wenn die partielle Ableitung $\frac{\partial f(x,y,z;p)}{\partial p} = f_p(x,y,z;p)$ für jedes zulässige Wertsystem der Argumente $x, y, z; p$ vorhanden und stetig ist, so ist die durch das eben erwähnte Integral dargestellte Funktion des Parameters p in dem Intervall $\mathfrak{J}$ auch differenzierbar und läßt sich dadurch differenzieren, daß man unter dem Integralzeichen partiell nach p differenziert. Es gilt also dann die Gleichung

$$\text{(1394)} \qquad \frac{d}{dp} \int^{(\mathfrak{K})} f(x,y,z;p)\, dS = \int^{(\mathfrak{K})} \frac{\partial f(x,y,z;p)}{\partial p}\, dS.$$

Der Beweis beider Behauptungen läßt sich in engstem Anschluß an die Betrachtungen der Nr. **484** erbringen. Ist nämlich p irgendeine feste und $(p+h)$ eine veränderliche, dem Intervall $\mathfrak{J}$ angehörende Zahl, so kann man den absoluten Wert der Differenz

$$\int^{(\mathfrak{K})} f(x,y,z;p+h)\, dS - \int^{(\mathfrak{K})} f(x,y,z;p)\, dS$$
$$= \int^{(\mathfrak{K})} [f(x,y,z;p+h) - f(x,y,z;p)]\, dS$$

dadurch beliebig klein machen, daß man den absoluten Wert des Zuwachses h hinreichend klein annimmt. Denn die Funktion $f(x,y,z;p+h)$ ist bei Einschränkung der Stelle (x,y,z) auf den Bereich $\mathfrak{K}$ und des Parameters $(p+h)$ auf irgendein abgeschlossenes, den Wert p enthaltendes Teilintervall von $\mathfrak{J}$ jedesmal gleichmäßig stetig.

Ähnlich kann man, falls auch die übrigen oben angegebenen Voraussetzungen erfüllt sind, die Richtigkeit der Gleichung (1394) beweisen. Man hat dazu nur nötig, von der mit Hilfe des Taylorschen Satzes leicht zu bestätigenden Gleichung

$$\frac{1}{h}\left\{\int^{(\mathfrak{K})} f(x,y,z;p+h)\, dS - \int^{(\mathfrak{K})} f(x,y,z;p)\, dS\right\}$$
$$= \int^{(\mathfrak{K})} f_p(x,y,z;p)\, dS + \int^{(\mathfrak{K})} [f_p(x,y,z;p+\vartheta h) - f_p(x,y,z;p)]\, dS,$$

wo $0 < \vartheta < 1$ ist, Gebrauch zu machen.

Zwanzigster Abschnitt.

Anwendungen mehrfacher Integrale.

Volumenberechnung.

504. Volumenberechnung durch Zerlegung in Säulen. — Bei jedem endlichen räumlichen Bereich von der in Nr. **490** gekennzeichneten Art und bei jedem endlichen räumlichen Bereich, der aus endlich vielen Bereichen dieser Art durch Addition und Subtraktion zusammengesetzt werden kann, gibt eben diese Beschaffenheit ein Mittel an die Hand, um die Frage, ob dem Bereich ein Volumen zukommt, zu entscheiden und im Bejahungsfall das Volumen durch ein Flächenintegral beziehungsweise eine algebraische Summe von Flächenintegralen darzustellen und dann zu berechnen. Die hiermit angedeutete Art der Volumenberechnung möge zum Unterschied von anderen noch zu besprechenden Verfahrungsweisen als die Volumenberechnung durch Zerlegung in Säulen bezeichnet werden. Wie die in den Nummern **497** und **501** bereits angeführten Beispiele zeigen, führt sie in vielen Fällen sehr leicht zum Ziel.

505. Volumenberechnung durch Zerlegung in Pyramiden. — In einer Ebene mit einem System rechtwinkeliger Koordinaten u, v sei ein endlicher meßbarer Bereich $\mathfrak{B}$ (Fig. 77) gegeben, und für einen größeren, den Bereich $\mathfrak{B}$ und seine Grenzpunkte ganz im Innern enthaltenden Bereich $\mathfrak{B}_1$ seien drei Funktionen $\varphi(u,v)$, $\chi(u,v)$, $\psi(u,v)$ von solcher Beschaffenheit erklärt, daß die partiellen Ableitungen erster Ordnung $\varphi_u(u,v)$, $\varphi_v(u,v)$, $\chi_u(u,v)$, $\chi_v(u,v)$, $\psi_u(u,v)$, $\psi_v(u,v)$ dieser Funktionen im Innern von $\mathfrak{B}_1$ überall vorhanden und stetig sind und daß die Determinante

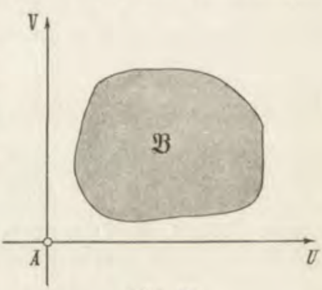


Fig. 77.

$$(1395)\qquad D(u,v)=\begin{vmatrix} \varphi(u,v) & \chi(u,v) & \psi(u,v) \\ \varphi_u(u,v) & \chi_u(u,v) & \psi_u(u,v) \\ \varphi_v(u,v) & \chi_v(u,v) & \psi_v(u,v) \end{vmatrix}$$

im Innern von $\mathfrak{B}$ durchweg positiv ist. Dann kann man sich nach

Annahme eines Systems rechtwinkeliger räumlicher Koordinaten x, y, z und nach Einschränkung der Stelle u, v auf den Bereich $\mathfrak{B}$ ein diesem Bereich entsprechendes Flächenstück $\mathfrak{F}$ (Fig. 78) durch die drei Gleichungen

$$x = \varphi(u, v); \qquad y = \chi(u, v); \qquad z = \psi(u, v)$$

gegeben denken, und wenn man nun noch weiter voraussetzt, daß jeder vom Anfang O ausgehende Halbstrahl das Flächenstück $\mathfrak{F}$ höchstens in einem von O verschiedenen Punkte trifft, so kann man einen endlichen räumlichen Bereich $\mathfrak{K}$ durch die Festsetzung abgrenzen, daß er alle diejenigen, aber auch nur diejenigen Punkte enthalten soll, die auf den vom Koordinatenanfang O nach den einzelnen Punkten des Flächenstücks $\mathfrak{F}$ führenden Strecken liegen.

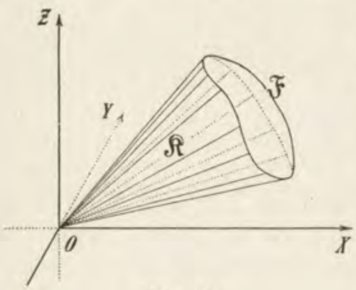


Fig. 78.

Auch für Körper dieser Art läßt die Aufgabe der Volumenberechnung eine einfache Lösung zu. Setzt man nämlich zur Vermeidung unnötiger Weitläufigkeiten voraus, daß je zwei verschiedenen inneren Punkten von $\mathfrak{B}$ auch verschiedene Punkte von $\mathfrak{F}$ entsprechen, so gilt der folgende

Lehrsatz: *Bei den gemachten Annahmen kommt dem Körper $\mathfrak{K}$ ein Volumen V zu, und dieses wird durch die Gleichung*

$$V = \frac{1}{3} \int^{(\mathfrak{B})} D(u, v)\, d\sigma \tag{1396}$$

gegeben, wo $d\sigma$ das Flächenelement des in der Ebene der Veränderlichen u, v gegebenen Bereiches $\mathfrak{B}$ bedeutet.

Beweis: Man denke sich aus dem System der ebenen Koordinaten u, v durch Hinzunahme einer dritten Koordinatenachse, die auf den beiden ursprünglich vorhandenen Achsen senkrecht steht, ein System rechtwinkeliger räumlicher Koordinaten u, v, w abgeleitet und sodann einen Bereich $\mathfrak{K}'$ im Gebiet der Veränderlichen u, v, w durch die Bestimmung abgegrenzt, daß eine gegebene Stelle (u, v, w) ihm dann und nur dann angehören soll, wenn u, v die Koordinaten eines zu $\mathfrak{B}$ gehörenden Punktes sind und außerdem

$$0 \leqq w \leqq 1$$

ist. Dann läßt sich der Bereich $\mathfrak{K}$, wofern man

$$x = w\varphi(u,v); \qquad y = w\chi(u,v); \qquad z = w\psi(u,v)$$

setzt, als ein Bild des Bereiches $\mathfrak{K}'$ ansehen, bei welchem je zwei verschiedenen inneren Punkten von $\mathfrak{K}'$ auch verschiedene Punkte von $\mathfrak{K}$ entsprechen. Nun kommt dem Bereich $\mathfrak{K}'$, da er die Gestalt eines geraden Zylinders und eine zu $\mathfrak{B}$ kongruente, also endliche und meßbare Grundfläche hat, ein Volumen zu. Ferner ist die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w\varphi_u(u,v) & w\chi_u(u,v) & w\psi_u(u,v) \\ w\varphi_v(u,v) & w\chi_v(u,v) & w\psi_v(u,v) \\ \varphi(u,v) & \chi(u,v) & \psi(u,v) \end{vmatrix}$$
$$= w^2 D(u,v)$$

im Innern von $\mathfrak{K}'$ positiv. Also hat nach Nr. **502** auch der Bereich $\mathfrak{K}$ ein Volumen, und dieses wird durch das über $\mathfrak{K}'$ zu erstreckende Raumintegral

$$\int^{(\mathfrak{K}')} w^2 D(u,v)\, dS'$$

dargestellt. Nun kann man aber den Bereich $\mathfrak{K}'$ dadurch in Elemente zerlegen, daß man ihn zunächst durch Zylinderflächen, deren Erzeugende zur w-Achse parallel sind, in zylindrische Säulen zerschneidet, die über den einzelnen Flächenelementen der mit dem Bereich $\mathfrak{B}$ kongruenten Grundfläche stehen, und dann diese Säulen durch Parallelebenen zur uv-Ebene in Elemente zerteilt. So erhält man, wie leicht einzusehen, für das Volumen des Bereiches $\mathfrak{K}$ den Ausdruck

$$\text{(1397)} \qquad \int^{(\mathfrak{B})}\int_0^1 w^2 D(u,v)\, dw\, d\sigma = \frac{1}{3}\int^{(\mathfrak{B})} D(u,v)\, d\sigma.$$

Eine Volumenberechnung, welche auf der Anwendung des hiermit bewiesenen Satzes beruht, kann passend als eine Volumenberechnung durch Zerlegung in Pyramiden oder auch durch Zerlegung in Kegel bezeichnet werden.

Zusatz 1. — Wenn die Determinante $D(u,v)$ im Innern von $\mathfrak{B}$ überall negativ ist, so liefert die rechte Seite der Gleichung (1397) das Volumen des Körpers $\mathfrak{K}$ mit dem negativen Vorzeichen.

Zusatz 2. — Die ausgesprochenen Behauptungen lassen sich unter Umständen auch dann noch aufrecht erhalten, wenn die Determinante $D(u, v)$ im Innern des Bereiches $\mathfrak{B}$ gleich Null werden oder gar in $\mathfrak{B}$ ihr Vorzeichen wechseln kann. Doch möge die Entscheidung der Frage, ob und wie eine solche Erweiterung in gegebenen Einzelfällen möglich ist, der Betrachtung dieser Einzelfälle überlassen bleiben.

Übungsaufgabe. — In einem System räumlicher Polarkoordinaten r, λ, φ sei ein einfaches Flächenstück $\mathfrak{F}$ durch eine Gleichung von der Form

$$r = f(\lambda, \varphi)$$

als Abbild eines zweifach ausgedehnten, zusammenhängenden, abgeschlossenen und meßbaren Teiles $\mathfrak{B}$ des durch die Ungleichungen

$$0 \leq \lambda < 2\pi; \qquad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

abgegrenzten Bereiches gegeben, und dabei sei $f(\lambda, \varphi)$ eine Funktion, die in $\mathfrak{B}$ nirgends negativ wird und deren partielle Ableitungen in einem größeren, alle Punkte von $\mathfrak{B}$ im Innern enthaltenden Bereiche vorhanden und stetig sind. Man soll zeigen, daß dann das Volumen V des von dem Flächenstück $\mathfrak{F}$ und dem vom Koordinatenanfang durch seinen Rand gelegten Kegel begrenzten Körpers durch die Gleichung

$$V = \frac{1}{3} \int^{(\mathfrak{B})} r^3 \cos\varphi \, d\sigma = \frac{1}{3} \int^{(\mathfrak{B})} [f(\lambda, \varphi)]^3 \cos\varphi \, d\sigma \tag{1398}$$

gegeben wird.

506. Volumenberechnung durch Zerlegung in Schichten. — In manchen Fällen ist es möglich, die Volumenberechnung eines gegebenen Körpers noch einfacher zu erledigen als mittels der in den Nummern **504** und **505** besprochenen Verfahrungsweisen. So gilt z. B. für Rotationskörper die folgende Regel:

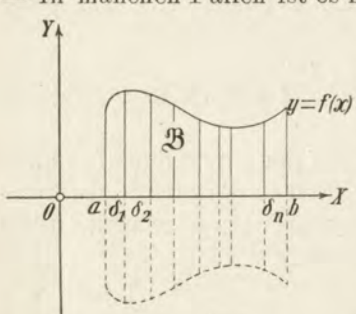


Fig. 79.

Ist $y = f(x)$ eine über ein abgeschlossenes Intervall, dessen untere Grenze a und dessen obere Grenze b heißen möge, integrierbare und in diesem Intervall nirgends *negative Funktion und ist in einer Ebene mit einem System rechtwinkeliger Koordinaten ein Bereich* $\mathfrak{B}$ (Fig. 79) *durch die Festsetzung abgegrenzt, daß er einen gegebenen Punkt P dann und nur dann enthalten soll, wenn die Abszisse von P nicht außerhalb der Grenzen a und b und zugleich die Ordinate von P nicht außerhalb der Grenzen* 0 *und* $f(x)$ *liegt, so hat der durch Umdrehung dieses Bereiches um die Abszissenachse entstehende Rotationskörper* $\mathfrak{R}$ *ein Volumen V, und dieses wird durch die Gleichung*

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \tag{1399}$$

dargestellt.

Zum Beweise denke man sich das Intervall $(a \cdots b)$ in eine beliebige Anzahl n von Teilen zerlegt, deren Längen der Reihe nach $\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_n$ heißen mögen, rechne jedem Teilintervall seine beiden Grenzen zu und verstehe sodann unter $g_1, g_2, \cdots g_n$ die unteren und unter $G_1, G_2, \cdots G_n$ die oberen Grenzen der Funktion $f(x)$ für die einzelnen Teilintervalle. Ferner denke man sich durch diejenigen Punkte der Abszissenachse, welche den Grenzen der Teilintervalle entsprechen, Ebenen gelegt, die auf der Abzissenachse senkrecht stehen. Dann zerlegen diese Ebenen den Rotationskörper $\mathfrak{R}$ in n Schichten, und für $\lambda = 1, 2, \cdots n$ schließt jedesmal die λ-te Schicht eine Kreisscheibe von der Dicke δ_λ und dem Radius g_λ, also dem Volumen $\pi g_\lambda^2 \delta_\lambda$ ein, ist aber andererseits in einer Kreisscheibe von der gleichen Dicke und dem Radius G_λ, also dem Volumen $\pi G_\lambda^2 \delta_\lambda$ enthalten. Ferner bilden die eingeschlossenen Kreisscheiben zusammengenommen einen von dem Rotationskörper $\mathfrak{R}$ umschlossenen und ebenso die umschließenden Kreisscheiben zusammengenommen einen den Rotationskörper $\mathfrak{R}$ einschließenden Körper, und die Volumina

$$\pi \sum_{\lambda=1}^{n} g_\lambda^2 \delta_\lambda \qquad \text{und} \qquad \pi \sum_{\lambda=1}^{n} G_\lambda^2 \delta_\lambda$$

dieser beiden dem Körper $\mathfrak{R}$ zugeordneten Körper können einander durch Verfeinerung der Teilung des Intervalls $(a \cdots b)$ beliebig nahe gebracht werden. Denn da die Funktion $f(x)$ über das Intervall $(a \cdots b)$ integrierbar ist, so ist nach Nr. **425** auch ihr Quadrat über das nämliche Intervall integrierbar. Dies besagt aber, daß die

Summen $\sum_{\lambda=1}^{n} g_\lambda^2 \delta_\lambda$ und $\sum_{\lambda=1}^{n} G_\lambda^2 \delta_\lambda$ sich bei hinreichend feiner Teilung des Intervalls $(a \cdots b)$ nur um beliebig wenig unterscheiden. Also kommt auch dem Körper $\mathfrak{K}$ ein Volumen zu, und dieses wird durch das Produkt $\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ dargestellt, wie behauptet wurde.

Beispielsweise hat der spindelförmige Rotationskörper (Fig. 80), welcher entsteht, wenn man in einer Ebene mit einem System rechtwinkeliger Koordinaten x, y durch das vom Nullpunkt bis

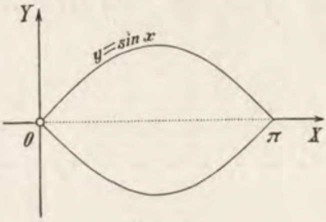


Fig. 80.

zum Punkte $x = \pi$ reichende Stück der x-Achse und den die gleichen Endpunkte verbindenden Bogen der Linie $y = \sin x$ einen endlichen Bereich abgrenzt und diesen um die x-Achse dreht, das Volumen

$$\pi \int_0^\pi \sin x^2 \, dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

Ebenso wie die Rotationskörper lassen sich auch manche andere Körper durch parallele Ebenen in Schichten zerlegen, deren Volumina mit Hilfe elementarer Sätze berechnet werden können, wenigstens bis auf Fehler, deren Einfluß bei unbegrenzter Verfeinerung der Zerlegung schließlich verschwindet. Trifft dies in einem gegebenen Einzelfalle zu, so kann man das Volumen des betrachteten Körpers als Grenzwert der Summe der Volumina der einzelnen Schichten sofort durch ein einfaches Integral ausdrücken und durch dessen Berechnung ermitteln. Dieses Verfahren, welches im Fall seiner Anwendbarkeit meistens am schnellsten zum Ziele führt, kann passend als Volumenberechnung durch Zerlegung in Schichten bezeichnet werden.

507. Beispiele. — 1. — In einem System rechtwinkeliger räumlicher Koordinaten x, y, z sei ein dreiachsiges Ellipsoid gegeben durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

in welcher a, b, c voneinander verschiedene positive Konstante bedeuten. Man soll das Volumen des Innenraumes dieses Ellipsoides finden.

Lösung: Hat man eine Parallelebene zur yz-Ebene so angenommen, daß sie das Ellipsoid schneidet, so ist die Schnittlinie eine Ellipse. Und die mit der Schnittellipse kongruente Projektion derselben auf die yz-Ebene wird, wenn x den gemeinsamen Wert der ersten Koordinaten aller Punkte der schneidenden Ebene bedeutet, durch die Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}$$

oder

$$\frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)}+\frac{z^2}{\frac{c^2}{a^2}(a^2-x^2)}=1$$

dargestellt, hat also die Halbachsen

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Folglich hat die Schnittellipse den Inhalt

$$\pi\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{\pi b c}{a^2}(a^2-x^2)$$

und die Schicht zwischen der Ebene dieser Ellipse und derjenigen unendlich nahe benachbarten Parallelebene, die zu dem größeren Wert $(x+dx)$ der ersten Koordinate gehört, abgesehen von einem unendlich kleinen Fehler höherer Ordnung, das Volumen $\frac{\pi b c}{a^2}(a^2-x^2)\,dx$. Daraus ergibt sich für das gesuchte Volumen V sofort die Gleichung

$$V=\frac{\pi b c}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{4}{3}\pi a b c. \tag{1400}$$

Die Volumenberechnung durch Zerlegung in Säulen ist im vorliegenden Fall zwar auch anwendbar, aber weniger bequem. Sie liefert nämlich zunächst die Gleichung

$$V=2c\int_{-a}^{a}\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\,dx,$$

und deren rechte Seite kann mit Hilfe der Gleichung (1268) der Nr. **453** berechnet werden, doch hat man dabei einige Weitläufigkeiten in den Kauf zu nehmen, bis man zu dem einfachen Endergebnis $\frac{4}{3}\pi abc$ gelangt.

Dagegen führt die Volumenberechnung durch Zerlegung in Pyramiden ebenfalls schnell zum Ziel. Man kann sich nämlich das Ellipsoid durch die Gleichungen

$$x = a\cos\varphi\cos\lambda \qquad y = b\cos\varphi\sin\lambda \qquad z = c\sin\varphi \qquad \left(\begin{array}{c} 0 \leqq \lambda < 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \end{array}\right)$$

dargestellt denken und erhält dann

$$V = \frac{1}{3}abc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\varphi \\ -\cos\varphi\sin\lambda & \cos\varphi\cos\lambda & 0 \\ -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \end{vmatrix} d\lambda\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}abc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\lambda\, d\varphi$$

$$= \frac{2}{3}\pi abc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\, d\varphi = \frac{4}{3}\pi abc.$$

2. — Zwei gerade Kreiszylinder (Fig. 81) vom gleichen Radius r liegen so, daß ihre Achsen sich rechtwinkelig schneiden. Man soll das Volumen V des innerhalb beider Zylinder liegenden Raumteils finden.

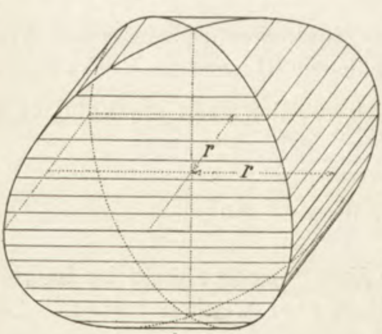


Fig. 81.

Lösung: Jede zur Ebene der beiden Zylinderachsen parallele Ebene schneidet den zu betrachtenden Raumteil in einem Quadrat, und wenn h den Abstand der schneidenden Ebene von der Ebene der Achsen bedeutet, so ist die Seitenlänge dieses Quadrates gleich $2\sqrt{r^2 - h^2}$, also der Inhalt desselben gleich $4(r^2 - h^2)$. Folglich liefert die Volumenberechnung durch Zerlegung in Schichten die Gleichung

$$V = 8\int_0^r (r^2 - h^2)\,dh = \frac{16}{3}r^3.$$

3. — Ein Kreis $\mathfrak{k}$ (Fig. 82) vom Radius r und eine zu seiner Ebene parallele Gerade $\mathfrak{g}$, die von dieser Ebene den gegebenen Abstand a hat, sind durch diejenige Fläche (Konoid) verbunden, die durch die Bewegung einer beständig zu $\mathfrak{g}$ senkrecht bleibenden und dabei beständig sowohl $\mathfrak{g}$ als $\mathfrak{k}$ schneidenden Geraden erzeugt wird. Man soll das Volumen V des von dieser Fläche und der Fläche des Kreises $\mathfrak{k}$ begrenzten keilförmigen Körpers ermitteln.

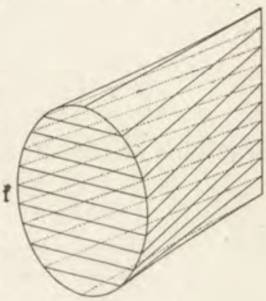


Fig. 82.

Lösung: Jede zu $\mathfrak{g}$ senkrechte Ebene, deren Abstand z vom Mittelpunkt des Kreises $\mathfrak{k}$ kleiner als r ist, schneidet den zu betrachtenden Körper in einem Dreieck von der Höhe a und der Grundlinie $2\sqrt{r^2 - z^2}$, also dem Inhalt $a\sqrt{r^2 - z^2}$. Folglich liefert die Volumenberechnung durch Zerlegung in Schichten

$$V = 2a\int_0^r \sqrt{r^2 - z^2}\,dz = \frac{\pi}{2}ar^2.$$

Inhaltsberechnung krummer Flächenstücke.

508. Notwendigkeit einer gewissen Einschränkung. — Beispiel: Die Mantelfläche eines geraden Kreiszylinders vom Radius r und der Höhe h sei mit einer beliebigen Anzahl $(k-1)$ von Ebenen zum Durchschnitt gebracht, die den Ebenen der Grundkreise parallel sind und den Zylinder in k kongruente Teile zerlegen. Ferner sei nach willkürlicher Annahme einer oberhalb 2 liegenden ganzen Zahl n in jeden der Querschnitte einschließlich der Grundkreise ein regelmäßiges n-Eck eingezeichnet, und zwar so, daß die Halbebenen, welche die Zylinderachse mit den Ecken des einen von zwei benachbarten dieser n-Ecke verbinden, stets durch die Mitten der Seiten des anderen n-Ecks gehen. Verbindet man sodann bei je zwei benachbarten n-Ecken jede Seite des einen mit der ihr zunächst liegenden Ecke des anderen durch ein Dreieck, so erhält man eine dem Zylindermantel eingeschriebene, aus lauter kongruenten Dreiecken zusammengesetzte gebrochene Fläche (Fig. 83), deren Inhalt J leicht zu berechnen ist. Die Anzahl der Dreiecke ist nämlich gleich $2kn$, und in jedem einzelnen Dreieck hat eine Seite als Seite des regelmäßigen n-Ecks im Kreise vom Radius r die Länge $2r\sin\frac{\pi}{n}$, während die zugehörige Höhe durch den Ausdruck

$$\sqrt{r^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+\frac{h^2}{k^2}}=\sqrt{4r^2\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^4+\frac{h^2}{k^2}}$$

dargestellt wird. Man erhält daher

$$J=2knr\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{4r^2\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^4+\frac{h^2}{k^2}}$$

$$=2\pi r\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}\pi^4r^2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^4\left(\frac{k}{n^2}\right)^2+h^2}.$$

Läßt man nun die Zahlen k und n gleichzeitig unendlich groß werden, so werden die Seitenlängen der einzelnen dreieckigen Facetten der gebrochenen Fläche sämtlich unendlich klein. Aber der Inhalt J dieser Fläche braucht sich dabei nicht notwendig dem Inhalt $2\pi rh$ des Rechtecks zu nähern, welches man durch Aufschneiden des Zylindermantels längs einer Erzeugenden und nachfolgende Ausbreitung desselben auf eine Ebene erhält. Er tut dies vielmehr nur dann, wenn k und n in einem solchen Verhältnis unendlich groß werden, daß der Bruch $\frac{k}{n^2}$ dem Grenzwert 0 zustrebt. Nähert sich dagegen der Bruch $\frac{k}{n^2}$ einem von Null verschiedenen Grenzwert g, so strebt der Inhalt J dem von $2\pi rh$ verschiedenen Grenzwert $2\pi r\sqrt{\frac{1}{4}\pi^4r^2g^2+h^2}$ zu. Wird endlich der Bruch $\frac{k}{n^2}$ unendlich groß, was z. B. eintritt, wenn man $k=n^3$ setzt, so wächst auch J über alle Grenzen.

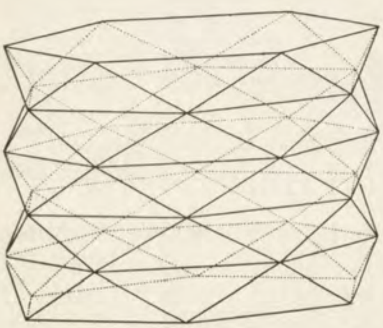


Fig. 83.

Im ersten dieser Fälle werden die Ebenen der einzelnen Facetten, wie man leicht einsieht, mehr und mehr parallel zu den Erzeugenden des Zylindermantels. In den beiden anderen Fällen trifft dies aber nicht mehr zu, ja im letzten Falle stellen sich die Ebenen der Facetten sogar mehr und mehr senkrecht zu den Erzeugenden des Zylindermantels. Zugleich bieten die beiden letzten Fälle die Eigentümlichkeit dar, daß der größte Winkel in jedem einzelnen Dreieck sich mehr und mehr einem gestreckten Winkel annähert.

Hiernach ist es nicht möglich, den Inhalt eines krummen Flächenstückes einfach in engem Anschluß an die Erklärung der Länge eines krummen Linienstückes als den Grenzwert zu erklären, dem der Inhalt einer eingeschriebenen gebrochenen Fläche bei unbegrenzter Verkleinerung der Längen aller Kanten dieser Fläche zustrebt. Es ist vielmehr erforderlich, die eingeschriebene gebrochene Fläche einer geeigneten Einschränkung[1]) zu unterwerfen, um solche Möglichkeiten auszuschließen, wie sie bei der Besprechung des Beispiels zuletzt erwähnt wurden.

509. Ausdehnung des Inhaltsbegriffs auf krumme Flächen. — In einer Ebene mit einem System rechtwinkeliger Koordinaten u, v sei ein zusammenhängender endlicher meßbarer Bereich $\mathfrak{B}$ gegeben und für einen größeren, den Bereich $\mathfrak{B}$ und seine Grenzpunkte ganz im Innern enthaltenden Bereich $\mathfrak{B}_1$ seien drei Funktionen $\varphi(u, v)$, $\chi(u, v)$, $\psi(u, v)$ von solcher Beschaffenheit erklärt, daß die partiellen Ableitungen erster Ordnung $\varphi_u(u, v)$, $\chi_u(u, v)$, $\psi_u(u, v)$, $\varphi_v(u, v)$, $\chi_v(u, v)$, $\psi_v(u, v)$ dieser Funktionen im Innern von $\mathfrak{B}_1$ überall vorhanden und stetig sind und daß die Unterdeterminanten zweiten Grades

$$\begin{vmatrix} \chi_u(u, v) & \psi_u(u, v) \\ \chi_v(u, v) & \psi_v(u, v) \end{vmatrix} = A; \qquad \begin{vmatrix} \psi_u(u, v) & \varphi_u(u, v) \\ \psi_v(u, v) & \varphi_v(u, v) \end{vmatrix} = B;$$

$$\begin{vmatrix} \varphi_u(u, v) & \chi_u(u, v) \\ \varphi_v(u, v) & \chi_v(u, v) \end{vmatrix} = C$$

1) Auf die Notwendigkeit einer Einschränkung haben fast gleichzeitig O. Hölder, Beiträge zur Potentialtheorie, Diss. Tübingen, Stuttgart 1882, S. 29, G. Peano in Vorlesungen (vgl. Atti della R. Accademia dei Lincei, Serie 4: Rendiconti, Vol. 6, Rom 1890, S. 55) und H. A. Schwarz, Ges. math. Abhandl. 2, Berlin 1890, S. 309—311 = Cours de M. Hermite, professé pendant le 2e semestre 1881/82, second tirage, Paris 1883, S. 35—36, aufmerksam gemacht. Das im Text erwähnte Beispiel ist von H. A. Schwarz angegeben worden.

des Systems dieser partiellen Ableitungen in $\mathfrak{B}$ niemals gleichzeitig gleich Null werden. Ferner sei nach Annahme eines Systems rechtwinkeliger Koordinaten x, y, z und nach Einschränkung der Stelle u, v auf den Bereich $\mathfrak{B}$ ein diesem Bereich entsprechendes Flächenstück $\mathfrak{F}$ durch die drei Gleichungen

$$x=\varphi(u,v); \qquad y=\chi(u,v); \qquad z=\psi(u,v)$$

gegeben, und dabei werde vorausgesetzt, daß auch umgekehrt jedem Punkte von $\mathfrak{F}$ nur ein Punkt von $\mathfrak{B}$ entspreche. Endlich sei eine zwischen 0 und $\frac{\pi}{3}$ enthaltene Konstante ω nach Belieben angenommen und hierauf in der Ebene der Veränderlichen u, v ein den Bereich $\mathfrak{B}_1$ überall einfach bedeckendes Netz von Dreiecken derart hergestellt, daß

erstens keiner der vorkommenden Dreieckswinkel größer als $(\pi-\omega)$ ist und daß

zweitens die Ecken eines jeden Dreiecks, dessen Fläche mit $\mathfrak{B}$ einen Punkt gemein hat, falls sie nicht in $\mathfrak{B}$ selbst liegen, doch wenigstens zu $\mathfrak{B}_1$ gehören.

Dann kann man, nachdem man von diesen Dreiecken alle diejenigen beibehalten hat, deren Flächen ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ liegen, und außerdem beliebig viele von denen, welche Punkte der Begrenzung von $\mathfrak{B}$ enthalten, eine dem Netz der beibehaltenen Dreiecke entsprechende dem Flächenstück $\mathfrak{F}$ eingeschriebene[1]) gebrochene Fläche $\mathfrak{G}$ bilden, indem man jedesmal die drei Punkte des Raumes, welche den Ecken eines beibehaltenen Dreiecks entsprechen, durch ein ebenes Dreieck verbindet, und für die Flächeninhalte aller in dieser Weise herstellbaren gebrochenen Flächen einen Grenzwert angeben. Es gilt nämlich der folgende

Lehrsatz: *Unter den gemachten Voraussetzungen kann man dadurch, daß man für die Seitenlängen der einzelnen Maschen des in der uv-Ebene anzunehmenden Dreiecksnetzes eine hinlänglich kleine obere Grenze vorschreibt, stets erreichen, daß der Unterschied zwischen dem Inhalt der gebrochenen Fläche $\mathfrak{G}$ und dem über $\mathfrak{B}$ erstreckten Flächenintegral*

$$\int^{(\mathfrak{B})}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,d\sigma$$

1) Die Fläche $\mathfrak{G}$ kann an ihrem Rande Eckpunkte enthalten, die nicht auf $\mathfrak{F}$ selbst liegen. Das Wort eingeschrieben ist daher hier nicht im allerengsten, sondern in einem etwas erweiterten Sinne zu verstehen.

absolut genommen kleiner wird als eine willkürlich gegebene positive Konstante ε.

Beweis: Man denke sich, was immer zulässig ist, eine positive Konstante ϱ so bestimmt, daß jeder Punkt, dessen Abstand von einem zu $\mathfrak{B}$ oder zur Grenze von $\mathfrak{B}$ gehörenden Punkte nicht größer als ϱ ist, im Innern von $\mathfrak{B}_1$ liegt, und denke sich sodann den Bereich $\mathfrak{B}$ durch Hinzunahme aller ihm noch nicht angehörenden Punkte der eben erwähnten Art zu einem immer noch ganz im Innern von $\mathfrak{B}_1$ enthaltenenen Bereiche $\mathfrak{B}_2$ erweitert, der dann notwendig abgeschlossen ist (vgl. S. 272), und unterwerfe die Seitenlängen der Maschen des in der uv-Ebene anzunehmenden Dreiecksnetzes zunächst der Bedingung, daß sie sämtlich $<\varrho$ sein sollen. Hierauf verstehe man unter n die Anzahl der in der uv-Ebene beibehaltenen Dreiecke und nach Herstellung irgend einer Rangordnung zwischen ihnen für $\lambda = 1, 2, \cdots n$ jedesmal unter u_λ, v_λ die Koordinaten derjenigen Ecke des λ-ten Dreiecks, an welcher der größte Winkel dieses Dreiecks liegt, oder, wenn das Dreieck mehrere gleich große größte Winkel hat, die Koordinaten des Scheitels irgend eines derselben. Ferner seien α_λ, β_λ und α_λ', β_λ' die Richtungskosinus und s_λ und s_λ' die Längen der von dem Eckpunkt (u_λ, v_λ) ausgehenden Seiten des Dreiecks, wobei die Reihenfolge so gewählt sein möge, daß die Drehungsrichtung von der Richtung $(\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$ zur Richtung $(\alpha_\lambda', \beta_\lambda')$ mit dem positiven Drehungssinn der uv-Ebene übereinstimmt. Dann haben die auf die Ecke (u_λ, v_λ) im positiven Sinne folgenden Ecken des λ-ten Dreiecks beziehentlich die Koordinaten

$$u_\lambda + s_\lambda \alpha_\lambda;\ v_\lambda + s_\lambda \beta_\lambda \qquad \text{und} \qquad u_\lambda + s_\lambda' \alpha_\lambda';\ v_\lambda + s_\lambda' \beta_\lambda'.$$

Folglich haben die Ecken der dem λ-ten Dreieck entsprechenden Facette der gebrochenen Fläche $\mathfrak{S}$ der Reihe nach die Koordinaten

$$\begin{array}{lll} \varphi(u_\lambda, v_\lambda); & \chi(u_\lambda, v_\lambda); & \psi(u_\lambda, v_\lambda) \\ \varphi(u_\lambda + s_\lambda\alpha_\lambda, v_\lambda + s_\lambda\beta_\lambda); & \chi(u_\lambda + s_\lambda\alpha_\lambda, v_\lambda + s_\lambda\beta_\lambda); & \psi(u_\lambda + s_\lambda\alpha_\lambda, v_\lambda + s_\lambda\beta_\lambda) \\ \varphi(u_\lambda + s_\lambda'\alpha_\lambda', v_\lambda + s_\lambda'\beta_\lambda'); & \chi(u_\lambda + s_\lambda'\alpha_\lambda', v_\lambda + s_\lambda'\beta_\lambda'); & \psi(u_\lambda + s_\lambda'\alpha_\lambda', v_\lambda + s_\lambda'\beta_\lambda'). \end{array}$$

Nun ist aber der Inhalt Δ_λ dieser Facette nach Nr. **126** gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Inhalte $\Delta_{\lambda 1}$, $\Delta_{\lambda 2}$, $\Delta_{\lambda 3}$, ihrer Projektionen auf die Koordinatenebenen. Diese letzteren Inhalte können aber leicht angegeben und mit genügender Annäherung durch den Inhalt

$$\delta_\lambda = \frac{1}{2} s_\lambda s'_\lambda (\alpha_\lambda \beta'_\lambda - \alpha'_\lambda \beta_\lambda) \tag{1401}$$

des λ-ten Dreiecks der uv-Ebene ausgedrückt werden. Zunächst ist nämlich

$$2\Delta_{\lambda 1} = \begin{vmatrix} \chi(u_\lambda + s_\lambda \alpha_\lambda, v_\lambda + s_\lambda \beta_\lambda) - \chi(u_\lambda, v_\lambda) & \psi(u_\lambda + s_\lambda \alpha_\lambda, v_\lambda + s_\lambda \beta_\lambda) - \psi(u_\lambda, v_\lambda) \\ \chi(u_\lambda + s'_\lambda \alpha'_\lambda, v_\lambda + s'_\lambda \beta'_\lambda) - \chi(u_\lambda, v_\lambda) & \psi(u_\lambda + s'_\lambda \alpha'_\lambda, v_\lambda + s'_\lambda \beta'_\lambda) - \psi(u_\lambda, v_\lambda) \end{vmatrix}.$$

Ferner ist nach dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} &\chi(u_\lambda + s_\lambda \alpha_\lambda, v_\lambda + s_\lambda \beta_\lambda) - \chi(u_\lambda, v_\lambda) \\ &= s_\lambda [\alpha_\lambda \chi_u(u_\lambda + \vartheta s_\lambda \alpha_\lambda, v_\lambda + \vartheta s_\lambda \beta_\lambda) + \beta_\lambda \chi_v(u_\lambda + \vartheta s_\lambda \alpha_\lambda, v_\lambda + \vartheta s_\lambda \beta_\lambda)], \end{aligned}$$

wo ϑ eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl bedeutet, oder einfacher

$$\begin{aligned} &\chi(u_\lambda + s_\lambda \alpha_\lambda, v_\lambda + s_\lambda \beta_\lambda) - \chi(u_\lambda, v_\lambda) \\ &\qquad = s_\lambda [\alpha_\lambda \chi_u(u_\lambda, v_\lambda) + \beta_\lambda \chi_v(u_\lambda, v_\lambda) + \eta_\lambda], \end{aligned}$$

wo η_λ eine zugleich mit s_λ verschwindende Korrektion bezeichnet, und zwar läßt sich dadurch, daß man für die Seitenlängen der einzelnen Maschen des Dreiecksnetzes in der uv-Ebene eine hinreichend kleine obere Grenze vorschreibt, immer erreichen, daß $|\eta_\lambda|$ stets unterhalb einer vorgegebenen beliebig kleinen von λ unabhängigen positiven Konstanten liegt, einerlei welchen der Werte $1, 2, \cdots n$ die Ordnungszahl λ haben mag. Denn die Stelle $(u_\lambda + \vartheta s_\lambda \alpha_\lambda, v_\lambda + \vartheta s_\lambda \beta_\lambda)$ liegt immer in dem abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}_2$ und die Funktionen $\chi_u(u, v)$, $\chi_v(u, v)$ sind in diesem Bereich stetig, also auch gleichmäßig stetig.

Ganz ähnlich lassen sich die übrigen Elemente der oben für $2\Delta_{\lambda 1}$ angegebenen Determinante umformen. Indem man dies tut und sodann aus beiden Elementen der ersten Zeile den Faktor s_λ und aus beiden der zweiten den Faktor s'_λ aushebt, erhält man

$$\Delta_{\lambda 1} = \frac{1}{2} s_\lambda s'_\lambda \begin{vmatrix} \alpha_\lambda \chi_u(u_\lambda, v_\lambda) + \beta_\lambda \chi_v(u_\lambda, v_\lambda) + \eta_\lambda & \alpha_\lambda \psi_u(u_\lambda, v_\lambda) + \beta_\lambda \psi_v(u_\lambda, v_\lambda) + \eta'_\lambda \\ \alpha'_\lambda \chi_u(u_\lambda, v_\lambda) + \beta'_\lambda \chi_v(u_\lambda, v_\lambda) + \eta''_\lambda & \alpha'_\lambda \psi_u(u_\lambda, v_\lambda) + \beta'_\lambda \psi_v(u_\lambda, v_\lambda) + \eta'''_\lambda \end{vmatrix},$$

wo $\eta'_\lambda, \eta''_\lambda, \eta'''_\lambda$ Korrektionen von der gleichen Grundeigenschaft wie η_λ bedeuten. Alle diese Korrektionen können nun aber durch eine einzige Korrektion H_λ ersetzt werden, welche zu der durch Weglassung der Korrektionen $\eta_\lambda, \eta'_\lambda, \eta''_\lambda, \eta'''_\lambda$ abgeänderten Determinante hinzufügen ist. So ergibt sich

$$\Delta_{\lambda 1} =$$

$$\frac{1}{2} s_\lambda s'_\lambda \left\{ \begin{vmatrix} \alpha_\lambda \chi_u(u_\lambda, v_\lambda) + \beta_\lambda \chi_v(u_\lambda, v_\lambda) & \alpha_\lambda \psi_u(u_\lambda, v_\lambda) + \beta_\lambda \psi_v(u_\lambda, v_\lambda) \\ \alpha'_\lambda \chi_u(u_\lambda, v_\lambda) + \beta'_\lambda \chi_v(u_\lambda, v_\lambda) & \alpha'_\lambda \psi_u(u_\lambda, v_\lambda) + \beta'_\lambda \psi_v(u_\lambda, v_\lambda) \end{vmatrix} + H_\lambda \right\}$$

$$= \frac{1}{2} s_\lambda s'_\lambda \left\{ \begin{vmatrix} \alpha_\lambda & \beta_\lambda \\ \alpha'_\lambda & \beta'_\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \chi_u(u_\lambda, v_\lambda) & \chi_v(u_\lambda, v_\lambda) \\ \psi_u(u_\lambda, v_\lambda) & \psi_v(u_\lambda, v_\lambda) \end{vmatrix} + H_\lambda \right\},$$

und zwar ist dabei H_λ ebenfalls eine Zahl, deren absoluter Wert bei hinreichender Kleinheit der Maschen des in der uv-Ebene anzunehmenden Dreiecksnetzes beständig unter einer vorgegebenen beliebig kleinen positiven Konstanten bleibt, gleichgültig welchen Wert man der Ordnungszahl λ beilegt.

Infolge des Umstandes, daß der an der Ecke (u_λ, v_λ) liegende Dreieckswinkel nicht kleiner als die übrigen Winkel des Dreiecks und daher einerseits größer als ω, andererseits kleiner als $(\pi - \omega)$ ist, läßt nun der für $\Delta_{\lambda 1}$ gefundene Ausdruck noch eine weitere Vereinfachung zu. Die Determinante $(\alpha_\lambda \beta'_\lambda - \alpha'_\lambda \beta_\lambda)$ ist nämlich nichts weiter als der Sinus des an der Ecke (u_λ, v_λ) liegenden Dreieckswinkels und erfüllt daher die Ungleichung

$$\alpha_\lambda \beta'_\lambda - \alpha'_\lambda \beta_\lambda > \sin \omega .$$

Folglich darf man durch diese Determinante dividieren. Insbesondere darf man sie aus dem für $\Delta_{\lambda 1}$ gefundenen Ausdruck als Faktor ausheben und erhält dann, wenn man noch zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} \chi_u(u_\lambda, v_\lambda) & \psi_u(u_\lambda, v_\lambda) \\ \chi_v(u_\lambda, v_\lambda) & \psi_v(u_\lambda, v_\lambda) \end{vmatrix} = A_\lambda \quad \text{und} \quad \frac{H_\lambda}{\alpha_\lambda \beta'_\lambda - \alpha'_\lambda \beta_\lambda} = H'_\lambda$$

setzt, mit Rücksicht auf die Gleichung (1401)

$$\Delta_{\lambda 1} = \delta_\lambda (A_\lambda + H'_\lambda),$$

und dabei kommt der Korrektion H'_λ dieselbe Grundeigenschaft zu, die bei der Korrektion H_λ hervorgehoben wurde.

Ganz ähnlich findet man

$$\Delta_{\lambda 2} = \delta_\lambda (B_\lambda + H''_\lambda)$$
$$\Delta_{\lambda 3} = \delta_\lambda (C_\lambda + H'''_\lambda),$$

wo zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} \psi_u(u_\lambda, v_\lambda) & \varphi_u(u_\lambda, v_\lambda) \\ \psi_v(u_\lambda, v_\lambda) & \varphi_v(u_\lambda, v_\lambda) \end{vmatrix} = B_\lambda ; \qquad \begin{vmatrix} \varphi_u(u_\lambda, v_\lambda) & \chi_u(u_\lambda, v_\lambda) \\ \varphi_v(u_\lambda, v_\lambda) & \chi_v(u_\lambda, v_\lambda) \end{vmatrix} = C_\lambda$$

gesetzt ist und H_λ'' und H_λ''' Korrektionen von derselben Beschaffenheit wie H_λ bedeuten. Folglich ist

$$\begin{aligned}\Delta_\lambda &= \sqrt{\Delta_{\lambda_1}^2 + \Delta_{\lambda_2}^2 + \Delta_{\lambda_3}^2}\\ &= \delta_\lambda \sqrt{(A_\lambda + H_\lambda')^2 + (B_\lambda + H_\lambda'')^2 + (C_\lambda + H_\lambda''')^2}\\ &= \delta_\lambda (\sqrt{A_\lambda^2 + B_\lambda^2 + C_\lambda^2} + \tau_\lambda),\end{aligned}$$

wo auch τ_λ eine Korrektion bedeutet, deren absoluter Wert gleichmäßig für alle zulässigen Werte von λ dadurch unter eine willkürlich vorgegebene positive Konstante herabgedrückt werden kann, daß man für die Seitenlängen der Maschen des in der uv-Ebene anzunehmenden Dreiecksnetzes eine hinreichend kleine obere Grenze vorschreibt. Sieht man nämlich A_λ, B_λ, C_λ als die Koordinaten eines ersten und $(A_\lambda + H_\lambda')$, $(B_\lambda + H_\lambda'')$, $(C_\lambda + H_\lambda''')$ als die Koordinaten eines zweiten Punktes in einem System rechtwinkeliger räumlicher Koordinaten an, so erkennt man sofort, daß immer

$$|\tau_\lambda| \leqq \sqrt{H_\lambda'^2 + H_\lambda''^2 + H_\lambda'''^2} \leqq |H_\lambda'| + |H_\lambda''| + |H_\lambda'''|$$

sein muß.

Der Inhalt der gebrochenen Fläche $\mathfrak{S}$ läßt sich somit durch einen Ausdruck von der Form

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \sqrt{A_\lambda^2 + B_\lambda^2 + C_\lambda^2}\,\delta_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{n} \tau_\lambda \delta_\lambda$$

darstellen. Daraus folgt aber sofort die Richtigkeit des ausgesprochenen Lehrsatzes. Denn nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen positiven Konstanten ε kann man stets eine zweite positive Konstante h so bestimmen, daß für jedes Dreiecksnetz von der früher angegebenen Beschaffenheit, bei welchem jede einzelne Dreiecksseite kleiner als h ist, sowohl

$$\left| \sum_{\lambda=1}^{n} \sqrt{A_\lambda^2 + B_\lambda^2 + C_\lambda^2}\,\delta_\lambda - \int^{(\mathfrak{B})} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, d\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

als auch

$$\left| \sum_{\lambda=1}^{n} \tau_\lambda \delta_\lambda \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird, und zwar einerlei, wie viele der „Randdreiecke“ man beibehalten hat.

Der hiermit gefundene Grenzwert

(1402) $$J = \int^{(\mathfrak{B})} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, d\sigma$$

des Inhalts der gebrochenen Fläche $\mathfrak{G}$ wird als der **Flächeninhalt des Flächenstückes** $\mathfrak{F}$ bezeichnet.

Setzt man, wie es in der Lehre von den krummen Flächen üblich ist,

$$\begin{aligned} [\varphi_u(u,v)]^2 + [\chi_u(u,v)]^2 + [\psi_u(u,v)]^2 &= E \\ \varphi_u(u,v)\varphi_v(u,v) + \chi_u(u,v)\chi_v(u,v) + \psi_u(u,v)\psi_v(u,v) &= F \\ [\varphi_v(u,v)]^2 + [\chi_v(u,v)]^2 + [\psi_v(u,v)]^2 &= G, \end{aligned}$$

so ist, wie man sich leicht überzeugt,

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2.$$

Der Inhalt J des Flächenstückes $\mathfrak{F}$ kann daher auch durch die Gleichung

(1403) $$J = \int^{(\mathfrak{B})} \sqrt{EG - F^2}\, d\sigma$$

erklärt werden.

Dieser Flächeninhalt ist, wie man leicht nachweisen kann, nur von der geometrischen Beschaffenheit des Flächenstückes $\mathfrak{F}$ abhängig, aber nicht davon, durch welche besondere Parameterdarstellung man sich das Flächenstück $\mathfrak{F}$ gegeben denkt. Ist nämlich außer der bisher angenommenen noch eine zweite den gleichen Voraussetzungen genügende Parameterdarstellung

$$x = \Phi(p,q); \qquad y = X(p,q); \qquad z = \Psi(p,q)$$

des Flächenstückes $\mathfrak{F}$ gegeben, bei welcher dasselbe als eindeutig umkehrbares Bild eines endlichen meßbaren Bereiches $\mathfrak{B}'$ im Gebiet von zwei Veränderlichen p, q erscheint, so gehört zu jedem zulässigen Wertepaar p, q ein bestimmter Punkt von $\mathfrak{F}$ und zu diesem ein bestimmter Punkt (u, v) von $\mathfrak{B}$. Es sind also u und v Funktionen von p und q, und zwar Funktionen, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in $\mathfrak{B}'$ überall vorhanden und stetig sind. Denn da die Determinanten A, B, C niemals gleichzeitig verschwinden, so sind bei Einschränkung der Veränderlichen u, v; p, q auf hinreichend enge Umgebungen einander entsprechender Stellen immer mindestens zwei der Gleichungen

$$\varphi(u,v) = \Phi(p,q); \qquad \chi(u,v) = X(p,q); \qquad \psi(u,v) = \Psi(p,q)$$

in bezug auf u und v eindeutig auflösbar, und diese Auflösung liefert für u und v stets Funktionen von p und q, deren partielle Ableitungen erster Ordnung vorhanden und stetig sind.

Sind nun A', B', C' die drei Determinanten, welche für die zweite Parameterdarstellung die gleiche Bedeutung haben wie A, B, C für die erste, so ist

$$A' = \begin{vmatrix} X_p & \Psi_p \\ X_q & \Psi_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \chi_u \frac{\partial u}{\partial p} + \chi_v \frac{\partial v}{\partial p} & \psi_u \frac{\partial u}{\partial p} + \psi_v \frac{\partial v}{\partial p} \\ \chi_u \frac{\partial u}{\partial q} + \chi_v \frac{\partial v}{\partial q} & \psi_u \frac{\partial u}{\partial q} + \psi_v \frac{\partial v}{\partial q} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \chi_u & \chi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial p} & \frac{\partial v}{\partial p} \\ \frac{\partial u}{\partial q} & \frac{\partial v}{\partial q} \end{vmatrix}$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial p} & \frac{\partial v}{\partial p} \\ \frac{\partial u}{\partial q} & \frac{\partial v}{\partial q} \end{vmatrix} = D$$

gesetzt wird,

$$A' = AD.$$

Ebenso ist natürlich

$$B' = BD; \qquad C' = CD.$$

Folglich ist der Ausdruck $\int^{(\mathfrak{B}')} \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}\, d\sigma'$, den man für den Inhalt von $\mathfrak{F}$ erhält, wenn man von der zweiten Parameterdarstellung ausgeht, gleich $\int^{(\mathfrak{B}')} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, |D|\, d\sigma'$. Dieses Integral hat aber denselben Wert wie das zuerst erhaltene Integral $\int^{(\mathfrak{B})} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, d\sigma$, denn es entsteht aus diesem, wenn man statt der Parameter u, v die Parameter p, q als neue Integrationsveränderliche einführt.

Ebenso erweist sich der im Vorangehenden erklärte Inhalt des Flächenstückes $\mathfrak{F}$ als unabhängig davon, auf welches rechtwinkelige Koordinatensystem man dieses Flächenstück bezogen hat. Ist nämlich außer dem System der Koordinaten x, y, z noch irgendein zweites System rechtwinkeliger Koordinaten ξ, η, ζ gegeben und sind (vgl. Nr. **131**)

$$\xi = \xi_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$$
$$\eta = \eta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z$$
$$\zeta = \zeta_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z$$

die linearen Gleichungen, welche die alten Koordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes von $\mathfrak{F}$ mit den neuen Koordinaten ξ, η, ζ desselben Punktes verbinden, so ergibt sich mit Rücksicht auf die zwischen den neun Richtungskosinus $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \gamma_3$ bestehenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right)^2 \\
&= \left(\alpha_1 \frac{\partial x}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial y}{\partial u} + \alpha_3 \frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\beta_1 \frac{\partial x}{\partial u} + \beta_2 \frac{\partial y}{\partial u} + \beta_3 \frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\
&\qquad + \left(\gamma_1 \frac{\partial x}{\partial u} + \gamma_2 \frac{\partial y}{\partial u} + \gamma_3 \frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = E,
\end{aligned}$$

und ähnlich findet sich

$$\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v} + \frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v} = F$$
$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial v}\right)^2 = G.$$

Auch bei Zugrundelegung des Systems der ξ, η, ζ erhält man daher für den Inhalt von $\mathfrak{F}$ wieder den alten Ausdruck $\int^{(\mathfrak{B})} \sqrt{EG - F^2}\, d\sigma$.

Zusatz 1. — Von den bisher gemachten Annahmen, daß die Determinanten A, B, C in $\mathfrak{B}$ nirgends gleichzeitig gleich Null werden und daß jedem Punkte von $\mathfrak{F}$ nur ein Punkt von $\mathfrak{B}$ entspreche, kann man sich nachträglich wenigstens teilweise befreien. Wenn man nämlich dadurch, daß man aus $\mathfrak{B}$ eine endliche Anzahl passend gewählter meßbarer Teile ausschneidet, erreichen kann, daß für den übrig bleibenden Teil $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{B}$ alle bisherigen Voraussetzungen erfüllt sind, so entspricht diesem Teile ein Teil von $\mathfrak{F}$, dem ein Inhalt zukommt, und dieser Inhalt ist niemals größer als das Integral $J = \int^{(\mathfrak{B})} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, d\sigma$. Denn da die zu integrierende Funktion $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ niemals negativ ist, kann das über $\mathfrak{T}$ erstreckte Integral dieser Funktion nie größer sein als das über den ganzen Bereich $\mathfrak{B}$ erstreckte Integral derselben. Aber wenn es nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen positiven Konstanten ε immer möglich ist, die auszuschneidenden Teile von $\mathfrak{B}$ so zu wählen, daß ihr Gesamtinhalt kleiner als ε ist, was z. B. zutreffen kann, wenn dem Bereich $\mathfrak{B}$ ein die Spitze enthaltendes Stück einer Kegelfläche entspricht, so kann das über $\mathfrak{T}$ zu erstreckende Integral der Funktion $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ dem Wert J beliebig nahe gebracht werden. Für eben diesen Fall erweitert man den Begriff des Flächeninhalts durch die Festsetzung, daß unter dem Inhalt von $\mathfrak{F}$ die obere Grenze aller möglichen Werte des Integrals $\int^{(\mathfrak{T})}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,d\sigma$, also wieder das Integral $J = \int^{(\mathfrak{B})}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,d\sigma$ verstanden werden soll.

Zusatz 2. — Ist in einem System rechtwinkeliger Koordinaten x, y, z ein einfaches Flächenstück $\mathfrak{F}$ durch eine Gleichung von der Form

$$z = f(x, y)$$

gegeben und ist dabei die Stelle (x, y) auf einen zusammenhängenden endlichen meßbaren Bereich $\mathfrak{B}$ eingeschränkt und $f(x, y)$ eine Funktion, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in einem größeren, den Bereich $\mathfrak{B}$ und seine Grenzpunkte ganz im Innern enthaltenden Bereiche vorhanden und stetig sind, so kommt dem Flächenstück $\mathfrak{F}$ ein Inhalt zu, und dieser wird durch die Gleichung

$$(1404)\quad \left| \begin{aligned} \boldsymbol{J} &= \int^{(\mathfrak{B})}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,d\sigma \\ &= \int^{(\mathfrak{B})}\sqrt{1+[f_x(x,y)]^2+[f_y(x,y)]^2}\,d\sigma \end{aligned} \right.$$

gegeben.

Denn die gegebene Gleichung des Flächenstückes $\mathfrak{F}$ ist gleichwertig mit der Parameterdarstellung

$$x = u; \qquad y = v; \qquad z = f(u, v),$$

und bei dieser ist

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u} = 1; \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = 0; \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = f_x(x, y) \\ &\frac{\partial x}{\partial v} = 0; \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = 1; \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = f_y(x, y), \end{aligned}$$

also

$$A = -f_x(x,y); \qquad B = -f_y(x,y); \qquad C = 1.$$

Zusatz 3. — Während die Berechnung des Gesamtinhaltes eines krummen Flächenstückes praktisch verhältnismäßig selten vorkommt, hat man öfter Veranlassung, von den Gleichungen

$$(1405) \qquad do = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, d\sigma$$

und

$$(1406) \qquad do = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, d\sigma$$

Gebrauch zu machen, welche für die beiden erwähnten Fälle der analytischen Darstellung eines Flächenstückes $\mathfrak{F}$ den Inhalt do eines Elementes von $\mathfrak{F}$ liefern, wenn der Inhalt $d\sigma$ des entsprechenden Flächenelementes der uv- beziehungsweise der xy-Ebene gegeben ist. Falls nämlich ein Körper mechanischen, an seiner Oberfläche angreifenden Druck- oder Reibungskräften unterliegt, wird die Wirkung dieser Kräfte auf ein einzelnes Element der Oberfläche regelmäßig durch einen Ausdruck dargestellt, der den Inhalt dieses Elementes als Faktor enthält. Entsprechendes gilt in allen den Fällen, wo man sich eine Fläche mit materieller oder elektrischer oder magnetischer Masse belegt denkt und die Wirkungen, die sie dann ausübt oder erfährt, durch Zusammensetzung der Wirkungen ermittelt, die von den einzelnen Elementen der Fläche ausgehen oder an ihnen angreifen.

Übungsaufgabe. — In einem System räumlicher Polarkoordinaten r, λ, φ sei ein einfaches Flächenstück $\mathfrak{F}$ durch eine Gleichung von der Form

$$r = f(\lambda, \varphi)$$

als Abbild eines zweifach ausgedehnten, zusammenhängenden, abgeschlossenen und meßbaren Teiles $\mathfrak{B}$ des durch die Ungleichungen

$$0 \leqq \lambda < 2\pi; \qquad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

abgegrenzten Bereiches gegeben, und dabei sei $f(\lambda, \varphi)$ eine Funktion, die in $\mathfrak{B}$ nirgends negativ wird und deren partielle Ableitungen in einem größeren, alle Punkte von $\mathfrak{B}$ im Innern enthaltenden Bereiche vorhanden und stetig sind. Man soll zeigen, daß dann der Inhalt J des Flächenstückes $\mathfrak{F}$ durch die Gleichung

$$(1407)\quad \begin{cases} J = \overset{(\mathfrak{B})}{\displaystyle\int} r \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2\right] \cos\varphi^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2}\, d\sigma \\ \quad = \overset{(\mathfrak{B})}{\displaystyle\int} f(\lambda, \varphi) \sqrt{\{[f(\lambda, \varphi)]^2 + [f_\varphi(\lambda, \varphi)]^2\} \cos\varphi^2 + [f_\lambda(\lambda, \varphi)]^2}\, d\sigma \end{cases}$$

gegeben wird.

510. Inhalt einer Rotationsfläche. — Lehrsatz: *Ist in einem System rechtwinkeliger ebener Koordinaten x, y ein einfaches Linienstück $\mathfrak{l}$, welches auf der oberen Seite der x-Achse liegt, mit dieser Achse aber auch eine endliche Anzahl von Punkten gemein haben darf, (oder auch eine geschlossene Linie von den gleichen Eigenschaften) durch eine Parameterdarstellung*

$$x = \varphi(t); \qquad y = \chi(t)$$

gegeben, bei welcher der Parameter t von einem festen Anfangswert a bis zu einem größeren festen Endwert b stetig zuzunehmen hat und $\varphi(t)$, $\chi(t)$ Funktionen bedeuten, deren Ableitungen in dem abgeschlossenen Intervall $(a \cdots b)$ vorhanden und stetig sind, so kommt der Rotationsfläche $\mathfrak{R}$, die durch eine volle Umdrehung des Linienstückes $\mathfrak{l}$ um die x-Achse entsteht, ein Inhalt J zu, und dieser wird durch die Gleichung

$$(1408)\quad \boldsymbol{J = 2\pi \overset{(\mathfrak{l})}{\int} y\, ds = 2\pi \int_a^b \chi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\, dt}$$

gegeben.

Die Rotationsfläche $\mathfrak{R}$ wird nämlich in einem System rechtwinkeliger räumlicher Koordinaten x, y, z, dessen erste und zweite Achse beziehentlich mit der x- und y-Achse des gegebenen ebenen Systems zusammenfallen, durch die Gleichungen

$$x = \varphi(t); \qquad y = \chi(t) \cos\lambda; \qquad z = \chi(t) \sin\lambda$$

in Verbindung mit den Ungleichungen

$$a \leqq t \leqq b; \qquad 0 \leqq \lambda < 2\pi$$

dargestellt, und bei dieser Darstellung ist

$$E = [\varphi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2; \qquad F = 0; \qquad G = [\chi(t)]^2,$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung leicht abzuleiten ist.

Insbesondere ergibt sich für den Fall, daß das Linienstück $\mathfrak{l}$ durch eine Gleichung von der Form

$$y = f(x)$$

gegeben ist und daß jetzt a die untere und b die obere Grenze des Wertbereiches der Veränderlichen x und $f(x)$ eine in dem abgeschlossenen Intervall $(a \cdots b)$ nirgends negative und nicht unendlich oft verschwindende differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung bedeutet, für den Inhalt J der Rotationsfläche $\mathfrak{R}$ die Gleichung

$$(1409)\qquad J = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Ist das Linienstück $\mathfrak{l}$ gerade, also die Rotationsfläche $\mathfrak{R}$, allgemein zu reden, der Mantel eines abgestumpften Kegels, so erhält man aus der Gleichung (1408) oder der Gleichung (1409) nach leichter Zwischenrechnung die aus der Stereometrie bekannte Formel

$$(1410)\qquad J = 2\pi l \frac{r_1 + r_2}{2} = \pi l (r_1 + r_2),$$

welche den Inhalt J der Mantelfläche eines solchen Kegels durch die Länge l der Erzeugenden und die Radien r_1, r_2 der begrenzenden Kreise ausdrückt. Unter Benutzung dieser Formel erkennt man ferner leicht, daß der Inhalt der Rotationsfläche, die von einem beliebigen Linienstück $\mathfrak{l}$ der beschriebenen Art erzeugt wird, jedesmal den Grenzwert darstellt, dem die Summe der Inhalte der von den einzelnen Seiten eines Sehnenpolygons von $\mathfrak{l}$ erzeugten Kegelmäntel dadurch beliebig nahe gebracht werden kann, daß man für die Längen dieser Seiten eine hinlänglich kleine obere Grenze vorschreibt.

511. Beispiele. — 1. — Flächeninhalt eines Rotationsellipsoides. Eine Ellipse mit der großen Halbachse a und der kleinen Halbachse b werde einmal um ihre große und ein zweites Mal um ihre kleine Achse gedreht. Man soll

den Flächeninhalt J_1 des im ersten Fall entstehenden verlängerten und

den Flächeninhalt J_2 des im zweiten Fall entstehenden abgeplatteten Rotationsellipsoides ermitteln.

Lösung: Denkt man sich die gegebene Ellipse nach passender Wahl eines Systems rechtwinkeliger ebener Koordinaten x, y durch die beiden Gleichungen

$$x = a\cos t; \qquad y = b\sin t \qquad (-\pi < t \leq \pi)$$

dargestellt, so wird

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = a^2 \sin t^2 + b^2 \cos t^2 .$$

Man erhält daher zunächst

$$J_1 = 2\pi \int_0^\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = 2\pi b \int_0^\pi \sin t \sqrt{a^2 \sin t^2 + b^2 \cos t^2}\, dt$$

$$= 2\pi b \int_0^\pi \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos t^2}\, \sin t\, dt$$

oder, wenn man wie üblich $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \varepsilon$ setzt,

$$J_1 = 2\pi ab \int_0^\pi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos t^2}\, \sin t\, dt$$

$$= 2\pi ab \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - \varepsilon^2 u^2}\, du = 2\pi ab \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sqrt{1 - v^2}\, dv ,$$

und hieraus ergibt sich mit Hilfe der Gleichung (1268), Nr. **453**

$$J_1 = 2\pi ab \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{1}{2} v \sqrt{1 - v^2} + \frac{1}{2} \arcsin v\right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon}$$

$$= 2\pi ab \frac{1}{\varepsilon} \left(\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2} + \arcsin \varepsilon\right).$$

Bedenkt man nunmehr, daß $\sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{b}{a}$ ist, so erhält man schließlich

(1411) $$J_1 = 2\pi b \left(b + a \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon}\right).$$

Ganz ähnlich findet man im zweiten Fall

$$J_2 = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = 2\pi a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sqrt{a^2 \sin t^2 + b^2 \cos t^2}\, dt$$

$$= 2\pi a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin t^2}\, \cos t\, dt .$$

Da nun $\frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2$ ist, so folgt hieraus

$$J_2 = 2\pi a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \sin t^2} \cos t\, dt$$

$$= 2\pi a^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^2 u^2}\, du = 2\pi a^2 \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sqrt{1 - \varepsilon^2 + w^2}\, dw$$

oder mit Hilfe der Gleichung (1267), Nr. **453**

$$J_2 = 2\pi a^2 \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{1}{2} w \sqrt{1 - \varepsilon^2 + w^2} + \frac{1 - \varepsilon^2}{2} \lg (w + \sqrt{1 - \varepsilon^2 + w^2}) \right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon}$$

$$= 2\pi a^2 \frac{1}{\varepsilon} \left(\varepsilon + \frac{b^2}{2a^2} \lg \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)$$

oder endlich

$$(1412) \quad J_2 = 2\pi a^2 + \pi b^2 \frac{1}{\varepsilon} \lg \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = 2\pi a^2 \left(1 + \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon} \lg \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right).$$

2. — Fläche von Viviani. Wie in Nr. **501**, Beispiel 1, sei aus einer Kugel vom Radius r (Fig. 84) durch einen geraden Kreis-

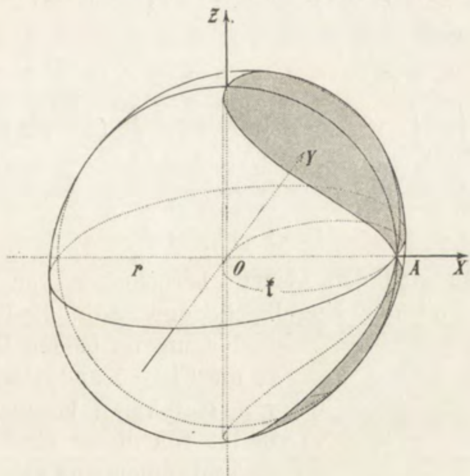


Fig. 84.

zylinder vom Radius $\frac{1}{2} r$, dessen Mantelfläche durch den Mittelpunkt der Kugel geht, ein Körper ausgebohrt. Man soll den

Flächeninhalt desjenigen Teiles der Oberfläche dieses Körpers berechnen, welcher der Oberfläche der gegebenen Kugel angehört.

Lösung: Der fragliche Flächenteil ist aus Symmetriegründen viermal so groß wie dasjenige Stück desselben, welches im ersten Oktanten des in Nr. **501** benutzten Koordinatensystems liegt. Führt man nun auf der Kugel mittels der Gleichungen

$$x = r\cos\varphi\cos\lambda; \qquad y = r\cos\varphi\sin\lambda; \qquad z = r\sin\varphi$$

geographische Koordinaten λ, φ ein, so erscheint dieses Stück als Bild eines Bereiches im Gebiet der Veränderlichen λ, φ, und zwar, wie man sich leicht überzeugt, desjenigen Bereiches, der durch die Ungleichungen

$$0 < \lambda < \frac{\pi}{2}; \qquad \lambda \leqq \varphi < \frac{\pi}{2}$$

abgegrenzt wird. Da ferner im vorliegenden Fall

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = -r\cos\varphi\sin\lambda; \qquad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = r\cos\varphi\cos\lambda; \qquad \frac{\partial z}{\partial \lambda} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\cos\lambda; \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\sin\lambda; \qquad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = r\cos\varphi,$$

also

$$E = r^2\cos\varphi^2; \qquad F = 0; \qquad G = r^2$$

ist, so ergibt sich

$$J = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_\lambda^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda = 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\lambda)\,d\lambda,$$

also schließlich

(1413) $$J = 2\pi r^2 - 4r^2.$$

Denkt man sich den hiermit berechneten von dem Zylinder ausgebohrten Teil der Kugelfläche durch die zx-Ebene halbiert und dann die beiden Hälften so wie es die Fig. 85 andeutet, aus der oberen Halbkugel herausgenommen, so bleibt von dieser ein Teil übrig, der sich mit einem von vier gleich großen Fenstern durchbrochenen Tempelgewölbe, oder mit einer Schildkrötenschale oder auch mit einem vom Winde geblähten Segel vergleichen

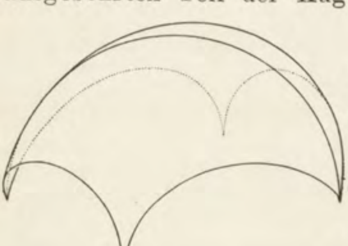


Fig. 85.

läßt. Dieser übrig bleibende Teil hat den Inhalt

$$2\pi r^2 - (2\pi r^2 - 4r^2) = 4r^2,$$

das heißt den gleichen Inhalt wie das Quadrat über dem Durchmesser der Kugel. Hierauf ist zuerst 1692 von Vincenzo Viviani (1622—1703) in der Form eines geometrischen Rätsels hingewiesen worden[1]), und die Entdeckung dieser Tatsache hat damals erhebliches Aufsehen gemacht.

3. — Inhalt eines Stückes einer Schraubenfläche. Auf einer Achse $\mathfrak{a}$ sei ein Lot von der Länge r errichtet und durch eine Schraubenbewegung dieses Lotes um $\mathfrak{a}$ sei ein Stück einer geschlossenen geraden Regelschraubenfläche erzeugt. Dabei sei h die Ganghöhe der Schraubenfläche und α der Winkel, um den sich das erwähnte Lot gegen seine ursprüngliche Richtung drehen muß. Man soll den Inhalt J des so bestimmten Flächenstückes ermitteln.

Lösung: Bei passender Wahl eines Systems rechtwinkeliger Koordinaten x, y, z wird das fragliche Flächenstück durch die Gleichungen

$$x = \varrho\cos\varphi; \qquad y = \varrho\sin\varphi; \qquad z = \frac{h}{2\pi}\varphi$$

in Verbindung mit den Ungleichungen

$$0 \leqq \varrho \leqq r; \qquad 0 \leqq \varphi \leqq \alpha$$

dargestellt. Hierbei ist

$$\frac{\partial x}{\partial \varrho} = \cos\varphi; \qquad \frac{\partial y}{\partial \varrho} = \sin\varphi; \qquad \frac{\partial z}{\partial \varrho} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\varrho\sin\varphi; \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \varrho\cos\varphi; \qquad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{h}{2\pi},$$

also

$$E = 1; \qquad F = 0; \qquad G = \varrho^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2.$$

Folglich ergibt sich

$$J = \int_0^r \int_0^\alpha \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}\, d\varphi\, d\varrho = \alpha \int_0^r \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}\, d\varrho,$$

---

1) Vgl. Acta Eruditorum, Anno 1692 publicata, Lipsiae 1692, S. 274—279 und 370—371, und Johannis Bernoulli Opera omnia, Tomus III, Lausannae et Genevae 1742, S. 211—212.

und hieraus folgt mit Hilfe der Gleichung (1267), Nr. **453**

$$J = \alpha\left[\frac{1}{2}\varrho\sqrt{\varrho^2+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \lg\left(\varrho+\sqrt{\varrho^2+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}\right)\right]_0^r$$

oder schließlich

$$(1414)\qquad J = \frac{1}{2}\alpha\left\{r\sqrt{r^2+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \lg\left[\frac{2\pi}{h}\left(r+\sqrt{r^2+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}\right)\right]\right\}.$$

512. Gewöhnliche Flächenstücke und Körper. — Erklärung: Ein einfaches Flächenstück $\mathfrak{F}$ soll fortan **gewöhnlich** genannt werden, wenn für dasselbe in einem System rechtwinkeliger Koordinaten x, y, z eine Parameterdarstellung

$$x = \varphi(u, v); \qquad y = \chi(u, v); \qquad z = \psi(u, v)$$

möglich ist, bei der das Flächenstück $\mathfrak{F}$ als eindeutig umkehrbares Bild eines in der Ebene der Parameter u, v gelegenen gewöhnlichen (Nr. 468) Bereiches $\mathfrak{B}$ erscheint und $\varphi(u, v)$, $\chi(u, v)$, $\psi(u, v)$ Funktionen bedeuten, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in einem größeren, alle Punkte von $\mathfrak{B}$ im Innern enthaltenden Bereiche vorhanden, stetig und so beschaffen sind, daß die Determinanten

$$A = \begin{vmatrix} \chi_u & \psi_u \\ \chi_v & \psi_v \end{vmatrix}; \qquad B = \begin{vmatrix} \psi_u & \varphi_u \\ \psi_v & \varphi_v \end{vmatrix}; \qquad C = \begin{vmatrix} \varphi_u & \chi_u \\ \varphi_v & \chi_v \end{vmatrix}$$

in $\mathfrak{B}$ nirgends gleichzeitig verschwinden.

Gibt es in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem eine diesen Anforderungen genügende Parameterdarstellung, so ist eine solche Darstellung offenbar auch in jedem anderen rechtwinkeligen Koordinatensystem möglich, dessen Achsenkreuz gegen das Flächenstück fest ist.

Die Voraussetzungen, welche bei der eben aufgestellten Erklärung gemacht wurden, haben zur Folge, daß jedes gewöhnliche einfache Flächenstück

1. — in jedem seiner Punkte eine Tangentenebene hat, daß ihm
2. — ein Flächeninhalt zukommt, daß
3. — sein Rand aus einer endlichen Anzahl gewöhnlicher einfacher Linienstücke besteht und daß
4. — jedem Punkte des Flächenstücks eine mit ihm sich immer nur stetig ändernde positive Normalenrichtung eindeutig

zugeordnet werden kann, z. B. durch die Festsetzung, die positive Normalenrichtung solle diejenige sein, deren Richtungskosinus mit den Determinanten A, B, C im Vorzeichen übereinstimmen.

Durch die zuletzt erwähnte Eigenschaft werden die sogenannten einseitigen Flächenstücke von den gewöhnlichen Flächenstücken ausgeschlossen: Biegt man einen rechteckigen hinreichend langen und zugleich hinreichend schmalen Papierstreifen

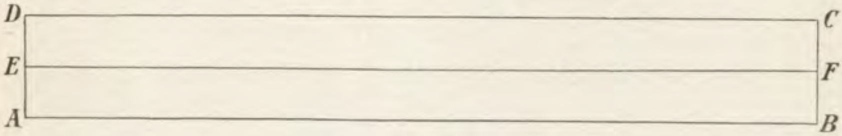


Fig. 86.

$ABCD$ (Fig. 86) ohne Knickung und Faltung so zusammen, daß die Endpunkte A, B der einen langen Seite miteinander zur Deckung kommen, und ebenso auch die Endpunkte C, D der anderen langen Seite, so entsteht ein ringförmiges gewöhnliches Flächenstück. Biegt man ihn dagegen so zusammen, daß A mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt C und zugleich B mit D zur Deckung kommt, so entsteht (Fig. 87) ein ringförmiges einseitiges Flächenstück von wesentlich anderer Art wie die gewöhnlichen Flächenstücke. Hat man nämlich für einen Punkt P_0 dieses Flächenstücks, der etwa auf der ursprünglich mit der längeren Mittellinie EF des Streifens zusammenfallenden Linie $\mathfrak{l}$ liegen möge, die eine der beiden Normalenrichtungen als positive Normalenrichtung angenommen und läßt man sodann einen beweglichen Punkt P die Linie $\mathfrak{l}$ einmal durchlaufen, bis er wieder zu P_0 zurückkehrt, so fällt diejenige zu P gehörende Normalenrichtung, die aus der ursprünglich angenommenen positiven Normalenrichtung durch stetige Fortsetzung entsteht, bei der Rückkehr des Punktes P in seine Anfangslage P_0 nicht mit der positiven, sondern mit der negativen Richtung der dortigen Normale zusammen. Hierin besteht die Einseitigkeit des betrachteten Flächenstücks, und eben wegen dieser Eigenschaft darf dasselbe nicht mehr als ein gewöhnliches Flächenstück bezeichnet werden.

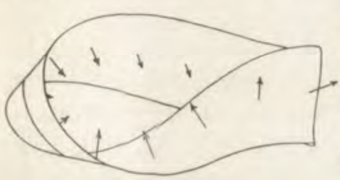


Fig. 87.

Für gewöhnliche Flächenstücke gilt, wie hier unter Weglassung des den Betrachtungen der Nr. **468** nachzubildenden Beweises angeführt werden möge, der folgende

Lehrsatz: *Jedes gewöhnliche einfache Flächenstück kann nach Annahme eines Systems rechtwinkeliger Koordinaten x, y, z in eine endliche Anzahl von Teilen zerlegt werden, von denen jeder einzelne mit Einschluß seiner Grenzpunkte derart durch eine Gleichung von einer der drei Formen*

$$x = f(y, z); \qquad y = g(z, x); \qquad z = h(x, y)$$

darstellbar ist, daß die Stelle (y, z), beziehungsweise (z, x), beziehungsweise (x, y) jedesmal einen gewöhnlichen Bereich zu durchlaufen hat und daß $f(y, z)$, bez. $g(z, x)$, bez. $h(x, y)$ eine Funktion bedeutet, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in diesem Bereiche vorhanden und stetig sind.

Daraus folgt: Jedes gewöhnliche einfache Flächenstück läßt sich in ein Polyeder von beliebig kleinem Rauminhalt einschließen.

Und hieraus ergibt sich endlich: Jedem endlichen räumlichen Bereiche, dessen Grenze aus einer endlichen Anzahl gewöhnlicher einfacher Flächenstücke zusammengesetzt werden kann, kommt ein Volumen zu.

Ein endlicher räumlicher Bereich, der aus einem räumlichen Kontinuum durch Hinzunahme aller Grenzpunkte des Kontinuums abgeleitet werden kann und dessen Grenze aus einer endlichen Anzahl gewöhnlicher einfacher Flächenstücke besteht, soll fortan als ein **gewöhnlicher Körper** bezeichnet werden oder ausführlicher als ein gewöhnlicher geometrischer Körper, falls neben ihm auch materielle Körper in Betracht kommen.

513. Erweiterung des Begriffes Flächenintegral. — Nach Annahme eines Systems rechtwinkeliger räumlicher Koordinaten x, y, z sei ein gewöhnliches einfaches Flächenstück $\mathfrak{F}$ durch drei den Forderungen der Nr. **512** genügende Gleichungen

$$x = \varphi(u, v); \qquad y = \chi(u, v); \qquad z = \psi(u, v)$$

als Bild eines Bereiches $\mathfrak{B}$ im Gebiet der Parameter u, v gegeben. Ferner sei für einen im Gebiet der Veränderlichen x, y, z gegebenen und sämtliche Punkte des Flächenstückes $\mathfrak{F}$ enthaltenden Bereich eine daselbst stetige Funktion $f(x, y, z)$ erklärt. Dann stellt das über den Bereich $\mathfrak{B}$ erstreckte Flächenintegral

$$J = \int^{(\mathfrak{B})} f[\varphi(u, v),\ \chi(u, v),\ \psi(u, v)] \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, d\sigma$$

den Grenzwert der Summe aller Produkte dar, die sich ergeben, wenn man nach Zerlegung des Flächenstückes $\mathfrak{F}$ in eine beliebige endliche Anzahl meßbarer Teile den Flächeninhalt eines jeden Teiles mit dem Werte multipliziert, den die Funktion $f(x, y, z)$ an einer auf diesem Teil nach Belieben ausgewählten Stelle annimmt, und zwar den Grenzwert, dem die erwähnte Summe dadurch beliebig nahe gebracht werden kann, daß man für den Abstand zweier zu ein und demselben Flächenteil gehörenden Punkte eine hinreichend kleine nicht zu überschreitende Grenze vorschreibt. Aus diesem Grunde wird das Integral J auch als **das über das Flächenstück $\mathfrak{F}$ erstreckte Integral der Funktion $f(x, y, z)$** bezeichnet und kürzer durch das Zeichen

$$\int^{(\mathfrak{F})} f(x, y, z)\, do$$

dargestellt, wo jetzt

$$do = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, d\sigma$$

den Inhalt des Elementes des Flächenstückes $\mathfrak{F}$ bedeutet.

Zur zahlenmäßigen Ausrechnung eines solchen Flächenintegrals in erweitertem Sinne muß man dasselbe zunächst mittels der Gleichung

$$(1415)\quad \begin{cases} \displaystyle\int^{(\mathfrak{F})} f(x, y, z)\, do \\ \displaystyle = \int^{(\mathfrak{B})} f[\varphi(u, v),\ \chi(u, v),\ \psi(u, v)] \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, d\sigma \end{cases}$$

in ein Flächenintegral gewöhnlicher Art und dann dieses in ein Doppelintegral verwandeln.

Schwerpunkte, Trägheitsmomente, Potentiale.

514. Dichte. — Abweichend von der in der Chemie und der Wärmelehre meistens gemachten Annahme, daß jeder materielle Körper aus einer sehr großen Anzahl durch verhältnismäßig weite Zwischenräume getrennter Moleküle bestehe, bildet man in der Mechanik einen materiellen Körper sehr oft durch einen gewöhnlichen geometrischen Körper $\mathfrak{K}$ ab, den man sich lückenlos und dabei in solcher Weise mit Masse erfüllt denkt, daß die folgende Regel gilt:

Wenn man in $\mathfrak{K}$ irgend einen Punkt P nach Belieben annimmt und sodann einen diesen Punkt enthaltenden meßbaren Teil von $\mathfrak{K}$ irgendwie nach und nach so verkleinert, daß die Abstände seiner Grenzpunkte von P sämtlich unendlich klein werden, so nähert sich der Quotient, den man bekommt, wenn man die Masse des fraglichen Teiles durch das Volumen desselben dividiert, stets einem Grenzwert, und dieser Grenzwert ist nur von der Lage des Punktes P, nicht aber davon abhängig, in welcher Weise man den den Punkt P enthaltenden Teil von $\mathfrak{K}$ verkleinert.

Dieser Grenzwert heißt dann die **Dichte** der den Körper $\mathfrak{K}$ erfüllenden Masse oder kurz die Dichte des Körpers $\mathfrak{K}$ am Punkte P.

Hat man ein räumliches Koordinatensystem angenommen, dessen Grundfigur gegen einen in der angegebenen Weise mit Masse erfüllten Körper fest ist, so ist die Dichte an einem willkürlich wählbaren Punkte P dieses Körpers eine Funktion der Koordinaten von P. In den allermeisten Fällen setzt man voraus, daß diese Funktion durchweg stetig sei. Daneben kommt indessen gelegentlich auch der Fall vor, daß man sich einen größeren Körper $\mathfrak{K}$ aus einer endlichen Anzahl kleinerer gewöhnlicher mit Masse erfüllter Körper zusammengesetzt denkt und daß dabei zwar für jeden dieser kleineren Körper die Dichte eine stetige Funktion des Ortes ist, daß aber unter den Stellen, wo zwei verschiedene Körper zusammenstoßen, sich auch solche vorfinden, an denen die Dichten dieser Körper verschiedene Werte haben. An jeder derartigen Stelle kann natürlich nicht mehr von einer Dichte des Körpers $\mathfrak{K}$ schlechthin, sondern nur noch von Dichten der einzelnen dort zusammentreffenden Teile von $\mathfrak{K}$ die Rede sein.

Einen plattenförmigen materiellen Körper bildet man oft durch ein gewöhnliches einfaches lückenlos mit Masse belegtes Flächenstück ab und versteht dann unter der **Flächendichte** oder kurz **Dichte** der Belegung in einem gegebenen Punkte P des Flächenstücks den Grenzwert des Quotienten, welcher die Masse eines den Punkt P enthaltenden meßbaren Teiles des Flächenstücks als Zähler und den Flächeninhalt dieses Teiles als Nenner hat, für den Fall daß man die Abstände der einzelnen Punkte des fraglichen Flächenteils vom Punkte P sämtlich unendlich klein werden läßt. Dabei wird natürlich stillschweigend vorausgesetzt, die Massenverteilung über das Flächenstück sei so beschaffen, daß der eben erwähnte Quotient wirklich stets einem Grenzwert zustrebt, der nur von der Lage des Punktes P abhängt.

Endlich kommt auch der Fall vor, daß man einen stab- oder drahtförmigen materiellen Körper durch ein lückenlos mit Masse belegtes gewöhnliches einfaches Linienstück abbildet. **Liniendichte** oder kurz **Dichte** der Belegung in einem gegebenen Punkte P eines solchen Linienstücks ist dann der Grenzwert des Quotienten, welcher die Masse eines den Punkt P enthaltenden Bogenelementes des Linienstücks als Zähler und die Länge dieses Elementes als Nenner hat, für den Fall, daß alle Punkte des Elementes dem Punkte P unbegrenzt genähert werden. Auch hier wird stets eine solche Beschaffenheit der Massenverteilung vorausgesetzt, daß der eben erwähnte Grenzwert in jedem Falle vorhanden ist.

Ist die Dichte in einem gewöhnlichen mit Masse erfüllten Körper $\mathfrak{K}$ vom Volumen V überall größer als eine Konstante c und überall kleiner als eine andere Konstante C, so liegt die Gesamtmasse des Körpers innerhalb der Grenzen cV und CV. Denn wäre sie etwa $\geqq CV$, so wäre es nach Zerlegung des Körpers $\mathfrak{K}$ in eine beliebige Anzahl gewöhnlicher Teilkörper immer möglich, unter diesen einen zu finden, dessen Masse nicht kleiner wäre als das Produkt seines Volumens mit der Konstanten C. Auf diesen Teil könnte man dann den gleichen Schluß noch einmal anwenden und sodann durch Fortsetzung dieser Überlegungen bei geeigneter Einrichtung der Teilungen zu einem bestimmten Punkte P gelangen, der innerer oder Grenzpunkt eines jeden der nach und nach beibehaltenen Teilkörper wäre, so weit man diese auch verkleinern mag. Damit wäre aber ein Widerspruch mit der Annahme erreicht, daß auch im Punkte P die Dichte kleiner als C ist.

Aus ähnlichen Gründen kann die Gesamtmasse auch nicht $\leqq cV$ sein.

Auf Grund der hiermit bewiesenen Behauptung kann man sich leicht von der Richtigkeit des folgenden oft gebrauchten Satzes überzeugen: *Ist die Dichte in einem mit Masse erfüllten gewöhnlichen Körper $\mathfrak{K}$ bei Zugrundelegung eines Systems von Parallelkoordinaten eine stetige Funktion $\varrho(x, y, z)$ der Koordinaten x, y, z des Ortes, auf den sie sich bezieht, so wird die Gesamtmasse des Körpers $\mathfrak{K}$ durch das über $\mathfrak{K}$ zu erstreckende Raumintegral*

$$\int^{(\mathfrak{K})} \varrho(x, y, z)\, dS$$

gegeben.

Genau entsprechende Sätze gelten natürlich auch für gewöhnliche einfache Flächen- und Linienstücke, die mit Masse belegt sind.

515. Schwerpunkt. — Als **Schwerpunkt** oder **Massenmittelpunkt** eines Systems von endlich vielen materiellen Punkten, welche die Massen $m_1, m_2, \cdots m_n$ haben und denen in einem gegebenen System räumlicher Parallelkoordinaten beziehentlich die Koordinaten x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; $\cdots x_n, y_n, z_n$ zukommen, bezeichnet man denjenigen Punkt, dessen Koordinaten x_s, y_s, z_s in bezug auf das gleiche System durch die Gleichungen

$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

(1416) $$y_s = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

$$z_s = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

gegeben werden.

Die Lage dieses Punktes zu den gegebenen Punkten hängt nur von den Massen dieser letzteren und ihrer gegenseitigen Lage ab, nicht aber davon, auf welches Koordinatensystem man die gegebenen Punkte bezieht. Hat man nämlich ein System materieller Punkte auf irgend zwei verschiedene Systeme von Parallelkoordinaten bezogen, so bestehen nach Nr. **131** zwischen den Koordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes in bezug auf das eine und den Koordinaten ξ, η, ζ des nämlichen Punktes in bezug auf das andere System stets drei Gleichungen

$$x = a + a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta$$
$$y = b + a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta$$
$$z = c + a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 \zeta,$$

wo a, b, c und $a_1, b_1, \cdots c_3$ konstante, das heißt von ξ, η, ζ, beziehungsweise x, y, z unabhängige Zahlen bedeuten. Daraus folgt aber ohne Schwierigkeit, daß der Punkt, der sich bei Zugrundelegung des einen Koordinatensystems als Schwerpunkt ergibt, stets mit demjenigen Punkte zusammenfällt, der bei Zugrundelegung des anderen Koordinatensystems als Schwerpunkt erscheint.

Durch naheliegende Überlegungen gelangt man ferner zu einer Ausdehnung des Begriffes Schwerpunkt auf lückenlos mit Masse erfüllte Körper, Flächen- und Linienstücke.

Ist zunächst ein gewöhnlicher derart lückenlos mit Masse erfüllter Körper $\mathfrak{K}$ gegeben, daß die Dichte bei Zugrundelegung eines Systems räumlicher Parallelkoordinaten eine stetige Funktion $\varrho(x, y, z)$ der Koordinaten x, y, z des Ortes ist, auf den sie sich bezieht, und ist dieser Körper in irgend eine Anzahl n zusammenhängender meßbarer Teile zerlegt, zwischen denen irgend eine Rangordnung festgesetzt sein möge, so ist es für $\lambda = 1, 2, \cdots n$ immer möglich, im Innern oder auf der Grenze des λ-ten Teiles einen Punkt $(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)$ so zu bestimmen, daß die Masse dieses Teiles sich aus seinem Volumen v_λ durch Multiplikation mit der am Ort $(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)$ herrschenden Dichte $\varrho(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)$ ergibt. Denkt man sich dann die Masse jedes einzelnen Teiles in dem eben näher gekennzeichneten ihm zugeordneten Punkte vereinigt, so erhält man ein System materieller Punkte, für welches die Koordinaten ξ, η, ζ des Schwerpunktes durch die Gleichungen

$$\xi = \frac{\sum\limits_{\lambda=1}^{n} x_\lambda \varrho(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda) v_\lambda}{\sum\limits_{\lambda=1}^{n} \varrho(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda) v_\lambda}; \qquad \eta = \frac{\sum\limits_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \varrho(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda) v_\lambda}{\sum\limits_{\lambda=1}^{n} \varrho(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda) v_\lambda};$$

$$\zeta = \frac{\sum\limits_{\lambda=1}^{n} z_\lambda \varrho(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda) v_\lambda}{\sum\limits_{\lambda=1}^{n} \varrho(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda) v_\lambda}$$

gegeben werden. Nun können aber diese Koordinaten, wie man mit einem Blick erkennt, lediglich durch hinreichend weitgehende Verfeinerung der Teilung, das heißt dadurch, daß man für den Abstand zweier zu ein und demselben Teil gehörenden Punkte eine hinlänglich kleine positive Konstante als nicht zu überschreitende Grenze vorschreibt, gleichzeitig denjenigen Grenzwerten beliebig nahe gebracht werden, die sich ergeben, wenn man in den vorangehenden Ausdrücken die vorkommenden Summen durch die entsprechenden über $\mathfrak{K}$ zu erstreckenden Raumintegrale ersetzt, das heißt den Grenzwerten

(1417)
$$x_s = \frac{\int^{(\mathfrak{K})} x\varrho(x, y, z)\,dS}{\int^{(\mathfrak{K})} \varrho(x, y, z)\,dS}; \quad y_s = \frac{\int^{(\mathfrak{K})} y\varrho(x, y, z)\,dS}{\int^{(\mathfrak{K})} \varrho(x, y, z)\,dS};$$
$$z_s = \frac{\int^{(\mathfrak{K})} z\varrho(x, y, z)\,dS}{\int^{(\mathfrak{K})} \varrho(x, y, z)\,dS}.$$

Zugleich lehrt die Erfahrung, daß die Abbildung eines materiellen Körpers durch ein Punktsystem der beschriebenen Art bei hinreichend feiner Teilung in vielen Fällen ebensogut zulässig ist wie die Abbildung durch einen lückenlos mit Masse erfüllten gewöhnlichen Körper. Aus diesen Gründen erklärt man den **Schwerpunkt des Körpers** $\mathfrak{K}$ als denjenigen Punkt, welcher die durch die Gleichungen (1417) gegebenen Grenzwerte x_s, y_s, z_s zu Koordinaten hat.

Ganz ähnliche Überlegungen führen zu den folgenden für Flächen- und für Linienstücke geltenden Erklärungen:

1. — Ist ein gewöhnliches einfaches Flächenstück $\mathfrak{F}$ derart mit Masse belegt, daß die Flächendichte der Belegung nach Einführung eines Systems räumlicher Parallelkoordinaten durch eine stetige Funktion $\omega(x, y, z)$ der Koordinaten x, y, z des Punktes dargestellt wird, auf den sie sich bezieht, so versteht man unter dem **Schwerpunkt des Flächenstücks** $\mathfrak{F}$ denjenigen Punkt, dessen Koordinaten x_s, y_s, z_s durch die Gleichungen

(1418)
$$x_s = \frac{\int^{(\mathfrak{F})} x\omega(x, y, z)\,do}{\int^{(\mathfrak{F})} \omega(x, y, z)\,do}; \quad y_s = \frac{\int^{(\mathfrak{F})} y\omega(x, y, z)\,do}{\int^{(\mathfrak{F})} \omega(x, y, z)\,do};$$
$$z_s = \frac{\int^{(\mathfrak{F})} z\omega(x, y, z)\,do}{\int^{(\mathfrak{F})} \omega(x, y, z)\,do}$$

gegeben werden.

2. — Ist ein gewöhnliches einfaches Linienstück $\mathfrak{l}$ derart mit Masse belegt, daß die Liniendichte der Belegung nach Einführung eines Systems räumlicher Parallelkoordinaten durch eine stetige

Funktion $\delta(x, y, z)$ der Koordinaten x, y, z des Punktes dargestellt wird, auf den sie sich bezieht, so versteht man unter dem **Schwerpunkt des Linienstücks** $\mathfrak{l}$ denjenigen Punkt, dessen Koordinaten x_s, y_s, z_s durch die Gleichungen

$$
(1419)\qquad x_s = \frac{\int^{(\mathfrak{l})} x\delta(x, y, z)\,ds}{\int^{(\mathfrak{l})} \delta(x, y, z)\,ds}; \qquad y_s = \frac{\int^{(\mathfrak{l})} y\delta(x, y, z)\,ds}{\int^{(\mathfrak{l})} \delta(x, y, z)\,ds};
$$
$$
z_s = \frac{\int^{(\mathfrak{l})} z\delta(x, y, z)\,ds}{\int^{(\mathfrak{l})} \delta(x, y, z)\,ds}
$$

gegeben werden.

Diese Erklärungen unterscheiden sich ja von der für einen Körper geltenden Erklärung nur dadurch, daß die Raumintegrale durch Flächen-, beziehungsweise Linienintegrale ersetzt sind.

Zusatz 1. — Bei der Rechtfertigung der für den Schwerpunkt eines Körpers gegebenen Erklärung ist es nicht unbedingt erforderlich, die Masse des λ-ten Teiles gerade im Punkte $(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)$ zu vereinigen. Man könnte sich diese Masse vielmehr auch in irgend einem anderen Punkte $(x'_\lambda, y'_\lambda, z'_\lambda)$ vereinigt denken, der dem λ-ten Teil oder seiner Begrenzung angehört. Dann würde allerdings an die Stelle des Quotienten ξ der andere Quotient

$$
\xi' = \frac{\sum_{\lambda=1}^{n} x'_\lambda \varrho(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda) v_\lambda}{\sum_{\lambda=1}^{n} \varrho(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda) v_\lambda}
$$

treten, und Entsprechendes würde für η und ζ gelten. Aber diese Unterschiede verlieren schließlich jeden Einfluß. So wird z. B. die Differenz

$$
\xi' - \xi = \frac{\sum_{\lambda=1}^{n} (x'_\lambda - x_\lambda) \varrho(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda) v_\lambda}{\sum_{\lambda=1}^{n} \varrho(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda) v_\lambda}
$$

unendlich klein, weil die Differenzen $(x'_\lambda - x_\lambda)$ bei unbegrenzter Verfeinerung der Teilung alle gleichmäßig unendlich klein werden. Auch die Quotienten ξ', η', ζ' haben daher die Zahlen x_s, y_s, z_s als Grenzwerte.

Zusatz 2. — Sehr oft spricht man vom Schwerpunkt eines gewöhnlichen Körpers, ohne eine Angabe über die Dichte der ihn erfüllenden Masse hinzuzufügen. In jedem solchen Falle setzt man voraus, daß der Körper homogen, das heißt mit Masse von irgend einer konstanten Dichte, etwa der Dichte Eins, erfüllt sei, und hat unter seinem Schwerpunkt denjenigen Punkt zu verstehen, der sich bei dieser Annahme als Schwerpunkt ergibt. Entsprechendes gilt für gewöhnliche einfache Flächen- und Linienstücke. An die Stelle der allgemeinen Ausdrücke für die Koordinaten x_s, y_s, z_s des Schwerpunktes treten dann wesentlich einfachere Formeln. Bei konstanter Dichte ist nämlich

1. — für einen gewöhnlichen Körper $\mathfrak{K}$, wenn V das Volumen desselben bedeutet,

$$(1420)\quad x_s = \frac{1}{V}\int^{(\mathfrak{K})} x\,dS; \qquad y_s = \frac{1}{V}\int^{(\mathfrak{K})} y\,dS; \qquad z_s = \frac{1}{V}\int^{(\mathfrak{K})} z\,dS,$$

2. — für ein gewöhnliches einfaches Flächenstück $\mathfrak{F}$, wenn J den Inhalt desselben bedeutet,

$$(1421)\quad x_s = \frac{1}{J}\int^{(\mathfrak{F})} x\,do; \qquad y_s = \frac{1}{J}\int^{(\mathfrak{F})} y\,do; \qquad z_s = \frac{1}{J}\int^{(\mathfrak{F})} z\,do,$$

3. — für ein gewöhnliches einfaches Linienstück $\mathfrak{l}$, wenn l die Länge desselben bezeichnet,

$$(1422)\quad x_s = \frac{1}{l}\int^{(\mathfrak{l})} x\,ds; \qquad y_s = \frac{1}{l}\int^{(\mathfrak{l})} y\,ds; \qquad z_s = \frac{1}{l}\int^{(\mathfrak{l})} z\,ds.$$

Zusatz 3. — Bei der Ermittelung eines Schwerpunktes kann man in manchen Fällen Rechenarbeit sparen, indem man die folgenden auf Grund der vorangehenden Erklärungen leicht zu beweisenden Sätze beachtet:

1. — Der Schwerpunkt eines Systems von zwei materiellen Punkten liegt auf der sie verbindenden Strecke und fällt, wenn beide Punkte gleiche Massen haben, mit dem Mittelpunkt dieser Strecke zusammen.

2. — Man bekommt den Schwerpunkt eines gegebenen Systems materieller Punkte auch dann, wenn man diese Punkte irgendwie in zwei Gruppen einteilt, sodann den Schwerpunkt jeder einzelnen

Gruppe ermittelt und, nachdem man in ihm jedesmal die Gesamtmasse der betreffenden Gruppe vereinigt hat, den Schwerpunkt des so erhaltenen Systems von zwei materiellen Punkten bestimmt.

3. — Ein dem vorigen entsprechender Satz gilt auch für die Teilung der Punkte eines Systems materieller Punkte in mehr als zwei Gruppen, sowie für die Zerlegung eines lückenlos mit Masse erfüllten gewöhnlichen Körpers, Flächen- oder Linienstückes in eine beliebige endliche Anzahl gewöhnlicher Teile.

4. — Ist bei einem mit Masse erfüllten gewöhnlichen Körper, Flächen- oder Linienstück sowohl die Gestalt als die Massenverteilung symmetrisch in bezug auf eine Ebene oder eine Achse, so liegt der Schwerpunkt in dieser Ebene, beziehungsweise dieser Achse, und zwar auch dann, wenn die Symmetrie nur eine schiefe ist. Im Fall der Symmetrie in bezug auf einen Punkt ist dieser selbst der Schwerpunkt.

Übungsaufgabe. Den Schwerpunkt eines homogenen Kugeloktanten vom Radius r zu bestimmen.

Lösung: Der Schwerpunkt liegt im Innern des Oktanten und hat von jeder der drei den Oktanten begrenzenden Ebenen den Abstand $\frac{3}{8}r$.

516. Guldinsche Regel. — In einer Ebene mit einem System rechtwinkeliger Koordinaten x, y sei ein gewöhnliches Linienstück durch eine Gleichung $y = f(x)$ gegeben, wobei x ein abgeschlossenes Intervall zu durchlaufen hat und $f(x)$ eine daselbst nirgends negative stetige Funktion bedeutet. Ist dann a die untere und b die obere Grenze dieses Intervalles und J der Inhalt des von dem Linienstück, den durch seine Endpunkte gehenden Parallelen zur y-Achse und dem zwischenliegenden Stück der x-Achse begrenzten Bereiches $\mathfrak{B}$, so wird die Ordinate y_s des Schwerpunktes dieses Bereiches durch die Gleichung

$$y_s = \frac{1}{J}\int^{(\mathfrak{B})} y\,d\sigma = \frac{1}{J}\int_a^b \int_0^{f(x)} y\,dy\,dx$$

gegeben, die nach Ausführung der inneren Integration die Form

$$y_s = \frac{1}{2J}\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

annimmt.

Andererseits gilt für das Volumen V des durch Umdrehung des Bereiches $\mathfrak{B}$ um die x-Achse entstehenden Rotationskörpers nach Nr. **506** die Gleichung

$$(1399) \qquad V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx,$$

in der das nämliche Integral vorkommt wie in der vorangehenden. Indem man dies beachtet, erhält man leicht

$$(1423) \qquad \boldsymbol{V = J \cdot 2\pi y_s}.$$

Nun kann man zur Betrachtung ebener Bereiche aufsteigen, die sich aus endlich vielen Bereichen der soeben betrachteten Art durch Addition und Subtraktion zusammensetzen lassen, ja auch zur Betrachtung ganz beliebiger gewöhnlicher ebener Bereiche, deren innere Punkte alle auf der oberen Seite der x-Achse liegen, und sich leicht überzeugen, daß der Inhalt J eines solchen Bereiches, die Ordinate y_s seines Schwerpunktes und das Volumen V des durch Umdrehung des Bereiches um die x-Achse entstehenden Rotationskörpers immer ebenfalls durch die Gleichung (1423) verbunden sind. Dies ist die sogenannte Guldinsche Regel[1]). Mit Rücksicht darauf, daß $2\pi y_s$ nichts anderes ist als die Länge des Weges, den der Schwerpunkt des ebenen Bereiches bei der Umdrehung zurücklegt, kann man dieser Regel in Worten auch folgende Fassung geben:

Denkt man sich durch Umdrehung eines gewöhnlichen ebenen Bereiches um eine in seiner Ebene liegende aber nicht durch das Innere des Bereiches gehende Achse einen Rotationskörper erzeugt, so ist das Volumen dieses Körpers gleich dem Inhalt des gegebenen, den Meridianschnitt des Körpers darstellenden Bereiches multipliziert mit der Länge des Weges, welchen der Schwerpunkt des Bereiches bei der Drehung beschreibt.

Je nach den Umständen kann man diese Regel bald zur Ermittelung eines Volumens, bald zur Bestimmung eines Schwerpunktes benutzen. Beispielsweise folgt aus dem Umstand, daß der

1) So genannt nach P. Guldin (1577—1643), Centrobaryca, 2. Buch (1640), obwohl sie sich bereits in der aus dem 12. Jahrhundert stammenden ältesten noch erhaltenen Handschrift der Sammlung des Pappus von Alexandria findet, wobei es freilich zweifelhaft ist, ob die betreffende Stelle von Pappus selbst oder von einem Interpolator herrührt. Vgl. Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt etc. ed. Frider. Hultsch, Vol. II, Berlin 1877, Seite 682.

Schwerpunkt einer homogenen Kreisfläche mit ihrem Mittelpunkt zusammenfällt, für das Volumen eines Kreisrings (Fig. 88), der

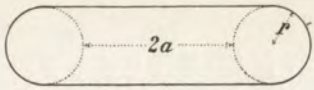


Fig. 88.

durch Drehung einer Kreisfläche vom Radius r erzeugt ist und die innere Weite $2a$ hat, sofort der Ausdruck

$$\pi r^2 \cdot 2\pi(a+r) = 2\pi^2 r^2(a+r).$$

Umgekehrt kann man aus dem bekannten Ausdruck für das Volumen einer Kugel vom Radius r den Abstand a ableiten, in welchem sich der Schwerpunkt einer homogenen Halbkreisfläche, deren Radius ebenfalls gleich r ist, von dem diese Fläche begrenzenden Durchmesser befindet. Es muß nämlich die Gleichung

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2}\pi r^2 \cdot 2\pi a$$

gelten, aus der sich

$$a = \frac{4r}{3\pi}$$

ergibt.

Ähnliche Überlegungen wie bisher lassen sich noch in einem zweiten Fall anstellen. Ist nämlich in einer Ebene mit einem System rechtwinkeliger Koordinaten x, y ein einfaches Linienstück $\mathfrak{l}$ (oder auch eine einfache geschlossene Linie) durch eine Parameterdarstellung

$$x = \varphi(t); \qquad y = \chi(t)$$

gegeben, bei welcher der Parameter t von einem festen Anfangswert a bis zu einem größeren festen Endwert b stetig zuzunehmen hat und $\varphi(t)$, $\chi(t)$ Funktionen bedeuten, deren Ableitungen in dem abgeschlossenen Intervall $(a \cdots b)$ vorhanden und stetig sind, so wird die Ordinate y_s des Schwerpunktes des Linienstücks $\mathfrak{l}$, vorausgesetzt daß l die Länge des Linienstücks bedeutet, durch die Gleichung

$$y_s = \frac{1}{l}\int^{(\mathfrak{l})} y\,ds = \frac{1}{l}\int_a^b \chi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\,dt$$

gegeben. Andererseits gilt aber, wofern das Linienstück $\mathfrak{l}$ keinen auf der unteren Seite der x-Achse liegenden Punkt enthält, für den Inhalt J der von ihm bei einer Umdrehung um die x-Achse erzeugten Rotationsfläche nach Nr. **510** die Gleichung

$$(1408) \qquad J = 2\pi \int_a^b \chi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\, dt,$$

und es ist daher

$$(1424) \qquad J = l \cdot 2\pi y_s.$$

Der Inhalt der Rotationsfläche ist also gleich der Länge ihrer Meridianlinie multipliziert mit der Länge des Weges, welchen der Schwerpunkt der Meridianlinie bei der Drehung beschreibt.

Auch dieser Satz kann in doppelter Weise benutzt werden. Beispielsweise ergibt sich aus ihm für den Inhalt der Oberfläche des vorhin erwähnten Kreisrings der Ausdruck

$$2\pi r \cdot 2\pi(a + r) = 4\pi^2 r(a + r).$$

Ferner findet man durch umgekehrte Anwendung mit Hilfe des bekannten Ausdrucks für den Flächeninhalt einer Kugel leicht, daß der Schwerpunkt einer homogenen Halbkreislinie vom Radius r (Bild eines halbkreisförmigen Drahtes) von dem ihre Endpunkte verbindenden Durchmesser den Abstand $\frac{2r}{\pi}$ hat.

517. Trägheitsmoment. — Als **Trägheitsmoment** eines Systems materieller Punkte in bezug auf eine Achse bezeichnet man die Summe, die man erhält, wenn man die Masse eines jeden Punktes mit dem Quadrat seines Abstandes von der Achse multipliziert und die so erhaltenen Produkte addiert.

Auch dieser Begriff wird in ähnlicher Weise und auf Grund ganz ähnlicher Überlegungen erweitert wie der des Schwerpunktes. Ist nämlich ein mit Masse erfüllter gewöhnlicher Körper $\mathfrak{K}$ gegegeben und ist nach Einführung eines Systems von Parallelkoordinaten x, y, z die Dichte ϱ im Punkte (x, y, z) eine stetige Funktion der Koordinaten dieses Punktes, so versteht man unter dem **Trägheitsmoment des Körpers $\mathfrak{K}$ in bezug auf eine gegebene Achse** $\mathfrak{g}$ das über $\mathfrak{K}$ zu erstreckende Raumintegral

$$\int^{(\mathfrak{K})} r^2 \varrho\, dS$$

des Produktes $r^2 \varrho$, wo r den Abstand des Punktes (x, y, z) von der Achse $\mathfrak{g}$ bedeutet.

Wird über die Dichte eines gewöhnlichen Körpers keine besondere Angabe gemacht, so hat man unter dem Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf eine gegebene Achse dasjenige Trägheitsmoment zu verstehen, welches sich ergibt, wenn man sich den Körper mit Masse von der konstanten Dichte Eins erfüllt denkt.

Entsprechende Erklärungen gelten für gewöhnliche einfache mit Masse belegte Flächen- und Linienstücke.

Der Begriff des Trägheitsmomentes ist in der Dynamik für die Behandlung verschiedener Arten von Aufgaben wichtig, insbesondere aller derjenigen, bei denen es darauf ankommt, die Bewegung eines um eine feste Achse drehbaren starren Körpers (Pendel, Magnetnadel, Schwungrad usw.) rechnend zu verfolgen. Denn die Drehung eines solchen Körpers erfolgt jedesmal gemäß der Gleichung

Trägheitsmoment mal Winkelbeschleunigung
= Drehungsmoment.

Auch in der Elastizitätslehre werden Trägheitsmomente gewöhnlicher ebener Bereiche (Balkenquerschnitte) in bezug auf Achsen, die mit ihnen in der gleichen Ebene liegen, sehr oft gebraucht.

Übungsaufgabe. Den folgenden Satz zu beweisen: Ist M die Masse eines gewöhnlichen materiellen Körpers, sind ferner T und T' seine Trägheitsmomente in bezug auf zwei parallele Achsen $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$, von denen $\mathfrak{g}$ durch den Schwerpunkt des Körpers geht, und ist endlich a der Abstand der Geraden $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, so ist immer

$$T' = T + a^2 M.$$

518. Beispiele. — 1. — Das Trägheitsmoment T_x einer homogenen Stange, die man sich durch eine Strecke von der konstanten Liniendichte δ abgebildet denkt, in bezug auf eine durch den Anfang O der Strecke gehende Achse OX (Fig. 89) zu finden, wenn die Länge l der Strecke und der Winkel α gegeben ist, den sie mit der einen Richtung der Achse einschließt.

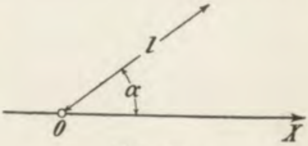


Fig. 89.

Lösung: Es ist

$$T_x = \delta \int_0^l s^2 \sin\alpha^2 ds = \frac{1}{3}\delta l^3 \sin\alpha^2$$

oder

$$T_x = \frac{1}{3} l^2 \sin\alpha^2 M,$$

wenn $M = \delta l$ die Gesamtmasse der Stange bedeutet.

2. — Das Trägheitsmoment T_x einer rechteckigen Platte von den Seitenlängen a, b (Fig. 90) in bezug auf eine durch den Mittelpunkt der Platte gehende Achse zu finden, die zu den Seiten von der Länge a parallel ist.

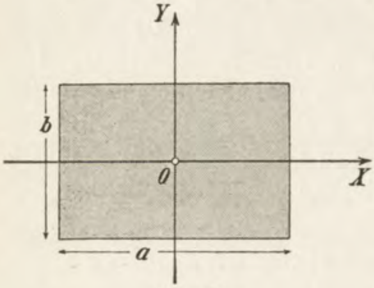


Fig. 90.

Lösung: Nimmt man in der Ebene der Platte ein System rechtwinkeliger Koordinaten x, y so an, daß der Anfang O mit dem Mittelpunkt der Platte zusammenfällt und daß die x-Achse zu der Seite von der Länge a parallel ist, so erhält man leicht

$$T_x = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{12} b^3 dx = \frac{1}{12} ab^3$$

oder

$$T_x = \frac{1}{12} b^2 M,$$

wo $M = ab$ die Masse der Platte bedeutet.

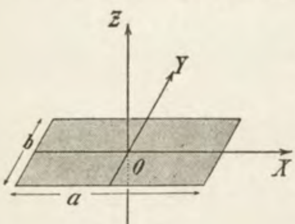


Fig. 91.

3. — Das Trägheitsmoment T_z einer rechteckigen Platte von den Seitenlängen a, b (Fig. 91) in bezug auf eine durch den Mittelpunkt der Platte gehende Achse zu finden, die auf der Ebene der Platte senkrecht steht.

Lösung: Nimmt man in der Ebene der Platte ein System rechtwinkeliger Koordinaten x, y in der gleichen Weise an wie bei der vorigen Aufgabe, so findet man leicht

$$T_z = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (bx^2 + \tfrac{1}{12} b^3)\, dx = \tfrac{1}{12}(a^3 b + a b^3)$$

$$= \tfrac{1}{12} ab(a^2 + b^2) = \tfrac{1}{12}(a^2 + b^2) M,$$

wo wieder $M = ab$ die Masse der Platte bedeutet.

Da das Quadrat des Abstandes eines beliebigen Punktes der Platte von der z-Achse stets der Summe der Quadrate seiner Abstände von der x- und der y-Achse des angenommenen Koordinatensystems gleichkommt, so muß das Trägheitsmoment T_z mit der Summe der aus 2 sich ergebenden Trägheitsmomente in bezug auf die x- und die y-Achse übereinstimmen.

Aus dem gleichen Grunde gilt ganz allgemein die Gleichung

1425) $$\boldsymbol{T_z = T_x + T_y},$$

sobald T_x, T_y die Trägheitsmomente irgend eines gewöhnlichen mit Masse belegten ebenen Bereiches in bezug auf zwei in seiner Ebene liegende zu einander senkrechte Achsen OX, OY bedeuten und T_z das Trägheitsmoment desselben Bereiches in bezug auf die durch den Schnittpunkt der Achsen OX, OY gehende und zu ihnen senkrechte Achse bezeichnet.

4. — Das Trägheitsmoment T_x einer kreisförmigen Platte vom Radius r (Fig. 92) in bezug auf eine Achse OX, die einen Durchmesser enthält, sowie das Trägheitsmoment T_z einer ebensolchen Platte in bezug auf die durch den Mittelpunkt O gehende zur Ebene der Platte senkrechte Achse OZ zu ermitteln.

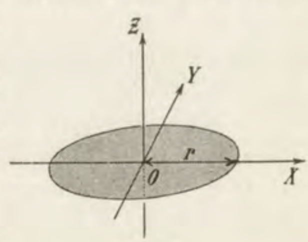


Fig. 92.

Lösung: Nimmt man in der Ebene der Platte ein System von Polarkoordinaten ϱ, φ so an, daß sein Anfang mit O und seine Achse mit OX zusammenfällt, so erhält man leicht

$$T_x = \int_0^{2\pi}\int_0^r (\varrho \sin\varphi)^2 \varrho\, d\varrho\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^r \varrho^3 \sin\varphi^2\, d\varrho\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{4} r^4 \int_0^{2\pi} \sin\varphi^2\, d\varphi = \frac{1}{4}\pi r^4 = \frac{1}{4} r^2 M,$$

wo $M = \pi r^2$ die Masse der Platte bedeutet.

Noch einfacher ergibt sich

$$T_z = \int_0^{2\pi}\int_0^r \varrho^3\, d\varrho\, d\varphi = \frac{1}{2}\pi r^4 = \frac{1}{2} r^2 M = 2T_x$$

in Übereinstimmung mit der zu **3** gemachten Bemerkung.

5. — Die Trägheitsmomente T_x, T_y, T_z einer Ellipsenfläche $\mathfrak{E}$ mit den Halbachsen a und b in bezug auf die drei Achsen OX, OY, OZ (Fig. 93) eines Systems rechtwinkeliger Koordinaten x, y, z zu finden, wenn diese Achsen so liegen, daß die erste die Ellipsenachse von der Länge $2a$ und die zweite die Ellipsenachse von der Länge $2b$ enthält.

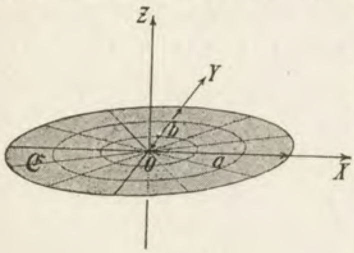


Fig. 93.

Lösung: Man denke sich die Ellipse aus einem Kreise vom Radius a durch Projektion abgeleitet, denke sich die Fläche dieses Kreises durch Radien und konzentrische Kreise in Elemente zerschnitten und sodann durch Projektion dieser Zerschneidung eine entsprechende Zerlegung der Ellipsenfläche $\mathfrak{E}$ durch eine Schar vom Mittelpunkt ausgehender Halbstrahlen und eine Schar ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsen hervorgebracht. Analytisch wird dies dadurch ausgeführt, daß man in der Ebene der Ellipse statt der Koordinaten x, y mittels der Gleichungen

$$x = \varrho\cos\varphi; \qquad y = \frac{b}{a}\varrho\sin\varphi$$

zwei neue Veränderliche ϱ, φ einführt, von denen die erste das Intervall $(0 \cdots a)$ und die zweite das Intervall $(0 \cdots 2\pi)$ zu durchlaufen hat. Dann ergibt sich für den Inhalt $d\sigma$ des zu den Differentialen $d\varrho$, $d\varphi$ gehörenden Elementes von $\mathfrak{E}$ der Ausdruck

$$d\sigma = \frac{b}{a}\varrho\, d\varrho\, d\varphi.$$

Man erhält daher

$$T_x = \int^{(\mathfrak{E})} y^2 d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\frac{b}{a}\varrho\sin\varphi\right)^2 \frac{b}{a}\varrho d\varrho d\varphi$$

$$= \frac{b^3}{a^3}\int_0^{2\pi}\int_0^a \varrho^3 \sin\varphi^2 d\varrho d\varphi = \frac{1}{4}ab^3\int_0^{2\pi}\sin\varphi^2 d\varphi$$

$$= \frac{1}{4}\pi ab^3 = \frac{1}{4}b^2 M,$$

wo $M = \pi ab$ die Masse der Ellipsenfläche bedeutet.

Ganz ähnlich findet man

$$T_y = \int^{(\mathfrak{E})} x^2 d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{b}{a}\varrho^3\cos\varphi^2 d\varrho d\varphi = \frac{1}{4}a^3 b\int_0^{2\pi}\cos\varphi^2 d\varphi$$

$$= \frac{1}{4}\pi a^3 b = \frac{1}{4}a^2 M$$

und bekommt hierauf

$$T_z = \int^{(\mathfrak{E})} (x^2+y^2) d\sigma = T_y + T_x = \frac{1}{4}(a^2+b^2)M.$$

Bei einer Zerschneidung der Ellipsenfläche durch zwei Scharen von Parallellinien zu den Achsen OX und OY würde man schließlich auch zu den eben erhaltenen Formeln gelangen, aber erst nach etwas längerer Rechnung.

6. — Die Trägheitsmomente T_x und T_y eines Kreisabschnitts (Fig. 94) in bezug auf seine Symmetrieachse OX und die dazu senkrechte durch den Mittelpunkt O des Kreises gehende und in dessen Ebene liegende Achse OY zu finden, wenn der Radius r des Kreises und der dem Abschnitt entsprechende Zentriwinkel 2α gegeben sind.

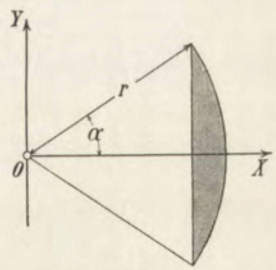


Fig. 94.

Lösung: Man erhält

$$T_x = 2\int_{r\cos\alpha}^{r}\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y^2 dy dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_{r\cos\alpha}^{r}\sqrt{r^2-x^2}^3 dx$$

$$= -\frac{2}{3}\int_\alpha^0 r^4 \sin\varphi^4 d\varphi = \frac{2}{3}r^4\int_0^\alpha \sin\varphi^4 d\varphi$$

$$=\frac{1}{12}r^4\int_0^\alpha [\cos(4\varphi)-4\cos(2\varphi)+3]\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{12}r^4\left[\frac{1}{4}\sin(4\alpha)-2\sin(2\alpha)+3\alpha\right]$$

$$=\frac{1}{12}r^4\left[\frac{1}{2}\sin(2\alpha)\cos(2\alpha)-2\sin(2\alpha)+3\alpha\right]$$

$$=\frac{1}{12}r^4\left[\sin\alpha\cos\alpha(1-2\sin\alpha^2)-4\sin\alpha\cos\alpha+3\alpha\right]$$

$$=\frac{1}{12}r^4\left[3(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)-2\sin\alpha^3\cos\alpha\right].$$

Bedenkt man nun, daß die Masse M des Kreisabschnitts durch die Gleichung

$$M=r^2(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)$$

gegeben wird, so kann man der zuletzt erhaltenen Gleichung auch die Form geben

$$T_x=\frac{1}{4}r^2\left[1-\frac{2}{3}\,\frac{\sin\alpha^3\cos\alpha}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}\right]M.$$

Ähnlich findet man

$$T_y=2\int_{r\cos\alpha}^{r}\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} x^2\,dy\,dx=2\int_{r\cos\alpha}^{r} x^2\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$$=-2\int_\alpha^0 r^4\cos\varphi^2\sin\varphi^2\,d\varphi=\frac{1}{2}r^4\int_0^\alpha [\sin(2\varphi)]^2\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{4}r^4\int_0^\alpha [1-\cos(4\varphi)]\,d\varphi=\frac{1}{4}r^4\left[\alpha-\frac{1}{4}\sin(4\alpha)\right]$$

$$=\frac{1}{4}r^4\,[\alpha-\sin\alpha\cos\alpha(1-2\sin\alpha^2)]$$

oder schließlich

$$T_y=\frac{1}{4}r^2\left[1+2\,\frac{\sin\alpha^3\cos\alpha}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}\right]M.$$

7. — Die Trägheitsmomente T_x und T_y eines **Kreisausschnitts** (Fig. 95) in bezug auf seine Symmetrieachse OX und die dazu senkrechte durch den Mittelpunkt O des Kreises gehende und in dessen Ebene liegende Achse OY zu finden,

wenn der Radius r des Kreises und der dem Ausschnitt entsprechende Zentriwinkel 2α gegeben sind.

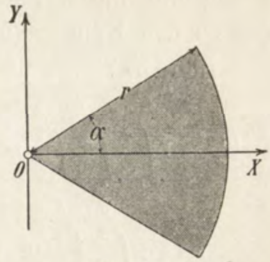


Fig. 95.

Lösung: Man erhält bei Anwendung von Polarkoordinaten

$$
\begin{aligned}
T_x &= 2\int_0^\alpha \int_0^r (\varrho \sin\varphi)^2 \varrho\, d\varrho\, d\varphi \\
&= 2\int_0^\alpha \int_0^r \varrho^3 \sin\varphi^2\, d\varrho\, d\varphi \\
&= \frac{1}{2} r^4 \int_0^\alpha \sin\varphi^2\, d\varphi = \frac{1}{4} r^4 \int_0^\alpha [1 - \cos(2\varphi)]\, d\varphi \\
&= \frac{1}{4} r^4 \left[\alpha - \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right] = \frac{1}{4} r^2 \left(1 - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\alpha}\right) M,
\end{aligned}
$$

wo $M = r^2\alpha$ die Masse des Kreisausschnitts bedeutet.

Ganz ähnlich findet man

$$
\begin{aligned}
T_y &= 2\int_0^\alpha \int_0^r (\varrho\cos\varphi)^2 \varrho\, d\varrho\, d\varphi = 2\int_0^\alpha \int_0^r \varrho^3 \cos\varphi^2\, d\varrho\, d\varphi \\
&= \frac{1}{2} r^4 \int_0^\alpha \cos\varphi^2\, d\varphi = \frac{1}{4} r^4 \int_0^\alpha [1 + \cos(2\varphi)]\, d\varphi \\
&= \frac{1}{4} r^4 \left[\alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right] = \frac{1}{4} r^2 \left(1 + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\alpha}\right) M.
\end{aligned}
$$

8. — Das Trägheitsmoment T_x eines rechtwinkeligen

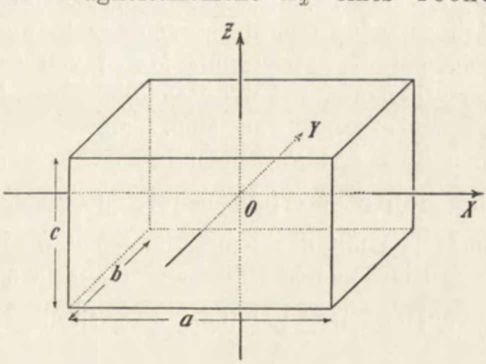


Fig. 96.

Parallelepipedons (Fig. 96) von den Kantenlängen a, b, c in bezug auf die durch den Mittelpunkt gehende Achse zu finden, die zu den Kanten von der Länge a parallel ist.

Lösung: Man findet leicht

$$T_x = 8\int_0^{\frac{c}{2}}\int_0^{\frac{b}{2}}\int_0^{\frac{a}{2}}(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$= 4a\int_0^{\frac{c}{2}}\int_0^{\frac{b}{2}}(y^2+z^2)\,dy\,dz = 4a\int_0^{\frac{c}{2}}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{b}{2}\right)^3+\frac{b}{2}z^2\right]dz$$

$$= \frac{4}{3}a\left[\left(\frac{b}{2}\right)^3\frac{c}{2}+\frac{b}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{12}abc(b^2+c^2)$$

$$= \frac{1}{12}(b^2+c^2)M,$$

wo $M = abc$ die Masse des Parallelepipedons bedeutet.

Anmerkung. Will man von der für ein Parallelepipedon geltenden Gleichung

$$T_x = \frac{1}{12}abc(b^2+c^2)$$

zu der unter 2 gefundenen Gleichung

$$T_x = \frac{1}{12}ab^3$$

für das Trägheitsmoment einer rechteckigen Platte übergehen, so darf man nicht etwa einfach $c=0$ setzen, denn dann würde ja die rechte Seite der zuerst erwähnten Gleichung ebenfalls gleich Null werden. Man muß vielmehr beachten, daß man sich im einen Fall das Parallelepipedon mit Masse von der Raumdichte Eins, im anderen dagegen die Platte mit Masse von der Flächendichte Eins erfüllt denkt und daß Raumdichte und Flächendichte Größen verschiedener Dimension sind. Man kommt dann zum Ziel, wenn man sich das Parallelepipedon zunächst mit Masse von der Raumdichte $\frac{1}{c}$ erfüllt denkt, so daß sich, falls man eine der Seitenflächen mit den Kantenlängen a, b als Grundfläche ansieht, über der Flächeneinheit dieser Grundfläche stets die Masse $\frac{1}{c}c = 1$ befindet. Dann tritt nämlich an die Stelle des Ausdrucks $T_x = \frac{1}{12}abc(b^2+c^2)$ der Ausdruck

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{12}abc(b^2+c^2)=\frac{1}{12}ab(b^2+c^2),$$

und wenn man jetzt c unendlich klein werden läßt, so erhält man in der Tat den früher gefundenen Ausdruck für das Trägheitsmoment einer Platte von der Flächendichte Eins.

9. — Die Trägheitsmomente T_z, T_x eines geraden Kreiszylinders (Fig. 97) vom Radius r und der Höhe h in bezug auf seine geometrische Achse und in bezug auf eine durch seinen Mittelpunkt gehende Achse zu finden, die auf der geometrischen Achse senkrecht steht.

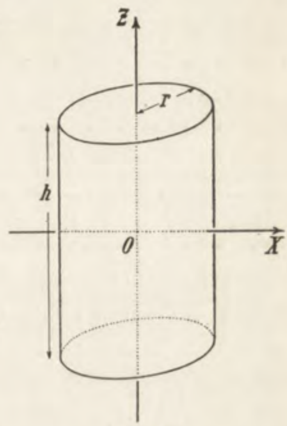


Fig. 97.

Lösung: Es ist

$$T_z=2\int_0^{\frac{h}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^r \varrho^3\,d\varrho\,d\varphi\,dz$$
$$=\frac{1}{2}r^4\cdot 2\pi\cdot\frac{h}{2}=\frac{1}{2}\pi r^4 h=\frac{1}{2}r^2 M,$$

wo $M=\pi r^2 h$ die Masse des Zylinders bedeutet. Ferner ist

$$T_x=2\int_0^{\frac{h}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^r [(\varrho\sin\varphi)^2+z^2]\varrho\,d\varrho\,d\varphi\,dz$$
$$=2\int_0^{\frac{h}{2}}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}r^4\sin\varphi^2+\frac{1}{2}r^2z^2\right)d\varphi\,dz$$
$$=2\pi\int_0^{\frac{h}{2}}\left(\frac{1}{4}r^4+r^2z^2\right)dz=\pi\left(\frac{1}{4}r^4h+\frac{1}{12}r^2h^3\right)$$
$$=\frac{1}{4}\pi r^2h\left(r^2+\frac{1}{3}h^2\right)=\frac{1}{4}\left(r^2+\frac{1}{3}h^2\right)M.$$

10. — Das Trägheitsmoment T einer Vollkugel vom Radius R (Fig. 98) in bezug auf einen Durchmesser zu finden.

Lösung: Indem man die Endpunkte S, N des in Frage kommenden Durchmessers als Süd- und Nordpol ansieht und dann räumliche Polarkoordinaten benutzt, erhält man

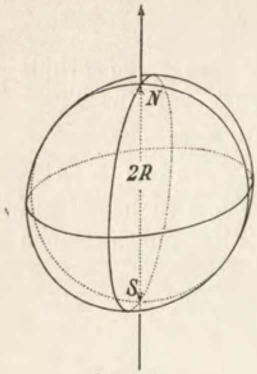


Fig 98.

$$T = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R (r\cos\varphi)^2 r^2 \cos\varphi \, dr\, d\lambda\, d\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^4 \cos\varphi^3 \, dr\, d\lambda\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{5} R^5 \cdot 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi^3 \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{5}\, 2\pi R^5 \int_{-1}^{1} (1-u^2)\, du$$

$$= \frac{8}{15} \pi R^5 = \frac{2}{5} R^2 M,$$

wo $M = \frac{4}{3}\pi R^3$ die Masse der Kugel bedeutet.

11. — Das Trägheitsmoment T eines Kreisrings (Fig. 99) in bezug auf seine geometrische Achse zu finden, wenn der Radius r seines Meridianschnitts und seine innere Weite $2a$ gegeben sind.

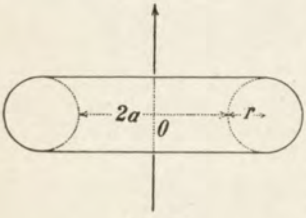


Fig. 99.

Lösung: Man denke sich in einem der kreisförmigen Meridianschnitte des Ringes die Schar der vom Mittelpunkt ausgehenden Halbstrahlen sowie die Schar der konzentrischen Kreise, denke sich durch Umdrehung dieser Linienscharen um die Achse des Ringes eine Schar von Kegeln und eine Schar von Ringflächen erzeugt und benutze zur Zerlegung des Ringes in Elemente diese beiden Flächenscharen und die Schar der durch die Achse gehenden Meridianebenen. Dies kommt analytisch darauf hinaus, zunächst ein System rechtwinkeliger Koordinaten x, y, z anzunehmen, dessen Anfang O mit dem Mittelpunkt und dessen z-Achse mit der Achse des Ringes zusammenfällt, und dann durch die Gleichungen

$$x = (a + r + \varrho\cos\varphi)\cos\lambda$$
$$y = (a + r + \varrho\cos\varphi)\sin\lambda$$
$$z = \varrho\sin\varphi$$

drei neue Veränderliche ϱ, λ, φ einzuführen, von denen die erste das Intervall $(0 \cdots r)$ und jede der beiden anderen das Intervall $(0 \cdots 2\pi)$ zu durchlaufen hat. Man erhält dann für den Inhalt dS des zu den Differentialen $d\varrho$, $d\lambda$, $d\varphi$ gehörenden Raumelements die Gleichung

$$dS = (a + r + \varrho \cos\varphi)\varrho \, d\varrho \, d\lambda \, d\varphi$$

und bekommt daher

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^r (a + r + \varrho\cos\varphi)^3 \varrho \, d\varrho \, d\lambda \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^r [(a+r)^3\varrho + 3(a+r)^2\varrho^2\cos\varphi + 3(a+r)\varrho^3\cos\varphi^2 \\ &\qquad + \varrho^4\cos\varphi^3] \, d\varrho \, d\lambda \, d\varphi \\ &= 2\pi\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}(a+r)^3 r^2 + (a+r)^2 r^3\cos\varphi + \frac{3}{4}(a+r)r^4\cos\varphi^2 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{5}r^5\cos\varphi^3\right] d\varphi . \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\int_0^{2\pi}\cos\varphi \, d\varphi = 0; \qquad \int_0^{2\pi}\cos\varphi^2 \, d\varphi = \pi; \qquad \int_0^{2\pi}\cos\varphi^3 \, d\varphi = 0.$$

Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} T &= 2\pi^2\left[(a+r)^3 r^2 + \frac{3}{4}(a+r)r^4\right] \\ &= 2\pi^2(a+r)r^2\left[(a+r)^2 + \frac{3}{4}r^2\right] = \left[(a+r)^2 + \frac{3}{4}r^2\right] M, \end{aligned}$$

wo $M = 2\pi^2(a+r)r^2$ die Masse des Ringes bedeutet.

519. Potential. — Ein materieller Punkt von der Masse m habe in einem rechtwinkeligen räumlichen Koordinatensystem die Koordinaten ξ, η, ζ und wirke nach Newtons Anziehungsgesetz auf einen zweiten an einer anderen Stelle des Raumes befindlichen materiellen Punkt, der die Masse Eins und die Koordinaten x, y, z hat und als Aufpunkt bezeichnet werden möge. Dann wird die Größe der auf diesen letzteren ausgeübten Anziehung durch den Ausdruck

$$G\frac{m}{r^2}$$

gegeben, wo $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$ den Abstand der Punkte (ξ, η, ζ) und (x, y, z) und G die sogenannte Gravitationskonstante bedeutet (vgl. Nr. **141**, Bd. 1, S. 285). Ferner sind die Richtungskosinus der Anziehung beziehentlich gleich den Quotienten

$$\frac{\xi-x}{r}; \quad \frac{\eta-y}{r}; \quad \frac{\zeta-z}{r}.$$

Folglich haben die Komponenten der Anziehung nach den Koordinatenachsen die Werte

$$G\frac{m(\xi-x)}{r^3}; \quad G\frac{m(\eta-y)}{r^3}; \quad G\frac{m(\zeta-z)}{r^3}.$$

Nun erhält man aber, wenn man die Koordinaten x, y, z des Aufpunktes als veränderlich ansieht, durch partielle Differentiation des Quotienten $\frac{m}{r}$

$$\frac{\partial\frac{m}{r}}{\partial x}=\frac{d\frac{m}{r}}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{m}{r^2}\frac{x-\xi}{r}=\frac{m(\xi-x)}{r^3}$$

und ganz ähnlich

$$\frac{\partial\frac{m}{r}}{\partial y}=\frac{m(\eta-y)}{r^3}; \quad \frac{\partial\frac{m}{r}}{\partial z}=\frac{m(\zeta-z)}{r^3}.$$

Die drei Anziehungskomponenten stimmen also, abgesehen von dem Faktor G, mit den nach den Koordinaten x, y, z des Aufpunktes genommenen partiellen Ableitungen ein und derselben Funktion dieser Koordinaten, nämlich des Quotienten $V=\frac{m}{r}$ überein.

Ähnliches gilt auch in dem Fall, daß ein und derselbe mit der Masse Eins versehene Aufpunkt gleichzeitig von mehreren anderen materiellen Punkten nach Newtons Gesetz angezogen wird. Ist nämlich n die Anzahl dieser anderen Punkte, sind ferner $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2; \cdots \xi_n, \eta_n, \zeta_n$ ihre Koordinaten in einem rechtwinkeligen System, $m_1, m_2, \cdots m_n$ ihre Massen und $r_1, r_2, \cdots r_n$ ihre Abstände vom Aufpunkt und sind endlich x, y, z die Koordinaten des Aufpunktes, so werden die Komponenten der Resultante aller auf diesen letzteren ausgeübten Anziehungen durch die Ausdrücke

$$G\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{m_\lambda(\xi_\lambda-x)}{r_\lambda^3};\qquad G\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{m_\lambda(\eta_\lambda-y)}{r_\lambda^3};\qquad G\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{m_\lambda(\zeta_\lambda-z)}{r_\lambda^3}$$

dargestellt. Auch diese Komponenten lassen sich aber, wie man leicht erkennt, aus einer einzigen Funktion der Koordinaten x, y, z durch partielle Differentiation in bezug auf x, y, z ableiten, und zwar bei Unterdrückung des Faktors G aus der Funktion

$$V=\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{m_\lambda}{r_\lambda}.$$

Dieses Ergebnis läßt sich nun in folgender Weise abermals erweitern: Man denke sich einen gewöhnlichen mit Masse erfüllten Körper $\mathfrak{K}$ gegeben, in welchem die Dichte nach Einführung eines rechtwinkeligen Koordinatensystems eine stetige Funktion $\varrho(\xi, \eta, \zeta)$ der Koordinaten ξ, η, ζ desjenigen Punktes ist, auf den sie sich bezieht. Diesen Körper denke man sich in eine beliebige Anzahl n von meßbaren Teilen zerlegt und zwischen diesen irgend eine Rangordnung hergestellt. Dann gibt es für $\lambda=1, 2, \ldots n$ im Innern oder auf der Grenze des λ-ten Teiles jedesmal einen Punkt $(\xi_\lambda, \eta_\lambda, \zeta_\lambda)$ von solcher Beschaffenheit, daß das Produkt der Dichte $\varrho(\xi_\lambda\ \eta_\lambda, \zeta_\lambda)$ mit dem Volumen v_λ des λ-ten Teiles gleich der Masse dieses Teiles ist, und wenn man jeweils die Masse des λ-ten Teiles in diesem Punkte vereinigt, so erhält man ein System materieller Punkte, dessen Gesamtanziehung auf einen außerhalb $\mathfrak{K}$ liegenden Aufpunkt von der Masse Eins und den Koordinaten x, y, z die Komponenten

$$G\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{(\xi_\lambda-x)\varrho(\xi_\lambda,\eta_\lambda,\zeta_\lambda)v_\lambda}{r_\lambda^3};\qquad G\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{(\eta_\lambda-y)\varrho(\xi_\lambda,\eta_\lambda,\zeta_\lambda)v_\lambda}{r_\lambda^3};$$

$$G\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{(\zeta_\lambda-z)\varrho(\xi_\lambda,\eta_\lambda,\zeta_\lambda)v_\lambda}{r_\lambda^3}$$

hat, wo $r_\lambda=\sqrt{(x-\xi_\lambda)^2+(y-\eta_\lambda)^2+(z-\zeta_\lambda)^2}$ jedesmal den Abstand des Punktes $(\xi_\lambda, \eta_\lambda, \zeta_\lambda)$ vom Aufpunkt (x, y, z) bedeutet.

Diese Komponenten können nun aber dadurch, daß man für den Abstand zweier zu ein und demselben Teil gehörenden Punkte eine hinlänglich kleine positive Konstante als nicht zu überschreitende Grenze vorschreibt, den Grenzwerten

$$G\int^{(\mathfrak{K})}\frac{(\xi-x)\varrho(\xi,\eta,\zeta)}{r^3}\,dS;\qquad G\int^{(\mathfrak{K})}\frac{(\eta-y)\varrho(\xi,\eta,\zeta)}{r^3}\,dS;$$

$$G\int^{(\mathfrak{K})}\frac{(\zeta-z)\varrho(\xi,\eta,\zeta)}{r^3}\,dS$$

beliebig nahe gebracht werden, wo jetzt dS das Volumenelement des Körpers $\mathfrak{K}$, ξ, η, ζ die Koordinaten dieses Elementes und $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$ den Abstand desselben vom Aufpunkt bedeuten. Auch wenn man für $\lambda=1,2,\cdots n$ die Masse des λ-ten Teiles nicht gerade im Punkte $(\xi_\lambda, \eta_\lambda, \zeta_\lambda)$, sondern in irgend einem anderen im Innern oder auf der Grenze des λ-ten Teiles liegenden Punkte vereinigt, bleibt das Endergebnis das nämliche, da man in ähnlicher Weise schließen kann wie in Nr. **515**, Zusatz 1.

So kommt man dazu, dem lückenlos mit Masse erfüllten Körper $\mathfrak{K}$ eine Anziehung auf den am Ort (x, y, z) befindlichen Aufpunkt zuzuschreiben, welche die oben angegebenen Grenzwerte zu Komponenten hat, und kann auch gar nicht anders verfahren, wenn das Newtonsche Gesetz ausnahmslos gültig bleiben und zwischen den Bildern, die man sich von den Dingen macht, kein Widerspruch auftreten soll.

Die in den angegebenen Komponenten zu der Gravitationskonstante G hinzutretenden Faktoren sind aber, wie man leicht bestätigen kann, auch jetzt nichts anderes als die partiellen Ableitungen einer gewissen Funktion der Koordinaten x, y, z des Aufpunktes, nämlich der Funktion

$$V=\int^{(\mathfrak{K})}\frac{\varrho(\xi,\eta,\zeta)\,dS}{r}. \tag{1426}$$

Entsprechendes gilt endlich auch für den Fall eines mit Masse belegten Flächen- oder Linienstücks.

In jedem der bisher erwähnten Fälle bezeichnet man nun diejenige Funktion V, deren partielle Ableitungen nach Multiplikation mit der Gravitationskonstanten G den Komponenten der auf den Aufpunkt ausgeübten Anziehung gleichkommen, als das **Potential** der anziehenden Massen, und wenn man von dem Potential eines gewöhnlichen Körpers, Flächen- oder Linienstücks redet, ohne eine Angabe über die Dichte hinzuzufügen, so hat man darunter immer dasjenige Potential zu verstehen, welches sich ergibt, wenn die Dichte den konstanten Wert Eins hat.

Der so erklärte Begriff des Potentials ist auch für die Elektrizitätslehre von Wichtigkeit und hat dort eine ganz ähnliche Bedeutung. Denn das für die Elektrostatik geltende Coulombsche Gesetz über die Wirkung eines elektrisch geladenen Punktes auf einen anderen geht aus dem Gravitationsgesetz durch einfache Vertauschungen hervor: Man hat ja nur nötig, an die Stelle der Massen der beiden Punkte deren Ladungen und an die Stelle der Gravitationskonstanten eine negative Zahl (im elektrostatischen Maßsystem die Zahl (-1)) zu setzen, da gleichnamige Ladungen einander nicht anziehen, sondern abstoßen.

520. Beispiele. — 1. — Das Potential $V(z)$ einer homogenen Kreisscheibe (Fig. 100) vom Radius R und der Flächendichte ω in bezug auf einen Aufpunkt P zu ermitteln, der auf der Achse der Scheibe im Abstand z vom Mittelpunkt O der Scheibe liegt.

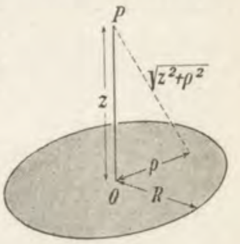


Fig. 100.

Lösung: Führt man in der Ebene der Scheibe ein System von Polarkoordinaten ϱ, φ ein, dessen Anfang mit dem Mittelpunkt der Scheibe zusammenfällt, so erhält man leicht

$$V(z) = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\omega\varrho\, d\varrho\, d\varphi}{\sqrt{z^2+\varrho^2}} = 2\pi\omega(\sqrt{z^2+R^2}-z).$$

Die Anziehung der Scheibe auf eine in P befindliche Masse Eins ist von P gegen O, also der Richtung der wachsenden z entgegen gerichtet. Sie wird daher, wenn G wieder die Gravitationskonstante bedeutet, durch das Produkt

$$-GV'(z) = G2\pi\omega\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

dargestellt, zu welchem man auch direkt durch Ausführung der Integrationen in dem Ausdruck

$$G\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{z\,\omega\,\varrho\, d\varrho\, d\varphi}{\sqrt{z^2+\varrho^2}^3}$$

gelangen könnte.

Rückt der Aufpunkt P dem Mittelpunkt der Scheibe unbegrenzt nahe, so bleiben das Potential und die Anziehung beide endlich und nähern sich beziehentlich den Grenzwerten

$$2\pi\omega R \qquad \text{und} \qquad G2\pi\omega.$$

Dabei verdient hervorgehoben zu werden, daß der Grenzwert $G 2\pi\omega$ der Anziehung von dem Radius R der Scheibe unabhängig ist.

2. — Eine homogene Kugelschale von der Dichte ϱ habe den inneren Radius R_1 und den äußeren Radius R_2. Man soll ihr Potential V in bezug auf einen Aufpunkt P finden, der entweder

A. — im Außenraum der Schale oder

B. — im Innern des von ihr umschlossenen Hohlraums liegt.

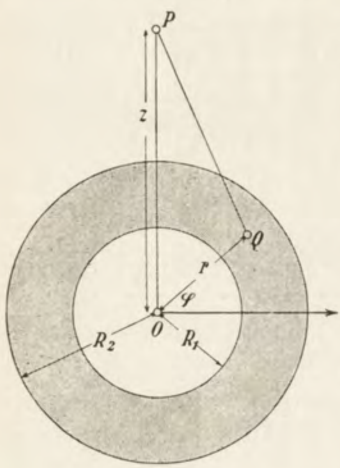


Fig. 101.

Lösung: Man denke sich (Fig. 101) ein System räumlicher Polarkoordinaten r, λ, φ angenommen, dessen Anfang mit dem Mittelpunkt O der Kugelschale zusammenfällt und dessen Achse gegen den Aufpunkt P hin gerichtet ist. (Sollte P mit O zusammenfallen, so kann die Richtung der Achse nach Belieben gewählt werden.) Dann ist der Abstand eines beliebigen innerhalb der Kugelschale liegenden Punktes Q mit den Koordinaten r, λ, φ vom Aufpunkt P aus dem Dreieck QOP leicht zu berechnen. Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$OP = z,$$

so erhält man

$$QP = \sqrt{r^2 + z^2 - 2rz\sin\varphi}\,.$$

Für das gesuchte Potential V ergibt sich daher die Gleichung

$$V = \varrho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{r^2\cos\varphi\,dr\,d\lambda\,d\varphi}{\sqrt{r^2+z^2-2rz\sin\varphi}}$$

$$= \varrho\int_{R_1}^{R_2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{r^2\cos\varphi\,d\lambda\,d\varphi\,dr}{\sqrt{r^2+z^2-2rz\sin\varphi}}$$

$$=2\pi\varrho\int_{R_1}^{R_2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^2\cos\varphi\, d\varphi\, dr}{\sqrt{r^2+z^2-2rz\sin\varphi}}=2\pi\varrho\int_{R_1}^{R_2}\int_{-1}^{1}\frac{r^2\,du\,dr}{\sqrt{r^2+z^2-2rzu}}$$

$$=2\pi\varrho\int_{R_1}^{R_2}\left[-\frac{r}{z}\sqrt{r^2+z^2-2rzu}\right]_{-1}^{1}dr$$

$$=\frac{2\pi\varrho}{z}\int_{R_1}^{R_2}r(\sqrt{r^2+z^2+2rz}-\sqrt{r^2+z^2-2rz})\,dr$$

$$=\frac{2\pi\varrho}{z}\int_{R_1}^{R_2}r(r+z-\sqrt{r^2+z^2-2rz})\,dr.$$

Von nun an sind, da unter $\sqrt{r^2+z^2-2rz}$ stets der positive Wurzelwert zu verstehen ist, zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem $z>R_2$ oder $z<R_1$ ist.

A. — Es sei $z>R_2$, das heißt, der Aufpunkt P liege im Außenraum der gegebenen Schale.

Dann ist jeder innerhalb der Integrationsgrenzen liegende Wert von r kleiner als z und daher

$$\sqrt{r^2+z^2-2rz}=z-r,$$

folglich

$$V=\frac{2\pi\varrho}{z}\int_{R_1}^{R_2}2r^2\,dr$$

oder schließlich

$$V=\frac{1}{z}\frac{4}{3}\pi\varrho(R_2^3-R_1^3)=\frac{M}{z}, \tag{1427}$$

wo $M=\frac{4}{3}\pi\varrho(R_2^3-R_1^3)$ die Gesamtmasse der Kugelschale bedeutet.

Das Potential ist also im vorliegenden Falle genau dasselbe, wie wenn die ganze Masse der Kugelschale in deren Mittelpunkt vereinigt wäre. Folglich ist auch die Anziehung einer homogenen Kugelschale auf einen in ihrem Außenraum befindlichen materiellen Punkt die gleiche wie die eines im Mittelpunkt der Schale befindlichen materiellen Punktes, dessen Masse derjenigen der Kugelschale gleichkommt. Entsprechendes gilt natürlich auch für eine homogene Vollkugel, da nichts im Wege steht, in der vorangehenden Betrachtung $R_1=0$ zu setzen.

B. — Es sei $z<R_1$, das heißt der Aufpunkt P liege

im Innern des von der Kugelschale umschlossenen Hohlraums.

Dann ist jeder innerhalb der Integrationsgrenzen liegende Wert von r größer als z und daher

$$\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz} = r - z,$$

folglich

$$V = \frac{2\pi\varrho}{z}\int_{R_1}^{R_2} r\, 2z\, dr$$

oder schließlich

(1428) $$V = 2\pi\varrho(R_2^2 - R_1^2).$$

Dieser Ausdruck enthält den Abstand z überhaupt nicht mehr. Das Potential einer homogenen Kugelschale in bezug auf einen im Innern ihres Hohlraums liegenden Aufpunkt hat also immer denselben Wert, an welcher Stelle des Hohlraums sich auch der Aufpunkt befinden mag. Folglich sind die Ableitungen dieses Potentials nach den Koordinaten des Aufpunktes in irgend einem rechtwinkeligen System stets sämtlich gleich Null. Eben deswegen übt die Kugelschale auf einen innerhalb ihres Hohlraums liegenden Aufpunkt keine Anziehung aus. Die von ihren einzelnen Teilen ausgehenden Anziehungskräfte heben sich vielmehr immer gerade gegenseitig auf.

Integration vollständiger Differentiale.

521. Integration der Differentiale von Funktionen von zwei Veränderlichen. — Als eine Erweiterung der Aufgabe, das unbestimmte Integral einer für ein Intervall gegebenen und daselbst stetigen Funktion zu finden, erscheint die folgende bei manchen Gelegenheiten sich darbietende

Aufgabe: *Für ein Kontinuum $\mathfrak{B}$ im Gebiet von zwei reellen Veränderlichen x, y sind zwei Funktionen $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ gegeben, deren partielle Ableitungen erster Ordnung daselbst vorhanden und stetig sind. Man soll für das Kontinuum $\mathfrak{B}$ eine dritte Funktion $f(x, y)$ so bestimmen, daß sie daselbst sowohl nach x als nach y differenzierbar ist und daß ihre partiellen Ableitungen $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ beziehentlich mit den gegebenen Funktionen $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ übereinstimmen.*

Man erkennt leicht, daß diese Aufgabe durchaus nicht immer lösbar ist. Wenn es nämlich eine Funktion $f(x, y)$ gibt, welche sie löst, also die Gleichungen

$$f_x(x, y) = f_1(x, y); \qquad f_y(x, y) = f_2(x, y)$$

gleichzeitig befriedigt, so ist infolge dieser Gleichungen

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y}; \qquad f_{yx}(x, y) = \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x}.$$

Nun ist aber bei den gemachten Voraussetzungen notwendig

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y).$$

Also kann die gestellte Aufgabe überhaupt nur dann lösbar sein, wenn die gegebenen Funktionen $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ in $\mathfrak{B}$ überall die Gleichung

$$\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} \tag{1429}$$

erfüllen. Diese notwendige Bedingung heißt die **Integrabilitätsbedingung.**

Eine einfache Überlegung zeigt ferner, daß die gestellte Aufgabe im Fall ihrer Lösbarkeit stets unendlich viele verschiedene Lösungen hat. Denn aus jeder Lösung entsteht durch Addition einer beliebigen Konstanten wieder eine Lösung. Umgekehrt geht aber auch jede Lösung aus jeder anderen durch Addition einer Konstanten hervor. Denn die Differenz zweier verschiedenen Lösungen ist eine Funktion, deren partielle Ableitungen in $\mathfrak{B}$ beide dauernd gleich Null sind, und für Funktionen von zwei Veränderlichen gilt ähnlich wie für Funktionen einer einzigen Veränderlichen der folgende

Lehrsatz: *Wenn eine Funktion $g(x, y)$ von zwei reellen Veränderlichen x, y in einem Kontinuum in bezug auf jede dieser Veränderlichen differenzierbar und jede ihrer partiellen Ableitungen erster Ordnung daselbst dauernd gleich Null ist, so ist die Funktion in dem Kontinuum konstant.*

Der Beweis läßt sich ohne Mühe in ähnlicher Weise erbringen wie der des Hilfssatzes in Nr. **439.**

Wenn das Kontinuum $\mathfrak{B}$ nur einfach zusammenhängt, so ist das Erfülltsein der Integrabilitätsbedingung (1429) für die Lösbarkeit der gestellten Aufgabe nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. Bei einfachem Zusammenhang von $\mathfrak{B}$ bildet nämlich ein ganz in $\mathfrak{B}$ verlaufender geschlossener und sich selbst nicht schneidender Treppenweg $\mathfrak{g}$ jedesmal die vollständige Begrenzung eines Teiles $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{B}$, und man kann daher die über $\mathfrak{g}$ in der Richtung eines positiven Umlaufs um $\mathfrak{T}$ erstreckten Linienintegrale $\int^{(\mathfrak{g})} f_1(x, y)dx$ und $\int^{(\mathfrak{g})} f_2(x, y)dy$ mittels der in Nr. 498 angegebenen Gleichungen (1377) und (1379) in Flächenintegrale verwandeln, die über $\mathfrak{T}$ zu erstrecken sind. So erhält man

$$\int^{(\mathfrak{g})} f_1(x,y)\,dx = -\int^{(\mathfrak{T})} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}\,d\sigma$$

$$\int^{(\mathfrak{g})} f_2(x,y)\,dy = \int^{(\mathfrak{T})} \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x}\,d\sigma$$

und sodann durch Addition

$$\int^{(\mathfrak{g})} [f_1(x,y)\,dx + f_2(x,y)]\,dy = \int^{(\mathfrak{T})} \left[\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}\right] d\sigma\,.$$

Hier ist aber das rechts stehende Flächenintegral gleich Null, sobald die Funktionen $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ in $\mathfrak{B}$ überall die Integrabilitätsbedingung (1429) erfüllen. Also gilt dann für einen geschlossenen sich selbst nicht schneidenden und ganz in $\mathfrak{B}$ verlaufenden Treppenweg $\mathfrak{g}$ stets die Gleichung

$$\int^{(\mathfrak{g})} [f_1(x,y)\,dx + f_2(x,y)\,dy] = 0\,, \tag{1430}$$

und diese Gleichung bleibt auch noch dann bestehen. wenn die Forderung, daß der Treppenweg sich nicht selbst schneiden soll, aufgegeben wird. Denn das Integral kann dann in eine Summe von endlich vielen Integralen aufgelöst werden, die über geschlossene sich selbst nicht schneidende Treppenwege zu erstrecken sind.

Das durch die Gleichung (1430) ausgedrückte Ergebnis ermöglicht nun aber die Herstellung einer der obigen Aufgabe genügenden Funktion. Nimmt man nämlich in $\mathfrak{B}$ eine feste Stelle (x_0, y_0) nach Belieben an und zieht man von ihr einen ganz in $\mathfrak{B}$ verlaufenden Treppenweg $\mathfrak{l}$ bis zu einer beweglichen Stelle (x, y), so ist das über diesen Weg erstreckte Linienintegral

$$\int^{(\mathfrak{l})} [f_1(\xi, \eta)\,d\xi + f_2(\xi, \eta)\,d\eta]\,;$$

solange der Endpunkt von $\mathfrak{l}$ festgehalten wird, nicht von der Gestalt des Integrationsweges $\mathfrak{l}$ abhängig, sondern lediglich durch die Lage des Endpunktes von $\mathfrak{l}$ bestimmt. Denn zieht man vom Punkte (x_0, y_0) zum Punkte (x, y) noch irgend einen anderen in $\mathfrak{B}$ verlaufenden Treppenweg $\mathfrak{l}'$, so bilden der Weg $\mathfrak{l}$ und der in umgekehrter Richtung genommene Weg $\mathfrak{l}'$ zusammen einen geschlossenen Treppenweg, und es ist daher

$$\int^{(\mathfrak{l})}[f_1(\xi, \eta)d\xi + f_2(\xi, \eta)d\eta] - \int^{(\mathfrak{l}')}[f_1(\xi, \eta)d\xi + f_2(\xi, \eta)d\eta] = 0,$$

oder

$$\int^{(\mathfrak{l})}[f_1(\xi, \eta)d\xi + f_2(\xi, \eta)d\eta] = \int^{(\mathfrak{l}')}[f_1(\xi, \eta)d\xi + f_2(\xi, \eta)d\eta].$$

Das in Rede stehende Integral ist also eine Funktion $f(x, y)$ der Koordinaten x, y des Endpunktes von $\mathfrak{l}$.

Diese Funktion ist ferner in bezug auf x differenzierbar. Denn erteilt man der Veränderlichen x einen Zuwachs h, der so nahe bei Null liegt, daß die gerade Verbindungsstrecke der Punkte (x, y) und $(x+h, y)$ ganz zu $\mathfrak{B}$ gehört, so kann man den Funktionswert $f(x+h, y)$ dadurch bilden, daß man das Integral des Ausdrucks $[f_1(\xi, \eta)d\xi + f_2(\xi, \eta)d\eta]$ zuerst über einen von (x_0, y_0) nach (x, y) führenden in $\mathfrak{B}$ verlaufenden Treppenweg und dann von (x, y) bis $(x+h, y)$ über die gerade Verbindungsstrecke $\mathfrak{s}$ dieser beiden Punkte erstreckt. So erhält man

$$f(x+h, y) = f(x, y) + \int^{(\mathfrak{s})}[f_1(\xi, \eta)d\xi + f_2(\xi, \eta)d\eta].$$

Da nun aber längs der Strecke $\mathfrak{s}$ überall $\eta = y$ und $d\eta = 0$ ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x+h, y) - f(x, y) &= \int^{(\mathfrak{s})} f_1(\xi, y)d\xi \\ &= \int_x^{x+h} f_1(\xi, y)d\xi = hf_1(x+\vartheta h, y), \end{aligned}$$

wo $0 < \vartheta < 1$ ist. Man erhält daher

$$\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = f_1(x+\vartheta h, y)$$

und erkennt hieraus sofort, daß die Funktion $f(x, y)$ in der Tat an jeder zu $\mathfrak{B}$ gehörenden Stelle in bezug auf x partiell differenzierbar ist und die Gleichung

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_1(x,y)$$

befriedigt. Ganz ebenso läßt sich zeigen, daß sie auch nach y partiell differenziert werden kann und daß überall

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_2(x,y)$$

ist. Somit ist es, wenn $\mathfrak{B}$ einfach zusammenhängt und die Integrabilitätsbedingung (1429) erfüllt ist, in der Tat möglich, eine Funktion $f(x,y)$ zu bestimmen, welche die oben gestellte Aufgabe löst. Die Summe

$$f_1(x,y)\,dx + f_2(x,y)\,dy$$

stellt daher, sobald die eben angegebenen Voraussetzungen erfüllt sind, das vollständige Differential einer Funktion der Veränderlichen x, y dar. Eben deswegen wird dann die Ermittelung einer den Gleichungen

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_1(x,y); \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_2(x,y)$$

genügenden Funktion kurz als die **Integration eines vollständigen Differentials** einer Funktion von zwei Veränderlichen bezeichnet.

Ist dagegen $\mathfrak{B}$ zweifach zusammenhängend, wie z. B. das Ringgebiet zwischen zwei konzentrischen Kreisen (Fig. 102), so kann man allerdings aus $\mathfrak{B}$ durch einen geeigneten Querschnitt AB ein einfach zusammenhängendes im wesentlichen mit $\mathfrak{B}$ sich deckendes Kontinuum $\mathfrak{B}'$ ableiten und für dieses letztere eine Lösung $f(x,y)$ der vorgelegten Aufgabe herstellen. Aber es kann dann vorkommen, daß die Funktion $f(x,y)$ an zwei Stellen P, Q, die den beiden Ufern des Querschnitts angehören und einander gerade gegenüber liegen, verschiedene Werte annimmt. Trifft dies zu, so gilt dasselbe natürlich auch für jede andere Lösung, da eine solche sich von der Funktion $f(x,y)$ immer nur um eine Konstante unterscheiden kann. Eben deswegen ist es dann unmöglich, für das zweifach zu-

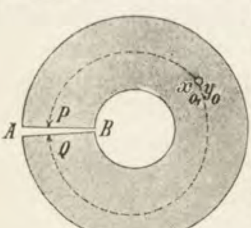


Fig. 102.

sammenhängende Kontinuum $\mathfrak{B}$ eine Funktion zu bestimmen, welche allen Anforderungen der gestellten Aufgabe genügte. Entsprechendes gilt natürlich erst recht, wenn das Kontinuum $\mathfrak{B}$ noch mehr als zweifachen Zusammenhang hat.

Nachdem einmal festgestellt ist, daß die in Rede stehende Aufgabe für jedes einfach zusammenhängende Kontinuum eine Lösung zuläßt, kann man sich natürlich zur Auffindung einer Lösung jedes beliebigen zum Ziele führenden Verfahrens bedienen, und in den praktisch vorkommenden Fällen geht man hierzu in der Tat meistens in anderer Weise vor als bei dem vorangehenden theoretischen Nachweis. In diesen Fällen sind nämlich in der Regel für die Funktionen $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ Darstellungen durch geschlossene analytische Ausdrücke gegeben. Trifft dies zu, so sucht man zunächst eine Funktion herzustellen, die wenigstens der Bedingung genügt, daß ihre partielle Ableitung in bezug auf x mit der Funktion $f_1(x, y)$ übereinstimmt. Zu diesem Zweck integriert man den Ausdruck $f_1(x, y)$ so, wie wenn y das Zeichen einer Konstanten wäre. Ist dies gelungen und hat man dadurch

$$\int f_1(x, y)\,dx = F(x, y)$$

erhalten, wo auch $F(x, y)$ einen geschlossenen analytischen Ausdruck bedeutet, so setzt man jetzt, unter $\varphi(y)$ eine noch zu bestimmende Funktion von y allein verstehend,

$$f(x, y) = F(x, y) + \varphi(y).$$

Dann ist immer

$$f_x(x, y) = F_x(x, y) = f_1(x, y),$$

wie auch die Funktion $\varphi(y)$ beschaffen sein mag. Aber auch die zweite Forderung, daß $f_y(x, y) = f_2(x, y)$ sein soll, läßt sich erfüllen, und zwar durch passende Verfügung über die Funktion $\varphi(y)$. Damit nämlich

$$f_y(x, y) = F_y(x, y) + \varphi'(y) = f_2(x, y)$$

werde, ist nur nötig

$$\varphi(y) = \int [f_2(x, y) - F_y(x, y)]\,dy$$

zu setzen, und dies ist in der Tat zulässig, da die Veränderliche x aus dem Ausdruck, der rechts unter dem Integralzeichen steht, von selbst herausfällt. Durch Differentiation dieses Ausdrucks nach x erhält man nämlich

$$\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} - F_{yx}(x,y) = \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} - F_{xy}(x,y) = \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} = 0\,,$$

so daß die Differenz $[f_2(x, y) - F_y(x, y)]$ nicht von x abhängen kann.

522. Beispiele. — **1.** — Eine Funktion $f(x, y)$ der völlig freien Veränderlichen x, y so zu bestimmen, daß sie die Gleichungen

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6x^2 - 4xy + 2\,; \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2x^2 - 3y^2 + 5$$

befriedigt.

Lösung: Man überzeugt sich mit einem Blick, daß die rechten Seiten der vorstehenden Gleichungen die Integrabilitätsbedingung erfüllen. Also ist die gestellte Aufgabe lösbar, und zwar ergibt sich die Lösung durch den Ansatz

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int (6x^2 - 4xy + 2)\,dx + \varphi(y) \\ &= 2x^3 - 2x^2 y + 2x + \varphi(y)\,, \end{aligned}$$

wo $\varphi(y)$ eine Funktion von y allein bedeutet. Zur Bestimmung derselben dient die Forderung, daß

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2x^2 + \varphi'(y) = -2x^2 - 3y^2 + 5$$

sein soll, woraus sich

$$\varphi'(y) = -3y^2 + 5\,, \qquad \text{also} \qquad \varphi(y) = -y^3 + 5y + \text{Konst.}$$

ergibt, so daß man schließlich

$$f(x,y) = 2x^3 - 2x^2 y + 2x - y^3 + 5y + \text{Konst.}$$

erhält.

2. — Hat man zwei Funktionen $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ für alle möglichen Werte der unbeschränkten Veränderlichen x, y mit einziger Ausnahme des Wertepaares (0, 0) durch die Gleichungen

$$f_1(x,y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}\,; \qquad f_2(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

erklärt, so ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt, da

$$\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

ist. Aber der Bereich, in welchem sich der Punkt x, y bewegea darf, ist jetzt zweifach zusammenhängend. Denkt man sich diesen Bereich durch einen Schnitt, der längs der negativen Hälfte der x-Achse vom Nullpunkt bis ins Unendliche führt, in einen einfach zusammenhängenden Bereich verwandelt, so ist es möglich, für diesen letzteren eine Funktion $f(x, y)$ so zu bestimmen, daß

$$\text{(1431)} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

wird. Beschränkt man nämlich die Veränderliche y zunächst auf positive Werte, so erhält man durch Integration in bezug auf x

$$\int -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx = -\int \frac{d\frac{x}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y},$$

wo unter dem Zeichen arctg der Hauptwert verstanden werden kann, und durch den Ansatz

$$f(x,y) = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$$

wird dann nicht nur die erste, sondern, wie man durch Differentiation nach y leicht erkennt, auch die zweite Bedingung erfüllt, ohne daß es notwendig wäre, rechts noch eine Funktion von y allein hinzuzufügen.

Bei passender Verfügung über die Bedeutung des Zeichens arctg kann man ferner auch für die untere Halbebene

$$f(x,y) = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$$

setzen und zugleich erreichen, daß diese neue Funktion sich längs der positiven Hälfte der x-Achse stetig an die zuvor bestimmte Funktion anschließt. Dazu braucht man nämlich nur festzusetzen, daß für $x > 0$ und $y = 0$ unter $\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ der Wert $\frac{\pi}{2}$ verstanden und daß bei negativem Werte von y für $\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ stets der zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ liegende Wert genommen werden soll. Die so für die zerschnittene Ebene erklärte Funktion $f(x, y)$ wird, wie man sich leicht überzeugt, rechts von der Ordinatenachse auch durch die Gleichung

$$f(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{\pi}{2}$$

gegeben, wo das Zeichen arctg wieder den Hauptwert bedeutet, und erfüllt daher die gestellten Anforderungen auch in allen Punkten der positiven Hälfte der x-Achse.

Am oberen Ufer des Querschnitts hat die gefundene Funktion den Wert $\lim\limits_{y=+0}\left(-\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)$, wo arctg den Hauptwert bedeutet, und da auf dem Querschnitt nur negative Werte von x in Frage kommen, ist dieser Grenzwert gleich $\frac{\pi}{2}$. Für das untere Ufer des Querschnitts ist dagegen $f(x, y) = \lim\limits_{y=-0}\left(-\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)$, wo arctg den zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ liegenden Wert bedeutet. Die Funktion hat also dort den Wert $\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$, und da dieser nicht mit dem zuvor für das obere Ufer gefundenen Wert übereinstimmt, ist es für die unzerschnittene Ebene nicht möglich, eine den Gleichungen (1431) genügende Funktion $f(x, y)$ zu bestimmen.

523. Integration der Differentiale von Funktionen von drei und mehr Veränderlichen. — Sind für ein Kontinuum $\mathfrak{K}$ im Gebiet von drei reellen Veränderlichen x, y, z drei Funktionen $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, $f_3(x, y, z)$ gegeben, deren partielle Ableitungen daselbst vorhanden und stetig sind, so kann es nur dann eine in $\mathfrak{K}$ sowohl nach x, als nach y, als nach z differenzierbare Funktion geben, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in $\mathfrak{K}$ beziehentlich mit den gegebenen Funktionen übereinstimmen, wenn diese letzteren die Bedingungen

$$\begin{gathered}\frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial f_3(x, y, z)}{\partial y}; \qquad \frac{\partial f_3(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial z};\\ \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial x}\end{gathered} \tag{1432}$$

erfüllen. Denn gibt es eine Funktion $f(x, y, z)$ von der verlangten Beschaffenheit, so ist für diese

$$\begin{gathered}f_{yz}(x, y, z) = f_{zy}(x, y, z); \qquad f_{zx}(x, y, z) = f_{xz}(x, y, z);\\ f_{xy}(x, y, z) = f_{yx}(x, y, z),\end{gathered}$$

woraus das Bestehen der angegebenen Gleichungen folgt. Die drei Gleichungen (1432) werden daher als die **Integrabilitätsbedingungen** bezeichnet.

Ist das Kontinuum $\mathfrak{K}$ ein parallelepipedischer Bereich, so ist das Bestehen der Integrabilitätsbedingungen (1432) für die Möglichkeit, eine in $\mathfrak{K}$ den drei Gleichungen

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = f_1(x,y,z); \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = f_2(x,y,z);$$
(1433)
$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = f_3(x,y,z)$$

genügende Funktion zu bestimmen, auch hinreichend.

Um dies nachzuweisen, werde eine gebrochene Linie auch jetzt als ein Treppenweg bezeichnet, wenn sie aus einer endlichen Anzahl aneinander gereihter Strecken besteht, von denen jede zu einer der Koordinatenachsen parallel läuft. Denkt man sich dann in $\mathfrak{K}$ eine feste Stelle (x_0, y_0, z_0) nach Belieben angenommen und sodann von dieser nach einer zweiten zu $\mathfrak{K}$ gehörenden Stelle (x, y, z) irgend einen ganz in $\mathfrak{K}$ verlaufenden Treppenweg $\mathfrak{g}$ gezogen, so ist das über diesen Treppenweg erstreckte Linienintegral

$$J = \int^{(\mathfrak{g})} [f_1(\xi,\eta,\zeta)d\xi + f_2(\xi,\eta,\zeta)d\eta + f_3(\xi,\eta,\zeta)d\zeta]$$

stets gleich dem Linienintegral, welches sich ergibt, wenn man zuerst parallel zur x-Achse vom Punkte (x_0, y_0, z_0) bis zum Punkte (x, y_0, z_0), sodann von diesem parallel zur y-Achse bis zum Punkte (x, y, z_0) und endlich von diesem parallel zur z-Achse bis zum Punkte (x, y, z) integriert. So oft nämlich in $\mathfrak{g}$ eine zur x-Achse parallele Strecke BC (Fig. 103) auf eine zur y-Achse parallele Strecke AB folgt, kann man, wenn D die vierte Ecke des Rechtecks mit den Seiten AB und BC bezeichnet, den aus den Strecken AB und BC zusammengesetzten Teil von $\mathfrak{g}$ durch den Weg ADC ersetzen und dadurch erreichen, daß die zur x-Achse parallele Strecke an die vordere Stelle rückt. Denn das über den Umfang des Rechtecks $ABCD$ im Sinne $ABCD$ erstreckte Linienintegral

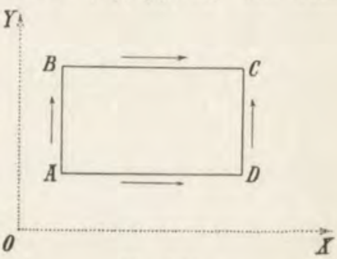


Fig. 103.

$$\int^{(ABCD)} [f_1(\xi,\eta,\zeta)d\xi + f_2(\xi,\eta,\zeta)d\eta + f_3(\xi,\eta,\zeta)d\zeta]$$

kann, da $d\zeta$ auf dem ganzen Integrationsweg gleich Null ist, durch das einfachere Linienintegral $\int^{(ABCD)} [f_1(\xi, \eta, \zeta)d\xi + f_2(\xi, \eta, \zeta)d\eta]$

ersetzt werden, und dieses letztere hat den Wert 0, da es absolut genommen mit dem über die Fläche des Rechtecks $ABCD$ zu erstreckenden Flächenintegral der Differenz $\left[\frac{\partial f_2(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi} - \frac{\partial f_1(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \eta}\right]$ übereinstimmt, die wegen der dritten Integrabilitätsbedingung dauernd gleich Null ist. Also ist wirklich

$$\int^{(ABC)} [f_1(\xi,\eta,\zeta)d\xi + f_2(\xi,\eta,\zeta)d\eta + f_3(\xi,\eta,\zeta)d\zeta]$$
$$= \int^{(ADC)} [f_1(\xi,\eta,\zeta)d\xi + f_2(\xi,\eta,\zeta)d\eta + f_3(\xi,\eta,\zeta)d\zeta],$$

wie behauptet wurde.

Ganz ebenso läßt sich zeigen, daß eine entsprechende Abänderung des Integrationsweges auch dann zulässig ist, wenn eine zur x-Achse parallele Strecke auf eine Strecke folgt, die zur z-Achse parallel ist.

Indem man nun bei dem gegebenen Integrationsweg in der Integrationsrichtung fortschreitend die erste nach den vorangehenden Sätzen mögliche Änderung wirklich ausführt, sodann den abgeänderten Integrationsweg gerade so behandelt und in dieser Weise fortfährt, bis keine der in Rede stehenden Änderungen mehr möglich ist, gelangt man zu einer neuen Form des Linienintegrals J, bei welcher der Integrationsweg zunächst lauter zur x-Achse parallele Strecken und dann nur noch solche Strecken enthält, die zur y- oder zur z-Achse parallel sind. Die Summe der Integrale über die zur x-Achse parallelen Strecken ist aber offenbar gleich dem parallel zur x-Achse vom Punkte (x_0, y_0, z_0) bis zum Punkte (x, y_0, z_0) erstreckten Integral, und das Integral über den Rest des Integrationsweges läßt sich auf Grund ganz ähnlicher Überlegungen in die Summe zweier Integrale verwandeln, von denen das eine parallel zur y-Achse vom Punkte (x, y_0, z_0) bis zum Punkte (x, y, z_0) und das andere parallel zur z-Achse vom Punkte (x, y, z_0) bis zum Punkte (x, y, z) zu erstrecken ist.

Hiernach ist das Integral J, solange der Endpunkt des Integrationsweges $\mathfrak{g}$ festgehalten wird, nicht von der Gestalt dieses Integrationsweges abhängig, sondern durch die Lage des Endpunktes von $\mathfrak{g}$ bereits vollständig bestimmt. Das Integral J ist also eine Funktion $f(x, y, z)$ der Koordinaten x, y, z dieses Endpunktes, und nachdem dies einmal festgestellt, läßt sich ganz ähnlich wie in Nr. **521** zeigen, daß diese Funktion wirklich die Gleichungen (1433) erfüllt und daß jede andere Funktion, welche in $\mathfrak{K}$ den nämlichen Forderungen genügt, aus ihr durch Addition einer Konstanten hervorgeht.

Sind die Integrabilitätsbedingungen (1432) für einen Bereich $\mathfrak{K}$ erfüllt, der aus einem parallelepipedischen Kontinuum dadurch entsteht, daß man alle Punkte eines zweiten solchen Kontinuums hinzufügt, welches mit dem ersten einen Teil gemein hat, aber darüber hinausragt, so ist es immer noch möglich, für das Kontinuum $\mathfrak{K}$ eine den drei Gleichungen (1433) genügende Funktion $f(x, y, z)$ zu bestimmen. Man erhält eine solche einfach dadurch, daß man in dem gemeinsamen Teile der beiden parallelepipedischen Kontinua eine feste Stelle (x_0, y_0, z_0) nach Belieben annimmt und dann für jedes dieser Kontinua eine Funktion der fraglichen Art so bestimmt, daß sie an der Stelle (x_0, y_0, z_0) verschwindet. Den Bereich $\mathfrak{K}$ kann man dann abermals durch Hinzunahme der Punkte eines dritten parallelepipedischen Kontinuums erweitern, das mit $\mathfrak{K}$ einen Teil gemein hat, und in der gleichen Weise fortfahren. Solange dabei der Teil, den das neu hinzutretende Kontinuum mit dem bereits gebildeten Bereiche gemein hat, zusammenhängend ist, also keine Ringbildungen eintreten, bleibt das Bestehen der Integrabilitätsbedingungen (1432) für die Lösbarkeit der Gleichungen (1433) hinreichend. Beim Auftreten von Ringen greifen dagegen ähnliche Überlegungen Platz wie im Fall von zwei unabhängigen Veränderlichen für mehrfach zusammenhängende Bereiche.

Praktisch wird die Bestimmung einer den drei Gleichungen (1433) genügenden Funktion $f(x, y, z)$ in vielen Fällen am einfachsten dadurch ausgeführt, daß man die erste dieser Gleichungen durch den Ansatz

$$f(x, y, z) = \int f_1(x, y, z)\,dx + \varphi(y, z)$$

befriedigt, wo $\varphi(y, z)$ eine Funktion von y und z allein bedeutet, und dann diese letztere so bestimmt, daß auch die zweite und dritte der Gleichungen (1433) erfüllt werden.

Die gewonnenen Ergebnisse können schließlich, wie man leicht erkennt, auch auf Systeme von Funktionen von mehr als drei unabhängigen Veränderlichen ausgedehnt werden.

Einundzwanzigster Abschnitt.

Die Integralsätze von Gauß, Green und Stokes.

524. Satz von Gauß[1]) über die Umwandlung eines Raumintegrals in ein Oberflächenintegral. — In der yz-Ebene eines Systems rechtwinkeliger Koordinaten x, y, z sei ein gewöhnlicher Bereich $\mathfrak{B}$ gegeben, und für einen größeren den Bereich $\mathfrak{B}$ ganz im Innern enthaltenden Bereich seien zwei daselbst stetige Funktionen $f(y, z)$, $g(y, z)$ erklärt, die in $\mathfrak{B}$ die Ungleichung

$$f(y,z) < g(y,z)$$

erfüllen und deren partielle Ableitungen erster Ordnung in $\mathfrak{B}$ vorhanden und stetig sind. Ferner sei im Raum ein Bereich $\mathfrak{K}$ durch die Bestimmung abgegrenzt, daß er einen Punkt (x, y, z) dann und nur dann enthalten soll, wenn der Punkt $(0, y, z)$ zu $\mathfrak{B}$ gehört und zugleich

$$f(y,z) \leqq x \leqq g(y,z)$$

ist. Es ist dies derjenige abgeschlossene räumliche Bereich, welcher von dem durch den Rand von $\mathfrak{B}$ gehenden zur x-Achse parallelen Zylinder und den beiden durch die Gleichungen

$$x = f(y, z); \qquad x = g(y, z)$$

als Bilder des Bereiches $\mathfrak{B}$ dargestellten Flächenstücken $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ begrenzt wird.

Ist dann für den Bereich $\mathfrak{K}$ eine daselbst stetige und in bezug auf x differenzierbare Funktion $U(x, y, z)$ gegeben und ist die partielle Ableitung $U_x(x, y, z)$ in $\mathfrak{K}$ ebenfalls stetig, so erhält man, indem man von den drei zur Berechnung des Raumintegrals $\int^{(\mathfrak{K})} U_x(x, y, z)\,dS$ erforderlichen Integrationen die eine ausführt, die Gleichung

1) Nach C. F. Gauß, Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata, § 3—5, Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores, Vol. II, Gottingae 1813 = Werke, Bd. 5, zweiter Abdruck, Göttingen 1877, S. 5—7. Deutsch v. A. Wangerin in Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 19, Leipzig 1890, S. 53—56.

$$(1434)\qquad \int^{(\mathfrak{K})} U_x(x, y, z)\,dS = \int^{(\mathfrak{B})} \{U[g(y, z), y, z] - U[f(y, z), y, z]\}\,d\sigma.$$

Nun besteht aber nach Nr. **509**, Zusatz 2 und 3, zwischen dem Inhalt $d\sigma$ eines Elementes von $\mathfrak{B}$ (Fig. 104) und dem Inhalt

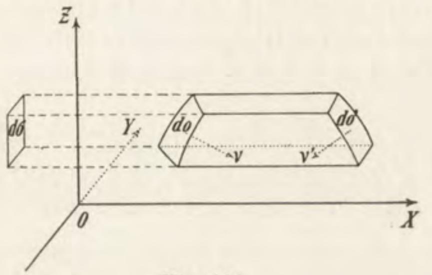


Fig. 104.

do des entsprechenden Elementes des Flächenstücks $\mathfrak{F}$ die Gleichung

$$do = \sqrt{1 + f_y^2 + f_z^2}\,d\sigma \qquad \text{oder} \qquad d\sigma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_y^2 + f_z^2}}\,do.$$

Zugleich ist der Quotient $\frac{1}{\sqrt{1 + f_y^2 + f_z^2}}$ gleich dem Kosinus des Winkels (ν, x), den die eine Richtung ν der auf $\mathfrak{F}$ im Punkte $[f(y, z), y, z]$ errichteten Normale mit der x-Achse bildet, und zwar diejenige Richtung, die gegen die positive Richtung der x-Achse unter einem spitzen Winkel geneigt, also gegen das Innere von $\mathfrak{K}$ gerichtet ist. Dementsprechend stimmt das über $\mathfrak{B}$ erstreckte Integral $\int^{(\mathfrak{B})} U[f(y, z), y, z]\,d\sigma$ mit dem über das Flächenstück $\mathfrak{F}$ zu erstreckenden Flächenintegral $\int^{(\mathfrak{F})} U(x, y, z)\cos(\nu, x)\,do$ überein.

Ganz ähnlich ergibt sich, wenn man bedenkt, daß innerhalb des Flächenstücks $\mathfrak{G}$ die nach dem Innern von $\mathfrak{K}$ weisende Normalenrichtung ν' mit der x-Achse überall einen stumpfen Winkel bildet, die Gleichung

$$\int^{(\mathfrak{B})} U[g(y, z), y, z]\,d\sigma = -\int^{(\mathfrak{G})} U(x, y, z)\cos(\nu', x)\,do'.$$

Da endlich derjenige Teil der Oberfläche von $\mathfrak{K}$, welcher auf dem durch den Rand von $\mathfrak{B}$ gehenden zur x-Achse parallelen Zylinder liegt, aus einer endlichen Anzahl gewöhnlicher Flächenstücke besteht und innerhalb eines jeden derselben die gegen das Innere von $\mathfrak{K}$ gerichtete Flächennormale ν auf der x-Achse senkrecht steht, also $\cos(\nu, x) = 0$ ist, so hat auch das über ein solches Flächenstück erstreckte Integral des Produktes $U(x, y, z) \cos(\nu, x)$ jedesmal den Wert Null. Mit Rücksicht hierauf und auf das Vorangehende kann man der Gleichung (1434), wenn man jetzt überall durch ν die nach innen weisende Normalenrichtung andeutet, die kürzere Form

$$(1435) \qquad {}^{(\mathfrak{K})}\!\!\int U_x(x, y, z)\,dS = -{}^{(\mathfrak{O})}\!\!\int U(x, y, z) \cos(\nu, x)\,do$$

geben, wobei das rechts stehende Integral über die gesamte Oberfläche $\mathfrak{O}$ des Körpers $\mathfrak{K}$ zu erstrecken ist, das heißt die Summe der Integrale über die einzelnen gewöhnlichen Flächenstücke bedeutet, aus denen diese Oberfläche besteht.

Hiermit ist eine Umwandlung des über den Körper $\mathfrak{K}$ erstreckten Raumintegrals der partiellen Ableitung $U_x(x, y, z)$ in ein über die Oberfläche $\mathfrak{O}$ dieses Körpers zu erstreckendes Flächenintegral gewonnen.

Zusatz 1. — Die Gleichung (1435) bleibt auch dann noch bestehen, wenn in einer endlichen Anzahl von Punkten oder Linienstücken, die zum Rande von $\mathfrak{B}$ gehören, oder auch längs dieses ganzen Randes nicht $f(y, z) < g(y, z)$, sondern $f(y, z) = g(y, z)$ ist. Denn der zu den Flächenstücken $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ hinzukommende Teil der Begrenzung von $\mathfrak{K}$ ist auch dann noch in eine endliche Anzahl gewöhnlicher Flächenstücke zerlegbar.

Zusatz 2. — Durch die bisher über die Funktionen $f(y, z)$, $g(y, z)$ gemachten Voraussetzungen war für jedes der beiden Flächenstücke $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ das Vorhandensein einer zur yz-Ebene senkrechten Tangentenebene auch für die Randpunkte ausgeschlossen, so daß diese Flächenstücke den durch den Rand von $\mathfrak{B}$ gehenden zur x-Achse parallelen Zylinder nicht berühren durften. Aber von dieser Einschränkung und von der Annahme, daß die Funktionen $f(y, z)$, $g(y, z)$ auch noch über den Rand von $\mathfrak{B}$ hinaus erklärt seien, kann man sich nachträglich befreien, wenn die bisherigen Voraussetzungen über die Existenz und Stetigkeit der Ableitungen f_y, f_z, g_y, g_z wenigstens für das Innere des Bereiches $\mathfrak{B}$ erfüllt sind und zugleich jedes der Flächenstücke $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, wie es bei den Anwendungen stets zutrifft, ein gewöhnliches ist. Bei dieser letzteren Annahme kann man nämlich das Flächenstück $\mathfrak{F}$ als eindeutig umkehrbares Bild eines gewöhnlichen Bereiches $\mathfrak{E}$ in der Ebene zweier Parameter ansehen und dann von $\mathfrak{E}$ einen längs des Randes sich hinziehenden meßbaren Bereich, dessen Breite nirgends bis auf Null heruntergeht, so abschneiden, daß der Inhalt des entsprechenden Teiles von $\mathfrak{F}$ unter einer willkürlich vorgeschriebenen positiven Konstanten liegt. Die Projektion dieses Flächenteiles auf die yz-Ebene ist dann ein meßbarer am Rande von $\mathfrak{B}$ sich hinziehender Bereich, dessen Breite ebenfalls nirgends gleich Null ist. Dadurch, daß man von $\mathfrak{B}$ einen solchen Bereich abschneidet, ist es also möglich, einen ganz innerhalb $\mathfrak{B}$ liegenden abgeschlossenen meßbaren Bereich $\mathfrak{P}$ so zu bestimmen, daß der Inhalt des diesem Bereiche entsprechenden Teiles von $\mathfrak{F}$ sich von dem Gesamtinhalt des Flächenstücks $\mathfrak{F}$ um beliebig wenig unterscheidet. Zugleich läßt sich durch passende Wahl des Bereiches $\mathfrak{P}$ erreichen, daß bei dem Flächenstück $\mathfrak{G}$ genau entsprechendes stattfindet. Endlich kann man durch hinreichende Annäherung der Grenze von $\mathfrak{P}$ an die von $\mathfrak{B}$ bewirken, daß das Raumintegral der Funktion $U_x(x, y, z)$, erstreckt über den zu $\mathfrak{P}$ gehörenden Teil des Körpers $\mathfrak{K}$ um beliebig wenig von dem über den ganzen Körper $\mathfrak{K}$ erstreckten Integral der gleichen Funktion abweicht.

Daraus folgt, daß die beiden Seiten der Gleichung (1435) auch unter den gegenwärtigen Voraussetzungen nicht voneinander verschieden sein können. Denn für jeden Teil des Körpers $\mathfrak{K}$, der zu einem ganz innerhalb $\mathfrak{B}$ liegenden abgeschlossenen geradlinig begrenzten Bereiche $\mathfrak{P}$ gehört gilt die der Gleichung (1435) entsprechende Gleichung, und durch passende Wahl von $\mathfrak{P}$ kann man die beiden Seiten dieser entsprechenden Gleichung den beiden Seiten der Gleichung (1435) beliebig nahe bringen.

Zusatz 3. — Die Gleichung (1435) gilt auch für jeden räumlichen Bereich $\mathfrak{K}$, der in eine endliche Anzahl aneinander stoßender Bereiche der bisher betrachteten Art zerlegt werden kann, vorausgesetzt daß die Funktion $U(x, y, z)$ in $\mathfrak{K}$ dieselben Bedingungen wie bisher erfüllt.

Denn bei der Addition der über die Oberflächen der einzelnen Teilbereiche erstreckten Flächenintegrale des Produktes $U(x, y, z)\cos(\nu, x)$ wird jedes Integral, welches über ein im Innern von $\mathfrak{K}$ liegendes Flächenstück zu erstrecken ist, wofern es nicht schon von selbst den Wert 0 hat, durch ein entgegengesetzt gleiches Integral aufgehoben, indem unter der Richtung ν das eine Mal die eine und das andere Mal die andere Richtung der Flächennormale zu verstehen ist. Dies hat aber zur Folge, daß nur das Integral über die äußere Begrenzung von $\mathfrak{K}$ übrig bleibt.

Zusatz 4. — Wenn für einen räumlichen Bereich $\mathfrak{K}$ und eine Funktion $U(x, y, z)$ diejenigen Voraussetzungen erfüllt sind, die sich aus den bisherigen Annahmen durch zyklische Vertauschungen ergeben, so gilt für diesen Bereich die Gleichung

$$(1436) \qquad {}^{(\mathfrak{K})}\!\!\int U_y(x, y, z)\,dS = -{}^{(\mathfrak{O})}\!\!\int U(x, y, z)\cos(\nu, y)\,do,$$

beziehungsweise die Gleichung

$$(1437) \qquad {}^{(\mathfrak{K})}\!\!\int U_z(x, y, z)\,dS = -{}^{(\mathfrak{O})}\!\!\int U(x, y, z)\cos(\nu, z)\,do.$$

525. Satz von Green[1]. — Nach Annahme eines Systems rechtwinkeliger räumlicher Koordinaten x, y, z sei ein gewöhnlicher Körper $\mathfrak{K}$ von solcher Beschaffenheit gegeben, daß das über ihn zu erstreckende Integral einer in der Form einer stetigen partiellen Ableitung gegebenen Funktion stets nach dem Satz von Gauß (Nr. **524**) umgeformt werden darf, einerlei ob die gegebene partielle Ableitung durch eine Differentiation nach x oder nach y oder nach z zu bilden ist. Ferner seien für einen den Körper $\mathfrak{K}$ ganz im Innern enthaltenden Bereich zwei Funktionen U, V der Koordinaten x, y, z gegeben, deren partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung in $\mathfrak{K}$ überall vorhanden und stetig sind. Dann gilt bei Anwendung der üblichen Bezeichnung partieller Ableitungen durch angehängte Indices die folgende in der mathematischen Physik viel gebrauchte und gewöhnlich als **Greenscher Satz** bezeichnete Formel:

---

1) Nach G. Green, An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism, Nottingham 1828, Art. 3 = Mathematical papers, Paris 1903, S. 23 = Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 44, Berlin 1852, S. 360. In deutscher Sprache ist die Abhandlung herausgegeben von A. J. v. Oettingen und A. Wangerin in Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 61, Leipzig 1895.

$$(1438)\quad \begin{cases} \overset{(\mathfrak{K})}{\int}(U_xV_x+U_yV_y+U_zV_z)dS \\ \qquad\qquad + \overset{(\mathfrak{K})}{\int} U(V_{xx}+V_{yy}+V_{zz})dS \\ = -\overset{(\mathfrak{O})}{\int} U[V_x\cos(\nu,x)+V_y\cos(\nu,y) \\ \qquad\qquad + V_z\cos(\nu,z)]do. \end{cases}$$

Dabei ist durch den Buchstaben ν die nach dem Innern des Körpers $\mathfrak{K}$ weisende Normale der Oberfläche $\mathfrak{O}$ dieses Körpers angedeutet. dS bedeutet das Volumenelement des Körpers $\mathfrak{K}$ und do das Flächenelement seiner Oberfläche.

Der Beweis ergibt sich leicht, wenn man bedenkt, daß die Summen

$$U_xV_x+UV_{xx};\qquad U_yV_y+UV_{yy};\qquad U_zV_z+UV_{zz}$$

der Reihe nach mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial(UV_x)}{\partial x};\qquad \frac{\partial(UV_y)}{\partial y};\qquad \frac{\partial(UV_z)}{\partial z}$$

übereinstimmen. Man erhält dann nämlich mit Hilfe des Satzes von Gauß (Nr. 524) die Gleichungen

$$\overset{(\mathfrak{K})}{\int}(U_xV_x+UV_{xx})dS = \overset{(\mathfrak{K})}{\int}\frac{\partial(UV_x)}{\partial x}dS = -\overset{(\mathfrak{O})}{\int}UV_x\cos(\nu,x)do$$

$$\overset{(\mathfrak{K})}{\int}(U_yV_y+UV_{yy})dS = \overset{(\mathfrak{K})}{\int}\frac{\partial(UV_y)}{\partial y}dS = -\overset{(\mathfrak{O})}{\int}UV_y\cos(\nu,y)do$$

$$\overset{(\mathfrak{K})}{\int}(U_zV_z+UV_{zz})dS = \overset{(\mathfrak{K})}{\int}\frac{\partial(UV_z)}{\partial z}dS = -\overset{(\mathfrak{O})}{\int}UV_z\cos(\nu,z)do,$$

aus denen durch Addition sofort die zu beweisende Gleichung (1438) hervorgeht.

Denkt man sich von einem beliebigen nicht in einer Kante liegenden Punkte der Oberfläche $\mathfrak{O}$ auf der in diesem Punkte errichteten nach dem Innern von $\mathfrak{K}$ weisenden Normale eine unendlich kleine Strecke h abgetragen und versteht man unter V und V' die Werte, welche die Funktion V am Anfang und am Ende dieser Strecke annimmt, so hat der Quotient $\frac{V'-V}{h}$, wie man sich leicht überzeugt, die Eigenschaft, bei verschwindendem h dem Grenzwert

$$V_x\cos(\nu,x)+V_y\cos(\nu,y)+V_z\cos(\nu,z)$$

zuzustreben. Eben deswegen ist es berechtigt, diese letztere Summe durch das einfache Zeichen $\frac{\partial V}{\partial n}$ darzustellen, wobei das Zeichen ∂n auf ein Fortschreiten in der Richtung der inneren Normale hinweisen soll. Bedient man sich dieser Abkürzung und setzt man zugleich, wie vieflach üblfch,

$$V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = \Delta V,$$

so erhält die Gleichung (1438) die kürzere Form

$$(1438^{a}) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int^{(\mathfrak{K})}(U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z)dS + \int^{(\mathfrak{K})} U\Delta V dS \\ &\qquad = -\int^{(\mathfrak{O})} U \frac{\partial V}{\partial n} do. \end{aligned} \right.$$

Neben dieser Gleichung wird in der mathematischen Physik auch diejenige Gleichung viel gebraucht, zu der man gelangt, wenn man U und V vertauscht und die so sich ergebende mit der vorstehenden Gleichung durch Subtraktion verbindet. Es ist dies die besonders einfache Formel

$$(1439) \qquad \int^{(\mathfrak{K})}(U\Delta V - V\Delta U)dS = \int^{(\mathfrak{O})}\left(V\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial V}{\partial n}\right)do.$$

526. Vektoren und Vektorfelder. — Bei mathematisch physikalischen Betrachtungen kann man einen Zustand, der zu einer gegebenen Zeit an einem gegebenen Punkte herrscht, sehr oft durch die Größe und die Richtung einer von diesem Punkte ausgehenden Strecke eindeutig kennzeichnen. Beispielsweise gilt dies für eine an dem gegebenen Ort durch irgend welche Ursachen hervorgerufene mechanische, elektrische oder magnetische Kraft, für die Geschwindigkeit einer dort vorhandenen Strömung und für ein dort wirksames Temperaturgefäll. Es ist üblich, in einem solchen Falle diejenige gerichtete Strecke, durch die man sich den am Anfang der Strecke herrschenden Zustand dargestellt denkt, als einen **Vektor** zu bezeichnen. Und wenn ein in der angegebenen Weise darstellbarer Zustand in einem gegebenen Augenblick nicht nur an einer einzelnen Stelle, sondern an allen Punkten eines räumlichen Bereiches herrscht, so nennt man diesen Bereich, wofern man sich jedem Punkte desselben die von ihm ausgehende den dortigen Zustand kennzeichnende Strecke zugeordnet denkt, ein **Vektorfeld**. Man spricht demgemäß von Gravitationsfeldern, elektrischen und magnetischen Kraftfeldern, Geschwindigkeitsfeldern usw. Bei der rein mathematischen Betrachtung von Vektoren und Vektorfeldern sieht man natürlich von deren physikalischer Bedeutung gänzlich ab. Man versteht demgemäß in der reinen Mathematik unter einem **Vektor** einfach eine gerichtete (orientierte) Strecke und unter einem **Vektorfeld** einen räumlichen Bereich, in welchem jedem Punkte ein von ihm ausgehender Vektor zugeordnet ist.

Denkt man sich ein rechtwinkeliges räumliches Koordinatensystem so angenommen, daß sein Achsenkreuz in bezug auf ein gegebenes Vektorfeld fest ist, so sind die Komponenten des von einem beliebigen Punkte dieses Feldes ausgehenden Vektors Funktionen der Koordinaten des Ausgangspunktes. Umgekehrt kann man nach Annahme eines Systems rechtwinkeliger räumlicher Koordinaten ein Vektorfeld analytisch dadurch geben, daß man für einen räumlichen Bereich $\mathfrak{K}$ in bestimmter Reihenfolge irgend drei Funktionen der Koordinaten erklärt und dann einem beliebigen Punkte P von $\mathfrak{K}$ jedesmal diejenige Strecke zuordnet, welche die zu P gehörenden Werte dieser Funktionen zu Komponenten hat. Bei dieser Art der Bestimmung eines Vektorfeldes bezeichnet man den Inbegriff der drei gegebenen der Reihe nach die Vektorkomponenten darstellenden Funktionen der Koordinaten des Ausgangspunktes auch als **eine Vektorfunktion** dieser Koordinaten. Es ist vielfach üblich, zur Bezeichnung eines Vektors und ebenso auch einer Vektorfunktion einen Frakturbuchstaben zu verwenden, z. B. das Zeichen $\mathfrak{a}$, und dann die drei Komponenten nach den Koordinatenachsen durch das gleiche Zeichen mit je einem auf die betreffende Achse hinweisenden Index darzustellen, also z. B. durch $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{a}_z$. Diese bequeme Art der Bezeichnung soll auch im nachfolgenden zur Anwendung kommen.

Im Gegensatz zu den Vektoren heißen solche meßbaren Größen, denen ihrer physikalischen Bedeutung nach nur ein Zahlenwert, aber keine Richtung zukommt, **skalare Größen,** weil zu ihrer Messung, wenigstens dem Begriffe nach, immer nur die Ablesung an einer einzigen Skala nötig ist. Beispiele sind die Dichte und die Temperatur eines gegebenen Körpers in einem gegebenen Punkte.

527. Rotoren. — Wenn ein starrer Körper sich in bezug auf eine starre räumliche und als ruhend geltende Figur um eine mit dieser letzteren fest verbundenen Achse gleichförmig dreht, so kann man seine Bewegung dadurch kennzeichnen, daß man

Erstens die nicht orientierte Gerade angibt, um welche die Drehung erfolgt,

Zweitens durch einen diese Gerade umschlingenden Pfeil (Fig. 105) die Richtung der Drehung andeutet und

Drittens den Zahlenwert der Winkelgeschwindigkeit hinzufügt.

Diese drei Angaben können aber in eine einzige zusammengezogen werden, sobald man eine bestimmte Strecke als Einheit der Länge gewählt und den positiven Drehungssinn im Raume irgendwie festgelegt hat. Es genügt dann nämlich, einen in der Drehungsachse liegenden Vektor anzugeben, dessen Länge den gleichen Zahlenwert hat wie die Winkelgeschwindigkeit und dessen Richtung zur Richtung der Drehung so liegt, wie bei der angenommenen Festsetzung die positive Normalenrichtung einer Ebene zu deren positiver Drehungsrichtung liegen muß. Denn aus der Angabe eines solchen Vektors lassen sich die Lage der Drehungsachse, die Richtung der Drehung und die Größe der Winkelgeschwindigkeit sofort wieder ablesen.


Fig. 105.

Bei dieser Darstellung einer Drehung darf der Anfangspunkt des darstellenden Vektors in der Drehungsachse ganz nach Belieben angenommen werden. Gleichlange und gleichgerichtete in der Drehungsachse liegende Vektoren sind also hierbei als gleichbedeutend anzusehen. Von wesentlicher Bedeutung ist aber die angenommene Entscheidung über den positiven Drehungssinn im Raum. Denn trifft man statt ihrer die entgegengesetzte Festsetzung, so ist die nämliche Drehung durch denjenigen Vektor darzustellen, der sich aus dem vorigen Drehungsvektor durch Umkehrung der Richtung ergibt.

Es ist vielfach üblich, einen Vektor, dessen Erklärung auf einer Festsetzung über den positiven Drehungssinn im Raume beruht und dessen Richtung umgekehrt werden muß, wenn man statt dieser Festsetzung die entgegengesetzte wählt, als einen **Rotor** zu bezeichnen.

528. Rotation einer Vektorfunktion. — Nach Annahme eines Systems rechtwinkeliger räumlicher Koordinaten x, y, z sei für einen dreifach ausgedehnten räumlichen Bereich $\mathfrak{K}$ eine Vektorfunktion $\mathfrak{v}$ derart erklärt, daß jede ihrer Komponenten $\mathfrak{v}_x$, $\mathfrak{v}_y$, $\mathfrak{v}_z$

im Innern von $\mathfrak{K}$ überall sowohl nach x als nach y als nach z partiell differenzierbar und daß jede durch eine solche Differentiation entstehende Ableitung im Innern von $\mathfrak{K}$ stetig ist. Dann kann man für das Innere von $\mathfrak{K}$ eine zweite Vektorfunktion durch die Festsetzung erklären, daß ihre Komponenten überall durch die Ausdrücke

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z}; \qquad \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x}; \qquad \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}$$

gegeben sein sollen, die man mit einer leicht verständlichen Abkürzung als die Unterdeterminanten zweiten Grades des Systems

$$\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathfrak{v}_x & \mathfrak{v}_y & \mathfrak{v}_z \end{matrix}$$

bezeichnen darf.

Diese zweite Vektorfunktion heißt die **Rotation** der ursprünglich gegebenen Vektorfunktion $\mathfrak{v}$ und wird gewöhnlich durch $\mathbf{rot}\,\mathfrak{v}$ bezeichnet[1]. Zur Darstellung ihrer Komponenten nach den Koordinatenachsen pflegt man die Zeichen $\mathrm{rot}_x \mathfrak{v}$, $\mathrm{rot}_y \mathfrak{v}$, $\mathrm{rot}_z \mathfrak{v}$ zu benutzen, so daß die Gleichungen gelten

$$(1440) \quad \begin{cases} \mathbf{rot}_x \mathfrak{v} = \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z}; \qquad \mathbf{rot}_y \mathfrak{v} = \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x}; \\ \mathbf{rot}_z \mathfrak{v} = \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}. \end{cases}$$

Die Rotation einer den angegebenen Voraussetzungen genügenden Vektorfunktion $\mathfrak{v}$ ist, obwohl ihre Erklärung zunächst auf die Annahme eines bestimmten Koordinatensystems gegründet wurde, doch im wesentlichen von der Wahl dieses Koordinatensystems unabhängig, solange nur die Längeneinheit ungeändert gelassen und als positiver Drehungssinn im Raume derjenige beibehalten wird, in welchem die Achsen des zunächst angenommenen Koordinatensystems aufeinander folgen. Denn sind

$$(1441) \quad \begin{aligned} x &= a + \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta \\ y &= b + \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta \\ z &= c + \alpha_3 \xi + \beta_3 \eta + \gamma_3 \zeta \end{aligned}$$

die Gleichungen, welche den Übergang von dem System der ursprünglichen Koordinaten x, y, z zu einem neuen System recht-

1) Daneben ist auch das Zeichen curl $\mathfrak{v}$ gebräuchlich.

winkeliger Koordinaten ξ, η, ζ mit der gleichen Längeneinheit und einem kongruenten Achsenkreuz vermitteln (vgl. Nr. **131**), so sind die Komponenten $\mathfrak{v}_\xi, \mathfrak{v}_\eta, \mathfrak{v}_\zeta$ des Vektors $\mathfrak{v}$ nach den neuen Koordinatenachsen und die Komponenten $\mathfrak{v}_x, \mathfrak{v}_y, \mathfrak{v}_z$ desselben Vektors nach den alten Achsen durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_\xi &= \alpha_1 \mathfrak{v}_x + \alpha_2 \mathfrak{v}_y + \alpha_3 \mathfrak{v}_z \\ \mathfrak{v}_\eta &= \beta_1 \mathfrak{v}_x + \beta_2 \mathfrak{v}_y + \beta_3 \mathfrak{v}_z \\ \mathfrak{v}_\zeta &= \gamma_1 \mathfrak{v}_x + \gamma_2 \mathfrak{v}_y + \gamma_3 \mathfrak{v}_z \end{aligned} \tag{1442}$$

verbunden. Demgemäß und mit Rücksicht auf die Gleichungen (1441) läßt sich der Minuend in der Differenz $\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_\zeta}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathfrak{v}_\eta}{\partial \zeta}\right)$, die bei Zugrundelegung der neuen Koordinatenachsen als ξ-Komponente der Rotation der Vektorfunktion $\mathfrak{v}$ erscheint, in folgender Weise umgestalten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{v}_\zeta}{\partial \eta} &= \gamma_1 \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial \eta} + \gamma_2 \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial \eta} + \gamma_3 \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial \eta} \\ &= \gamma_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} \beta_1 + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} \beta_2 + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} \beta_3 \right) + \gamma_2 \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} \beta_1 + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y} \beta_2 + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z} \beta_3 \right) \\ &\quad + \gamma_3 \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x} \beta_1 + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} \beta_2 + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z} \beta_3 \right). \end{aligned}$$

Ganz ähnlich findet sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{v}_\eta}{\partial \zeta} &= \beta_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} \gamma_1 + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} \gamma_2 + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} \gamma_3 \right) + \beta_2 \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} \gamma_1 + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y} \gamma_2 + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z} \gamma_3 \right) \\ &\quad + \beta_3 \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x} \gamma_1 + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} \gamma_2 + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z} \gamma_3 \right). \end{aligned}$$

Folglich ist, wie sich nach einfachen Kürzungen und Zusammenziehungen ergibt,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{v}_\zeta}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathfrak{v}_\eta}{\partial \zeta} &= (\beta_2 \gamma_3 - \gamma_2 \beta_3) \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z} \right) \\ &\quad + (\beta_3 \gamma_1 - \gamma_3 \beta_1) \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x} \right) + (\beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2) \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Da nun wegen der Kongruenz der Achsenkreuze des alten und des neuen Systems

$$\beta_2 \gamma_3 - \gamma_2 \beta_3 = \alpha_1; \quad \beta_3 \gamma_1 - \gamma_3 \beta_1 = \alpha_2; \quad \beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2 = \alpha_3 \tag{1443}$$

ist (vgl. Nr. **132**), so kann man der vorangehenden Gleichung auch die Form

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_\zeta}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathfrak{v}_\eta}{\partial \zeta} = \alpha_1 \operatorname{rot}_x \mathfrak{v} + \alpha_2 \operatorname{rot}_y \mathfrak{v} + \alpha_3 \operatorname{rot}_z \mathfrak{v}$$

geben, und dieser Gleichung kann man, wenn man die vorangehenden Betrachtungen unter zyklischer Vertauschung der griechischen Buchstaben wiederholt, noch die Gleichungen

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_\xi}{\partial \zeta} - \frac{\partial \mathfrak{v}_\zeta}{\partial \xi} = \beta_1 \operatorname{rot}_x \mathfrak{v} + \beta_2 \operatorname{rot}_y \mathfrak{v} + \beta_3 \operatorname{rot}_z \mathfrak{v}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial \mathfrak{v}_\xi}{\partial \eta} = \gamma_1 \operatorname{rot}_x \mathfrak{v} + \gamma_2 \operatorname{rot}_y \mathfrak{v} + \gamma_3 \operatorname{rot}_z \mathfrak{v}$$

anreihen. Hiermit ist der Beweis der ausgesprochenen Behauptung erbracht. Denn die gewonnenen Gleichungen besagen, daß die Komponenten desjenigen Vektors, der bei Annahme des zweiten Koordinatensystems als Rotation der Vektorfunktion $\mathfrak{v}$ erscheint, mit den Projektionen des zuerst als Rotation erhaltenen Vektors auf die Achsen des zweiten Systems übereinstimmen und daß daher die auf beiden Wegen als Rotation erhaltenen Vektoren im Raum zusammenfallen müssen.

Wenn die positiven Achsenrichtungen des Systems der Koordinaten ξ, η, ζ im umgekehrten Sinne aufeinander folgen wie die des Systems der x, y, z, so treten an die Stelle der Gleichungen (1443) diejenigen Gleichungen, die aus ihnen hervorgehen, wenn man die Vorzeichen der rechten Seiten umkehrt. Folglich ergibt sich, falls man die neuen Koordinaten zu Grunde legt und damit die bisherige Bestimmung des positiven Drehungssinnes im Raume durch die entgegengesetzte ersetzt, als Rotation der Vektorfunktion $\mathfrak{v}$ derjenige Vektor, der aus dem zuvor als Rotation erhaltenen durch Umkehrung der Richtung entsteht. *Die Rotation einer Vektorfunktion ist also kurz gesagt ein Rotor, der nur von der Beschaffenheit des gegebenen Vektorfeldes, der Wahl der Längeneinheit und der Verfügung über den positiven Drehungssinn im Raume, aber im übrigen nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängt.*

529. Beispiel. — Ein starrer Körper von beliebiger Ausdehnung drehe sich in bezug auf das Achsenkreuz eines Systems rechtwinkeliger Koordinaten x, y, z um eine mit diesem Achsenkreuz fest verbundene orientierte Gerade, deren Richtungskosinus α_1, α_2, α_3 heißen mögen. Man soll die Rotation derjenigen Vektorfunktion $\mathfrak{v}$ ermitteln, welche in einem gegebenen Augenblick, wo der Körper die gegebene Winkelgeschwindigkeit ω hat, die Geschwindigkeiten seiner einzelnen Punkte darstellt.

Lösung: Man denke sich ein zweites System rechtwinkeliger Koordinaten ξ, η, ζ angenommen, dessen ξ-Achse mit der Umdrehungsachse des betrachteten Körpers nach Lage und Richtung zusammenfällt und dessen Achsenkreuz gegen das ursprüngliche Achsenkreuz fest und diesem kongruent ist. Dann hat die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ desjenigen Körperpunktes, der sich in dem betrachteten Augenblick in bezug auf das zweite System am Ort (ξ, η, ζ) befindet, in dem neuen Koordinatensystem die Komponenten

$$\mathfrak{v}_\xi = 0; \quad \mathfrak{v}_\eta = -\omega\zeta; \quad \mathfrak{v}_\zeta = \omega\eta.$$

Denn die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ hat die Größe $\omega\sqrt{\eta^2+\zeta^2}$ und ihre Richtungskosinus in bezug auf das System der ξ, η, ζ haben die Werte

$$0; \quad -\frac{\zeta}{\sqrt{\eta^2+\zeta^2}}; \quad \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\zeta^2}}.$$

Folglich hat die Rotation von $\mathfrak{v}$ im neuen Koordinatensystem die Komponenten

$$\frac{\partial\mathfrak{v}_\zeta}{\partial\eta} - \frac{\partial\mathfrak{v}_\eta}{\partial\zeta} = 2\omega; \quad \frac{\partial\mathfrak{v}_\xi}{\partial\zeta} - \frac{\partial\mathfrak{v}_\zeta}{\partial\xi} = 0; \quad \frac{\partial\mathfrak{v}_\eta}{\partial\xi} - \frac{\partial\mathfrak{v}_\xi}{\partial\eta} = 0$$

und es ist daher im alten System

$$\mathrm{rot}_x\mathfrak{v} = 2\omega\alpha_1; \quad \mathrm{rot}_y\mathfrak{v} = 2\omega\alpha_2; \quad \mathrm{rot}_z\mathfrak{v} = 2\omega\alpha_3.$$

Die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes ist also im vorliegenden Fall ein nach Größe und Richtung konstanter Vektor, der überall der Rotationsachse parallel und gleichgerichtet ist und der Größe nach mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit der Drehung übereinstimmt.

Auch in verwickelteren Fällen läßt sich die Rotation einer Vektorfunktion als doppelte Winkelgeschwindigkeit oder als doppelte Größe einer Drehung auffassen, und eben daher kommt die Bezeichnung Rotation. Nähere Ausführungen hierüber müssen indessen der Mechanik und der Physik, insbesondere der Lehre von der Elastizität, von den Wirbelbewegungen der Flüssigkeiten, von der Elektrizität und dem Magnetismus überlassen bleiben.

530. Satz von Stokes[1]. — Nach Annahme eines Systems rechtwinkeliger räumlicher Koordinaten x, y, z sei für einen dreifach ausgedehnten räumlichen Bereich $\mathfrak{K}$ eine Vektorfunktion $\mathfrak{v}$ von solcher Beschaffenheit gegeben, daß die partiellen Ableitungen erster Ordnung ihrer Komponenten $\mathfrak{v}_x, \mathfrak{v}_y, \mathfrak{v}_z$ im Innern von $\mathfrak{K}$ überall vorhanden und stetig sind. Ferner sei ein einfaches Vieleck gegeben, dessen Umfang $\mathfrak{u}$ und dessen Fläche $\mathfrak{E}$ ganz im Innern von $\mathfrak{K}$ liegen. Endlich sei für den Umfang dieses Vielecks die positive Umlaufungsrichtung und für die Fläche des Vielecks die positive Normalenrichtung ν derart bestimmt, daß ihre Aufeinanderfolge der in der Wahl des Koordinatensystems enthaltenen Festsetzung über den positiven Drehungssinn im Raume entspricht. Dann gilt, wenn $\operatorname{rot}_\nu \mathfrak{v}$ stets die senkrechte Projektion der Rotation von $\mathfrak{v}$ auf eine mit der positiven Normalenrichtung ν gleichgerichtete Achse bedeutet, die Gleichung

$$\text{(1444)} \qquad \int^{(\mathfrak{u})} (\mathfrak{v}_x dx + \mathfrak{v}_y dy + \mathfrak{v}_z dz) = \int^{(\mathfrak{E})} \operatorname{rot}_\nu \mathfrak{v}\, do,$$

wo das links stehende Linienintegral in der positiven Umlaufungsrichtung über den Umfang und das rechts stehende Flächenintegral über die Fläche des gegebenen Vielecks zu erstrecken ist und do das Element dieser Fläche bezeichnet.

Zum Beweise denke man sich ein System rechtwinkeliger Koordinaten ξ, η, ζ, dessen Achsenkreuz dem des ursprünglichen Systems kongruent ist, so angenommen, daß die $\eta\zeta$-Ebene mit der Ebene des gegebenen Vielecks zusammenfällt, und zwar auch hinsichtlich der Orientierung. Dann ist, wenn $\mathfrak{v}_\xi, \mathfrak{v}_\eta, \mathfrak{v}_\zeta$ die Komponenten des Vektors $\mathfrak{v}$ nach den neuen Achsen bedeuten,

$$\text{(1445)} \qquad \int^{(\mathfrak{u})} (\mathfrak{v}_x dx + \mathfrak{v}_y dy + \mathfrak{v}_z dz) = \int^{(\mathfrak{u})} (\mathfrak{v}_\xi d\xi + \mathfrak{v}_\eta d\eta + \mathfrak{v}_\zeta d\zeta).$$

Dies läßt sich unter Benutzung derjenigen Gleichungen, die den Übergang vom einen zum anderen Koordinatensystem vermitteln, leicht durch Ausrechnung bestätigen. Man kann aber auch ohne jede Rechnung zum Ziel gelangen. Versteht man nämlich unter ds das Linienelement des Umfangs $\mathfrak{u}$, unter φ den

1) So genannt nach einer von G. G. Stokes gestellten Preisaufgabe. Vgl. Cambridge University Calendar 1854 oder G. G. Stokes, Mathematical and physical papers, vol. V, Cambridge 1905, Seite 320.

Winkel, den der Vektor $\mathfrak{v}$ am Orte von ds mit der positiven Richtung des Umfangs bildet, und unter $|\mathfrak{v}|$ die Länge des Vektors $\mathfrak{v}$, so gilt die Gleichung

$$\tag{1446} \int^{(\mathfrak{u})} (\mathfrak{v}_x dx + \mathfrak{v}_y dy + \mathfrak{v}_z dz) = \int^{(\mathfrak{u})} |\mathfrak{v}| \cos\varphi \, ds,$$

und diese läßt sofort erkennen, daß das links stehende Integral nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängig sein kann. Stellt man sich unter dem Vektor $\mathfrak{v}$ eine Kraft vor, so bedeutet dieses Integral nach Nr. **471** nichts weiter als die Arbeit, welche diese Kraft bei fortgesetzter Wirkung auf ein und denselben materiellen Angriffspunkt leistet, wenn dieser Angriffspunkt den Umfang $\mathfrak{u}$ einmal im positiven Sinne durchläuft.

Im vorliegenden Fall ist nun für den ganzen Umfang des Vielecks $d\xi = 0$, da die Ebene des Vielecks mit der $\eta\zeta$-Ebene zusammenfallen soll. Die Gleichung (1445) kann daher durch die einfachere Gleichung

$$\int^{(\mathfrak{u})} (\mathfrak{v}_x dx + \mathfrak{v}_y dy + \mathfrak{v}_z dz) = \int^{(\mathfrak{u})} (\mathfrak{v}_\eta d\eta + \mathfrak{v}_\zeta d\zeta)$$

ersetzt werden. Nun ist aber nach den durch die Gleichungen (1377) und (1379) der Nr. **498** ausgedrückten Regeln über die Verwandlung eines Flächenintegrals in ein Randintegral

$$\int^{(\mathfrak{u})} \mathfrak{v}_\eta d\eta = -\int^{(\mathfrak{E})} \frac{\partial \mathfrak{v}_\eta}{\partial \zeta} do \qquad \text{und} \qquad \int^{(\mathfrak{u})} \mathfrak{v}_\zeta d\zeta = \int^{(\mathfrak{E})} \frac{\partial \mathfrak{v}_\zeta}{\partial \eta} do.$$

Also ergibt sich

$$\int^{(\mathfrak{u})} (\mathfrak{v}_x dx + \mathfrak{v}_y dy + \mathfrak{v}_z dz) = \int^{(\mathfrak{E})} \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_\zeta}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathfrak{v}_\eta}{\partial \zeta} \right) do = \int^{(\mathfrak{E})} \mathrm{rot}_\xi \mathfrak{v} \, do,$$

und hiermit ist auch die Gleichung (1444) bewiesen, da die positive Richtung der ξ-Achse bei den getroffenen Festsetzungen mit der positiven Normalenrichtung ν und daher $\mathrm{rot}_\xi \mathfrak{v}$ mit $\mathrm{rot}_\nu \mathfrak{v}$ übereinstimmt.

Zweitens werde angenommen, daß im Innern von $\mathfrak{K}$ eine Polyederfläche $\mathfrak{P}$ gegeben sei, das heißt eine Fläche, die aus einer endlichen Anzahl einfacher Vielecke derart zusammengesetzt ist, daß jedes einzelne dieser Vielecke mit mindestens einem anderen eine Kante gemein hat. Außerdem möge vorausgesetzt werden, daß diese Fläche das Gesetz der entgegengesetzten Kanten[1]) erfüllt. Das heißt, es soll möglich sein, gleichzeitig für sämtliche Vielecke der Fläche positive Umlaufungsrichtungen so zu bestimmen, daß jede Kante, in welcher zwei Vielecke zusammenstoßen, entgegengesetzte Durchlaufungsrichtungen erhält, je nachdem man sie dem Umfang des einen oder des anderen Vielecks zurechnet. Dann kann man nach einer dieser Forderung genügenden Festlegung der Umlaufungsrichtungen der einzelnen Vielecke die weitere Festsetzung treffen, daß bei jedem Vieleck die positive Normalenrichtung ν seiner Fläche diejenige sein soll, die zur positiven Umlaufungsrichtung so liegt wie die positive Richtung der x-Achse zur positiven Drehungsrichtung der yz-Ebene, und hierauf für jedes einzelne Vieleck die der Gleichung (1444) entsprechende Gleichung aufstellen. Leitet man dann aus allen diesen Gleichungen durch Addition eine neue Gleichung ab, so heben sich alle Linienintegrale fort, die über innere Kanten der Polyederfläche $\mathfrak{P}$ zu erstrecken sind, und es bleibt links nur das über den vollständigen äußeren Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{P}$ zu erstreckende Linienintegral übrig, und zwar überall in demjenigen Sinne genommen, bei welchem die Richtung der Integration auf die gegen das Innere der betreffenden Vielecksfläche gerichtete Normale des Randes und die positive Normale ν der Vielecksfläche im positiven Drehungssinne folgt. Man erhält somit die Gleichung

$$(1447)\qquad \int^{(\mathfrak{r})} (\mathfrak{v}_x dx + \mathfrak{v}_y dy + \mathfrak{v}_z dz) = \int^{(\mathfrak{P})} \operatorname{rot}_\nu \mathfrak{v}\, do\,,$$

und zwar gilt diese Gleichung auch für den jetzt sehr wohl möglichen Fall, daß der Rand $\mathfrak{r}$ in mehrere voneinander getrennte geschlossene Streckenzüge zerfällt, wofern nur die Integrationsrichtung überall in der beschriebenen Weise festgelegt wird.

Aus der Gleichung (1447) ergibt sich nun endlich durch einen Grenzübergang der folgende für viele Teile der mathematischen Physik grundlegende unter dem Namen des **Satzes von Stokes** bekannte

Lehrsatz: *Ist für einen dreifach ausgedehnten Bereich $\mathfrak{R}$ nach Annahme eines Systems rechtwinkeliger räumlicher Koordi-*

1) Diese Bezeichnung stammt von A. F. Möbius, Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse, Band 17, 1865, Seite 33 = Gesammelte Werke, Band 2, Leipzig 1886, Seite 477.

naten x, y, z eine den oben angegebenen Voraussetzungen genügende Vektorfunktion $\mathfrak{v}$ erklärt, ist ferner im Innern von $\mathfrak{K}$ irgend ein gewöhnliches Flächenstück $\mathfrak{F}$ gegeben und ist die positive Normalenrichtung ν des Flächenstücks $\mathfrak{F}$ für alle Punkte desselben derart festgelegt, daß sie sich bei stetiger Verschiebung des Fußpunktes niemals unstetig ändert, so gilt, wenn do das Flächenelement von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{l}$ die vollständige, möglicherweise aus mehreren getrennten Teilen bestehende Randlinie von $\mathfrak{F}$ bezeichnet, die Gleichung

$$(1448) \qquad {}^{(\mathfrak{l})}\!\!\int (\mathfrak{v}_x dx + \mathfrak{v}_y dy + \mathfrak{v}_z dz) = {}^{(\mathfrak{F})}\!\!\int \mathrm{rot}_\nu \mathfrak{v}\, do,$$

und zwar ist dabei das links stehende Linienintegral über jeden einzelnen Teil von $\mathfrak{l}$ in einem solchen Sinn zu erstrecken, daß überall die Richtung der Integration auf die nach dem Innern von $\mathfrak{F}$ weisende Normale von $\mathfrak{l}$ und die positive Normale ν von $\mathfrak{F}$ in dem durch die Annahme des Koordinatensystems festgelegten positiven Drehungssinn folgt.

Auf Grund der in Nr. **509** bei der Ausdehnung des Inhaltsbegriffs auf krumme Flächen durchgeführten Betrachtungen ist es nämlich immer möglich, eine dem Gesetz der entgegengesetzten Kanten gehorchende Polyederfläche $\mathfrak{P}$, die dem Flächenstück $\mathfrak{F}$ und deren Rand der Randlinie $\mathfrak{l}$ eingeschrieben ist, so zu bestimmen, daß die beiden Seiten der Gleichung (1448) sich von den beiden Seiten der für die Polyederfläche $\mathfrak{P}$ geltenden Gleichung (1447) beliebig wenig unterscheiden. Also können auch die beiden Seiten der Gleichung (1448) nicht voneinander verschieden sein.

Zweiundzwanzigster Abschnitt.

Uneigentliche Integrale.

531. Integrale von Funktionen, die nicht beschränkt sind. — Es seien a und b zwei voneinander verschiedene Konstante und x eine Veränderliche, welche jeden zwischen a und b liegenden Wert und auch den Wert a anzunehmen vermag, während jedoch die Zahl b von ihrem Wertbereich ausgeschlossen sein kann. Ferner sei $f(x)$ eine Funktion, die über jedes Intervall, welches von a bis zu einem zwischen a und b liegenden Werte ξ reicht, integrierbar, aber dabei so beschaffen ist, daß ihr absoluter Wert innerhalb des Intervalls $(a \cdots b)$ in der Nähe von b jede gegebene Konstante zu überschreiten vermag. Dann kann es vorkommen, daß das Integral $\int_a^\xi f(x)dx$ einem Grenzwert zustrebt, wenn die Veränderliche ξ vom Innern des Intervalls $(a \cdots b)$ her der Konstanten b unbegrenzt nahe rückt. Trifft dies zu, so stellt man diesen Grenzwert durch das Zeichen $\int_a^b f(x)dx$ dar, setzt also

$$\lim_{\xi=b}\int_a^\xi f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,, \tag{1449}$$

nennt das rechts stehende Zeichen im Gegensatz zu den in den vorangehenden Abschnitten erklärten eigentlichen Integralen ein **uneigentliches Integral** und sagt auch, das Integral $\int_a^b f(x)dx$ sei **konvergent.** Es kann aber auch vorkommen, daß das Integral $\int_a^\xi f(x)dx$ keinem Grenzwert zustrebt. Dann legt man dem Zeichen $\int_a^b f(x)dx$ keine Bedeutung bei und sagt auch, das Integral $\int_a^b f(x)dx$ sei **divergent.**

Beispielsweise ist die Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ über jedes Interval integrierbar, welches von 0 bis zu einer zwischen 0 und 1 enthaltenen Zahl ξ reicht, wird aber unendlich groß, wenn x wachsend dem Wert 1 unbegrenzt nahe rückt. Dabei nähert sich jedoch das Integral $\int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ einem Grenzwert, denn es ist

$$\int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin\xi\,,$$

wo das Zeichen arcsin den Hauptwert bedeutet, und dieser Ausdruck strebt für $\xi = 1 - 0$ dem Grenzwert $\frac{\pi}{2}$ zu.

Also hat das Zeichen $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ einen Sinn, und zwar ist

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\xi=1-0} \int_0^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Dagegen hat das Zeichen $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ keine Bedeutung. Denn ist wieder ξ eine zwischen 0 und 1 enthaltene Veränderliche, so ist jetzt

$$\int_0^{\xi} \frac{dx}{1-x} = -\lg(1-\xi) = \lg\frac{1}{1-\xi},$$

und daraus folgt, daß das links stehende Integral bei unbegrenzter Annäherung der Veränderlichen ξ an den Wert 1 keinem Grenzwert zustrebt, sondern unendlich groß wird.

Wenn eine für ein endliches Intervall $(a \cdots b)$ einschließlich der Grenze a erklärte Funktion $f(x)$ die oben näher angegebenen Voraussetzungen erfüllt, so läßt sich das Zeichen $\int_a^b f(x)dx$ selbst in solchen Fällen, wo ihm nach dem vorangehenden eine Bedeutung zukommt, nicht in der gleichen Weise wie im sechzehnten Abschnitt erklären. Denn von den in Nr. **420** mit E und U bezeichneten Summen hat jetzt wenigstens eine überhaupt keine Bedeutung mehr und der absolute Wert der in Nr. **421** erklärten Summe S kann durch passende Verfügung über den letzten Zwischenwert ξ_n beliebig groß gemacht werden. Eben deswegen handelt es sich unter den gegenwärtigen Voraussetzungen wirklich um eine Erweiterung des Integralbegriffs, und es ist daher berechtigt, die hierbei sich ergebenden als Grenzwerte eigentlicher Integrale erscheinenden Integrale als *uneigentliche Integrale* zu bezeichnen.

In ähnlicher Weise wie oben stellt man die Bedeutung des Zeichens $\int_a^b f(x)dx$ auch für den Fall fest, daß die Funktion $f(x)$ über jeden Teil des Intervalls $(a \cdots b)$ integrierbar ist, der nach Abtrennung eines die *untere* Integrationsgrenze a enthaltenden Intervalls übrig bleibt, daß aber der absolute Wert von $f(x)$ beliebig groß werden kann, wenn x vom Innern des Intervalls her der Grenze a unendlich nahe rückt. Man setzt dann eben, indem man wieder unter ξ eine zwischen a und b liegende Veränderliche versteht,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi = a} \int_\xi^b f(x)\,dx,$$

wofern das Integral $\int_\xi^b f(x)\,dx$ wirklich einem Grenzwert zustrebt, legt aber sonst dem links stehenden Zeichen keine Bedeutung bei. Beispielsweise ist

$$\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\xi = +0} \int_\xi^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\xi = +0} \left\{ \left[\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \right]_\xi^8 \right\} = 6,$$

während das Zeichen $\int_0^2 \frac{dx}{x^2}$ keine Bedeutung hat.

Sollte ferner die Funktion $f(x)$ zwar über jedes ganz im Innern des Intervalls $(a \cdots b)$ enthaltene abgeschlossene Intervall integrierbar sein, aber in der Nähe einer jeden der beiden Grenzen a, b Werte von beliebig großem absoluten Betrage annehmen, so setzt man, indem man unter ξ und ξ' zwei zwischen a und b enthaltene Veränderliche versteht,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{(\xi, \xi' = a, b)} \int_\xi^{\xi'} f(x)\,dx,$$

wofern das Integral $\int_\xi^{\xi'} f(x)\,dx$ bei gleichzeitiger Annäherung der Veränderlichen ξ, ξ' an die Konstanten a, b einem Grenzwert zustrebt, der unabhängig davon ist, in welchem Verhältnis die Differenzen $(\xi - a)$ und $(b - \xi')$ gleichzeitig unendlich klein werden. Anderenfalls wird wieder dem Zeichen $\int_a^b f(x)\,dx$ kein Sinn beigelegt.

Beispielsweise ist hiernach, wie man leicht bestätigt

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \pi,$$

während dem Zeichen $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 - x^2}$ keine Bedeutung zukommt.

Ein weiterer nunmehr nahe liegender Schritt besteht darin, den Begriff eines über ein endliches Intervall $(a \cdots b)$ zu erstreckenden bestimmten Integrales auch auf den Fall auszudehnen, daß die zu integrierende Funktion $f(x)$ in der Nähe einer im Innern des Intervalls $(a \cdots b)$ liegenden Stelle c nicht mehr zwischen endlichen Grenzen enthalten bleibt, möglicherweise sogar für die Stelle c selbst gar nicht erklärt ist, aber über jedes abgeschlossene Intervall integriert werden kann, welches einen Teil des Intervalls $(a \cdots b)$ bildet und die Stelle c nicht enthält. Man setzt dann

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

vorausgesetzt daß jedes der beiden rechts stehenden Integrale auf Grund der vorangehenden Erklärungen einen Sinn hat, legt aber sonst dem Zeichen $\int_a^b f(x)dx$ keine Bedeutung bei.

Ähnliches gilt endlich ganz allgemein, wenn eine Funktion $f(x)$ in einem endlichen Intervall $(a \cdots b)$ an einer beliebigen endlichen Anzahl von Stellen, zu denen auch die Grenzen a, b gehören können, aber auch nur an diesen Stellen Eigentümlichkeiten der erwähnten Art darbietet. Sind nämlich $c_1, c_2, \cdots c_n$ die fraglichen Stellen, so wie sie im Sinne von a gegen b aufeinander folgen, so setzt man

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \cdots + \int_{c_n}^b f(x)dx,$$

vorausgesetzt daß jedes der rechts stehenden Integrale einen Sinn hat. Anderenfalls kommt dem Zeichen $\int_a^b f(x)dx$ keine Bedeutung zu.

Auch alle Integrale, deren Erklärung auf diesen ferneren Erweiterungen beruht, werden als uneigentlich bezeichnet. Ferner gebraucht man bei allen diesen Integralen die Worte konvergent und divergent in dem gleichen Sinne wie in dem zuerst besprochenen Fall.

Ähnlich wie bei unendlichen Reihen unterscheidet man auch hier zwischen bedingter und unbedingter Konvergenz: Ein konvergentes uneigentliches Integral heißt **unbedingt konvergent**, sobald die Konvergenz auch dann erhalten bleibt, wenn man die zu integrierende Funktion durch ihren absoluten Wert ersetzt, dagegen nur **bedingt konvergent**, wenn dies nicht zutrifft.

Sätze, die für eigentliche Integrale gelten, dürfen natürlich nicht ohne Prüfung auf solche Fälle übertragen werden, in denen es sich nicht um eigentliche Integrale handelt, da man sonst in Irrtümer verfallen kann. Beispielsweise folgt aus der Gleichung

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

nicht etwa, daß

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -2$$

wäre. Das links stehende Zeichen hat vielmehr gar keinen Sinn. Denn sind ξ, ξ' irgend zwei zwischen 0 und 1 liegende Zahlen, so ist

$$\int_{-1}^{-\xi} \frac{dx}{x^2} + \int_{\xi'}^{1} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\xi} - 1 - 1 + \frac{1}{\xi'},$$

und daraus folgt, daß die links stehende Summe keinem Grenzwert zustrebt, sondern unendlich wird, wenn ξ und ξ' gleichzeitig verschwinden. So löst sich der scheinbare Widerspruch, daß ein bestimmtes Integral, dessen Elemente sämtlich positiv sind, einen negativen Wert haben soll.

532. Kennzeichen der Konvergenz. — Die Entscheidung der Frage, ob einem Zeichen von einer der in Nr. **531** erwähnten Arten ein Sinn zukommt oder nicht, läßt sich, wie man leicht einsieht, stets darauf zurückführen, in einer endlichen Anzahl von Fällen die gleiche Frage für ein Zeichen von der Form $\int_a^b f(x)\,dx$ zu beantworten, wo a, b zwei der Ungleichung $a < b$ genügende Konstante bedeuten und $f(x)$ eine für $a \leq x < b$ erklärte Funktion bezeichnet, die nur in der Nähe der oberen Grenze b Werte von beliebig großem absoluten Betrage anzunehmen vermag, aber über jedes Intervall integrierbar ist, welches von a bis zu einer zwischen a und b liegenden Zahl reicht.

In jedem Falle dieser Art ist nun nach dem allgemeinen Konvergenzprinzip (Nr. **211**) zur Konvergenz des Integrales $\int_a^b f(x)\,dx$ notwendig und hinreichend, daß das Integral $\int_\xi^{\xi'} f(x)\,dx$, wo ξ und ξ' zwei der Bedingung $a < \xi < \xi' < b$ unterworfene Veränderliche bezeichnen, stets dem Grenzwert 0 zustrebe, wenn

ξ unbegrenzt nahe an b heranrückt, einerlei wie ξ' zwischen ξ und b angenommen werden mag. Daraus folgt zunächst, daß dem Zeichen $\int_a^b f(x)dx$ sicher ein Sinn zukommt, sobald das entsprechende Integral des absoluten Wertes der Funktion $f(x)$, das heißt das Integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$ konvergiert. Denn infolge der für $a<\xi<\xi'<b$ geltenden Ungleichung

$$\left|\int_\xi^{\xi'} f(x)dx\right| \leqq \int_\xi^{\xi'} |f(x)|\,dx$$

wird beim Unendlichkleinwerden des rechts stehenden Integrales auch das Integral $\int_\xi^{\xi'} f(x)dx$ unendlich klein.

Nachdem dies festgestellt, gelangt man zu einer bequemen und praktisch meistens ausreichenden Regel zur Beurteilung der Konvergenz bestimmter Integrale, indem man von dem folgenden Satze ausgeht:

Das Integral

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\nu},$$

wo a und b zwei der Ungleichung $a<b$ genügende Konstante bedeuten und ν einen konstanten positiven Exponenten bezeichnet, ist konvergent, wenn $\nu<1$ ist, dagegen divergent, wenn $\nu \geqq 1$ ist.

In der Tat ist ja, wenn ξ eine zwischen a und b liegende Zahl bedeutet, für jeden von 1 verschiedenen Wert von ν

$$\int_a^\xi \frac{dx}{(b-x)^\nu} = \int_a^\xi (b-x)^{-\nu}dx = \left[-\frac{(b-x)^{1-\nu}}{1-\nu}\right]_a^\xi$$
$$= \frac{1}{1-\nu}[(b-a)^{1-\nu}-(b-\xi)^{1-\nu}].$$

Ist nun $0<\nu<1$, also $(1-\nu)$ positiv, so wird die Potenz $(b-\xi)^{1-\nu}$ unendlich klein, wenn ξ wachsend unbegrenzt nahe an b heranrückt. Folglich strebt dann das Integral $\int_a^\xi \frac{dx}{(b-x)^\nu}$ wirklich einem Grenzwert zu, nämlich dem Grenzwert $\frac{(b-a)^{1-\nu}}{1-\nu}$.

das heißt, das Integral $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\nu}$ ist konvergent. Ist dagegen $\nu > 1$, so ist $(1-\nu)$ negativ. Dann wird aber der Ausdruck

$$\frac{1}{1-\nu}[(b-a)^{1-\nu} - (b-\xi)^{1-\nu}] = \frac{1}{\nu-1}\left[\frac{1}{(b-\xi)^{\nu-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\nu-1}}\right]$$

unendlich groß, so daß das Integral $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\nu}$ divergiert. Ähnlich tritt auch für $\nu = 1$ Divergenz ein, weil $\int_a^\xi \frac{dx}{b-x} = \lg\frac{b-a}{b-\xi}$ ebenfalls unendlich wird, wenn ξ wachsend in b übergeht.

Der hiermit bewiesene Satz läßt sich nun folgendermaßen verallgemeinern:

Wenn eine Funktion $f(x)$ den im Anfang dieser Nummer angegebenen Voraussetzungen genügt, so ist das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ sicher konvergent, falls es möglich ist, einen zwischen 0 und 1 enthaltenen konstanten Exponenten ν und eine positive Konstante M so zu bestimmen, daß für $a \leqq x < b$ immer

$$|(b-x)^\nu f(x)| < M$$

bleibt, einerlei wie nahe die Veränderliche x an b heranrückt.

Denn ist diese Voraussetzung erfüllt, so ist für $a \leqq x < b$

$$|f(x)| < \frac{M}{(b-x)^\nu},$$

also für $a < \xi < \xi' < b$

$$\int_\xi^{\xi'} |f(x)|\,dx < M\int_\xi^{\xi'} \frac{dx}{(b-x)^\nu} = \frac{M}{1-\nu}[(b-\xi)^{1-\nu} - (b-\xi')^{1-\nu}]$$

und daher

$$\lim_{\xi = b-0} \int_\xi^{\xi'} |f(x)|\,dx = 0.$$

In den praktisch vorkommenden Fällen der hier in Rede stehenden Art wird die Funktion $f(x)$ in der Regel bei Annäherung ihres Argumentes an die obere Integrationsgrenze von einer bestimmten Ordnung unendlich. Trifft dies zu, so gilt die folgende aus dem vorangehenden leicht abzuleitende Regel:

Das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ ist konvergent, wenn die Funktion $f(x)$

für $x = b - 0$ von niedrigerer als der ersten Ordnung, dagegen divergent, wenn sie von der ersten oder höherer Ordnung unendlich wird.

Beispielsweise erkennt man hiernach, auch ohne die betreffenden unbestimmten Integrale angeben zu können, sofort, daß das Zeichen $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \operatorname{tg} x\, dx$ sinnlos ist, daß dagegen das Integral

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \int_{-1}^0 \frac{e^{-u}}{\sqrt[3]{-u}}\, du$$

sicher einen Sinn hat.

533. Integrale über unendliche Intervalle. — Wenn eine Funktion $f(x)$ für alle oberhalb einer Konstanten a liegenden Werte von x erklärt und über jedes endliche Intervall mit der unteren Grenze a integrierbar ist, so kann es vorkommen, daß das von a bis zu einer beliebigen größeren Zahl b erstreckte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ bei unbegrenzter Vergrößerung von b einem Grenzwert zustrebt. Ist dies der Fall, so stellt man diesen Grenzwert durch das Zeichen $\int_a^\infty f(x)\,dx$ dar, setzt also

$$\lim_{b=\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx \tag{1450}$$

und sagt, das Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ sei **konvergent**. Falls dagegen das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ keinem Grenzwert zustrebt, legt man dem Zeichen $\int_a^\infty f(x)\,dx$ keinen Sinn bei und sagt auch, das Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ sei **divergent**.

Beispielsweise ist

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b=\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b=\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2},$$

während das Zeichen $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x}$ keinen Sinn hat, da $\int_0^b \frac{dx}{1+x} = \lg(1+b)$ bei unbegrenzt wachsendem b ebenfalls unendlich wird.

Ganz ähnlich setzt man, wenn $f(x)$ eine Funktion bedeutet, die für alle unterhalb einer Konstanten b liegenden Werte von x erklärt und über jedes endliche Intervall mit der oberen Grenze b integrierbar ist,

$$\lim_{a=-\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx \tag{1451}$$

und versteht, falls $f(x)$ eine für jeden beliebigen Wert von x erklärte und über jedes endliche Intervall integrierbare Funktion bedeutet, unter

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$$

den Grenzwert des Integrales $\int_a^b f(x)dx$ für den Fall, daß gleichzeitig a negativ und b positiv unendlich wird, alles natürlich unter der Voraussetzung, daß der betreffende Grenzwert wirklich vorhanden ist und daß in dem zuletzt erwähnten Falle nichts darauf ankommt, in welchem Verhältnis $|a|$ und b unbegrenzt vergrößert werden. Sonst wird den in Rede stehenden Zeichen kein Sinn zugeschrieben.

Beispielsweise ist hiernach, wie man leicht bestätigt

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi,$$

wogegen dem Zeichen $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{1+x^2}$ kein Sinn zukommt, da

$$\int_a^b \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\lg\frac{1+b^2}{1+a^2}$$

je nach dem Verhältnis, in welchem $(-a)$ und b unbegrenzt vergrößert werden, verschiedenen Grenzwerten zustreben kann.

Zu den vorangehenden Erklärungen treten noch die Festsetzungen, daß immer

$$\int_\infty^a f(x)\,dx \quad \text{mit} \quad -\int_a^\infty f(x)\,dx; \qquad \int_b^{-\infty} f(x)\,dx \quad \text{mit} \quad -\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$$

und

$$\int_{\infty}^{-\infty} f(x)dx \quad \text{mit} \quad -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

gleichbedeutend sein soll.

Mit der Unendlichkeit des Integrationsintervalls darf sich schließlich auch der Umstand verbinden, daß es in dem Integrationsintervall eine endliche Anzahl von Stellen gibt, in deren Nähe die zu integrierende Funktion Werte von beliebig großem absoluten Betrage anzunehmen vermag. In jedem solchen Falle ist durch Verbindung der soeben aufgestellten mit den in Nr. **531** enthaltenen Erklärungen festzustellen, ob dem fraglichen Integral ein Sinn zukommt und was man darunter zu verstehen hat.

Auch alle Integrale, die über unendliche Intervalle zu erstrecken sind, werden den uneigentlichen Integralen zugerechnet. Zugleich gilt bei diesen Integralen hinsichtlich des Sinnes der Worte konvergent und divergent, sowie unbedingt und bedingt konvergent ganz Ähnliches wie bei den uneigentlichen Integralen der in Nr. **531** betrachteten Art.

534. Magnetische Wirkung eines geraden unendlich langen Stromes. — Als Beispiel für das Vorkommen eines Integrales über ein unendliches Intervall sei folgende physikalische Aufgabe angeführt: Ein elektrischer Strom fließt durch einen in Ruhe befindlichen gerade gestreckten Draht und wirkt dabei auf einen ebenfalls ruhenden Magnetpol nach dem Gesetz von Biot und

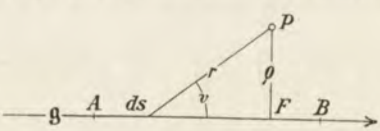


Fig. 106.

Savart (vgl. Nr. **471**, 2). Der Draht ist im Verhältnis zu seiner Dicke so lang, daß er mit hinreichender Genauigkeit durch eine gerade Strecke AB (Fig. 106) abgebildet werden kann, und der Magnetpol P befindet sich außerhalb der die Strecke AB enthaltenden Geraden $\mathfrak{g}$ in dem gegebenen Abstand ϱ von derselben, und zwar in einer solchen Lage, daß das von ihm auf $\mathfrak{g}$ gefällte Lot die Gerade $\mathfrak{g}$ in einem zwischen A und B liegenden Punkte F trifft. Die Stärke des Magnetpols und die Stärke des Stromes haben im elektromagnetischen C. G. S. System die gegebenen Werte

m und J. Man soll unter der Voraussetzung, daß die Abstände der Punkte A und B vom Punkte F im Verhältnis zum Abstand ϱ als unendlich groß angesehen werden dürfen, die in Dynen auszudrückende Kraft K berechnen, welche der in der Strecke AB fließende Teil des Stromes auf den Magnetpol ausübt.

Lösung: Die gesuchte Kraft steht auf der durch $\mathfrak{g}$ und P gehenden Ebene senkrecht, ist so gerichtet, daß sie den Pol im Sinne einer Rechtsdrehung um die mit der Stromrichtung gleichgerichtete Gerade $\mathfrak{g}$ antreibt und ergibt sich gemäß Nr. **471**, 2 der Größe nach, wenn man das Produkt Jm mit dem über AB zu erstreckenden Linienintegral $\int \frac{\sin v}{r^2} ds$ multipliziert, wo ds das Linienelement der Strecke AB, r den Abstand dieses Linienelementes von P und v den Winkel zwischen der Stromrichtung und der Richtung von dem Element ds gegen P bedeutet. Hiernach ist, wenn x die Abszisse von ds in bezug auf F bedeutet und A und B als unendlich fern angesehen werden,

$$K = Jm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+\varrho^2} \frac{\varrho}{\sqrt{x^2+\varrho^2}} dx = Jm\varrho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+\varrho^2}^3}.$$

Nun ist aber nach Gleichung (1272), Nr. **455**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\varrho^2}^3} = \frac{1}{\varrho^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+\varrho^2}},$$

und da dieser Ausdruck bei positiv unendlich werdendem x dem Grenzwert $\frac{1}{\varrho^2}$, bei negativ unendlich werdendem x dagegen dem Grenzwert $\left(-\frac{1}{\varrho^2}\right)$ zustrebt, ergibt sich schließlich

$$K = \frac{2Jm}{\varrho}. \tag{1452}$$

Dasselbe Ergebnis kann man auch aus den Gleichungen (1326) der Nr. **471** ableiten, wenn man ein Rechtssystem rechtwinkeliger räumlicher Koordinaten x, y, z mit dem Anfang F so einführt, daß seine x-Achse mit dem Strome gleichgerichtet ist und seine y-Achse gegen P weist, und hierauf

$$y = z = 0; \quad dy = dz = 0; \quad \alpha = 1; \quad \beta = \gamma = 0;$$

$$\xi = 0; \quad \eta = \varrho; \quad \zeta = 0; \quad r = \sqrt{x^2+\varrho^2}$$

setzt, wobei $\mathfrak{H}_z = K$ wird.

535. Bedingungen der Konvergenz. — Da man ein Integral von der Form $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ stets mittels der Gleichung

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = -\int_{\infty}^{-b} f(-x)\,dx = \int_{-b}^{\infty} f(-x)\,dx$$

in ein Integral mit endlicher unterer und unendlicher oberer Grenze verwandeln und ein Integral von der Form $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ in die Summe $\left[\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx\right]$ auseinanderziehen kann, bedarf die Frage nach den Bedingungen der Konvergenz nur für Integrale von der Form $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ einer Erörterung.

Nun ist ein Integral dieser Art nach dem allgemeinen Konvergenzprinzip (Nr. **211**) dann und nur dann konvergent, wenn jeder beliebig kleinen positiven Konstanten ε eine oberhalb a liegende Konstante N derart zugeordnet werden kann, daß für je zwei Zahlen b, c, die der Bedingung $N < b < c$ genügen, die Ungleichung

$$\left|\int_{a}^{c} f(x)\,dx - \int_{a}^{b} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{b}^{c} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

besteht. Daraus folgt zunächst leicht:

Das Integral $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ ist sicher konvergent, wenn das Integral $\int_{a}^{\infty} |f(x)|\,dx$ konvergiert.

Nachdem dies festgestellt, erhält man ein bequemes und für viele Fälle ausreichendes Mittel zur Entscheidung, indem man zunächst als Beispiel das Integral $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ betrachtet, wo α eine positive Konstante bedeutet. Dieses Integral ist nämlich

konvergent für $\alpha > 1$,
divergent für $\alpha \leqq 1$.

Denn ist $\alpha > 1$, so ist für jeden oberhalb 1 liegenden Wert von b

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^b x^{-\alpha}\, dx = \frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha} - 1\right) = \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{b^{\alpha-1}}\right),$$

strebt also bei unbegrenzt wachsendem b dem Grenzwert $\frac{1}{\alpha - 1}$ zu.

Ist dagegen $\alpha \leqq 1$, so ist für $x \geqq 1$ beständig

$$\frac{1}{x^\alpha} \geqq \frac{1}{x},$$

also für $b > 1$

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} \geqq \int_1^b \frac{dx}{x} = \lg b,$$

so daß das Integral $\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha}$ bei unbegrenzt wachsendem b ebenfalls unendlich wird.

Dieses Ergebnis läßt sich nun folgendermaßen verallgemeinern:

Ein Integral von der Form $\int_a^\infty f(x)\,dx$, *wo* a *eine Konstante und* $f(x)$ *eine über jedes endliche Intervall mit der unteren Grenze* a *integrierbare Funktion bedeutet, ist sicher konvergent, wenn es möglich ist, einen konstanten oberhalb* 1 *liegenden Exponenten* α *und eine positive Konstante* M *so zu bestimmen, daß für alle oberhalb einer gewissen Grenze liegenden Werte von* x

$$|x^\alpha f(x)| < M$$

bleibt.

Denn ist diese Voraussetzung erfüllt, so ist, falls b und c zwei hinreichend große positive der Ungleichung $b < c$ genügende Zahlen bedeuten,

$$\int_b^c |f(x)|\,dx < M \int_b^c \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{M}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - \frac{1}{c^{\alpha-1}}\right) < \frac{M}{\alpha - 1}\,\frac{1}{b^{\alpha-1}}.$$

Das Integral $\int_b^c |f(x)|\,dx$ kann also dadurch, daß man b hinreichend groß wählt, unter jede gegebene positive Konstante herabgedrückt werden.

Wird die Funktion $f(x)$ *bei unbegrenzt wachsendem* x *von* *einer bestimmten Ordnung* *unendlich klein, so ist das Integral* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *konvergent, wenn diese Ordnung* > 1, *dagegen divergent, wenn sie* $\leqq 1$ *ist.*

Beispielsweise folgt aus dem vorangehenden, daß das Integral

$$\Pi(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx \tag{1453}$$

für jeden oberhalb (-1) liegenden Wert des konstanten Exponenten n konvergiert. Denn nach willkürlicher Annahme einer oberhalb 1 liegenden Konstanten α ergibt sich stets, daß das Produkt $x^\alpha e^{-x} x^n = e^{-x} x^{n+\alpha}$ bei unbegrenzt wachsendem x unendlich klein wird, also für alle positiven Werte von x unter einer gewissen Konstanten bleibt.

Die Einschränkung, daß $n > -1$ sein soll, ist deswegen nötig, weil sonst die zu integrierende Funktion an der unteren Integrationsgrenze von der ersten oder einer höheren Ordnung unendlich werden und das Integral aus diesem Grunde divergieren würde. Für $-1 < n < 0$ wird das Produkt $e^{-x} x^n$ allerdings auch noch unendlich, wenn x abnehmend an 0 heranrückt, aber von niedrigerer als der ersten Ordnung, so daß das Integral einen Sinn behält.

Ganz ähnlich läßt sich zeigen, daß bei ganzzahligem positiven Werte der Konstanten k auch das allgemeinere Integral

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n (\lg x)^k \, dx$$

für jeden oberhalb (-1) liegenden Wert von n konvergiert.

Das durch die Gleichung (1453) für $n > -1$ als Funktion von n erklärte Integral $\Pi(n)$ ist deswegen von einer gewissen praktischen Bedeutung, weil es für jeden ganzen nicht negativen Wert von n mit $n!$ übereinstimmt. Zunächst ist nämlich für $n = 0$

$$\Pi(0) = \int_0^\infty e^{-x} \, dx = \lim_{b=\infty} \left\{ \Big[-e^{-x} \Big]_0^b \right\} = 1 = 0!.$$

Ferner ergibt sich für $n > 0$ durch teilweise Integration

$$\int e^{-x} x^n \, dx = \int x^n e^{-x} \, dx = -x^n e^{-x} + n \int x^{n-1} e^{-x} \, dx,$$

also für $b > 0$

$$\int_0^b e^{-x} x^n \, dx = -b^n e^{-b} + n \int_0^b x^{n-1} e^{-x} \, dx.$$

Daraus folgt aber

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

oder

(1454) $$\Pi(n) = n\,\Pi(n-1).$$

Für jeden ganzen positiven Wert von n ist daher

$$\Pi(n) = n(n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot \Pi(0)$$

oder

(1455) $$\Pi(n) = n!,$$

wie behauptet wurde.

Die Bezeichnung $\Pi(n)$ ist von C. F. Gauß[1]) eingeführt worden. Legendre[2]) setzt

(1456) $$\Pi(n-1) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx = \Gamma(n),$$

und dadurch ist für die in Rede stehende Funktion der Name Gammafunktion in Aufnahme gekommen.

Bei Integralen, die nur bedingt konvergieren, leistet zuweilen der zweite Mittelwertsatz der Integralrechnung zum Nachweis der Konvergenz gute Dienste. Beispielsweise folgt aus ihm sehr leicht die Konvergenz des Integrales $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$. Für $0 < b < c$ ist nämlich nach dem zweiten Mittelwertsatz in seiner einfachsten Form

$$\int_b^c \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{b} \int_b^\xi \sin x\, dx = \frac{1}{b}(\cos b - \cos \xi),$$

wo $b \leqq \xi \leqq c$ ist. Bei gegebenem beliebig kleinem positiven Werte von ε ist also

$$\left| \int_b^c \frac{\sin x}{x} dx \right| < \varepsilon,$$

---

1) C. F. Gauß, Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc. Art. 20—28, Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores, Vol. II, Gottingae 1813 = Werke, Band III, Göttingen 1876, S. 145—152. = C. F Gauß, Allgemeine Untersuchungen über die unendliche Reihe usw., übersetzt von H. Simon, Berlin 1888, S. 33—40.

2) A. M. Legendre, Exercices de calcul intégral, quatrième Partie, S. 4, zuerst für sich veröffentlicht Paris 1814; dann wieder abgedruckt in Exercices de calcul intégral, Tome second, Paris 1817.

sobald nur b groß genug ist. Dies ist aber für die Konvergenz des Integrales $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ hinreichend.

Während eine unendliche Reihe nur dann konvergieren kann, wenn ihr n-tes Glied bei unbegrenzt wachsendem n dem Grenzwert 0 zustrebt, ist für die Konvergenz eines Integrales von der Form $\int_0^\infty f(x)\,dx$ nicht erforderlich, daß $f(x)$ bei unbegrenzt wachsendem x unendlich klein werde. Beispielsweise ist $\int_1^\infty \sin(x^2)\,dx$ konvergent, obwohl die Funktion $\sin(x^2)$ nicht dem Grenzwert 0 zustrebt. Denn für jeden positiven Wert von b ist

$$\int_1^b \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{b^2} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du,$$

und der Nachweis dafür, daß das rechts stehende Integral bei unbegrenzt wachsendem b einem Grenzwert zustrebt, läßt sich ganz ebenso erbringen wie oben bei dem Integral $\int_0^b \frac{\sin x}{x}\,dx$.

536. Uneigentliche Flächen- und Raumintegrale. — In der Ebene zweier Veränderlichen x, y sei ein gewöhnlicher Bereich $\mathfrak{B}$ und eine demselben angehörende Stelle (x_0, y_0) gegeben, und für den Bereich $\mathfrak{B}$, jedoch möglicherweise mit Ausnahme der Stelle (x_0, y_0), sei eine Funktion $f(x, y)$ erklärt, die in $\mathfrak{B}$ nicht beschränkt ist, sondern daselbst in der Nähe der Stelle (x_0, y_0) Werte von beliebig großem absoluten Betrage annehmen kann. Diese Funktion sei indessen über jeden gewöhnlichen Bereich integrierbar, der dem Bereiche $\mathfrak{B}$ als Teil angehört, aber die Stelle (x_0, y_0) nicht enthält. Dann kann es vorkommen, daß das über einen Bereich $\mathfrak{B}'$ dieser Art erstreckte Flächenintegral $\int^{(\mathfrak{B}')} f(x, y)\,d\sigma$ einem Grenzwert zustrebt, und zwar immer dem nämlichen Grenzwert, wenn man den Bereich $\mathfrak{B}'$ in irgend einer Weise so ausdehnt, daß der Unterschied der Flächeninhalte von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ unendlich klein wird. Trifft dies zu, so stellt man den erwähnten Grenzwert durch das Zeichen $\int^{(\mathfrak{B})} f(x, y)\,d\sigma$ dar. Anderenfalls hat dieses Zeichen keine Bedeutung.

Ein Beispiel ergibt sich, wenn man sich nach Annahme eines Systems rechtwinkeliger ebener Koordinaten einen gewöhnlichen in der Ebene dieses Systems liegenden Bereich $\mathfrak{B}$ derart mit Masse belegt denkt, daß deren Flächendichte eine stetige Funktion der Koordinaten desjenigen Punktes ist, auf den sie sich bezieht, und nun den Begriff des Potentials (Nr **519**) der so verteilten Masse auf den Fall auszudehnen sucht, daß der Aufpunkt mit einem in $\mathfrak{B}$ selbst liegenden Punkte (x, y) zusammenfällt. Sind nämlich ξ, η die Koordinaten eines in $\mathfrak{B}$ frei beweglichen Punktes, ist ferner zur Abkürzung

$$\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}=r$$

gesetzt und ist endlich $\omega(\xi, \eta)$ die am Punkt (ξ, η) herrschende Flächendichte und $\omega(x, y) \neq 0$, so wird die Funktion $\frac{\omega(\xi, \eta)}{r}$ der Veränderlichen ξ, η unendlich groß, wenn die Stelle (ξ, η) der festen Stelle (x, y) unbegrenzt nahe rückt. Es erscheint daher zunächst fraglich, ob man die übliche Erklärung des Potentials, welche für einen außerhalb der wirkenden Masse liegenden Aufpunkt gilt, durch die Festsetzung erweitern kann, daß das Potential in dem oben erwähnten Falle dem Ausdruck $\int^{(\mathfrak{B})} \frac{\omega(\xi, \eta)}{r} d\sigma$ gleich sein soll, auf den jene Erklärung führen würde.

Aber diese Ausdehnung ist, wie eine genauere Untersuchung zeigt, in der Tat möglich und ist daher auch allgemein angenommen. Die Funktion $\frac{\omega(\xi, \eta)}{r}$ ist nämlich über jeden Bereich $\mathfrak{B}'$ integrierbar, der übrig bleibt, wenn man aus $\mathfrak{B}$ irgend einen gewöhnlichen Bereich herausschneidet, der die Stelle (x, y) und alle in einer gewissen Nähe derselben liegenden Stellen von $\mathfrak{B}$ enthält. Ferner kann das Integral $\int^{(\mathfrak{B}')} \frac{\omega(\xi, \eta)}{r} d\sigma$ bei einer Verkleinerung des ausgeschnittenen Teiles, das heißt einer Vergrößerung von $\mathfrak{B}'$, niemals abnehmen, da die Funktion $\frac{\omega(\xi, \eta)}{r}$ nie negativ ist. Andererseits hat aber die Gesamtheit aller möglichen Werte des Integrales $\int^{(\mathfrak{B}')} \frac{\omega(\xi, \eta)}{r} d\sigma$ eine **endliche** obere Grenze G. Denn denkt man sich zwei Kreise mit dem Mittelpunkt (x, y), von denen der eine so klein ist, daß er keinen Punkt von $\mathfrak{B}'$ umschließt, der andere dagegen so groß, daß er alle Punkte von $\mathfrak{B}$ im Innern enthält, und versteht man unter r_1 und r_2 die Radien dieser Kreise und unter M den Maximalwert der Dichte $\omega(\xi, \eta)$ für den Bereich $\mathfrak{B}$, so ist, wie man leicht einsieht,

$$\overset{(\mathfrak{B}')}{\int}\frac{\omega(\xi,\eta)}{r}\,d\sigma < \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{M\varrho\, d\varrho\, d\varphi}{\varrho} = 2\pi M(r_2 - r_1) < 2\pi M r_2.$$

Daraus folgt nun, daß das Integral $\overset{(\mathfrak{B})}{\int}\frac{\omega(\xi,\eta)}{r}\,d\sigma$ in der Tat einen Sinn hat und mit der soeben als vorhanden nachgewiesenen oberen Grenze G übereinstimmt. Denn offenbar strebt das Integral $\overset{(\mathfrak{B}')}{\int}\frac{\omega(\xi,\eta)}{r}\,d\sigma$ auch jedesmal dieser Grenze zu, wenn der aus $\mathfrak{B}$ herausgeschnittene Flächenteil in irgend einer Weise um den Punkt (x, y) unbegrenzt zusammengezogen wird.

Ähnlich wie bei den bisherigen Voraussetzungen ist die Bedeutung eines Zeichens von der Form $\overset{(\mathfrak{B})}{\int} f(x, y)\,d\sigma$ auch dann zu erklären, wenn es in dem Bereiche $\mathfrak{B}$ mehrere Stellen gibt, an denen die Funktion $f(x, y)$ dieselben Eigentümlichkeiten darbietet wie eine Funktion der bisher betrachteten Art an der Stelle (x_0, y_0), aber alle diese Stellen in einen meßbaren Bereich von beliebig kleinem Inhalt eingeschlossen werden können.

Eine fernere Erweiterung des Begriffs eines Flächenintegrals bezieht sich auf den Fall, daß der Integrationsbereich sich ins Unendliche erstreckt. Ist nämlich eine Funktion $f(x, y)$ für einen Bereich $\mathfrak{B}$ erklärt, der nicht mehr endlich, dabei aber so beschaffen ist, daß dem in einem beliebigen gewöhnlichen Bereich enthaltenen Teile von $\mathfrak{B}$ stets ein Inhalt zukommt, und ist die Funktion $f(x, y)$ über jeden solchen Teil von $\mathfrak{B}$ integrierbar, so kann es vorkommen, daß das über einen endlichen meßbaren Teilbereich $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{B}$ erstreckte Integral $\overset{(\mathfrak{T})}{\int} f(x, y)\,d\sigma$ einem Grenzwert zustrebt, wenn man die Grenze von $\mathfrak{T}$, soweit sie nicht mit der Grenze von $\mathfrak{B}$ zusammenfällt, nach dem Unendlichen hinausrückt, und zwar immer demselben Grenzwert, einerlei wie diese Hinausschiebung erfolgt. Trifft dies zu, so stellt man diesen Grenzwert durch das Zeichen $\overset{(\mathfrak{B})}{\int} f(x, y)\,d\sigma$ dar. Anderenfalls hat das letztere keinen Sinn.

Ein leicht zu behandelndes Beispiel bietet das über die Fläche $\mathfrak{Q}$ des ersten Quadranten der xy-Ebene zu erstreckende Integral $\overset{(\mathfrak{Q})}{\int} e^{-(x^2+y^2)}\,d\sigma$. Denkt man sich nämlich von dem ersten Quadranten einen gewöhnlichen Bereich $\mathfrak{B}$ durch eine Linie $\mathfrak{l}$ abgetrennt, die von einem Punkte auf der positiven Hälfte der x-Achse bis zu einem Punkte auf der positiven Hälfte der y-Achse verläuft, und denkt man sich zugleich um den Nullpunkt als Mittelpunkt zwei Kreise beschrieben, von denen der eine keinen Punkt von $\mathfrak{l}$, der andere dagegen alle Punkte von $\mathfrak{l}$ umschließt, so ist, wenn $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ die im ersten Quadranten liegenden Teile der Flächen dieser Kreise bedeuten,

$$\overset{(\mathfrak{q}_1)}{\int} e^{-(x^2+y^2)}\,d\sigma \leqq \overset{(\mathfrak{B})}{\int} e^{-(x^2+y^2)}\,d\sigma < \overset{(\mathfrak{Q}_1)}{\int} e^{-(x^2+y^2)}\,d\sigma,$$

da die Funktion $e^{-(x^2+y^2)}$ dauernd positiv ist. Nun ist aber, wenn r den Radius des kleinen und R den des großen Kreises bedeutet,

$$\overset{(\mathfrak{q}_1)}{\int} e^{-(x^2+y^2)}\,d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^r e^{-\varrho^2}\varrho\,d\varrho\,d\varphi = \frac{\pi}{4}\Big[-e^{-\varrho^2}\Big]_0^r = \frac{\pi}{4}(1-e^{-r^2})$$

und ebenso

$$\overset{(\mathfrak{Q}_1)}{\int} e^{-(x^2+y^2)}\,d\sigma = \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}).$$

Folglich ist

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-r^2}) \leqq \overset{(\mathfrak{B})}{\int} e^{-(x^2+y^2)}\,d\sigma < \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}).$$

Schiebt man nun die Linie $\mathfrak{l}$ nach dem Unendlichen hinaus, so wird R unendlich groß. Gleichzeitig kann man aber auch r unendlich groß werden lassen. Tut man dies, so nähern sich die äußeren Glieder der vorstehenden Ungleichung beide dem Grenzwert $\frac{\pi}{4}$. Folglich muß auch das mittlere Glied stets dem gleichen Grenzwert zustreben, d. h. das Integral $\overset{(\mathfrak{Q})}{\int} e^{-(x^2+y^2)}\,d\sigma$ hat einen Sinn und es ist

(1457) $$\overset{(\mathfrak{Q})}{\int} e^{-(x^2+y^2)}\,d\sigma = \frac{\pi}{4}.$$

Läßt man die im vorangehenden benutzte Abschlußlinie $\mathfrak{l}$ aus zwei zu den Koordinatenachsen parallelen Strecken bestehen, die von diesen den Abstand b haben, so daß $\mathfrak{B}$ ein Quadrat wird, so geht die vorstehende Gleichung über in

$$\lim_{b=\infty}\int_0^b\int_0^b e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx=\frac{\pi}{4}.$$

Nun ist aber

$$\int_0^b\int_0^b e^{-(x^2+y^2)}dy\,dx=\int_0^b[e^{-x^2}\int_0^b e^{-y^2}dy]dx$$

$$=\int_0^b e^{-y^2}dy\cdot\int_0^b e^{-x^2}dx=\left[\int_0^b e^{-x^2}dx\right]^2.$$

Folglich muß

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{1458}$$

sein. Diese Gleichung findet in der Lehre von der Ausgleichung der Beobachtungsfehler Anwendung und ist auf direktem Wege nicht zu gewinnen, da das unbestimmte Integral der Funktion e^{-x^2} nicht in geschlossener Form darstellbar ist.

Auch der Begriff eines Raumintegrals (und ebenso auch der eines Integrales, das über einen Bereich von mehr als drei Dimensionen zu erstrecken ist) wird in ähnlicher Weise wie der eines Flächenintegrals sowohl auf den Fall ausgedehnt, daß die zu integrierende Funktion im Integrationsbereich nicht mehr beschränkt ist, als auch auf den, daß der Integrationsbereich sich ins Unendliche erstreckt. Die leitenden Gedanken bleiben dabei dieselben wie bisher, so daß hier von einer genaueren Ausführung dieser Erweiterungen abgesehen werden kann. Insbesondere ergibt sich, daß dasjenige Integral, welches das Potential einer einen gewöhnlichen Körper erfüllenden Masse von stetiger Dichte darstellt, auch dann einen Sinn behält, wenn der Aufpunkt im Innern oder auf der Grenze dieses Körpers liegt.

Im Gegensatz zu den in früheren Abschnitten erklärten eigentlichen Flächen- und Raumintegralen heißen alle diejenigen als Grenzwerte eigentlicher Flächen- und Raumintegrale erscheinenden Integrale, die sich durch die vorangehenden Begriffs-erweiterungen ergeben, **uneigentliche Flächen- und Raumintegrale.**

537. Differentiation und Integration eines uneigentlichen Integrales. — Die in Nr. **484** und **487** gegebenen Regeln für die Differentiation und die Integration eines bestimmten Integrales in bezug auf einen Parameter bleiben in vielen Fällen auch für uneigentliche Integrale gültig, können aber bei solchen Integralen auch unrichtig werden. Deswegen bedarf jede Anwendung einer dieser Regeln auf ein uneigentliches Integral einer besonderen je nach den Umständen in verschiedener Weise zu erledigenden Rechtfertigung. Hier möge es genügen, zwei Beispiele solcher Rechtfertigungen anzuführen.

1. — Differentiation der Gammafunktion. Die bereits in Nr. **535** durch die Gleichung

$$\Pi(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx \tag{1453}$$

für $n > -1$ erklärte Funktion des Argumentes n ist für jeden zulässigen Wert dieses Argumentes differenzierbar, und ihre Ableitung kann dadurch gebildet werden, daß man unter dem Integralzeichen partiell nach n differenziert, das heißt, es ist

$$\Pi'(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^n \lg x \, dx. \tag{1459}$$

Denn ist $(n+h)$ irgend eine von n verschiedene oberhalb (-1) liegende Zahl, so ist

$$\frac{\Pi(n+h) - \Pi(n)}{h} = \int_0^\infty e^{-x} \frac{x^{n+h} - x^n}{h} \, dx = \lim_{\xi = +0} \int_\xi^\infty e^{-x} \frac{x^{n+h} - x^n}{h} \, dx.$$

Nun ist aber für $x > 0$ nach dem Taylorschen[1]) Satz

$$x^{n+h} = x^n + h x^n \lg x + \frac{1}{2} h^2 x^{n+\vartheta h} (\lg x)^2$$

oder

$$\frac{x^{n+h} - x^n}{h} = x^n \lg x + \frac{1}{2} h x^{n+\vartheta h} (\lg x)^2,$$

1) Man könnte auch mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung auskommen, da der zu führende Beweis sich auch in ähnlicher Weise erbringen ließe, wie der bei dem nachfolgenden Beispiel **2** unter **C** gegebene Beweis.

wo $0<\vartheta<1$ ist. Folglich ist

$$\frac{\Pi(n+h)-\Pi(n)}{h}=\int_0^\infty e^{-x}x^n \lg x\,dx+\frac{1}{2}h\int_0^\infty e^{-x}x^{n+\vartheta h}(\lg x)^2\,dx.$$

Beschränkt man nun h durch die Bedingung, daß

$$-\frac{n+1}{2}<h<1$$

sein soll, so ist

$$\frac{n-1}{2}<n+\vartheta h<n+1,$$

also

$$0<\int_0^\infty e^{-x}x^{n+\vartheta h}(\lg x)^2\,dx<\int_0^1 e^{-x}x^{\frac{n-1}{2}}(\lg x)^2\,dx$$
$$+\int_1^\infty e^{-x}x^{n+1}(\lg x)^2\,dx.$$

Das Integral $\int_0^\infty e^{-x}x^{n+\vartheta h}(\lg x)^2\,dx$ bleibt somit bei unendlich klein werdendem h zwischen festen endlichen Grenzen enthalten. Dies hat zur Folge, daß das Produkt $\frac{1}{2}h\int_0^\infty e^{-x}x^{n+\vartheta h}(\lg x)^2\,dx$ gegen Null konvergiert. Also ist die Funktion $\Pi(n)$ wirklich differenzierbar, und ihre Ableitung wird auch durch die Gleichung (1459) gegeben.

Ganz ebenso würde sich zeigen lassen, daß auch alle Ableitungen höherer Ordnung der Funktion $\Pi(n)$ vorhanden sind und durch Differentiation unter dem Integralzeichen gewonnen werden können.

2. — Berechnung des Integrales $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$

A. — Das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ ist der Wert, den die für $0\leqq y$ durch die Gleichung

$$F(y)=\int_0^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx \tag{1460}$$

erklärte Funktion $F(y)$ des Argumentes y für $y=0$ erwirbt.

B. — Die Funktion $F(y)$ ist an der unteren Grenze 0 des Wertbereichs der Veränderlichen y stetig, das heißt, es ist

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{y=+0} \int_0^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Für jeden positiven Wert von b ist nämlich

$$(1461)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \\ \displaystyle\quad = \int_0^b (e^{-yx}-1)\frac{\sin x}{x}\,dx + \int_b^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx - \int_b^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx. \end{cases}$$

Nun ist aber nach der einfachsten Form des zweiten Mittelwertsatzes für jede oberhalb b liegende Zahl c

$$\int_b^c e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_b^c \frac{e^{-yx}}{x}\sin x\,dx = \frac{e^{-yb}}{b}(\cos b - \cos \xi),$$

wo $b \leqq \xi \leqq c$ ist, also

$$\left|\int_b^c e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqq \frac{2e^{-yb}}{b}$$

und daher auch

$$\left|\int_b^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqq \frac{2e^{-yb}}{b} < \frac{2}{b}.$$

Ferner ist, wie sich ebenso ergibt,

$$\left|\int_b^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqq \frac{2}{b}.$$

Endlich kann das auf der rechten Seite der Gleichung (1461) an erster Stelle stehende Integral $\int_0^b (e^{-yx}-1)\frac{\sin x}{x}\,dx$ bei festgehaltenem Werte von b dem Werte 0 dadurch beliebig nahe gebracht werden, daß man y unter einer gewissen Grenze annimmt. Nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen positiven Konstanten ε kann man daher, indem man zuerst für b eine oberhalb $\frac{6}{\varepsilon}$ liegende Konstante wählt und dann eine zweite positive Konstante p passend bestimmt, stets erreichen, daß für $0 < y < p$

$$\left|\int_0^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}dx - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

wird, womit die Behauptung bewiesen ist.

C. — Die Funktion $F(y)$ ist für alle positiven Werte von y differenzierbar, und ihre Ableitung kann für diese Werte dadurch gebildet werden, daß man unter dem Integralzeichen partiell nach y differenziert, das heißt, es ist für $y > 0$

$$F'(y) = -\int_0^\infty e^{-yx}\sin x\,dx. \tag{1462}$$

Sind nämlich y und $(y+h)$ irgend zwei verschiedene positive Zahlen, so ist

$$\frac{F(y+h)-F(y)}{h} = \int_0^\infty \frac{e^{-(y+h)x}-e^{-yx}}{h}\frac{\sin x}{x}dx,$$

also nach dem Mittelwertsatz [1]) der Differentialrechnung

$$\frac{F(y+h)-F(y)}{h} = -\int_0^\infty e^{-(y+\vartheta h)x}\sin x\,dx,$$

wo ϑ eine beständig zwischen 0 und 1 liegende Funktion von x bedeutet. Dieser Gleichung kann man aber die Gestalt

$$\left\{\begin{aligned}\frac{F(y+h)-F(y)}{h} &= -\int_0^\infty e^{-yx}\sin x\,dx\\ &\quad+\int_0^\infty\left[e^{-yx}-e^{-(y+\vartheta h)x}\right]\sin x\,dx\end{aligned}\right. \tag{1463}$$

geben und hat daher nachzuweisen, daß der zweite Teil der rechten Seite bei verschwindendem h ebenfalls unendlich klein wird.

Nun ist für jeden positiven Wert von b

$$\begin{aligned}\int_0^\infty[e^{-yx}-e^{-(y+\vartheta h)x}]\sin x\,dx &= \int_0^b[e^{-yx}-e^{-(y+\vartheta h)x}]\sin x\,dx\\ &\quad+\int_b^\infty e^{-yx}\sin x\,dx - \int_b^\infty e^{-(y+\vartheta h)x}\sin x\,dx.\end{aligned}$$

Ferner ist

1) Der Beweis könnte auch mit Hilfe des Taylorschen Satzes in ähnlicher Weise wie bei dem vorangehenden Beispiel **1** geführt werden.

$$\left|\int_b^\infty e^{-yx}\sin x\,dx\right| < \int_b^\infty e^{-yx}\,dx = \frac{1}{y}e^{-yb}$$

und, wenn man den Zuwachs h von vorn herein der Bedingung unterwirft, daß $|h| < \frac{1}{2}y$ sein soll,

$$\left|\int_b^\infty e^{-(y+\vartheta h)x}\sin x\,dx\right| < \int_b^\infty e^{-\frac{1}{2}yx}\,dx = \frac{2}{y}e^{-\frac{1}{2}yb}.$$

Man kann daher, wenn eine beliebig kleine positive Konstante ε gegeben ist, durch passende Wahl der Konstanten b stets erreichen, daß jedes der beiden Integrale $\int_b^\infty e^{-yx}\sin x\,dx$ und $\int_b^\infty e^{-(y+\vartheta h)x}\sin x\,dx$ absolut genommen kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ wird. Hierzu ist ja nur nötig, über b so zu verfügen, daß

$$\frac{2}{y}e^{-\frac{1}{2}yb} < \frac{\varepsilon}{3}$$

wird, das heißt,

$$b > \frac{2}{y}\lg\frac{6}{\varepsilon y}$$

zu nehmen. Ist dies geschehen, so kann man ferner eine positive Konstante k so bestimmen, daß für $|h| < k$

$$\left|\int_0^b [e^{-yx} - e^{-(y+\vartheta h)x}]\sin x\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

also auch

$$\left|\int_0^\infty [e^{-yx} - e^{-(y+\vartheta h)x}]\sin x\,dx\right| < \varepsilon$$

wird. Das heißt aber mit Rücksicht auf die Gleichung (1463), die Funktion $F(y)$ ist für jeden positiven Wert von y differenzierbar, und ihre Ableitung wird durch die Gleichung (1462) gegeben.

D. — Das Integral $\int_0^\infty e^{-yx}\sin x\,dx$ läßt sich direkt berechnen. Nach Gleichung (1224), Nr. **443**, ist nämlich

$$\int e^{-yx}\sin x\,dx = -e^{-yx}\frac{y\sin x + \cos x}{1+y^2}$$

und daher

$$\int_0^\infty e^{-yx} \sin x\, dx = \frac{1}{1+y^2}.$$

Folglich ist

$$F'(y) = -\frac{1}{1+y^2},$$

also

$$F(y) = C - \operatorname{arctg} y,$$

wo C eine Konstante bedeutet und unter dem Zeichen arctg der Hauptwert verstanden werden kann. Nun wird aber $F(y)$ bei unbegrenzt wachsendem y unendlich klein. Denn da bei positivem x immer $\left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1$ ist, folgt aus der Gleichung (1460)

$$|F(y)| < \int_0^\infty e^{-yx}\, dx = \frac{1}{y}.$$

Folglich muß die Konstante C den Wert $\frac{\pi}{2}$ haben, und es ist daher

(1464) $$F(y) = \int_0^\infty e^{-yx} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y.$$

Hieraus ergibt sich nun schließlich, da nach dem unter **A** und **B** bemerkten $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim\limits_{y=+0} F(y)$ ist,

(1465) $$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Diese Gleichung ist für die Lehre von den sogenannten Fourierschen Reihen von grundlegender Bedeutung.

Dreiundzwanzigster Abschnitt.

Differentialgleichungen.

Erklärungen und allgemeine Sätze.

538. Beispiele. — 1. — Wenn ein starrer Körper, wie z. B. ein an einer Feder hängendes Gewicht oder ein auf Federn ruhender Wagenkasten, durch elastische Verbindungen in einer gewissen Gleichgewichtslage gehalten wird, dabei aber doch parallel zu einer gegebenen Geraden hin und her gehende Bewegungen ausführen kann, so ist die Kraft, welche ihn im Falle einer Ablenkung aus der Gleichgewichtslage in diese zurückzuführen strebt, in vielen Fällen nahezu der Größe der Ablenkung proportional. Dies gilt zunächst, wenn der Körper in einer anderen als seiner Gleichgewichtslage in Ruhe gehalten wird. Aber es gilt, wenn der Körper nach einer anfänglichen Verschiebung aus seiner Gleichgewichtslage sich selbst überlassen bleibt, sehr oft auch hinreichend genau für jeden einzelnen Augenblick der dann einsetzenden Schwingungsbewegung, obwohl dabei die elastischen Verbindungen wegen ihres Mitschwingens nicht ganz ebenso wirken wie im Fall der Ruhe. Zur Lösung von Aufgaben, die sich auf Schwingungen elastisch befestigter Körper beziehen, ist es daher wichtig, die folgende theoretische Frage zu beantworten:

Auf der ersten Achse eines räumlichen Parallelkoordinatensystems, in bezug auf welches das Trägheitsgesetz gilt, ist ein materieller Punkt P von der gegebenen Masse m beweglich. Derselbe hat zu der gegebenen Zeit t_0 die erste Koordinate x_0 und die Geschwindigkeit v_0 und unterliegt der Einwirkung einer Kraft, die beständig gegen den Koordinatenanfang hin gerichtet ist und der Größe nach jederzeit durch das Produkt einer gegebenen positiven Konstanten a^2 mit dem Abstand des Punktes P vom Koordinatenanfang gegeben wird. In welcher Weise hängt dann die erste Koordinate x des Punktes P von der Zeit t ab?

In anderen Worten heißt dies, man soll eine wenigstens zweimal differenzierbare Funktion x der Zeit t so bestimmen, daß sie und ihre Ableitung für $t = t_0$ beziehentlich die Werte x_0 und v_0 erwerben und daß für jeden beliebigen Wert von t

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -a^2x \tag{1466}$$

ist.

Die eigentümliche Schwierigkeit dieser Aufgabe, deren Lösung in Nr. **560** gegeben werden wird, besteht darin, daß die zweite Ableitung der unbekannten Funktion nicht als Funktion der unabhängigen Veränderlichen t gegeben, sondern statt dessen eine Gleichung vorgeschrieben ist, die zwischen der zweiten Ableitung und der unbekannten Funktion selbst bestehen soll. Wäre für die zweite Ableitung ein nur die Veränderliche t enthaltender Ausdruck $\varphi(t)$ gegeben, so könnte man aus der Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(t)$$

durch Integration sofort die Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = \int \varphi(t)\,dt + C_1$$

gewinnen, wo C_1 eine Konstante bedeutet, und erhielte hieraus durch abermalige Integration

$$x = \int\left(\int \varphi(t)\,dt\right)dt + C_1 t + C_2,$$

wo auch C_2 eine Konstante bezeichnet. Man hätte also nur zwei unbestimmte Integrale zu berechnen und dann noch die Konstanten C_1 und C_2 so zu bestimmen, daß die Nebenbedingungen $x = x_0$ und $\frac{dx}{dt} = v_0$ für $t = t_0$ erfüllt werden. Aber tatsächlich ist $\frac{d^2x}{dt^2}$ nicht als Funktion von t, sondern als Funktion von x gegeben, und deswegen handelt es sich um eine Aufgabe anderer Art, nämlich, wie man zu sagen pflegt, um die Integration einer Differentialgleichung.

Bei der Betrachtung hin und her gehender Schwingungen eines starren Körpers hat man öfters auch auf den hemmenden Einfluß von Luft- und Reibungswiderständen Rücksicht zu nehmen. Wie die Erfahrung lehrt, kann dies in manchen Fällen mit genügender Näherung durch die Annahme geschehen, daß zu der von den elastischen Verbindungen herrührenden Kraft noch eine weitere Kraft hinzutritt, die stets der augenblicklichen Geschwindigkeit des Körpers entgegen gerichtet und der Größe nach durch das Produkt des absoluten Wertes dieser Geschwindigkeit mit einer positiven Konstanten 2λ gegeben ist. Denkt man sich dann den schwingenden Körper so wie zuvor durch einen materiellen Punkt abgebildet, so kommt man, wie leicht einzusehen, auf die etwas verwickeltere Differentialgleichung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2\lambda\frac{dx}{dt} - a^2x, \tag{1467}$$

die ebenfalls in Nr. **560** behandelt werden wird.

2. — In einem Rechteck, in welchem das eine Paar gegenüberliegender Seiten im Verhältnis zum anderen als unendlich lang angesehen werden darf, seien die beiden längeren Seiten von zwei konstanten, gleich starken und gleich gerichteten elektrischen Strömen durchflossen. Durch die Mitten A_1, A_2 dieser Seiten sei senkrecht zu ihnen eine Ebene $\mathfrak{E}$ gelegt. Endlich werde vorausgesetzt, die Stromkreise, welche die längeren Rechtecksseiten enthalten, seien so gestaltet, daß bei Annahme des Elementargesetzes von Biot und Savart (vgl. Nr. **471**, **2**) in der Nähe der Strecke A_1A_2 nur die von diesen Rechtecksseiten ausgehenden magnetischen Kräfte in Betracht kommen, die Wirkung aller übrigen Stromteile dagegen vernachlässigt werden darf. Man soll unter diesen Annahmen und bei Einschränkung der Betrachtung auf eine hinreichend enge Umgebung der Strecke A_1A_2 die in der Ebene $\mathfrak{E}$ liegenden magnetischen Kraftlinien ermitteln, d. h. diejenigen Linien, bei welchen die an einem beliebigen Punkte herrschende magnetische Kraft stets in die in diesem Punkte berührende Tangente fällt.

Zur Behandlung dieser Aufgabe denke man sich in der Ebene $\mathfrak{E}$ ein System rechtwinkeliger Koordinaten x, y so angenommen, daß sein Anfang O mit dem Mittelpunkt der Strecke A_1A_2 und seine x-Achse mit der Geraden A_1A_2 zusammenfällt und seine positive Drehungsrichtung zu der Richtung der in A_1 und A_2 die Ebene $\mathfrak{E}$ kreuzenden Ströme wie bei einer Rechtsschraube liegt. Sind dann

$(-a)$ und a die Abszissen der Punkte A_1, A_2,

x, y die Koordinaten eines in $\mathfrak{E}$ liegenden weder mit A_1 noch mit A_2 zusammenfallenden Magnetpols von der Stärke Eins und

J die Stromstärke,

so ist die Kraft, welche der in A_1 auf $\mathfrak{E}$ senkrecht stehende Strom auf den Magnetpol ausübt, nach Nr. **534** gleich $\frac{2J}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}$.

Diese Kraft hat ferner die Richtungskosinus

$$-\frac{y}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}; \quad \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}},$$

also die Komponenten

$$-\frac{2Jy}{(x+a)^2+y^2}; \quad \frac{2J(x+a)}{(x+a)^2+y^2}.$$

Ganz ebenso erhält man für die Komponenten der magnetischen Kraft, welche der durch A_2 gehende Strom ausübt, die Werte

$$-\frac{2Jy}{(x-a)^2+y^2}; \quad \frac{2J(x-a)}{(x-a)^2+y^2}.$$

Bei gleichzeitiger Wirkung beider Ströme herrscht daher am Ort (x, y) eine magnetische Kraft mit den Komponenten

$$-2Jy\left[\frac{1}{(x+a)^2+y^2}+\frac{1}{(x-a)^2+y^2}\right];$$

$$2J\left[\frac{x+a}{(x+a)^2+y^2}+\frac{x-a}{(x-a)^2+y^2}\right].$$

Folglich muß zwischen den Koordinaten x, y eines beliebigen nicht auf der x-Achse liegenden Punktes von $\mathfrak{C}$ und der Steigung $\frac{dy}{dx}$ der durch ihn gehenden magnetischen Kraftlinie die Gleichung

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{x+a}{(x+a)^2+y^2}+\dfrac{x-a}{(x-a)^2+y^2}}{y\left[\dfrac{1}{(x+a)^2+y^2}+\dfrac{1}{(x-a)^2+y^2}\right]}$$

bestehen, der man nach naheliegenden Vereinfachungen auch die Form

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x(x^2+y^2-a^2)}{y(x^2+y^2+a^2)} \tag{1468}$$

geben kann. Auch hier läuft also die Lösung der gestellten Aufgabe darauf hinaus, eine vorläufig unbekannte differenzierbare Funktion y einer Veränderlichen x aus einer gegebenen Differentialgleichung zu bestimmen, d. h. einer vorgeschriebenen Gleichung, die zwischen x, y und der Ableitung $\frac{dy}{dx}$ bestehen soll. Wegen der weiteren Behandlung dieser Aufgabe vgl. Nr. 551.

3. — Zu einem als Differentialgleichung zu bezeichnenden Ansatz kommt man auch bei der Behandlung der schon in

Nr. **135,** 3 aufgeworfenen Frage, mit welcher Geschwindigkeit ein materieller Punkt P auf der Oberfläche eines kugelförmigen homogenen oder aus homogenen konzentrischen Kugelschalen bestehenden Weltkörpers $\mathfrak{K}$ ankommt, wenn er sich ursprünglich in der sehr großen Entfernung a von dem Mittelpunkt C des Körpers in bezug auf den letzteren in Ruhe befand und dann lediglich durch die Anziehung des Körpers getrieben auf diesen herabfällt. Ist nämlich r der Abstand der Punkte C und P, sind ferner m und M die Massen von P und $\mathfrak{K}$ und ist m im Verhältnis zu M verschwindend klein[1]), so gilt die Gleichung $m\frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{mM}{r^2}$ oder

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{M}{r^2}, \tag{1469}$$

und zu dieser treten, wenn man sich die Zeit vom Beginn des Falles an gerechnet denkt, noch die Nebenbedingungen, daß r und $\frac{dr}{dt}$ für $t=0$ beziehentlich die Werte a und 0 erwerben sollen. Hieraus ist r als Funktion von t (oder, was sich noch leichter ermöglichen läßt, $\frac{dr}{dt}$ als Funktion von r) zu bestimmen (vgl. Nr. 557) und dann der Wert zu ermitteln, den die Ableitung $\frac{dr}{dt}$ in dem Augenblick annimmt, wo r dem Radius des Weltkörpers gleich-

1) Bei dieser Annahme gilt nämlich in einem Koordinatensystem, dessen Grundfigur gegen $\mathfrak{K}$ fest ist, das Trägheitsgesetz mit hinreichender Genauigkeit. Anderenfalls kann man, da neben der gegenseitigen Anziehung von $\mathfrak{K}$ und P keine anderen Kräfte in Betracht kommen sollen, ein Koordinatensystem, in welchem das Trägheitsgesetz gilt, so annehmen, daß die Gerade CP gegen die Grundfigur des Systems fest bleibt, kann sich sodann auf CP einen beliebigen festen Punkt O als Nullpunkt und die Richtung CP als positive Richtung gewählt denken und erhält hierauf für die Abszissen x_1, x_2 der Punkte C und P in bezug auf O zur Zeit t die Gleichungen

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = G\frac{mM}{(x_2-x_1)^2}; \qquad m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -G\frac{mM}{(x_2-x_1)^2}$$

und hieraus, wenn man bedenkt, daß $x_2 - x_1 = r$ ist, nach Division durch M, beziehungsweise m, durch Subtraktion die Gleichung

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{M+m}{r^2},$$

also dieselbe Gleichung wie im Text, nur mit dem Unterschied, daß an die Stelle der Konstanten M die Summe $(M+m)$ getreten ist.

kommt. Auch jetzt ist also als hauptsächlichste von der unbekannten Funktion zu erfüllende Bedingung eine Gleichung vorgeschrieben, die zwischen der Funktion und ihrer zweiten Ableitung bestehen soll.

4. — Zu Ansätzen, deren äußere Form noch verwickelter ist als die der bisherigen, führt die Betrachtung der Planetenbewegung. Im aller einfachsten Fall handelt es sich dabei um folgende Aufgabe: In einem rechtwinkeligen räumlichen Koordinatensystem, für welches das Trägheitsgesetz gilt, sind die Lagen und die Geschwindigkeiten zweier frei beweglichen materiellen Punkte von den gegebenen Massen m_1 und m_2 für einen gegebenen Wert der Zeit durch Angabe der Werte bestimmt, welche die Koordinaten und die Geschwindigkeitskomponenten der betrachteten Punkte zu dieser Zeit haben. Beide Punkte wirken aufeinander nach Newtons Anziehungsgesetz. Welche Werte haben ihre Koordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 zu der beliebigen Zeit t?

Bringt man für jeden einzelnen Punkt zum Ausdruck, daß die Produkte seiner Masse mit seinen Beschleunigungskomponenten den Komponenten der auf ihn wirkenden Kraft gleichkommen müssen, so erhält man, wenn man wieder unter G die Gravitationskonstante versteht und zur Abkürzung

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=r$$

setzt, die sechs Gleichungen

$$(1470)\quad \begin{aligned} m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}&=G\frac{m_1m_2(x_2-x_1)}{r^3}; & m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}&=G\frac{m_1m_2(x_1-x_2)}{r^3}\\ m_1\frac{d^2y_1}{dt^2}&=G\frac{m_1m_2(y_2-y_1)}{r^3}; & m_2\frac{d^2y_2}{dt^2}&=G\frac{m_1m_2(y_1-y_2)}{r^3}\\ m_1\frac{d^2z_1}{dt^2}&=G\frac{m_1m_2(z_2-z_1)}{r^3}; & m_2\frac{d^2z_2}{dt^2}&=G\frac{m_1m_2(z_1-z_2)}{r^3}. \end{aligned}$$

Hier ist im Gegensatz zu den zuvor erwähnten Beispielen die zweite Ableitung jeder einzelnen der sechs gesuchten Funktionen $x_1, y_1, \cdots z_2$ durch einen Ausdruck gegeben, der nicht nur die betreffende Funktion, sondern auch die übrigen unbekannten Funktionen enthält. Man sieht sich also vor die Aufgabe gestellt, sechs unbekannte Funktionen einer Veränderlichen aus gewissen Anfangsbedingungen und einem sogenannten System von Differentialgleichungen zu bestimmen, das heißt einem

System von Gleichungen, durch welche die Ableitungen der gesuchten Funktionen, und zwar im vorliegenden Fall nur die zweiten Ableitungen, mit diesen Funktionen und in anderen Fällen auch mit der unabhängigen Veränderlichen selbst derart verknüpft sind, daß in ein und dieselbe Gleichung mehrere der unbekannten Funktionen eingehen.

539. Begriff einer Differentialgleichung. — Erklärung: *Unter einer* **gewöhnlichen** *oder* **totalen Differentialgleichung** *versteht man die Forderung, eine differenzierbare und gegebenenfalls auch wiederholt differenzierbare Funktion einer reellen oder komplexen Veränderlichen so zu bestimmen, daß zwischen der unabhängigen Veränderlichen, der gesuchten Funktion und einer endlichen Anzahl ihrer aufeinander folgenden Ableitungen eine vorgeschriebene Gleichung besteht.*

Dabei muß die vorgeschriebene Gleichung wenigstens eine der aufeinander folgenden Ableitungen der gesuchten Funktion wirklich enthalten, da es sich sonst nicht um eine Differentialgleichung, sondern um eine gewöhnliche Gleichung zwischen der unabhängigen Veränderlichen und der Funktion handeln würde. Man unterscheidet demgemäß je nach der Ordnungszahl der höchsten wirklich vorkommenden Ableitung Differentialgleichungen erster, zweiter, $\cdots$ Ordnung, indem man ganz allgemein die Ordnungszahl der höchsten in einer Differentialgleichung wirklich auftretenden Ableitung als die **Ordnung der Differentialgleichung** bezeichnet.

Ähnlich wie eine Funktion von mehreren Veränderlichen tatsächlich von einigen dieser Veränderlichen unabhängig sein kann, brauchen in einer Differentialgleichung n-ter Ordnung neben der n-ten Ableitung der gesuchten Funktion nicht auch noch alle ihre Ableitungen niedrigerer Ordnung sowie die gesuchte Funktion und die unabhängige Veränderliche selbst vorzukommen. Es ist vielmehr durchaus zulässig, daß die unabhängige Veränderliche, die gesuchte Funktion und deren Ableitungen niedrigerer Ordnung zum Teil oder auch sämtlich fehlen.

Obwohl der Begriff einer Differentialgleichung an sich nicht verlangt, daß die unabhängige Veränderliche und die gesuchte Funktion auf reelle Werte eingeschränkt seien, soll doch im nachfolgenden, wofern das Gegenteil nicht ausdrücklich angegeben wird, von der Heranziehung des Imaginären abgesehen und demgemäß durchweg vorausgesetzt werden, daß für die vorkommenden Konstanten und Veränderlichen nur reelle Werte in Frage kommen.

Nach den obigen Erklärungen ist schon die früher behandelte Aufgabe, das unbestimmte Integral einer für ein Intervall gegebenen und dort stetigen Funktion $f(x)$ zu finden, nichts weiter als ein besonderer Fall einer Differentialgleichung erster Ordnung. Denn es handelt sich ja dabei um die Ermittelung einer Funktion y von x, welche der Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} - f(x) = 0 \tag{1471}$$

genügt. Die Besonderheit dieser Differentialgleichung besteht darin, daß sie die gegebene Funktion y selbst gar nicht enthält, sondern nur die unabhängige Veränderliche x und die Ableitung $\frac{dy}{dx}$, und weiter darin, daß x und $\frac{dy}{dx}$ nicht durch eine erst noch aufzulösende Gleichung verbunden sind, sondern $\frac{dy}{dx}$ direkt als Funktion von x gegeben ist.

Ein verwickelteres Beispiel einer Differentialgleichung erster Ordnung ist in Nr. **538** unter **2** angeführt.

Beispiele von Differentialgleichungen zweiter Ordnung finden sich ebenfalls in Nr. **538**, und zwar unter **1** und **3**. Diese Beispiele sind der äußeren Form nach verhältnismäßig einfach, da die unabhängige Veränderliche t in keiner der angeführten Differentialgleichungen für sich allein vorkommt und in zweien von ihnen auch die erste Ableitung der unbekannten Funktion fehlt.

Die im vorangehenden erklärten Differentialgleichungen heißen total oder gewöhnlich, um sie dadurch von einer anderen Art von Differentialgleichungen zu unterscheiden, die man als partielle Differentialgleichungen zu bezeichnen pflegt. Ähnlich wie bei einer Funktion einer einzigen Veränderlichen kann man nämlich auch bei einer Funktion von mehreren unabhängigen Veränderlichen die Forderung stellen, daß zwischen den unabhängigen Veränderlichen und den zugehörigen Werten der Funktion und ihrer partiellen Ableitungen bis hinauf zu den Ableitungen einer gegebenen Ordnung eine vorgeschriebene Gleichung bestehe. Jede derartige Forderung nennt man eine **partielle Differentialgleichung,** hat es also bei einer solchen stets mit der Ermittelung einer Funktion von mehreren Veränderlichen zu tun, während es sich bei einer totalen Differentialgleichung immer nur um eine Funktion einer einzigen Veränderlichen handelt.

Die Lehre von den partiellen Differentialgleichungen ist für die verschiedensten Anwendungsgebiete der Mathematik von der allergrößten Wichtigkeit, liegt aber gänzlich außerhalb des Rahmens dieses Werkes.

540. Partikuläre Integrale. — Jede einer gegebenen totalen Differentialgleichung genügende Funktion heißt ein **partikuläres Integral** oder kurz ein **Integral** der Differentialgleichung. Das Wort Integral wird also in der Lehre von den Differentialgleichungen in allgemeinerem Sinne gebraucht wie in manchen anderen Teilen der Mathematik, indem dasselbe nicht nur zur Bezeichnung einer Funktion y dient, die einer Differentialgleichung von der besonderen Form $\frac{dy}{dx} = f(x)$ genügt, sondern auch zur Bezeichnung solcher Funktionen, die Differentialgleichungen von verwickelterer Form erfüllen.

Eine Differentialgleichung integrieren heißt, alle ihre partikulären Integrale finden.

541. Geometrische Bedeutung einer Differentialgleichung. — Ist $f(x, y)$ eine für einen zweifach ausgedehnten Bereich $\mathfrak{B}$ erklärte Funktion der rechtwinkeligen ebenen Koordinaten x, y, so kann man der durch die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1472}$$

ausgedrückten Forderung die folgende geometrische Fassung geben: Es wird ein in $\mathfrak{B}$ liegendes Linienstück von solcher Beschaffenheit gesucht, daß seine Steigung in einem beliebigen Punkte stets durch die gegebene Funktion $f(x, y)$ der Koordinaten x, y dieses Punktes dargestellt wird. Die gegebene Differentialgleichung ordnet eben jedem Punkte von $\mathfrak{B}$ eine durch ihn gehende Gerade zu, und ihre Integration verlangt, ein Linienstück so zu ziehen, daß seine Tangente in jedem Punkte mit der diesem Punkte zugeordneten Geraden übereinstimmt.

Gewisse geometrische Überlegungen geben ferner Grund zu der Erwartung, daß man zu der eben angegebenen Hauptbedingung noch die Nebenforderung hinzufügen darf, das gesuchte Linienstück solle von einem innerhalb $\mathfrak{B}$ nach Belieben angenommenen Punkte ausgehen. Denn ist $P_0(x_0, y_0)$ irgend ein innerhalb $\mathfrak{B}$ liegender

Punkt, so kann man zunächst durch P_0 eine Gerade ziehen, deren Steigung gleich $f(x_0, y_0)$ ist, sodann auf dieser nach der einen Seite hin, etwa nach rechts, bis zu einem von P_0 verschiedenen, aber noch in $\mathfrak{B}$ liegenden Punkte P_1 fortschreiten, dessen Koordinaten x_1, y_1 heißen mögen, durch P_1 eine Gerade mit der Steigung $f(x_1, y_1)$ hindurchlegen, dann auf dieser in dem gleichen Sinne weiter fortschreitend einen neuen immer noch in $\mathfrak{B}$ liegenden Punkt $P_2(x_2, y_2)$ annehmen, durch diesen wieder eine Gerade legen, deren Steigung jetzt gleich $f(x_2, y_2)$ ist, und so fort, und es liegt dann die Vermutung nahe, daß es ein ganz bestimmtes von P_0 ausgehendes Linienstück gibt, dem sich die gebrochene Linie $P_0 P_1 P_2 P_3 \cdots$ bei hinreichender Verkleinerung der Strecken $P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, \cdots$ und hinreichender Vermehrung ihrer Anzahl jedesmal beliebig eng anschmiegt und welches den Verlauf einer die gegebene Differentialgleichung erfüllenden Funktion geometrisch darstellt. Wie sich später zeigen wird, trifft dies unter gewissen sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Beschaffenheit der Funktion $f(x, y)$ in der Tat für jeden innerhalb $\mathfrak{B}$ liegenden Punkt P_0 zu. Man hat also dann die Freiheit, den Anfangspunkt des gesuchten Linienstückes innerhalb $\mathfrak{B}$ nach Belieben vorzuschreiben, und nachdem dies geschehen, bestimmt die Differentialgleichung den weiteren Verlauf des Linienstückes. In jedem solchen Falle wird daher durch die gegebene Differentialgleichung nicht nur eine einzelne ebene Linie, sondern eine einfach unendliche ebene Linienschar gekennzeichnet.

Umgekehrt kann man, wenn eine einfach unendliche ebene Linienschar durch eine Gleichung

$$F(x, y, c) = 0$$

zwischen den Koordinaten x, y und einem in einem Intervall willkürlich wählbaren Parameter c gegeben ist, in vielen Fällen durch Elimination des Parameters c aus den Gleichungen

$$F(x, y, c) = 0$$

und

$$F_x(x, y, c)dx + F_y(x, y, c)dy = 0$$

eine Differentialgleichung finden, die zur Kennzeichnung der gegebenen Schar ebenso gut geeignet ist wie die ursprünglich gegebene Gleichung.

Überlegungen ähnlicher Art lassen sich auch dann anstellen, wenn für einen dreifach ausgedehnten Bereich $\mathfrak{K}$ im Gebiet von drei Veränderlichen x, y, y' eine Funktion $f(x, y, y')$ gegeben ist und nun verlangt wird, eine Funktion von x für ein gewisses Intervall so zu bestimmen, daß sie daselbst wenigstens zweimal differenzierbar ist und daß die Gleichung

$$y'' = f(x, y, y') \tag{1473}$$

erfüllt wird, wenn man für y diese Funktion und für y' und y'' ihre erste und ihre zweite Ableitung einsetzt. Denn die Gleichung (1473) ist gleichbedeutend mit der Gleichung

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{f(x, y, y')}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und deswegen kann man der durch die Gleichung (1473) ausgedrückten Forderung die folgende geometrische Fassung geben: In einer Ebene mit einem System rechtwinkeliger Koordinaten x, y soll ein Linienstück $\mathfrak{l}$ so bestimmt werden, daß seine Krümmung in einem beliebigen Punkte durch eine gegebene Funktion der Koordinaten x, y dieses Punktes und der dort vorhandenen Steigung y' von $\mathfrak{l}$ dargestellt wird. Auch jetzt geben gewisse geometrische Betrachtungen Grund zu der Erwartung, daß es zulässig sein werde, zu der eben angegebenen Hauptbedingung noch eine, oder genauer gesagt zwei Nebenbedingungen hinzuzufügen, nämlich nach willkürlicher Annahme einer innerhalb $\mathfrak{K}$ liegenden Stelle (x_0, y_0, y_0') zu fordern, daß das Linienstück $\mathfrak{l}$ vom Punkte P_0 mit den Koordinaten x_0, y_0 ausgehen und daselbst die Steigung y_0' haben soll. Man kann ja zunächst durch P_0 einen Kreis legen, der dort die Steigung y_0' hat und dessen Krümmung durch den Ausdruck $\frac{f(x_0, y_0, y_0')}{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}$ gegeben wird, kann sodann auf diesem Kreise nach der einen Seite hin, etwa nach rechts, bis zu einem von P_0 verschiedenen Punkte P_1 von solcher Beschaffenheit fortschreiten, daß den zu P_1 gehörenden Werten x_1, y_1, y_1' der Koordinaten und der Steigung immer noch eine in $\mathfrak{K}$ liegende Stelle entspricht, kann hierauf durch P_1 einen Kreis von der Steigung y_1' legen, dessen Krümmung gleich $\frac{f(x_1, y_1, y_1')}{(1+y_1'^2)^{\frac{3}{2}}}$ ist, auf diesem abermals nach der gleichen Seite hin fortschreiten bis zu einem Punkte P_2, und so fort. So gelangt man zu einem aus aneinander gereihten Kreisbogen zusammengesetzten Linienzug und darf ähnlich wie in dem vorangehenden einfacheren Fall erwarten, daß es eine bestimmte Linie geben werde, der sich dieser Linienzug bei hinreichender Verkleinerung seiner Teilbogen und hinreichender Vergrößerung ihrer Anzahl beliebig eng anschmiegt und die den Verlauf einer der gegebenen Differentialgleichung genügenden Funktion geometrisch darstellt. Wie sich später zeigen wird, findet auch diese Erwartung ihre Bestätigung, sobald nur die Funktion $f(x, y, y')$ gewisse Voraussetzungen erfüllt. Die gegebene Differentialgleichung bestimmt dann eine sogenannte zweifach unendliche ebene Linienschar.

542. Existenzbeweis[1]. — Zu Beginn der Lehre von den Differentialgleichungen erhebt sich naturgemäß die Frage, ob die durch eine gewöhnliche Differentialgleichung ausgedrückte Forderung stets erfüllbar ist und wie viele ihr genügende Funktionen im Falle der Erfüllbarkeit vorhanden sind. Eine praktisch meistens ausreichende Antwort auf diese Frage wird gegeben durch den folgenden

Lehrsatz: *Es sei k eine ganze positive Zahl*[2], *und es sei für eine gewisse Umgebung einer festen Stelle $(x_0, y_0, y'_0, \cdots y_0^{(k-1)})$ im Gebiet der $(k+1)$ Veränderlichen $x, y, y' \cdots y^{(k-1)}$ eine Funktion $f(x, y, y', \cdots y^{(k-1)})$ erklärt, die in dieser Umgebung stetig ist und deren partielle Ableitungen erster Ordnung in bezug auf die Veränderlichen $y, y', \cdots y^{(k-1)}$ daselbst überall vorhanden und ebenfalls stetig sind*[3]. *Dann gibt es bei Einschränkung der Veränderlichen x auf eine hinreichend enge Umgebung des Wertes x_0 stets eine und nur eine in dieser Umgebung wenigstens k mal differen-*

1) Der nachfolgende Beweis stammt von É. Picard, Journal de mathématiques pures et appliquées, Série IV, Tome 6, Paris 1890, S. 197 ff. Vgl. auch É. Picard, Traité d'analyse, 2. éd. Tome 2, Paris 1905, S. 340 ff.

2) Für $k=1$ sind im nachfolgenden die Zeichen $y^{(k-1)} = y^{(0)}$ und $\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}} = \frac{d^0 y}{dx^0}$ als mit y gleichbedeutend anzusehen.

3) Die Annahme, daß diese partiellen Ableitungen vorhanden und stetig seien, kann durch eine weniger weit gehende Voraussetzung ersetzt werden. Die Behauptung ist nämlich, wie zuerst R. Lipschitz, Lehrbuch der Analysis, Band 2, Bonn 1880, S. 501 ff. gezeigt hat, schon dann richtig, wenn es nach Abgrenzung einer gewissen Umgebung der Stelle $(x_0, y_0, y_0', \cdots y_0^{(k-1)})$ möglich ist, eine positive Konstante N so zu bestimmen, daß für je zwei

zierbare Funktion von x, die für y eingesetzt die Differentialgleichung k-ter Ordnung

$$\frac{d^k y}{dx^k} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}\right) \tag{1474}$$

und außerdem für $x = x_0$ die Nebenbedingungen

$$y = y_0; \quad \frac{dy}{dx} = y_0'; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y_0''; \cdots \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}} = y_0^{(k-1)}$$

erfüllt.

Dieser Satz kann zunächst in eine nur der äußeren Form nach von ihm verschiedene Aussage über ein System von k Differentialgleichungen erster Ordnung verwandelt werden. Er ist nämlich völlig gleichbedeutend mit der Behauptung, daß es unter den angegebenen Voraussetzungen stets ein und nur ein System von k in einer gewissen Umgebung der Stelle x_0 differenzierbaren Funktionen $w_1, w_2, \cdots w_k$ der Veränderlichen x gibt, welches die Anfangsbedingungen

$$w_1 = y_0; \quad w_2 = y_0'; \quad \cdots w_k = y_0^{(k-1)} \quad \text{für} \quad x = x_0$$

und das System der k Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{dx} &= w_2 \\ \frac{dw_2}{dx} &= w_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dw_{k-1}}{dx} &= w_k \\ \frac{dw_k}{dx} &= f(x, w_1, w_2, \cdots w_k) \end{aligned} \tag{1475}$$

befriedigt. Denn ist $y = \varphi(x)$ ein partikuläres Integral der Differentialgleichung (1474), so erhält man eine Lösung des Systems (1475), wenn man

---

beliebige dieser Umgebung angehörende Stellen $(x, y, y', \cdots y^{(k-1)})$ und $(x, y_1, y_1', \cdots y_1^{(k-1)})$ mit übereinstimmender erster Koordinate x die Ungleichung

$$\left|f(x, y_1, y_1', \cdots y_1^{(k-1)}) - f(x, y, y', \cdots y^{(k-1)})\right|$$
$$< N\{|y_1 - y| + |y_1' - y'| + \cdots + |y_1^{(k-1)} - y^{(k-1)}|\}$$

gültig ist.

$$w_1 = \varphi(x); \qquad w_2 = \varphi'(x); \qquad \cdots w_k = \varphi^{(k-1)}(x)$$

setzt, und umgekehrt ist, falls $w_1, w_2, \cdots w_k$ Funktionen bedeuten, die das System der Differentialgleichungen (1475) erfüllen, die Funktion w_1 ein partikuläres Integral der Differentialgleichung (1474).

In der neuen Form ist nun der zu beweisende Satz nichts weiter als ein besonderer Fall des folgenden noch allgemeineren Satzes:

Für eine gewisse Umgebung einer Stelle $(x_0, w_{10}, w_{20}, \cdots w_{k0})$ *im Gebiet von* $(k+1)$ *Veränderlichen* $x, w_1, w_2, \cdots w_k$ *seien* k *Funktionen* $f_1(x, w_1, w_2, \cdots w_k)$, $f_2(x, w_1, w_2, \cdots w_k)$, $\cdots f_k(x, w_1, w_2, \cdots w_k)$ *gegeben, die in dieser Umgebung stetig und deren partielle Ableitungen erster Ordnung in bezug auf* $w_1, w_2, \cdots w_k$ *daselbst überall vorhanden und ebenfalls stetig sind.*[1] *Dann gibt es nach Einschränkung der Veränderlichen* x *auf eine hinreichend enge Umgebung der Stelle* x_0 *stets ein und nur ein System von* k *in dieser Umgebung differenzierbaren Funktionen von* x, *die für* $w_1, w_2, \cdots w_k$ *eingesetzt die Differentialgleichungen*

$$(1476) \qquad \begin{aligned} \frac{dw_1}{dx} &= f_1(x, w_1, w_2, \cdots w_k) \\ \frac{dw_2}{dx} &= f_2(x, w_1, w_2, \cdots w_k) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dw_k}{dx} &= f_k(x, w_1, w_2, \cdots w_k) \end{aligned}$$

erfüllen und für $x = x_0$ *beziehentlich die Werte* $w_{10}, w_{20}, \cdots w_{k0}$ *annehmen.*

Da dieser allgemeinere Satz in vielen Fällen auch die Frage nach der Lösbarkeit eines Systems von Differentialgleichungen beantwortet und da er nicht schwerer zu beweisen ist als der zuvor erwähnte besondere Fall, soll im nachfolgenden der Beweis gleich für ihn erbracht werden. Dabei genügt es aber, sich auf den Fall zu beschränken, daß $k = 2$ ist, da schon hierbei alle leitenden Gedanken hinreichend deutlich hervortreten. Außerdem sollen die Bezeichnungen zur Vermeidung einer zu weit gehen-

1) Auch hier ist natürlich eine ähnliche Erweiterung möglich wie die auf S. 416 in der Fußnote angegebene.

den Häufung von Indizes dadurch eine Vereinfachung erfahren, daß an die Stelle der Zeichen

$$w_1; \quad w_2; \quad w_{10}; \quad w_{20}; \quad f_1; \quad f_2$$

beziehentlich die Zeichen

$$u; \quad v; \quad u_0; \quad v_0; \quad \varphi; \quad \chi$$

gesetzt werden. Dann lautet die Behauptung folgendermaßen:

Wenn die Funktionen $\varphi(x, u, v)$, $\chi(x, u, v)$ in einer gewissen Umgebung der Stelle (x_0, u_0, v_0) stetig und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung nach u und v in dieser Umgebung vorhanden und ebenfalls stetig sind, so gibt es bei Einschränkung der Veränderlichen x auf eine hinreichend enge Umgebung der Stelle x_0 stets ein und nur ein Paar von Funktionen von x, die für u, v eingesetzt die Differentialgleichungen

$$(1477) \qquad \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \varphi(x, u, v) \\ \frac{dv}{dx} &= \chi(x, u, v) \end{aligned}$$

erfüllen und für $x = x_0$ beziehentlich die Werte u_0, v_0 erwerben.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt nun daraus, daß man durch aufeinander folgende Annäherungen ein Funktionenpaar der verlangten Art wirklich herstellen und dann das Vorhandensein eines anderen solchen Paares ausschließen kann. Um dies im einzelnen durchzuführen, denke man sich zunächst zwei positive Konstante a, b so angenommen, daß die Voraussetzungen über die Stetigkeit der Funktionen φ, χ und über das Vorhandensein und die Stetigkeit der vier partiellen Ableitungen $\varphi_u, \varphi_v, \chi_u, \chi_v$ in dem durch die Ungleichungen

$$x_0 - a \leqq x \leqq x_0 + a;$$
$$u_0 - b \leqq u \leqq u_0 + b; \qquad v_0 - b \leqq v \leqq v_0 + b$$

abgegrenzten abgeschlossenen parallelepipedischen Bereiche $\mathfrak{P}$ erfüllt sind, und verstehe sodann unter M und N zwei positive Konstante von solcher Größe, daß in $\mathfrak{P}$ überall die Ungleichungen

$$|\varphi(x, u, v)| < M; \qquad |\chi(x, u, v)| < M$$

gelten und daß jede der vier partiellen Ableitungen $\varphi_u, \varphi_v, \chi_u, \chi_v$ in $\mathfrak{P}$ absolut genommen kleiner als N bleibt. Ferner verstehe man unter ϱ die kleinere der beiden positiven Konstanten a und $\frac{b}{M}$ und unterwerfe die Veränderliche x der Ungleichung

$$x_0 - \varrho < x < x_0 + \varrho. \tag{1478}$$

Hierauf betrachte man an Stelle der gegebenen Differentialgleichungen (1477) die einfacheren Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \varphi(x, u_0, v_0) \\ \frac{dv}{dx} &= \chi(x, u_0, v_0). \end{aligned} \tag{1479}$$

Für diese lassen sich sofort zwei ihnen genügende Funktionen von x angeben, die auch für $x = x_0$ die vorgeschriebenen Anfangswerte u_0, v_0 erwerben. Denn wie man leicht sieht, haben die Funktionen

$$\begin{aligned} u_1(x) &= u_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi(\xi, u_0, v_0)\, d\xi \\ v_1(x) &= v_0 + \int_{x_0}^{x} \chi(\xi, u_0, v_0)\, d\xi \end{aligned} \tag{1480}$$

in der Tat die verlangten Eigenschaften. Diese Funktionen sind ferner so beschaffen, daß die Stelle $[x, u_1(x), v_1(x)]$ im Innern von $\mathfrak{P}$ verbleibt, solange x der Ungleichung (1478) genügt. Denn für jeden derartigen Wert von x ist

$$|u_1(x) - u_0| = \left| \int_{x_0}^{x} \varphi(\xi, u_0, v_0)\, d\xi \right| < |x - x_0| M < \varrho M \leqq b$$

und ähnlich

$$|v_1(x) - v_0| < |x - x_0| M \leqq b.$$

Nun betrachte man zweitens die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \varphi[x, u_1(x), v_1(x)] \\ \frac{dv}{dx} &= \chi[x, u_1(x), v_1(x)]. \end{aligned} \tag{1481}$$

Diese und die Anfangsbedingungen $u = u_0$; $v = v_0$ für $x = x_0$ werden erfüllt, wenn man für u und v die Funktionen

$$u_2(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi[\xi, u_1(\xi), v_1(\xi)]\, d\xi$$

$$v_2(x) = v_0 + \int_{x_0}^{x} \chi[\xi, u_1(\xi), v_1(\xi)]\, d\xi$$

einsetzt, und auch jetzt bleibt die Stelle $[x, u_2(x), v_2(x)]$ aus ähnlichen Gründen wie zuvor in dem Bereich $\mathfrak{P}$ enthalten, solange x

der Ungleichung (1478) genügt. Daher lassen sich die begonnenen Betrachtungen weiter fortsetzen und führen, da immer wieder ähnliche Schlüsse wie bisher möglich sind, zu zwei unendlichen Reihen von Funktionen

$$u_1(x);\quad u_2(x);\quad u_3(x);\cdots\quad \text{und}\quad v_1(x);\quad v_2(x);\quad v_3(x);\cdots,$$

in denen irgend ein Paar nachfolgender Glieder $u_{n+1}(x)$, $v_{n+1}(x)$ mit dem vorangehenden Paar $u_n(x)$, $v_n(x)$ jedesmal durch die Gleichungen

$$u_{n+1}(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi[\xi, u_n(\xi), v_n(\xi)]\, d\xi$$

$$v_{n+1}(x) = v_0 + \int_{x_0}^{x} \chi[\xi, u_n(\xi), v_n(\xi)]\, d\xi$$

verbunden ist.

Nun liegt es nahe, zu fragen, ob die Funktionen $u_n(x)$, $v_n(x)$, wenn man sich für x einen festen die Ungleichung (1478) erfüllenden Wert eingesetzt denkt, bei unbegrenzt wachsendem n Grenzwerten zustreben und ob vielleicht diese Grenzwerte zwei den ursprünglichen Differentialgleichungen (1477) genügende Funktionen darstellen. Beide Fragen sind in der Tat zu bejahen, und zwar kann man dies für die erste Frage durch folgenden Kunstgriff nachweisen: Man betrachte die beiden unendlichen Reihen

(I) $\quad u_1(x);\quad u_2(x) - u_1(x);\quad u_3(x) - u_2(x);\cdots$

(II) $\quad v_1(x);\quad v_2(x) - v_1(x);\quad v_3(x) - v_2(x);\cdots,$

die offenbar so beschaffen sind, daß die Summe der n ersten Glieder bei der ersten Reihe gleich $u_n(x)$ und bei der zweiten gleich $v_n(x)$ ist. Dann ist der gewünschte Beweis erbracht, sobald es gelingt, zu zeigen, daß beide Reihen für jeden der Ungleichung (1478) genügenden Wert von x konvergieren. Dies ist aber in der Tat möglich. Zunächst ist nämlich

$$u_2(x) - u_1(x) = \int_{x_0}^{x} \{\varphi[\xi, u_1(\xi), v_1(\xi)] - \varphi(\xi, u_0, v_0)\}\, d\xi.$$

Ferner ist hier

$$\begin{aligned}&\varphi[\xi, u_1(\xi), v_1(\xi)] - \varphi(\xi, u_0, v_0)\\ &\qquad = [u_1(\xi) - u_0]\varphi_u(\xi, p, q) + [v_1(\xi) - v_0]\varphi_v(\xi, p, q),\end{aligned}$$

wo p und q zwei Mittelwerte bedeuten, die beziehentlich den

Intervallen $[u_0 \cdots u_1(\xi)]$ und $[v_0 \cdots v_1(\xi)]$ angehören. Zugleich ist, wenn x und daher auch ξ zwischen $(x_0 - \varrho)$ und $(x_0 + \varrho)$ liegt, nach dem vorangehenden

$$|u_1(\xi) - u_0| < M|\xi - x_0| \qquad \text{und} \qquad |v_1(\xi) - v_0| < M|\xi - x_0|.$$

Folglich ist

$$|\varphi[\xi, u_1(\xi), v_1(\xi)] - \varphi(\xi, u_0, v_0)| < M2N|\xi - x_0|$$

und daher

$$|u_2(x) - u_1(x)| < M2N\left|\int_{x_0}^{x} |\xi - x_0|\, d\xi\right| = M2N\left|\int_{x_0}^{x} (\xi - x_0)\, d\xi\right|$$

oder

$$|u_2(x) - u_1(x)| < M2N\frac{|x - x_0|^2}{1 \cdot 2}.$$

Ganz ebenso findet sich

$$|v_2(x) - v_1(x)| < M2N\frac{|x - x_0|^2}{1 \cdot 2}.$$

Nachdem dies festgestellt, folgt aus der Gleichung

$$u_3(x) - u_2(x) = \int_{x_0}^{x} \{\varphi[\xi, u_2(\xi), v_2(\xi)] - \varphi[\xi, u_1(\xi), v_1(\xi)]\}\, d\xi$$

durch eine ganz ähnlich verlaufende Rechnung

$$|u_3(x) - u_2(x)| < M(2N)^2\frac{|x - x_0|^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Zugleich zeigen entsprechende Überlegungen, daß auch

$$|v_3(x) - v_2(x)| < M(2N)^2\frac{|x - x_0|^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

sein muß. Die so begonnene Kette von Ungleichungen kann nun weiter fortgesetzt werden, und zwar gelangt man, wie man leicht einsieht und durch vervollständigte Induktion beweisen könnte, allgemein für jeden ganzen positiven Wert von n zu den Ungleichungen

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)| < M(2N)^n\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{M}{2N}\frac{(2N\varrho)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$|v_{n+1}(x) - v_n(x)| < M(2N)^n\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{M}{2N}\frac{(2N\varrho)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Die Glieder der Reihen (I) und (II) sind also von der zweiten Stelle an absolut genommen kleiner als die entsprechenden Glieder

der konvergenten Entwickelung des Ausdrucks $\frac{M}{2N}(e^{2N\varrho}-1)$ nach Potenzen von ϱ. Also sind die Reihen (I) und (II) in dem abgeschlossenen Intervall $(x_0-\varrho\cdots x_0+\varrho)$ gleichmäßig konvergent, wie zu beweisen war.

Ferner ist die Summe $u(x)$ der Reihe (I) in dem Intervall $(x_0-\varrho\cdots x_0+\varrho)$ differenzierbar, und zwar gliedweise differenzierbar. Denn die einzelnen Glieder dieser Reihe haben daselbst die durchweg stetigen Ableitungen

$$\varphi(x, u_0, v_0); \qquad \varphi[x, u_1(x), v_1(x)]-\varphi(x, u_0, v_0);$$
$$\varphi[x, u_2(x), v_2(x)]-\varphi[x, u_1(x), v_1(x)]; \qquad \cdots,$$

und die aus diesen Ableitungen gebildete unendliche Reihe ist in dem Intervall $(x_0-\varrho\cdots x_0+\varrho)$ einschließlich beider Grenzen gleichmäßig konvergent, da die Summe ihrer n ersten Glieder mit der Funktion $\varphi[x, u_{n-1}(x), v_{n-1}(x)]$ übereinstimmt und diese bei unbegrenzt wachsendem n gleichmäßig dem Grenzwert $\varphi[x, u(x), v(x)]$ zustrebt. Genau Entsprechendes gilt natürlich für die Summe $v(x)$ der Reihe (II). Zugleich zeigt dieser Nachweis, daß die Funktionen $u(x), v(x)$ in der Tat den Differentialgleichungen (1477) genügen.

543. Eindeutigkeit der Lösung. — Es bleibt noch zu zeigen, daß es außer den eben gefundenen Funktionen $u(x), v(x)$ kein anderes Paar von Funktionen gibt, welches die gleichen Differentialgleichungen und Anfangsbedingungen befriedigt. Dies ergibt sich indirekt[1]). Gäbe es nämlich zwei andere solche Funktionen $U(x), V(x)$, so könnte man zunächst eine positive Konstante σ so annehmen, daß sie die beiden Ungleichungen

$$\sigma \leqq \varrho \qquad \text{und} \qquad \sigma \leqq \frac{1}{4N}$$

erfüllte, darauf die Maximalwerte der Funktionen $|U(x)-u(x)|$ und $|V(x)-v(x)|$ für das abgeschlossene Intervall $(x_0-\sigma\cdots x_0+\sigma)$ bestimmen, sodann unter ε den größeren dieser Maximalwerte verstehen und nunmehr, wenn $\varepsilon>0$ wäre, folgendermaßen zu einem Widerspruch gelangen: Für $|x-x_0|\leqq\sigma$ wäre zunächst

$$|U(x)-u(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}\{\varphi[\xi, U(\xi), V(\xi)]-\varphi[\xi, u(\xi), v(\xi)]\}\,d\xi\right|.$$

Zugleich wäre aber

1) Nach C. Jordan, Cours d'analyse, Tome 3, 2. éd. Paris 1896, S. 92f.

$$|\varphi[\xi, U(\xi), V(\xi)] - \varphi[\xi, u(\xi), v(\xi)]|$$
$$< N|U(\xi) - u(\xi)| + N|V(\xi) - v(\xi)| \leqq 2N\varepsilon.$$

Folglich wäre

$$|U(x) - u(x)| < |x - x_0| 2N\varepsilon \leqq \sigma 2N\varepsilon \leqq \frac{1}{4N} 2N\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Ebenso wäre auch

$$|V(x) - v(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

In dem Intervall $(x_0 - \sigma \cdots x_0 + \sigma)$ könnte also keine der Funktionen $|U(x) - u(x)|$, $|V(x) - v(x)|$ den Wert ε erreichen. Dieser Widerspruch löst sich nur durch die Annahme, daß in dem ganzen Intervall $U(x) = u(x)$ und $V(x) = v(x)$ ist. Bei Einschränkung der Veränderlichen x auf eine hinreichend enge Umgebung der Stelle x_0 gibt es also nur ein einziges Paar von Funktionen, welches die gegebenen Differentialgleichungen und Anfangsbedingungen erfüllt.

Ähnlich läßt sich die Eindeutigkeit der Lösung natürlich auch dann beweisen, wenn statt eines Systems von der Form (1477) nur eine *einzige* Differentialgleichung von der Form $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ oder ein System von *mehr* als zwei Differentialgleichungen von ähnlicher Form wie das System (1477) gegeben ist und die in Nr. **542** angegebenen Voraussetzungen erfüllt sind. Trifft aber dies letztere nicht mehr zu, so kann es mehrere Lösungen geben, welche die gleichen Anfangsbedingungen erfüllen. Ein Beispiel bietet die Differentialgleichung

(1482) $$\frac{dy}{dx} = 3\sqrt[3]{y^2}.$$

Dieselbe wird nämlich, wie man sich leicht überzeugt, erfüllt, wenn mann nach Annahme einer beliebigen Konstanten c

(1483) $$y = (x - c)^3$$

setzt. In einem System rechtwinkeliger ebener Koordination x, y (Fig. 107) stellt diese Gleichung eine Schar kongruenter kubischer Parabeln dar, die sämtlich aus der durch die Gleichung $y = x^3$ dargestellten kubischen Parabel durch Parallelverschiebung in der Richtung der x-Achse entstehen. Außerdem läßt sich aber die Gleichung (1482) auch dadurch erfüllen, daß man y dauernd gleich Null setzt. Das heißt die x-Achse stellt ebenfalls ein partikuläres Integral dar. Folglich gibt es, wenn man zu der Differentialgleichung (1482) die Nebenbedingung $y=0$ für $x=0$ hinzufügt, unendlich viele verschiedene Funktionen, die sowohl die Differentialgleichung als die Nebenbedingung befriedigen, nämlich (Fig. 107)

1. — die Funktion $y=x^3$,
2. — die Funktion $y=0$,
3. — aber auch jede Funktion, deren geometrisches Bild entsteht, wenn man einen beweglichen Punkt erst ein den Nullpunkt enthaltendes Stück der Abszissenachse bis zu einem im Endlichen liegenden Punkte A durchlaufen und dann, wenn a die Abszisse von A bedeutet, längs der kubischen Parabel $y=(x-a)^3$ weiter gehen läßt.

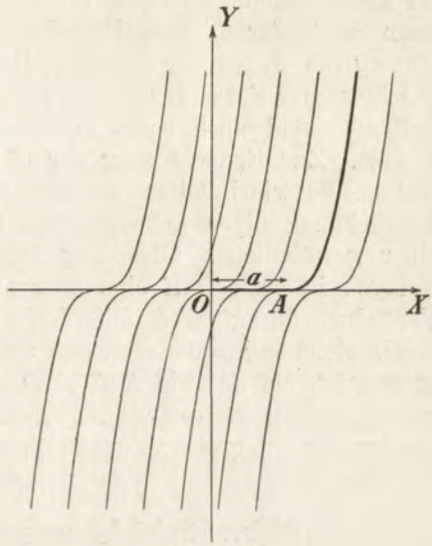


Fig. 107.

Als Grund für die Möglichkeit des Nebeneinanderbestehens dieser verschiedenen Lösungen ist der Umstand anzusehen, daß die rechte Seite der Differentialgleichung (1482) für $y=0$ nicht mehr in bezug auf y differenzierbar ist.

544. Durchführbarkeit der Integration. — Mit dem nach dem vorangehenden in vielen Fällen sehr leicht zu führenden Nachweis, daß eine gegebene totale Differentialgleichung unendlich viele partikuläre Integrale hat, ist natürlich die Frage, ob sich auch nur eines derselben in geschlossener Form darstellen läßt, noch keineswegs in bejahendem Sinne beantwortet. Dies gilt schon für Differentialgleichungen von der besonders einfachen Form $\frac{dy}{dx}=f(x)$, wo $f(x)$ eine durch einen geschlossenen analytischen Ausdruck dargestellte Funktion von x bedeutet. Denn das unbestimmte Integral einer solchen Funktion braucht durchaus nicht wieder in geschlossener Form darstellbar zu sein. Ähnliches gilt aber erst recht für verwickeltere Differentialgleichungen. Ja die Möglichkeit, ein Integral einer gegebenen Differentialgleichung in geschlossener Form darzustellen, ist geradezu als eine nur in besonders einfachen Fällen eintretende Ausnahme anzusehen. Aber gerade diese einfachen Fälle sind praktisch wichtig. Darum sollen im nachfolgenden zunächst für Differentialgleichungen erster und dann auch für Differentialgleichungen höherer Ordnung einige Kunstgriffe angegeben werden, die in solchen Fällen, wo es in geschlossener Form darstellbare Integrale gibt, zu deren Kenntnis verhelfen und auch sonst manche wertvolle Aufschlüsse geben können. Zur Erleichterung der Übersicht mögen dabei alle diejenigen Schwierigkeiten unberücksichtigt bleiben, die sich der Ausrechnung eines unbestimmten Integrales oder der Auflösung einer gewöhnlichen Gleichung oder eines Systems solcher Gleichungen in bezug auf eine oder mehrere in ihnen vorkommende Veränderliche entgegenstellen können. Die Integration einer Differentialgleichung soll demgemäß als erledigt gelten, sobald es gelungen ist, sie auf die Auflösung gewöhnlicher Gleichungen und auf sogenannte Quadraturen, das heißt die Ausrechnung unbestimmter Integrale zurückzuführen.

Differentialgleichungen erster Ordnung.

545. Trennung der Veränderlichen. — Beispiel. Unter der Voraussetzung, daß x eine völlig freie Veränderliche bedeutet, sei die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+4x^2} \tag{1484}$$

zu integrieren.

Man sieht zunächst sofort, daß die Differentialgleichung erfüllt wird, wenn man dauernd $y = 0$ setzt.

Um andere partikuläre Integrale zu finden, denke man sich für x, y ein Paar von Anfangswerten so vorgeschrieben, daß der Anfangswert von y nicht gleich Null ist, und, wenn nötig, durch geeignete Einschränkung von x dafür gesorgt, daß für y nur von Null verschiedene Werte in Frage kommen. Dann darf man durch y dividieren und der Gleichung (1484) dadurch die Form geben

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{1+4x^2} = 0. \tag{1485}$$

Nun ist aber

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \lg|y| \qquad \text{und} \qquad \int \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x),$$

wo unter dem Zeichen arctg der Hauptwert verstanden werden kann. Folglich ist, wenn y eine differenzierbare Funktion von x bedeutet,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{d\lg|y|}{dx}$$

und daher die Gleichung (1485) gleichbedeutend mit der Forderung, eine solche Funktion so zu bestimmen, daß

$$\frac{d}{dx}\left[\lg|y|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x)\right]=0$$

wird. Dies erfordert aber, daß

$$\lg|y|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x)=c$$

sei, wo c eine beliebige Konstante bedeutet, und hieraus folgt durch Auflösung in bezug auf y

$$|y|=e^{\lg|y|}=e^{c+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x)}=e^c e^{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x)}$$

oder

$$y=\pm e^c e^{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x)}.$$

Nun ist $(\pm e^c)$ wieder eine Konstante, für welche alle Werte zulässig sind, allerdings mit Ausnahme des Wertes 0. Schreibt man für diese Konstante das einfachere Zeichen C, so erhält man

$$y=Ce^{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x)}, \tag{1486}$$

und wenn man nunmehr für C auch den Wert 0 zuläßt, so wird auch das zu allererst angegebene partikuläre Integral $y=0$ mit eingeschlossen. Jede Funktion y, die aus der Gleichung (1486) dadurch hervorgeht, daß man für C einen beliebigen konstanten Wert einsetzt, ist also ein partikuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung (1484), und umgekehrt muß auch jedes partikuläre Integral dieser Differentialgleichung aus der Gleichung (1486) durch passende Verfügung über die Konstante C hervorgehen.

Allgemeine Beschreibung des Verfahrens. Man sucht die gegebene Differentialgleichung auf die Form

$$\varphi(x)dx+\chi(y)dy=0 \tag{1487}$$

zu bringen, so daß dx mit einer stetigen Funktion $\varphi(x)$ von x allein und dy mit einer stetigen Funktion $\chi(y)$ von y allein multipliziert erscheint. Ist dies gelungen, so sagt man, **die Veränderlichen seien getrennt.** Aber natürlich ist eine solche Trennung der Veränderlichen keineswegs immer, sondern nur in Ausnahmefällen möglich.

Liegt nun ein solcher Ausnahmefall vor und ist die gegebene Differentialgleichung auf die Form (1487) gebracht, so berechnet man zunächst die unbestimmten Integrale der Funktionen $\varphi(x)$ und $\chi(y)$. Hat man dadurch

$$\int \varphi(x)\,dx = \Phi(x) \qquad \text{und} \qquad \int \chi(y)\,dy = X(y)$$

erhalten, so setzt man die Gleichung

$$\Phi(x) + X(y) = c \tag{1488}$$

an, wo c eine beliebige Konstante bedeutet, und löst diese Gleichung in bezug auf y auf. Jede differenzierbare Funktion y von x, die sich in dieser Weise ergibt, ist ein partikuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung (1487), und umgekehrt genügt jedes partikuläre Integral dieser Differentialgleichung einer Gleichung von der Form (1488). Denn wenn eine differenzierbare Funktion y von x eine Gleichung von der Form (1488) erfüllt, so ist

$$\frac{d}{dx}[\Phi(x) + X(y)] = 0 \tag{1489}$$

oder

$$\varphi(x) + \chi(y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

also die Differentialgleichung (1487) erfüllt, und umgekehrt müssen, wenn diese erfüllt ist, auch die Gleichungen (1489) und (1488) gelten.

546. Umdrehungskörper für gleiche Beanspruchung durch Druck. — Eine vertikal stehende Säule (Fig. 108) hat die Gestalt eines Rotationskörpers. Sie trägt die gegebene Last Q, hat am oberen Ende den gegebenen Radius r und besteht aus einem Material von dem gegebenen spezifischen Gewicht γ. Wie muß ihre Meridianlinie gestaltet werden, damit das Material der Säule überall in gleicher Weise auf Druck in Anspruch genommen werde?

Lösung: Man denke sich ein System rechtwinkeliger ebener Koordinaten x, y so angenommen, daß sein Anfang O mit dem Mittelpunkt der oberen Grenzfläche der Säule zusammenfällt und daß die x-Achse vertikal nach unten gerichtet ist, und sehe die Ordinate y eines beliebigen Punktes der gesuchten Meridianlinie als eine Funktion seiner Abszisse x an. Dann ist $y=r$ für $x=0$. Ferner muß irgend ein tiefer liegender Querschnitt jedesmal um so viel größer sein als ein höher liegender, daß der Zuwachs an Flächeninhalt bei der vorausgesetzten gleichmäßigen Beanspruchung des Materials gerade die Last des zwischenliegenden Säulenteils aufnehmen kann. Daraus ist der weitere Verlauf der Funktion y zu bestimmen. Nun hat die obere Grenzfläche der Säule den Inhalt πr^2 und trägt die Last Q, also pro Flächeneinheit die Last $\frac{Q}{\pi r^2}$. Damit ist, da die Beanspruchung des Materials überall dieselbe sein soll, auch die Last gefunden, die in irgend einem anderen Querschnitt auf die Flächeneinheit entfällt. Ferner ist, wenn dx einen unendlich kleinen positiven Zuwachs der Abszisse x und dy den entsprechenden Zuwachs der Funktion y bedeutet, unter zulässiger Vernachlässigung unendlich kleiner Größen höherer Ordnung

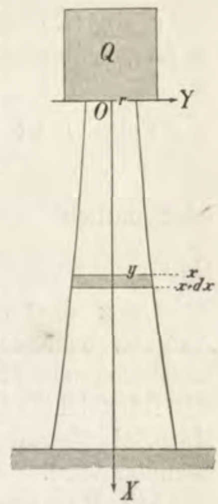


Fig. 108.

der Inhalt des Ringes, um welchen der zur Abszisse $(x+dx)$ gehörende Querschnitt größer ist als der zur Abszisse x gehörende Querschnitt, gleich $2\pi y dy$ und

das Gewicht des zwischen diesen beiden Querschnitten enthaltenen Säulenteils gleich $\gamma\pi y^2 dx$.

Bei gleicher Beanspruchung des Materials durch Druck muß daher bis auf unendlich kleine Zahlen höherer Ordnung überall

$$\frac{Q}{\pi r^2} 2\pi y dy = \gamma\pi y^2 dx$$

sein. Vollzieht man nun den Grenzübergang für den Fall, daß dx verschwindet, so erkennt man, daß y die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma\pi r^2}{2Q} y$$

befriedigen muß. Diese läßt sich aber durch Trennung der Veränderlichen sofort integrieren. Man erhält zunächst

$$\frac{dy}{y} = \frac{\gamma\pi r^2}{2Q} dx$$

und hieraus

$$\lg y = \frac{\gamma \pi r^2}{2Q} x + c,$$

wo c eine Konstante bedeutet. Deren Wert ergibt sich aus der Anfangsbedingung. Denn setzt man $x = 0$ und $y = r$, so erhält man

$$\lg r = c.$$

Folglich ist

$$\lg y = \frac{\gamma \pi r^2}{2Q} x + \lg r$$

oder endlich

(1490) $$y = r e^{\frac{\gamma \pi r^2}{2Q} x}.$$

Ganz ebenso und mit ähnlichem Endergebnis ließe sich die Aufgabe behandeln, eine in ein Bergwerk herabhängende, eine Last tragende Stange von der Gestalt eines Umdrehungskörpers mit Rücksicht auf ihr Eigengewicht so zu konstruieren, daß ihr Material überall in gleicher Weise auf Zug in Anspruch genommen wird.

547. Homogene Differentialgleichungen. — Beispiel. Unter der Voraussetzung, daß x und y auf positive Werte beschränkte Veränderliche bedeuten, sei die Differentialgleichung

(1491) $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 5y^2}{3xy}$$

zu integrieren.

Man sieht sofort, daß es hier nicht möglich ist, die Veränderlichen zu trennen. Aber wenn man Zähler und Nenner der rechten Seite durch x^2 dividiert, so erhält man für die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ einen Ausdruck, der die Veränderlichen x und y nur in der Verbindung $\frac{y}{x}$ enthält, und dieser Umstand macht es möglich, die gegebene Differentialgleichung auf eine andere zurückzuführen, in der die Veränderlichen getrennt werden können. Setzt man nämlich

$$y = xz,$$

wo z eine neue unbekannte Funktion von x bedeutet, so geht die gegebene Differentialgleichung über in

$$x \frac{dz}{dx} + z = \frac{1 + 5z^2}{3z}$$

oder

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{1+2z^2}{3z}$$

oder

$$\frac{3z\,dz}{1+2z^2}=\frac{dx}{x}.$$

Hieraus folgt zunächst

$$\frac{3}{4}\lg(1+2z^2)=\lg x+c,$$

wo c eine Konstante bedeutet, zu deren Bestimmung man sich eine geeignete Nebenbedingung gegeben denken muß. Der Übergang von den Logarithmen zu den entsprechenden Zahlen liefert sodann, wenn zur Abkürzung $e^{\frac{4}{3}c}=C$ gesetzt wird,

$$1+2z^2=Cx^{\frac{4}{3}}.$$

Nunmehr findet sich

$$z=\sqrt{\frac{1}{2}\left(Cx^{\frac{4}{3}}-1\right)},$$

und hieraus folgt endlich

(1492) $$y=x\sqrt{\frac{1}{2}\left(Cx^{\frac{4}{3}}-1\right)}.$$

Allgemeine Beschreibung des Verfahrens. Eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen einer unabhängigen Veränderlichen x und einer zu bestimmenden Funktion y von x heißt **homogen**, wenn sie auf eine solche Form gebracht werden kann, daß die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ als eine Funktion des Quotienten $\frac{y}{x}$ allein erscheint.

Ist eine Differentialgleichung dieser Art in der Form

(1493) $$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

gegeben, so erhält man, wenn man

(1494) $$y=xz$$

setzt, zur Bestimmung der neuen unbekannten Funktion z die Differentialgleichung

$$x\frac{dz}{dx}+z=f(z),$$

in der sich die Veränderlichen trennen lassen. Die Ausführung der Trennung ergibt

$$\frac{dz}{f(z)-z}=\frac{dx}{x},$$

und hieraus folgt

$$\int\frac{dz}{f(z)-z}=\lg|x|+c, \tag{1495}$$

wo c eine Konstante bedeutet. Aus dieser Gleichung ist z als Funktion von x zu bestimmen und dann in die Gleichung (1494) einzusetzen.

548. Ideales Brennglas. — Wenn Strahlen einfarbigen Lichtes auf eine von einer Ebene und einer Kugelfläche oder von zwei Kugelflächen begrenzte Sammellinse parallel zur Achse auftreffen, so werden sie durch die Linse zwar näherungsweise, aber doch nicht ganz genau nach ein und demselben Punkte hin gebrochen. Dieser Umstand führt auf folgende Frage:

Eine das Licht einfach brechende plan-konvexe Glaslinse hat die Gestalt eines Umdrehungskörpers. Wie muß die Meridianlinie ihrer gekrümmten Oberfläche gestaltet sein, damit alle senkrecht zur ebenen Grenzfläche der Linse einfallenden Strahlen einfarbigen Lichtes, für welche der Brechungsindex[1]) beim Übergang von Luft in Glas den gegebenen Wert $n>1$ hat, nach ihrem Durchgang durch die Linse genau in einen einzigen Punkt zusammenlaufen?

Lösung: Man denke sich (Fig. 109) ein System rechtwinkeliger ebener Koordinaten so angenommen, daß sein Anfangspunkt O

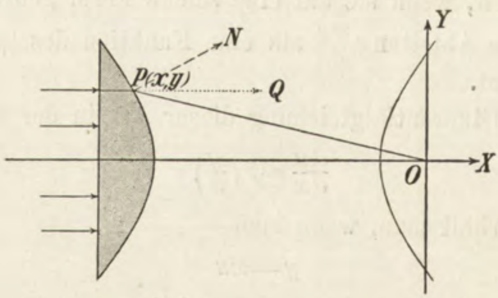


Fig. 109.

1) Brechungsindex $=\frac{\text{Sinus des Einfallswinkels}}{\text{Sinus des Brechungswinkels}}$.

mit dem Vereinigungspunkt der gebrochenen Strahlen zusammenfällt und seine Abszissenachse OX zu den einfallenden Strahlen parallel und gleichgerichtet ist, denke sich die Ebene dieses Koordinatensystems mit der krummen Oberfläche der Linse zum Durchschnitt gebracht und sehe die Ordinate y eines beliebigen Punktes P der Schnittlinie als Funktion seiner Abszisse x an. Dann kommen für x nur negative Werte in Frage, während y aus Symmetriegründen auf positive Werte beschränkt werden darf. Nun verfolge man denjenigen Lichtstrahl, der, nachdem er durch die ebene Vorderfläche der Linse ohne Änderung seiner Richtung hindurchgegangen ist, die Hinterfläche im Punkte P trifft und dort gegen O hin gebrochen wird. Dann erhält man

für die Verlängerung PQ des einfallenden Strahles über P hinaus die Richtungskosinus $1; \quad 0,$

für den gebrochenen Strahl PO die Richtungskosinus

$$\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \qquad \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

und für das Einfallslot PN, wenn man diejenige Richtung desselben, in welcher die Abszissen wachsen, als positive Richtung ansieht und zur Abkürzung $\frac{dy}{dx}=y'$ setzt, die Richtungskosinus

$$\frac{-y'}{\sqrt{1+y'^2}}; \qquad \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Folglich ergibt sich für den Sinus des Einfallswinkels QPN der Ausdruck

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-y'}{\sqrt{1+y'^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

und für den Sinus des Brechungswinkels OPN der Ausdruck

$$\begin{vmatrix} \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y'}{\sqrt{1+y'^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \end{vmatrix} = -\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+y'^2}}.$$

Nun muß der Quotient, der entsteht, wenn man den Sinus des Einfallswinkels durch den des Brechungswinkels dividiert, im vorliegenden Fall den Wert $\frac{1}{n}$ haben, da es sich um einen Übergang von Glas in Luft handelt. Die Funktion y muß daher die Differentialgleichung

$$-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+yy'}=\frac{1}{n}$$

oder

(1496) $$x+yy'+n\sqrt{x^2+y^2}=0$$

erfüllen. Diese Differentialgleichung ist, wie man mit einem Blick erkennt, homogen und nimmt, wenn man $y=xz$ setzt, folgende Form an:

$$x+xz\left(z+x\frac{dz}{dx}\right)+n\sqrt{x^2+x^2z^2}=0.$$

Dividiert man durch x und bedenkt man, daß x negativ, aber unter jeder vorkommenden Wurzel der positive Wert zu verstehen ist, so erhält man zur Bestimmung von z die einfachere Differentialgleichung

$$1+z^2+xz\frac{dz}{dx}-n\sqrt{1+z^2}=0$$

oder

$$\frac{dx}{x}-\frac{z\,dz}{n\sqrt{1+z^2}-(1+z^2)}=0,$$

deren Integration keine Schwierigkeiten bereitet. Denn führt man statt z eine neue Veränderliche u ein, indem man $\sqrt{1+z^2}=u$ setzt, so erhält man nach kurzer Zwischenrechnung

$$\lg(-x)+\lg(n-\sqrt{1+z^2})=c,$$

wo c eine beliebige Konstante bedeutet, oder

$$(-x)(n-\sqrt{1+z^2})=C,$$

wo jetzt $C=e^c$ eine positive, aber sonst keiner Einschränkung unterworfene Konstante bezeichnet. Hieraus folgt, wenn man berücksichtigt, daß $(-x)$ notwendig positiv ist, und unter $\sqrt{x^2+y^2}$ wieder den positiven Wurzelwert versteht, die Gleichung

(1497) $$-nx-\sqrt{x^2+y^2}=C.$$

Nunmehr führen einfache Umrechnungen nach und nach zu folgenden Gleichungen:

$$x^2+y^2=n^2x^2+2Cnx+C^2,$$

$$(n^2-1)x^2+2Cnx-y^2=-C^2,$$

$$(n^2-1)\left(x+\frac{Cn}{n^2-1}\right)^2-y^2=\frac{C^2}{n^2-1},$$

$$(1498)\qquad \frac{\left(x+\frac{Cn}{n^2-1}\right)^2}{\left(\frac{C}{n^2-1}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{C}{\sqrt{n^2-1}}\right)^2}=1\,.$$

Diese letzte Gleichung zeigt sofort, daß die gesuchte Meridianlinie der eine Ast einer Hyperbel sein muß, deren Hauptachse mit der x-Achse zusammenfällt. Da die Linse als Sammellinse konvex sein soll, kann nur der links liegende Ast in Frage kommen. Die Abszisse x_0 des Scheitels dieses Astes erfüllt die Gleichung

$$\left(x_0+\frac{Cn}{n^2-1}\right)^2=\left(\frac{C}{n^2-1}\right)^2$$

und ist gleich der kleineren ihrer beiden Wurzeln, hat also den Wert

$$-\frac{Cn}{n^2-1}-\frac{C}{n^2-1}=-\frac{C}{n-1}\,.$$

Durch passende Verfügung über C kann man diesen Ausdruck jeder beliebigen negativen Zahl gleich machen. Das heißt, die Länge der Strecke vom Scheitel der Linse bis zum Vereinigungspunkt der gebrochenen Strahlen, die man als Brennweite der Linse bezeichnen kann, darf ganz nach Belieben vorgeschrieben werden. Ist sie gegeben, so ist damit auch die Konstante C und die Gestalt der gesuchten Meridianlinie bestimmt.

Durch Ausrechnung der linearen Exzentrizität der durch die Gleichung (1498) dargestellten Hyperbel ließe sich endlich noch zeigen, daß der Vereinigungspunkt der gebrochenen Strahlen mit demjenigen Brennpunkt der Hyperbel zusammenfällt, welcher dem von der Meridianlinie der Linse verschiedenen Aste zugeordnet ist.

Übungsaufgabe. Ein Hohlspiegel hat die Gestalt einer Umdrehungsfläche. Nachzuweisen, daß seine Meridianlinie eine Parabel sein muß, wenn alle parallel zur Achse einfallenden Strahlen nach ein und demselben Punkte zurückgeworfen werden sollen.

549. Lineare Differentialgleichungen. — Beispiel. Unter der Voraussetzung, daß x eine der Bedingung

$$-1<x<1$$

unterworfene Veränderliche bezeichnet, sei die Differentialgleichung

(1499) $$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

zu integrieren.

Lösung. Setzt man

(1500) $$y=uv,$$

wo u und v zwei neue vorläufig unbekannte Funktionen von x bezeichnen, so geht die gegebene Differentialgleichung über in

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}-\frac{uv}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Hebt man nun aus den beiden letzten Gliedern der linken Seite den Faktor v aus, so erhält die vorstehende Gleichung die Form

(1501) $$u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}-\frac{u}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

die den Gedanken nahelegt, zur Vereinfachung der Rechnung zunächst u so zu wählen, daß

(1502) $$\frac{du}{dx}-\frac{u}{\sqrt{1+x^2}}=0$$

wird, und dann die Funktion v so zu bestimmen, daß sie der Gleichung (1501) genügt. Beides erweist sich als ausführbar. Die Gleichung (1502) wird nämlich erfüllt, wenn man für u eine von Null verschiedene Funktion so annimmt, daß

$$\frac{du}{u}=\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

wird, und dies läßt sich erreichen, wenn man

$$\lg u=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$$

oder

$$u=x+\sqrt{1+x^2}$$

setzt. Nachdem dies geschehen, erhält man für v aus (1501) die Gleichung

$$(x+\sqrt{1+x^2})\frac{dv}{dx}=\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

oder

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Diese liefert

$$v = \arcsin x + c,$$

wo das Zeichen arcsin den Hauptwert und c eine beliebige Konstante bezeichnet. Die ursprünglich gegebene Differentialgleichung (1499) wird daher erfüllt, wenn man

$$y = (x + \sqrt{1+x^2})(\arcsin x + c)$$

setzt, und umgekehrt muß sich auch, wie man leicht erkennt, jedes partikuläre Integral der Differentialgleichung (1499) durch einen Ausdruck von dieser Form darstellen lassen.

Allgemeine Beschreibung des Verfahrens. Eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen einer unabhängigen Veränderlichen x und einer zu bestimmenden Funktion y von x heißt **linear**, wenn sie auf die Form

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y + \varphi(x) = 0 \tag{1503}$$

gebracht werden kann, wo $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei in ein und demselben Intervall stetige Funktionen von x bedeuten.

Ist eine Differentialgleichung von dieser Form gegeben, so kann man ihre Integration auf Quadraturen zurückführen, indem man

$$y = uv$$

setzt, wo u und v zwei neue vorläufig unbekannte differenzierbare Funktionen von x bedeuten. Denn die gegebene Differentialgleichung geht dann über in

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + f(x)uv + \varphi(x) = 0$$

oder

$$u\frac{dv}{dx} + v\left[\frac{du}{dx} + f(x)u\right] + \varphi(x) = 0. \tag{1504}$$

Nun kann man aber u so wählen, daß $u \neq 0$ und zugleich

$$\frac{du}{dx} + f(x)u = 0 \tag{1505}$$

wird. Denn die Trennung der Veränderlichen liefert

$$\frac{du}{u} = -f(x)\,dx,$$

und hieraus folgt, wenn man zur Abkürzung

$$\int f(x)\,dx = F(x) \tag{1506}$$

setzt, daß man durch die Gleichung

$$\lg u = -F(x) \qquad \text{oder} \qquad u = e^{-F(x)}$$

in der Tat eine Funktion u von der gewünschten Beschaffenheit erhält. Für die zugehörige Funktion v ergibt sich sodann aus (1504) die Gleichung

$$e^{-F(x)}\frac{dv}{dx} + \varphi(x) = 0,$$

und aus dieser folgt

$$v = c - \int \varphi(x)\, e^{F(x)}\,dx,$$

wo c eine beliebige Konstante bedeutet. Die ursprüngliche Differentialgleichung (1503) wird daher jedesmal erfüllt, wenn man

$$y = e^{-F(x)}\left[c - \int \varphi(x)\, e^{F(x)}\,dx\right] \tag{1507}$$

setzt, und umgekehrt muß auch jedes ihrer partikulären Integrale durch einen Ausdruck von dieser Form darstellbar sein.

Anmerkung. Da die durch die Gleichung (1506) erklärte Funktion $F(x)$ um eine beliebige Konstante a vermehrt werden darf, so hat es den Anschein, als lieferte die Gleichung (1507) für die gesuchte Funktion y einen Ausdruck, der zwei willkürliche Konstante enthält. Tatsächlich kommt aber nur eine solche Konstante vor. Denn setzt man in der Gleichung (1507) an die Stelle von $F(x)$ die Summe $[F(x) + a]$, so erhält man

$$y = e^{-F(x)-a}\left[c - \int \varphi(x)\, e^{F(x)+a}\,dx\right] = e^{-F(x)}\left[ce^{-a} - \int \varphi(x)\, e^{F(x)}\,dx\right],$$

und dieser Ausdruck enthält nur eine willkürliche Konstante, nämlich das Produkt ce^{-a}.

550. Stromverlauf bei Selbstinduktion. — In einem Stromleiter $\mathfrak{l}$, der mit hinreichender Genauigkeit durch eine gewöhnliche geschlossene Linie abgebildet werden kann und den gegebenen Gesamtwiderstand R hat, werde durch äußere Einflüsse eine periodisch wechselnde elektromotorische Kraft induziert, die als positiv gelten soll, solange sie im einen und als negativ, solange sie im anderen Sinne wirkt. Diese Kraft ändere sich derart, daß sie zur Zeit t nach Beginn der Einwirkung auch hinsichtlich des Vorzeichens durch den Ausdruck $E \sin(at)$ dargestellt wird, wobei E und a gegebene positive Konstante bedeuten. Auch die Stärke i des in $\mathfrak{l}$ induzierten Stromes werde als positiv oder negativ angesehen, je nachdem der Strom in der einen oder der anderen Richtung fließt, und zwar so, daß die Richtungen eines positiven Stromes und einer positiven elektromotorischen Kraft übereinstimmen. Ferner werde angenommen, daß für den induzierten Strom zu jeder Zeit das Ohmsche Gesetz gilt und daß die in $\mathfrak{l}$ bei Änderung der Stärke i dieses Stromes durch Selbstinduktion erzeugte elektromotorische Gegenkraft dem Produkt $L\frac{di}{dt}$ gleichgesetzt werden darf, wo L eine gegebene Konstante, den sogenannten Selbstinduktionskoeffizienten, bedeutet. Man soll unter diesen Voraussetzungen, die, wie die Erfahrung lehrt, mit ausreichender Genauigkeit erfüllt sind, sobald nur die Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{a}$ oberhalb, also die Konstante a unterhalb einer gewissen Grenze liegt, die Stärke i des zur Zeit t in $\mathfrak{l}$ fließenden Stromes als Funktion von t bestimmen.

Lösung: In $\mathfrak{l}$ herrscht zur Zeit t die elektromotorische Kraft

$$E \sin(at) - L\frac{di}{dt}.$$

Andererseits stimmt diese elektromotorische Kraft nach dem Ohmschen Gesetz stets mit dem Produkt Ri überein. Also muß i die Differentialgleichung

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E \sin(at) \tag{1508}$$

erfüllen, und zu dieser Differentialgleichung tritt die Anfangsbedingung

$$i = 0 \qquad \text{für} \qquad t = 0.$$

Setzt man nun $i = uv$ und dividiert man zugleich durch L, so geht (1508) über in

$$u\frac{dv}{dt} + v\left(\frac{du}{dt} + \frac{R}{L}u\right) = \frac{E}{L}\sin(at), \tag{1509}$$

was darauf führt, u so zu wählen, daß

$$\frac{du}{dt} + \frac{R}{L}u = 0$$

ist. Dies wird erreicht, wenn

$$\frac{du}{u} = -\frac{R}{L}dt$$

oder

$$\lg u = -\frac{R}{L}t$$

ist, das heißt wenn

$$u = e^{-\frac{R}{L}t}$$

gesetzt wird. Nachdem dies geschehen, liefert (1509) für v die Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t}\sin(at),$$

aus der sich mit Hilfe der Gleichung (1224) der Nr. **443**

$$v = \frac{E}{R^2 + a^2L^2}e^{\frac{R}{L}t}[R\sin(at) - aL\cos(at)] + c \tag{1510}$$

ergibt, wo c eine Konstante bedeutet. Diese ergibt sich aus der Anfangsbedingung. Da nämlich für $t = 0$ das Produkt $uv = i$ den Wert 0 annehmen soll, aber sein erster Faktor gleich 1 wird, so muß der zweite Faktor v für $t = 0$ ebenfalls gleich Null werden und daher nach (1510)

$$c = \frac{EaL}{R^2 + a^2L^2}$$

sein. Folglich ergibt sich schließlich

$$i = \frac{E}{R^2 + a^2L^2}[R\sin(at) - aL\cos(at)] + \frac{EaL}{R^2 + a^2L^2}e^{-\frac{R}{L}t} \tag{1511}$$

oder, wenn man sich einen Hilfswinkel α durch die Gleichungen

$$\cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2L^2}}; \qquad \sin\alpha = \frac{aL}{\sqrt{R^2 + a^2L^2}}$$

bestimmt denkt,

$$i = \frac{E}{\sqrt{R^2 + a^2L^2}}\sin(at - \alpha) + \frac{EaL}{R^2 + a^2L^2}e^{-\frac{R}{L}t}. \tag{1511a}$$

Der induzierte Strom besteht also aus einem Wechselstrom von der Amplitude $\frac{E}{\sqrt{R^2 + a^2L^2}}$, dessen Phase beständig um den

Winkel α hinter der Phase der durch äußere Induktion erzeugten elektromotorischen Kraft zurückbleibt und einem ihn überlagernden Gleichstrom, dessen Stärke mit wachsender Zeit beständig abnimmt und schließlich unmerklich wird.

551. Integrierender Faktor. — Ist eine Differentialgleichung erster Ordnung in der Form

$$\varphi(x,y)dx + \chi(x,y)dy = 0 \tag{1512}$$

gegeben, wo $\varphi(x,y)$ und $\chi(x,y)$ Funktionen bedeuten, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in ein und demselben Kontinuum $\mathfrak{B}$ vorhanden und stetig sind, so empfiehlt es sich, zunächst festzustellen, ob vielleicht in $\mathfrak{B}$ überall

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \chi(x,y)}{\partial x} \tag{1513}$$

ist. Denn falls dies zutrifft, kann man nach Einschränkung der Veränderlichen x, y auf einen einfach zusammenhängenden Teil des Kontinuums $\mathfrak{B}$ gemäß Nr. **521** eine Funktion $f(x, y)$ so bestimmen, daß ihr vollständiges Differential mit der linken Seite der Gleichung (1512) übereinstimmt, und dann die Gleichung

$$f(x, y) = c \tag{1514}$$

ansetzen, wo c irgend einen konstanten Wert bedeutet, den die Funktion $f(x, y)$ in dem erwähnten Teile des Kontinuums $\mathfrak{B}$ anzunehmen vermag. Jede differenzierbare Funktion y von x, die sich durch Auflösung einer Gleichung von dieser Form ergibt, ist ein partikuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung, und umgekehrt genügt jedes partikuläre Integral y, bei welchem die Stelle (x, y) in dem erwähnten Teile von $\mathfrak{B}$ enthalten bleibt, einer Gleichung von der Form (1514).

Ein Beispiel für die Anwendbarkeit dieses Verfahrens bietet die in Nr. **538**, 2 erhaltene Differentialgleichung (1468). Denn bringt man diese Gleichung auf die Form

$$x(x^2 + y^2 - a^2)dx + y(x^2 + y^2 + a^2)dy = 0,$$

so erkennt man leicht, daß jetzt die linke Seite in der Tat ein vollständiges Differential ist, nämlich das Differential der Funktion

$$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}a^2(x^2 - y^2).$$

Jede der gesuchten Kraftlinien läßt sich daher durch eine Gleichung von der Form

$$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}a^2(x^2 - y^2) = c$$

oder auch

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = C$$

darstellen, wo sowohl c als $C = 4c$ eine Konstante bedeutet.

Ist zweitens, entgegen der bisherigen Annahme, die Gleichung (1513) nicht erfüllt, also die linke Seite der Gleichung (1512) kein vollständiges Differential, so kann man der gegebenen Differentialgleichung (1512) durch Multiplikation mit einer vorläufig unbekannten Funktion $\mu(x, y)$ die Form

(1515) $$\mu(x,y)\varphi(x,y)dx + \mu(x,y)\chi(x,y)dy = 0$$

geben und sich dann die Frage vorlegen, ob es vielleicht möglich ist, die Funktion $\mu(x, y)$ für einen einfach zusammenhängenden Teil von $\mathfrak{B}$ so zu bestimmen, daß ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung daselbst vorhanden und stetig sind und daß die linke Seite der Gleichung (1515) ein vollständiges Differential wird. Damit dies eintrete, ist notwendig, daß die Funktion $\mu(x, y)$ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial[\mu(x,y)\varphi(x,y)]}{\partial y} = \frac{\partial[\mu(x,y)\chi(x,y)]}{\partial x}$$

erfülle, die sich bei Anwendung der üblichen Bezeichnung partieller Ableitungen durch Indizes und Weglassung der Argumente folgendermaßen schreiben läßt:

(1516) $$\mu_y\varphi - \mu_x\chi + \mu(\varphi_y - \chi_x) = 0.$$

Jede nicht dauernd verschwindende Lösung dieser Differentialgleichung heißt ein **integrierender Faktor** der ursprünglich gegebenen Differentialgleichung (1512), da die Kenntnis einer solchen Lösung die Integration der Differentialgleichung (1512) auf den schon erledigten Fall zurückführt und so ermöglicht.

Die ursprüngliche Forderung bestand darin, alle partikulären Integrale der gegebenen Differentialgleichung (1512) zu finden. Dagegen handelt es sich bei der Differentialgleichung (1516) nur um die Ermittelung einer einzigen Lösung, die von der trivialen Lösung $\mu = 0$ verschieden ist. Trotzdem erscheint die ursprüngliche Aufgabe auf eine verwickeltere zurückgeführt, denn die Gleichung (1516) ist eine partielle Differentialgleichung. Darin liegt eine Schwierigkeit, und diese hat zur Folge, daß das neue Verfahren nur selten weiter führt als andere Hilfsmittel. Immerhin kann man zuweilen einen integrierenden Faktor durch besondere Kunstgriffe ermitteln, z. B. dadurch, daß man versucht, der Differentialgleichung (1516) durch eine Funktion μ zu genügen, die nur von x allein abhängt, oder nur von y allein, oder nur von dem Produkt xy allein, usw.

Um z. B. zu erfahren, ob ein integrierender Faktor μ vorhanden ist, der nur von x allein abhängt, und gegebenenfalls einen solchen Faktor zu finden, hat man in der Gleichung (1516)

$$\mu_x = \frac{d\mu}{dx} \qquad \text{und} \qquad \mu_y = 0$$

zu setzen. Man erhält dann nach einfachen Umformungen die Gleichung

$$(1517) \qquad \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{\varphi_y - \chi_x}{\chi}$$

und erkennt daraus, daß ein integrierender Faktor der fraglichen Art nur dann vorhanden sein kann, wenn die rechte Seite der Gleichung (1517) eine Funktion von x allein ist, daß sich dann aber auch ein solcher Faktor aus dieser Gleichung ermitteln läßt.

Ähnlich ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines nur von y abhängenden integrierenden Faktors, daß der Quotient $\frac{\varphi_y - \chi_x}{\varphi}$ eine Funktion von y allein sei.

Will man wissen, ob es einen integrierenden Faktor gibt, der nur von dem Produkt xy abhängt, so führt man für dieses Produkt eine abkürzende Bezeichnung ein, indem man etwa $xy = u$ setzt, und macht sodann den Ansatz

$$\mu = f(u)$$

wo $f(u)$ eine vorläufig unbekannte differenzierbare Funktion von u bedeutet. Dann wird

$$\mu_x = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)y; \qquad \mu_y = f'(u)\frac{\partial u}{\partial y} = f'(u)x.$$

Die Gleichung (1516) geht daher über in

$$f'(u)[x\varphi - y\chi] + f(u)[\varphi_y - \chi_x] = 0$$

oder

$$(1518) \qquad \frac{f'(u)}{f(u)} = -\frac{\varphi_y - \chi_x}{x\varphi - y\chi},$$

und da hier die linke Seite nur von $u = xy$ abhängt, ist für das

Vorhandensein eines nur von dem Produkt xy abhängenden integrierenden Faktors notwendig, daß auch die rechte Seite eine Funktion dieses Produktes allein sei. Beim Erfülltsein dieser Forderung ist es aber auch immer möglich, mittels der Gleichung (1518) einen integrierenden Faktor der fraglichen Art zu bestimmen.

Ähnliche Überlegungen ergeben als notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines nur von dem Quotienten $\frac{y}{x}$ abhängenden integrierenden Faktors, daß der Ausdruck

$$\frac{x^2(\varphi_y - \chi_x)}{x\varphi + y\chi}$$

eine Funktion von $\frac{y}{x}$ allein sei, und für das Vorhandensein eines nur von der Summe $(x^2 + y^2)$ abhängenden integrierenden Faktors, daß der Ausdruck

$$\frac{\varphi_y - \chi_x}{y\varphi - x\chi}$$

eine Funktion von $(x^2 + y^2)$ allein sei.

552. Wiederholte Differentiation. — Beispiel. Eine Funktion y einer Veränderlichen x soll für eine gewisse Umgebung des Wertes 0 so bestimmt werden, daß sie der Differentialgleichung

$$y = 2xy' + e^{y'} \tag{1519}$$

genügt, wo unter y' die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ zu verstehen ist, und daß sie für $x = 0$ den Anfangswert e erwirbt.

Lösung: Die gegebene Differentialgleichung wird erfüllt, wenn man für jeden Wert von x

$$y = 1, \qquad \text{also} \qquad y' = 0$$

setzt. Aber diese Lösung wird durch die vorgeschriebenen Anfangswerte ausgeschlossen. Denn für $x = 0$ soll ja $y = e$ sein. Da sich hieraus für y' der Anfangswert 1 ergibt, kommen auch für y' bei Einschränkung der Veränderlichen x auf eine hinreichend enge Umgebung der Stelle 0 nur von Null verschiedene Werte in Frage.

Die Auflösung der gegebenen Differentialgleichung in bezug auf y' ist praktisch nicht möglich, und deswegen ist keines der bisher angegebenen Hilfsmittel zur Integration anwendbar. Trotzdem kann man aber zu Aufschlüssen über die gesuchte Lösung gelangen, und zwar auf folgendem Wege: Differenziert man unter der Voraussetzung, daß y eine der Gleichung (1519) genügende Funktion bezeichnet, beide Seiten dieser Gleichung vollständig nach x, so erhält man

$$y' = 2y' + (2x + e^{y'})\frac{dy'}{dx}$$

oder

$$y'dx + (2x + e^{y'})dy' = 0. \tag{1520}$$

Dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und y', und zwar eine Differentialgleichung, für die sich leicht ein integrierender Faktor finden läßt. Die partielle Differentialgleichung für den integrierenden Faktor μ lautet nämlich im vorliegenden Fall

$$\mu + y'\frac{\partial \mu}{\partial y'} = 2\mu + (2x + e^{y'})\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

und läßt sich, wie man bald erkennt, dadurch befriedigen, daß man $\mu = y'$ setzt. Formt man demgemäß die Differentialgleichung (1520) durch Multiplikation mit y' um, so findet man nach Nr. **521** ohne Schwierigkeit, daß sie sich in der Form

$$d[xy'^2 + (y'-1)e^{y'}] = 0$$

schreiben läßt. Daraus folgt

$$xy'^2 + (y'-1)e^{y'} = c,$$

wo c eine Konstante bedeutet, und mit Rücksicht auf die Anfangswerte ergibt sich

$$xy'^2 + (y'-1)e^{y'} = 0. \tag{1521}$$

Eigentlich müßte nun hieraus y' als Funktion von x berechund dann y durch Integration gefunden werden, oder auch dadurch, daß man die für y' erhaltene Funktion in die Gleichung (1519) einsetzt. Aber die Auflösung der Gleichung (1521) nach y' ist wieder praktisch nicht ausführbar. Dafür kann man indessen sehr leicht x als Funktion von y' berechnen und dann in die Gleichung (1519) einsetzen. So erhält man

$$x = \frac{1-y'}{y'^2}e^{y'}; \qquad y = \frac{2-y'}{y'}e^{y'} \tag{1522}$$

und hat damit wenigstens eine Parameterdarstellung desjenigen

Linienstückes gewonnen, welches das gesuchte partikuläre Integral geometrisch darstellt.

Allgemeine Beschreibung des Verfahrens. Das Verfahren der wiederholten Differentiation hat den Vorzug, zur Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung zwischen einer unabhängigen Veränderlichen x und einer gesuchten Funktion y auch dann anwendbar zu sein, wenn die Auflösung der gegebenen Gleichung in bezug auf die Ableitung y' der unbekannten Funktion Schwierigkeiten bereitet und daher andere Hilfsmittel versagen. Bei seiner Anwendung kann man auf zwei Arten zu Werke gehen:

I. — Man löst die gegebene Differentialgleichung auf in bezug auf y, gibt ihr also die Form

(1523) $$y = \Phi(x, y').$$

Nun differenziert man unter der Voraussetzung, daß y eine dieser Differentialgleichung genügende Funktion bedeutet, beiderseits vollständig in bezug auf x und erhält

$$y' = \Phi_x(x, y') + \Phi_{y'}(x, y')\frac{dy'}{dx}.$$

Dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und y'. Aus ihr bestimmt man

entweder y' als Funktion von x,
oder x als Funktion von y'.

In beiden Fällen hat man das Ergebnis in die Gleichung (1523) einzusetzen und erhält dann

entweder y als Funktion von x,
oder x und y als Funktionen des Parameters y'.

II. — Man löst die gegebene Differentialgleichung auf in bezug auf x, gibt ihr also die Form

(1524) $$x = X(y, y').$$

Hierauf differenziert man unter der Voraussetzung, daß y eine dieser Differentialgleichung genügende Funktion bedeutet, beiderseits vollständig nach x und erhält zunächst

$$1 = X_y(y, y')y' + X_{y'}(y, y')\frac{dy'}{dx}.$$

Nun ist aber

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dy}y'.$$

Indem man dies einsetzt, erhält man

$$1 = X_y(y, y')y' + X_{y'}(y, y')\frac{dy'}{dy}y',$$

gewinnt also eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen y und y'. Aus ihr bestimmt man

entweder y' als Funktion von y,
oder y als Funktion von y'.

In beiden Fällen hat man das Ergebnis in die Gleichung (1524) einzusetzen und erhält dann

entweder x als Funktion von y,
oder x und y als Funktionen des Parameters y'.

553. Fall, daß x oder y fehlt. — Die in den vorangehenden Nummern besprochenen Hilfsmittel genügen, wenigstens theoretisch, zur Integration einer jeden Differentialgleichung erster Ordnung, welche die unabhängige Veränderliche x und die gesuchte Funktion y nicht alle beide enthält. Dies ergibt sich aus folgender Übersicht:

I. — Wenn x fehlt, so löst man die gegebene Differentialgleichung entweder

A. — nach $\frac{dy}{dx}$ auf und erhält dadurch eine Gleichung von der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(y),$$

aus der sich dann durch Trennung der Veränderlichen und Integration

$$\int \frac{1}{f(y)} dy = x$$

ergibt. Oder man löst

B. — nach y auf und erhält eine Gleichung von der Form

$$y = \varphi(y'),$$

wo zur Abkürzung $\frac{dy}{dx} = y'$ gesetzt ist. Die wiederholte Differentiation liefert dann

$$y' = \varphi'(y')\frac{dy'}{dx},$$

und daraus folgt

$$dx = \frac{\varphi'(y')}{y'} dy', \qquad \text{also} \qquad x = \int \frac{\varphi'(y')}{y'} dy',$$

so daß jetzt x und y als Funktionen ein und desselben Parameters y' dargestellt sind.

II. — Wenn y fehlt, so löst man die gegebene Differentialgleichung entweder

A. — nach $\frac{dy}{dx}$ auf und erhält dadurch eine Gleichung von der Form

$$\frac{dy}{dx} = \chi(x),$$

aus der sich durch Integration sofort

$$y = \int \chi(x)\, dx$$

ergibt. Oder man löst

B. — nach x auf und erhält dadurch eine Gleichung von der Form

$$x = \psi(y'),$$

wo wieder $\frac{dy}{dx} = y'$ gesetzt ist. Hierauf liefert die nochmalige Differentiation

$$1 = \psi'(y')\frac{dy'}{dy}y',$$

woraus

$$y = \int y'\,\psi'(y')\,dy'$$

folgt. Damit sind wieder x und y als Funktionen ein und desselben Parameters dargestellt.

554. Singuläre Lösungen. — Hat man durch Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung zwischen den Koordinaten x, y eines Punktes in bezug auf ein rechtwinkeliges ebenes Koordinatensystem eine einfach unendliche Linienschar von solcher Beschaffenheit gefunden, daß jede einzelne ihr angehörende Linie ein partikuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung geometrisch darstellt, so sagt man kurz, es sei gelungen, ein **allgemeines Integral** der gegebenen Differentialgleichung zu ermitteln. Dabei ist es gleichgültig, ob man für die fragliche Linienschar eine Darstellung durch eine Gleichung von der Form

$$y = f(x, c)$$

bekommen hat, bei der die Ordinate y als Funktion der Abszisse

x und eines zwischen gewissen Grenzen willkürlich wählbaren Parameters c erscheint, oder ob sich allgemeiner eine Darstellung durch eine Gleichung

$$F(x, y, c) = 0$$

zwischen den beiden Koordinaten und einem solchen Parameter oder endlich eine Darstellung durch zwei Gleichungen

$$x = \varphi(t, c); \qquad y = \chi(t, c)$$

ergeben hat, die für jeden der verschiedenen zulässigen Werte der Konstanten c eine Parameterdarstellung einer Linie der Schar liefert.

In allen diesen drei Fällen kann es nun vorkommen, daß sich jedes partikuläre Integral aus dem allgemeinen Integral durch passende Verfügung über die Konstante c ableiten läßt. Es kann aber auch sein, daß es außer den so zu gewinnenden partikulären Integralen noch ein oder mehrere partikuläre Integrale gibt, die sich nicht auf diesem Wege ergeben und auch nicht etwa aus einem anderen allgemeinen Integral durch Spezialisierung der Konstanten ableitbar sind. Solche vereinzelt vorkommende partikuläre Integrale werden dann als **singuläre Lösungen** bezeichnet.

Beispiel. Es sei y als Funktion von x aus der Differentialgleichung

$$(1525) \qquad x(1 + y'^2) - 2yy' = 0$$

oder

$$xy'^2 - 2yy' + x = 0$$

zu bestimmen.

Lösung: Denkt man sich die Zahl 0 vom Wertbereich der Veränderlichen x vorläufig ausgeschlossen, so erhält man durch Auflösung der gegebenen Gleichung in bezug auf y'

$$y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - x^2}}{x}$$

und erkennt daraus erstens, daß für y nur solche Werte in Frage kommen, welche die Ungleichung $y^2 \geqq x^2$ erfüllen, und zweitens, daß man es mit einer homogenen Differentialgleichung zu tun hat. Setzt man demgemäß $y = xz$, so ergibt sich für die neue der Bedingung $z^2 \geqq 1$ unterworfene unbekannte Funktion z die Differentialgleichung

$$z + x\frac{dz}{dx} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$$

oder

$$x\frac{dz}{dx} = \pm\sqrt{z^2 - 1}, \tag{1526}$$

und wenn man nun zunächst nach denjenigen Integralen fragt, welche die Bedingung $z^2 > 1$ erfüllen, so kann man die Veränderlichen trennen. Dies gibt

$$\frac{dx}{x} = \pm\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}},$$

also

$$\lg|x| = \pm\lg\left|z + \sqrt{z^2-1}\right| + C,$$

wo C eine beliebige Konstante bedeutet. Nun ist aber

$$-\lg\left|z + \sqrt{z^2-1}\right| = \lg\left|\frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}}\right| = \lg\left|z - \sqrt{z^2-1}\right|.$$

Also kann man der vorangehenden Gleichung auch die Form

$$\lg|x| = \lg\left|z \pm \sqrt{z^2-1}\right| + C$$

geben und erhält daraus

$$x = c(z \pm \sqrt{z^2-1}),$$

wo c eine von Null verschiedene, aber sonst beliebige Konstante bezeichnet. Hieraus folgt

$$\frac{x}{c} - z = \pm\sqrt{z^2-1},$$

also

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{2xz}{c} + z^2 = z^2 - 1$$

oder

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{2y}{c} = -1$$

oder endlich

$$y = \frac{x^2}{2c} + \frac{c}{2}. \tag{1527}$$

Demgemäß ist $y' = \frac{x}{c}$, und da die hiernach zusammengehörenden Werte $x = 0$, $y' = 0$ auch der ursprünglich gegebenen Gleichung (1525) genügen, kann die bisher festgehaltene Einschränkung, daß $x \neq 0$ sein soll, nachträglich aufgehoben werden.

Die Gleichung (1527) liefert ein allgemeines Integral der gegebenen Differentialgleichung, und dieses allgemeine Integral wird, wie man leicht erkennt, geometrisch durch eine Schar von Parabeln (Fig. 110) dargestellt, deren Achsen sämtlich mit der y-Achse zusammenfallen.

Nun bleibt aber noch der vorhin ausgeschlossene Fall zu erledigen, daß $z^2=1$ ist. Es zeigt sich, daß dieser Fall in der Tat eintreten kann, ja sogar für jeden Wert von x. Denn die Gleichung (1526) wird tatsächlich erfüllt, wenn dauernd $z=1$, also $\frac{dz}{dx}=0$ ist, und ebenso auch, wenn man dauernd $z=-1$ setzt. So kommt man auf zwei neue partikuläre Integrale der gegebenen Differentialgleichung (1525), nämlich

$$y=x \qquad \text{und} \qquad y=-x,$$

und dies sind singuläre Lösungen, da sie sich nicht aus dem allgemeinen Integral durch Spezialisierung der Konstanten c ableiten lassen.

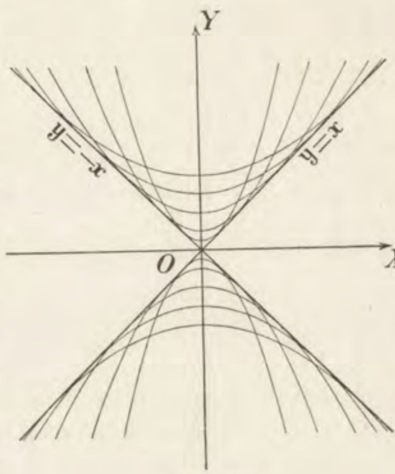


Fig. 110.

Im vorliegenden Fall bilden die geometrischen Bilder der beiden singulären Lösungen zusammengenommen die Einhüllende derjenigen Parabelschar, welche das allgemeine Integral geometrisch darstellt. Zum Beweise hat man nur nötig, die Sätze der Nummern **370** und **371** auf die durch die Gleichung (1527) gegebene Parabelschar anzuwenden.

Ähnliches gilt in anderen Fällen. *Wenn nämlich einem allgemeinen Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung*

$$F(x, y, y') = 0$$

zwischen den rechtwinkeligen ebenen Koordinaten x, y eines Punktes und der zugehörigen Steigung y' eine Linienschar entspricht, die eine Einhüllende hat, so stellt diese Einhüllende im allgemeinen eine singuläre Lösung der gegebenen Differentialgleichung dar.

Beweis: Ist P ein beliebiger Punkt der Einhüllenden, so gibt es im allgemeinen eine durch P gehende und die Einhüllende dort berührende Linie $\mathfrak{l}$ der Schar. Da diese Linie ein partikuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung darstellt, so besteht, wenn x, y die Koordinaten von P und y' die Steigung von $\mathfrak{l}$ in P bedeuten, die Gleichung

$$F(x, y, y') = 0 .$$

Nun ist aber y', da $\mathfrak{l}$ die Einhüllende in P berührt, zugleich auch die Steigung der Einhüllenden in P. Also wird die gegebene Differentialgleichung im allgemeinen auch dann befriedigt, wenn man für x, y die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Einhüllenden und für y' die Steigung der Einhüllenden in diesem Punkte einsetzt. Das heißt, die Einhüllende stellt ebenfalls ein Integral der gegebenen Differentialgleichung dar, und zwar im allgemeinen eine singuläre Lösung, da sie im allgemeinen von allen Linien der Schar verschieden ist.

Natürlich sind verschiedenartige Ausnahmen von dieser nur im allgemeinen geltenden Regel möglich, aber auf eine Erörterung solcher Ausnahmefälle muß hier verzichtet werden.

Gerade die singulären Lösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung sind praktisch meistens leicht zu finden. Denn es gilt folgender

Lehrsatz: *Eine singuläre Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung*

$$F(x, y, y') = 0$$

erfüllt im allgemeinen auch die Gleichung

$$F_{y'}(x, y, y') = 0 ,$$

die sich durch partielle Differentiation nach der Ableitung y' der gesuchten Funktion ergibt.

Trifft dies zu, so kann man die singuläre Lösung einfach dadurch finden, daß man y' aus den beiden erwähnten Gleichungen eliminiert, oder auch dadurch, daß man x und y aus ihnen als Funktionen des Parameters y' berechnet.

Die Richtigkeit des angegebenen Satzes kann bei der oben behandelten Differentialgleichung (1525) sehr leicht durch Einsetzen der singulären Lösungen $y = \pm x$ in die durch partielle Differentiation entstehende Gleichung

$$2xy' - 2y = 0$$

bestätigt werden. Aber auch sonst hat der Beweis keine Schwierigkeit, wenn man sich auf die Betrachtung des Falles beschränkt, daß die singuläre Lösung geometrisch wirklich eine gemeinsame Berührungslinie der einzelnen Linien der einem allgemeinen Integral entsprechenden Linienschar darstellt. Sind nämlich unter dieser Voraussetzung x_0, y_0 die Koordinaten eines Punktes P_0 der gemeinsamen Berührungslinie, an welchem deren Steigung einen endlichen Wert hat, und ist $\mathfrak{l}$ die durch P_0 gehende Linie der Schar, so gilt, wenn x, y die Koordinaten eines beweglichen Punktes von $\mathfrak{l}$ und y' die zugehörige Steigung bedeuten, für jeden in einer gewissen Nähe von x_0 liegenden Wert von x die Gleichung

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1528}$$

also auch die hieraus durch vollständige Differentiation nach x entstehende Gleichung

$$F_x(x, y, y') + F_y(x, y, y')y' + F_{y'}(x, y, y')y'' = 0, \tag{1529}$$

wo y'' eine Abkürzung für $\frac{dy'}{dx}$ bedeutet. Setzt man nun in diese Gleichung für x, y die Koordinaten des Punktes P_0 ein und versteht man unter y_0' und y_0'' die bei der Betrachtung von $\mathfrak{l}$ zu P_0 gehörenden Werte von y' und y'', so ergibt sich

$$F_x(x_0, y_0, y_0') + F_y(x_0, y_0, y_0')y_0' + F_{y'}(x_0, y_0, y_0')y_0'' = 0. \tag{1530}$$

Zweitens gelten die Gleichungen (1528) und (1529) aber auch dann, wenn man unter x, y die Koordinaten eines beweglichen Punktes der gemeinsamen Berührungslinie und unter y' die zugehörige Steigung dieser Berührungslinie versteht. Setzt man nun bei diesen Annahmen für x, y wieder die Koordinaten des Punktes P_0 in die Gleichung (1529) ein, so hat man wegen der Berührung auch für y' wieder den Wert y_0' einzusetzen. Dagegen hat man statt y_0'' im allgemeinen einen anderen Wert zu nehmen. Denn träte eine solche Änderung nicht ein, so würde das heißen, daß die Linie $\mathfrak{l}$ und die gemeinsame Berührungslinie in P_0 nicht nur die gleiche Tangente, sondern auch die gleiche Krümmung haben, was im allgemeinen nicht zutrifft. Man erhält daher, wenn man den neuen zu P_0 gehörenden Wert von y'' durch η_0'' bezeichnet,

$$F_x(x_0, y_0, y_0') + F_y(x_0, y_0, y_0')y_0' + F_{y'}(x_0, y_0, y_0')\eta_0'' = 0.$$

Verbindet man nun diese Gleichung mit der Gleichung (1530) durch Subtraktion, so ergibt sich

$$F_{y'}(x_0, y_0, y'_0)(y''_0 - \eta''_0) = 0$$

und wegen des Nichtverschwindens des zweiten Faktors

$$F_{y'}(x_0, y_0, y'_0) = 0.$$

Damit ist aber die ausgesprochene Behauptung bewiesen, da ja für P_0 jeder Punkt der gemeinsamen Berührungslinie genommen werden darf, in welchem deren Tangente nicht gerade zur Ordinatenachse parallel ist.

555. Trajektorien. — Wenn eine einfach unendliche ebene Linienschar so beschaffen ist, daß durch jeden Punkt eines zweifach ausgedehnten ebenen Bereiches $\mathfrak{B}$ eine und nur eine Linie der Schar hindurchgeht, so kann man bei Einschränkung der Betrachtung auf den Bereich $\mathfrak{B}$ die Aufgabe stellen, eine die Linien der gegebenen Schar schneidende Linie so zu bestimmen, daß überall eine ihrer beiden Richtungen gegen eine der beiden Richtungen der geschnittenen Linie unter ein und demselben gegebenen Winkel geneigt ist. Jede Linie, die eine Aufgabe dieser Art löst, heißt eine **isogonale Trajektorie** der gegebenen Schar und insbesondere eine **orthogonale Trajektorie,** wenn der vorgeschriebene Winkel ein rechter ist.

Ist eine einfach unendliche Linienschar in einem System rechtwinkeliger ebener Koordinaten x, y durch eine Gleichung

$$F(x, y, c) = 0$$

zwischen den Koordinaten und einem zwischen gewissen Grenzen willkürlich wählbaren Parameter c gegeben, so kann man die Frage, ob durch einen Punkt (x_0, y_0) des überdeckten Gebietes nur eine oder mehrere Linien der Schar gehen, dadurch entscheiden, daß man die Gleichung

$$F(x_0, y_0, c) = 0$$

in bezug auf die Unbekannte c auflöst. Je nachdem diese Gleichung nur eine oder mehrere Wurzeln hat, gehen durch den Punkt (x_0, y_0) nur eine oder mehrere Linien der Schar. Daher ist die Forderung, daß durch jeden Punkt des von einer gegebenen Schar überdeckten Bereiches nur eine Linie der Schar gehen soll, insbesondere dann erfüllt, wenn die fragliche Schar durch eine Gleichung von der Form

$$\Phi(x, y) = c$$

gegeben ist, was z. B. für die Linien gleicher Temperatur oder gleicher elektrischer Spannung in einer leitenden Platte regelmäßig zutrifft, wenn man unter c eben die Temperatur, beziehungsweise die Spannung versteht. Hat man es dagegen mit einer Schar zu tun, welche der eben gestellten Forderung nicht genügt, so ist es in manchen Fällen möglich, die Gleichung der Schar durch mehrere Gleichungen der zuletzt erwähnten Art zu ersetzen; geometrisch läuft dies darauf hinaus, die gegebene Schar in mehrere Scharen von Linienzweigen aufzulösen, von denen jede einzelne die angegebene Forderung erfüllt. Ein Beispiel bietet die Schar aller in einer Ebene mit einem System rechtwinkeliger Koordinaten x, y enthaltenen Kreise, die einen gegebenen konstanten Radius r haben und deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen. Diese Schar wird durch die Gleichung

$$(x-c)^2+y^2-r^2=0 \tag{1531}$$

dargestellt, wo c eine ganz nach Belieben wählbare Konstante bedeutet, und ist so beschaffen, daß durch jeden inneren Punkt des von ihr überdeckten Gebietes zwei Linien der Schar gehen. Sie kann aber in zwei Scharen nicht miteinander zusammentreffender Linienstücke zerlegt werden, nämlich einerseits die Schar der linken und andererseits die Schar der rechten Kreishälften, und diese Zerlegung geschieht analytisch einfach durch Auflösung der Gleichung (1531) in bezug auf c. Man erhält dadurch die beiden Gleichungen

$$x+\sqrt{r^2-y^2}=c \qquad \text{und} \qquad x-\sqrt{r^2-y^2}=c,$$

von denen die erste offenbar die linken und die zweite die rechten Halbkreise darstellt.

Unter der Voraussetzung, daß in einer Ebene mit einem System rechtwinkeliger Koordinaten x, y für einen zweifach ausgedehnten Bereich $\mathfrak{B}$ eine einfach unendliche Linienschar durch eine Gleichung von der Form

$$\Phi(x, y)=c \tag{1532}$$

gegeben sei, wo c einen zwischen gewissen Grenzen willkürlich wählbaren Parameter und $\Phi(x, y)$ eine Funktion bedeutet, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in $\mathfrak{B}$ vorhanden und stetig sind und daselbst niemals gleichzeitig verschwinden, werde nun verlangt, eine Trajektorie so zu bestimmen, daß eine ihrer Richtungen überall gegen eine Richtung der geschnittenen Linie der

Schar unter dem gegebenen Winkel α geneigt ist. Dann müssen die Koordinaten x, y und $(x+dx)$, $(y+dy)$ zweier unendlich nahe benachbarten Punkte der Trajektorie entweder die beiden Gleichungen

$$\Phi_x(x,y)\,dx + \Phi_y(x,y)\,dy = \sqrt{[\Phi_x(x,y)]^2+[\Phi_y(x,y)]^2}\,\sqrt{dx^2+dy^2}\sin\alpha$$

und

$$\Phi_y(x,y)\,dx - \Phi_x(x,y)\,dy = \sqrt{[\Phi_x(x,y)]^2+[\Phi_y(x,y)]^2}\,\sqrt{dx^2+dy^2}\cos\alpha$$

oder diejenigen Gleichungen erfüllen, die aus ihnen durch Umkehrung der Vorzeichen der rechten Seiten entstehen. Durch Elimination der Quadratwurzeln ergibt sich hieraus, daß unter allen Umständen die Differentialgleichung

$$(1533)\qquad \begin{cases} [\Phi_x(x,y)\cos\alpha - \Phi_y(x,y)\sin\alpha]\,dx \\ \qquad\qquad + [\Phi_y(x,y)\cos\alpha + \Phi_x(x,y)\sin\alpha]\,dy = 0 \end{cases}$$

bestehen muß. Umgekehrt entspricht, wie leicht zu sehen, auch jedem partikulären Integral dieser Differentialgleichung eine Trajektorie der verlangten Art.

Soll der Winkel α ein rechter, also die Trajektorie eine orthogonale sein, so muß die einfachere Differentialgleichung

$$(1534)\qquad -\Phi_y(x,y)\,dx + \Phi_x(x,y)\,dy = 0$$

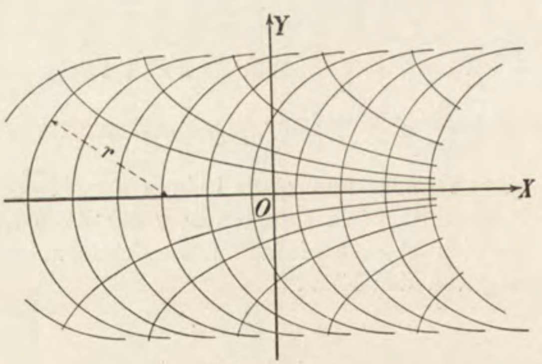


Fig. 111.

bestehen. Die Ermittelung der isogonalen wie der orthogonalen Trajektorien einer gegebenen einfach unendlichen Linienschar erfordert somit stets die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Beispiel. Die orthogonalen Trajektorien der bereits oben erwähnten Schar nach links gewölbter Halbkreise (Fig. 111) zu ermitteln, die durch die Gleichung

$$x+\sqrt{r^2-y^2}=c \tag{1535}$$

gegeben wird.

Lösung: Zur Auffindung der gesuchten Trajektorien hat man die Differentialgleichung

$$\frac{y}{\sqrt{r^2-y^2}}dx+dy=0$$

zu integrieren. Diese hat zunächst die durch die x-Achse dargestellte Lösung $y=0$. Zur Auffindung der übrigen Lösungen trennt man die Veränderlichen, erhält dadurch

$$dx+\frac{\sqrt{r^2-y^2}}{y}dy=0$$

und bekommt dann durch Integration

$$x=a-\int\frac{\sqrt{r^2-y^2}}{y}dy,$$

wo a eine beliebige Konstante bedeutet. Das rechts stehende Integral läßt sich aber leicht finden, wenn man an Stelle von y durch die Gleichung

$$\sqrt{r^2-y^2}=u$$

eine neue Veränderliche u einführt. Dann wird nämlich

$$r^2-y^2=u^2;\qquad y^2=r^2-u^2;\qquad ydy=-udu,$$

folglich

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{r^2-y^2}}{y}dy&=\int\frac{\sqrt{r^2-y^2}}{y^2}ydy=-\int\frac{u^2}{r^2-u^2}du\\&=\int\left(1-\frac{r^2}{r^2-u^2}\right)du=u-\frac{1}{2}r\int\left(\frac{1}{r+u}+\frac{1}{r-u}\right)du\\&=u-\frac{1}{2}r\lg\frac{r+u}{r-u}=u-r\lg\frac{r+u}{\sqrt{r^2-u^2}}\\&=\sqrt{r^2-y^2}-r\lg\frac{r+\sqrt{r^2-y^2}}{|y|}.\end{aligned}$$

Die von der x-Achse verschiedenen orthogonalen Trajektorien werden somit durch die Gleichung

$$x = a - \sqrt{r^2 - y^2} + r \lg \frac{r + \sqrt{r^2 - y^2}}{|y|} \tag{1536}$$

dargestellt. Sie bilden, wie man leicht erkennt, zwei zur x-Achse symmetrisch liegende Scharen kongruenter Linien, die sich sämtlich der x-Achse asymptotisch anschmiegen.

Auf genau dieselben Linienscharen kommt man auch, wenn man verlangt, eine ebene Linie so zu bestimmen, daß jede ihrer Tangenten eine gegebene Gerade in einem Punkte trifft, der von dem Berührungspunkt der Tangente den gegebenen konstanten Abstand r hat. Jede einzelne der gefundenen Linien stimmt hiernach mit einer sogenannten Traktorie von Huygens[1]) überein.

Differentialgleichungen höherer Ordnung.

556. Beschränkung der Aufgabe. — Aus der umfangreichen Lehre von den Differentialgleichungen höherer Ordnung können hier nur einige wenige besonders einfache Sätze zur Sprache kommen. Außerdem soll die Betrachtung auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschränkt bleiben, sowohl der Kürze wegen, als auch mit Rücksicht darauf, daß diese Differentialgleichungen praktisch am wichtigsten sind. Glücklicherweise werden sich auch so über Differentialgleichungen höherer Ordnung wenigstens einige Aufschlüsse ergeben, da ein großer Teil der nachfolgenden Ausführungen mit ganz geringen Änderungen des Wortlauts auf Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung übertragen werden kann.

557. Zurückführung auf eine Differentialgleichung erster Ordnung. — Ist zwischen einer unabhängigen Veränderlichen x und einer zu bestimmenden Funktion y eine Differentialgleichung zweiter Ordnung gegeben, so kann es vorkommen, daß die Integration dieser Differentialgleichung sich mit ganz einfachen Mitteln auf die Integration von einer oder mehreren Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen läßt. Mit einem Fall dieser Art hat man es regelmäßig zu tun, wenn die Veränderlichen x, y in der gegebenen Differentialgleichung nicht alle beide

1) Vgl. Christian Huygens, Oeuvres complètes, Tome 10, La Haye 1905, S. 408.

für sich allein vorkommen. Fehlt nämlich zunächst x, so kann die gegebene Differentialgleichung nur die unbekannte Funktion y und die beiden ersten Ableitungen y', y'' dieser Funktion enthalten. Sie hat dann die Form

$$F(y, y', y'') = 0$$

und geht, wenn y'' durch den damit gleichwertigen Ausdruck

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dy}y'$$

ersetzt wird, über in

$$F\left(y, y', \frac{dy'}{dy}y'\right) = 0.$$

Dies ist aber eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen y und y'. Ihre Integration liefert eine Gleichung zwischen y und y', das heißt eine neue Differentialgleichung erster Ordnung, aus der dann y als Funktion von x zu bestimmen ist.

Fehlt zweitens y, so hat die gegebene Differentialgleichung die Form

$$\Phi(x, y', y'') = 0$$

und läßt sich, da $y'' = \frac{dy'}{dx}$ ist, als eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und y' ansehen.

Ein Beispiel für den zuerst erwähnten Fall bietet die bereits in Nr. **538** angeführte Differentialgleichung

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{M}{r^2}, \tag{1469}$$

welche den Fall eines Meteorsteins regelt. Wendet man auf diese Differentialgleichung den angegebenen Kunstgriff an, so erhält man zwischen dem Abstand r und der Ableitung $\frac{dr}{dt} = r'$ die Differentialgleichung

$$\frac{dr'}{dr}r' = -G\frac{M}{r^2}.$$

Deren Integration hat aber keine Schwierigkeit. Man erhält vielmehr sofort

$$\frac{1}{2}r'^2 = G\frac{M}{r} + c,$$

wo c eine Konstante bedeutet, und da die Geschwindigkeit r' für $r = a$ den Wert 0 haben soll, muß

$$0 = G\frac{M}{a} + c, \qquad \text{also} \qquad c = -G\frac{M}{a}$$

sein. Somit wird schließlich

$$r'^2 = 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right). \tag{1537}$$

Hieraus kann die gesuchte Geschwindigkeit, mit der der fallende Punkt auf der Oberfläche des anziehenden Weltkörpers eintrifft, sofort entnommen werden.

Wünscht man hierüber hinaus noch weiter zu erfahren, in welcher Weise der Abstand r von der Zeit t abhängt, so hat man noch eine zweite Integration auszuführen, nämlich aus der Differentialgleichung erster Ordnung (1537) zwischen der Zeit t und dem Abstand r den letzteren als Funktion von t zu bestimmen. Auch dem steht insofern keine Schwierigkeit entgegen, als es sehr leicht gelingt, eine Gleichung zwischen t und r zu gewinnen.

558. Homogene lineare Differentialgleichungen. — Außer den in der vorigen Nummer erwähnten Arten von Differentialgleichungen zweiter Ordnung sollen hier nur noch **lineare** Differentialgleichungen zweiter Ordnung behandelt werden, das heißt Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)y = f_3(x), \tag{1538}$$

wo $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ stetige Funktionen einer in einem Intervall frei beweglichen Veränderlichen x bezeichnen und y eine zu bestimmende Funktion von x bedeutet. Aber während man die Integration einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung nach dem früheren stets auf Quadraturen zurückführen kann, ist eine solche Zurückführung schon bei den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung im allgemeinen nicht mehr möglich. Man muß vielmehr, um auf Fälle zu kommen, in denen sich ein Weg zur Integration angeben läßt, noch weitere vereinfachende Annahmen machen. Insbesondere wird die Angabe einiger allgemeiner zur Integration dienlichen Sätze dann möglich, wenn man voraussetzt, daß das sogenannte zweite Glied der gegebenen Differentialgleichung, das heißt die Funktion $f_3(x)$, dauernd gleich Null sei. Trifft dies zu, so nennt man die gegebene lineare Differentialgleichung kurz homogen.

Für Differentialgleichungen dieser Art gelten nun die folgenden leicht zu beweisenden Sätze:

1. — *Ist eine Funktion $\varphi(x)$ ein partikuläres Integral einer gegebenen homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f_1(x)\frac{dy}{dx}+f_2(x)y=0 \tag{1539}$$

und ist c eine beliebige Konstante, so ist das Produkt $c\varphi(x)$ wieder ein partikuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung.

Denn aus der Gleichung

$$\varphi''(x)+f_1(x)\varphi'(x)+f_2(x)\varphi(x)=0$$

folgt durch Multiplikation mit c die Gleichung

$$c\varphi''(x)+f_1(x)c\varphi'(x)+f_2(x)c\varphi(x)=0,$$

welche besagt, daß die Differentialgleichung (1539) befriedigt wird, wenn man $y=c\varphi(x)$ setzt.

2. — *Sind zwei Funktionen $\varphi(x), \chi(x)$ partikuläre Integrale der Differentialgleichung* (1539), *so ist ihre Summe $[\varphi(x)+\chi(x)]$ ebenfalls ein partikuläres Integral.*

Zum Beweise hat man nur nötig, die zufolge der Voraussetzung geltenden Gleichungen

$$\begin{aligned}\varphi''(x)+f_1(x)\varphi'(x)+f_2(x)\varphi(x)&=0\\ \chi''(x)+f_1(x)\chi'(x)+f_2(x)\chi(x)&=0\end{aligned} \tag{1540}$$

durch Addition miteinander zu verbinden.

Mit Rücksicht auf den vorangehenden Satz folgt hieraus

3. — *Sind zwei Funktionen $\varphi(x), \chi(x)$ partikuläre Integrale der Differentialgleichung* (1539) *und sind c_1, c_2 beliebige Konstante, so ist die Summe*

$$c_1\varphi(x)+c_2\chi(x)$$

ebenfalls ein partikuläres Integral der Differentialgleichung (1539).

Zu einem vierten etwas tiefer liegenden Satz gelangt man unter der Voraussetzung, daß die Funktionen $f_1(x), f_2(x)$ für alle in Betracht kommenden Werte von x stetig sind, durch folgende Überlegung: Es seien wieder $\varphi(x)$ und $\chi(x)$ zwei der Differentialgleichung (1539) genügende Funktionen, so daß die Gleichungen (1540) gelten. Dann folgt aus diesen Gleichungen durch Multiplikation mit den Faktoren $[-\chi(x)]$ und $\varphi(x)$ und nachfolgende Addition

$$\varphi(x)\chi''(x)-\chi(x)\varphi''(x)+f_1(x)[\varphi(x)\chi'(x)-\chi(x)\varphi'(x)]=0. \tag{1541}$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\varphi(x)\chi'(x)-\chi(x)\varphi'(x)=u,$$

so ergibt sich durch Differentiation

$$\varphi(x)\chi''(x)-\chi(x)\varphi''(x)=\frac{du}{dx}.$$

Daher erfüllt die Funktion u nach (1541) die Differentialgleichung

(1542) $$\frac{du}{dx}+f_1(x)u=0.$$

Nun werde vorausgesetzt, daß die Funktion $\varphi(x)$ nicht dauernd gleich Null und daß der Quotient $\frac{\chi(x)}{\varphi(x)}$ keine Konstante sei. Dann ist auch die Funktion u nicht dauernd gleich Null. Man kann daher ein Intervall finden, in welchem sie tatsächlich von Null verschieden bleibt. In jedem solchen Intervall ist aber nach (1542)

$$\frac{du}{u}=-f_1(x)\,dx,$$

also

(1543) $$u=c\,e^{-\int f_1(x)\,dx},$$

wo c eine von Null verschiedene Konstante bedeutet.

Hiernach bleibt die Funktion u in jedem Intervall, für welches $f_1(x)$ als stetige Funktion von x erklärt ist, dauernd von Null verschieden, sobald sie nur an irgend einer Stelle des Intervalles von Null verschieden ist. Ferner gilt, solange die Funktion $\varphi(x)$ von Null verschieden bleibt, nach (1543) die Gleichung

$$\frac{u}{[\varphi(x)]^2}=\frac{d\frac{\chi(x)}{\varphi(x)}}{dx}=c\frac{1}{[\varphi(x)]^2}e^{-\int f_1(x)\,dx},$$

folglich auch die Gleichung

$$\frac{\chi(x)}{\varphi(x)}=c\int\frac{1}{[\varphi(x)]^2}e^{-\int f_1(x)\,dx}\,dx$$

oder endlich

(1544) $$\chi(x)=c\varphi(x)\int\frac{1}{[\varphi(x)]^2}e^{-\int f_1(x)\,dx}\,dx.$$

Umgekehrt stellt die rechte Seite dieser Gleichung ein partikuläres Integral der Differentialgleichung (1539) dar, sobald die nicht dauernd verschwindende Funktion $\varphi(x)$ ein solches ist. Hiermit gelangt man zu folgendem Satze:

4. — *Kennt man irgend ein nicht dauernd verschwindendes partikuläres Integral $\varphi(x)$ einer gegebenen Differentialgleichung von der Form* (1539) *mit stetigen Koeffizienten $f_1(x), f_2(x)$, so kann man auch noch ein zweites Integral dieser Differentialgleichung angeben, welches aus der Funktion $\varphi(x)$ nicht lediglich durch Multiplikation mit einer Konstanten entsteht, nämlich diejenige Funktion $\chi(x)$, die durch die rechte Seite der Gleichung* (1544) *dargestellt wird, und aus diesen beiden Integralen kann jedes andere partikuläre Integral gemäß Satz* 3 *durch Multiplikation mit passend gewählten Konstanten und nachfolgende Addition abgeleitet werden.*

Zum Beweise des zweiten Teiles dieses Satzes sei $\psi(x)$ irgend ein partikuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung und x_0 irgend ein spezieller Wert von x, für welchen $\varphi(x)$ von Null verschieden ist, also die rechte Seite der Gleichung (1544) sicher einen Sinn hat. Dann ist nach dem vorangehenden auch die Determinante

$$\varphi(x_0)\chi'(x_0) - \chi(x_0)\varphi'(x_0)$$

von Null verschieden. Ferner ist die Funktion $\psi(x)$ durch die Eigenschaft, daß sie der gegebenen Differentialgleichung genügt, und durch die Werte $\psi(x_0)$ und $\psi'(x_0)$, welche sie und ihre Ableitung für $x = x_0$ erwerben, eindeutig bestimmt. Denn nach Nr. 542 und 543 kann es außer ihr keine andere Funktion geben, welche die nämliche Differentialgleichung und die nämlichen Anfangsbedingungen erfüllte. Nun läßt sich aber durch passende Verfügung über die Konstanten c_1 und c_2 erreichen, daß auch der Summe

$$c_1\varphi(x) + c_2\chi(x)$$

die gleichen Eigenschaften zukommen. Denn dazu ist, da diese Summe stets ein Integral der gegebenen Differentialgleichung darstellt, nur erforderlich, daß die Konstanten c_1, c_2 die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi(x_0)c_1 + \chi(x_0)c_2 &= \psi(x_0) \\ \varphi'(x_0)c_1 + \chi'(x_0)c_2 &= \psi'(x_0) \end{aligned} \tag{1545}$$

erfüllen, und diese haben stets eine und nur eine Lösung, da ja die Determinante aus den Koeffizienten der Unbekannten c_1, c_2 von Null verschieden ist. Somit ist wirklich für jeden Wert von x

$$\psi(x) = c_1\varphi(x) + c_2\chi(x),$$

sobald man sich die Konstanten c_1, c_2 aus den Gleichungen (1545) bestimmt denkt.

Zur vollständigen Integration einer gegebenen homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt es hiernach, nur ein einziges nicht dauernd verschwindendes partikuläres Integral zu finden. Aber auch die so vereinfachte Aufgabe ist noch nicht allgemein, sondern nur unter besonderen Umständen lösbar. Insbesondere liegt, wie jetzt gezeigt werden soll, ein Fall der Lösbarkeit vor, wenn die oben mit $f_1(x)$ und $f_2(x)$ bezeichneten Koeffizienten von $\frac{dy}{dx}$ und y beide konstant sind.

559. Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. — Genügt eine Funktion y von x der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0, \tag{1546}$$

so ist notwendig

$$\frac{dy}{dx}=c_1 \qquad \text{und} \qquad y=c_1x+c_2,$$

wo c_1 und c_2 Konstante bedeuten. Umgekehrt stellt der Ausdruck (c_1x+c_2) bei beliebigen Werten der Konstanten c_1, c_2 stets ein Integral der Differentialgleichung (1546) dar.

Ist zweitens eine homogene lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_2y=0 \tag{1547}$$

gegeben, in welcher die konstanten Koeffizienten a_1, a_2 nicht beide gleich Null sind, so kann man ein nicht dauernd verschwindendes partikuläres Integral finden, wenn man den Ansatz

$$y=e^{rx}$$

macht, wo r eine vorläufig unbekannte Konstante bedeutet. Dann wird nämlich

$$\frac{dy}{dx}=re^{rx}; \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=r^2e^{rx},$$

also

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_2y=e^{rx}(r^2+a_1r+a_2).$$

Die gegebene Differentialgleichung wird daher erfüllt, wenn die Konstante r der quadratischen Gleichung

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0 \tag{1548}$$

genügt. Diese Gleichung heißt die zu der Differentialgleichung (1547) gehörende **charakteristische Gleichung**.

Ist nun Erstens

$$a_1^2 - 4a_2 > 0,$$

so hat die charakteristische Gleichung zwei reelle voneinander verschiedene Wurzeln

$$r_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \quad \text{und} \quad r_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2},$$

also die Differentialgleichung (1547) die beiden partikulären Integrale

$$e^{r_1 x} \quad \text{und} \quad e^{r_2 x},$$

deren Quotient keine Konstante ist, und daher das allgemeine Integral

$$c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x},$$

wo c_1 und c_2 beliebige Konstante bedeuten.

Ist Zweitens

$$a_1^2 - 4a_2 = 0,$$

also $a_2 = \frac{1}{4} a_1^2$, so hat die charakteristische Gleichung nur die eine, aber doppelt zählende reelle Wurzel $\left(-\frac{1}{2} a_1\right)$. Der zur Integration der Differentialgleichung (1547) benutzte Kunstgriff liefert daher zunächst nur ein partikuläres Integral, nämlich die Funktion

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{2} a_1 x}.$$

Aber aus diesem partikulären Integral kann man mit Hilfe des Satzes 4 der Nr. 558 sofort noch ein zweites wesentlich davon verschiedenes Integral ableiten, nämlich die Funktion

$$\chi(x) = e^{-\frac{1}{2} a_1 x} \int \frac{1}{e^{-a_1 x}} e^{-\int a_1 dx} dx = e^{-\frac{1}{2} a_1 x} \int dx = x e^{-\frac{1}{2} a_1 x}.$$

Als allgemeines Integral der gegebenen Differentialgleichung ergibt sich daher im vorliegenden Fall der Ausdruck

$$(c_1 + c_2 x) e^{-\frac{1}{2} a_1 x},$$

wo wieder c_1 und c_2 beliebige Konstante bedeuten.

Ist endlich Drittens

$$a_1^2 - 4a_2 < 0,$$

so ergeben sich als Wurzeln der charakteristischen Gleichung zwar zwei verschiedene, aber konjugiert imaginäre Werte, die kurz durch $(\alpha + i\alpha')$ und $(\alpha - i\alpha')$ bezeichnet werden mögen. Der angewandte Kunstgriff liefert daher als partikuläre Integrale der gegebenen Differentialgleichung zunächst zwei konjugiert imaginäre Funktionen, nämlich

$$e^{(\alpha + i\alpha')x} \qquad \text{und} \qquad e^{(\alpha - i\alpha')x}.$$

Aus diesen können aber durch Multiplikation mit konstanten Faktoren und nachfolgende Addition sofort zwei wesentlich verschiedene reellwertige Integrale abgeleitet werden, nämlich

$$\frac{1}{2}\left[e^{(\alpha + i\alpha')x} + e^{(\alpha - i\alpha')x}\right] = e^{\alpha x}\cos(\alpha' x)$$

und

$$\frac{1}{2i}\left[e^{(\alpha + i\alpha')x} - e^{(\alpha - i\alpha')x}\right] = e^{\alpha x}\sin(\alpha' x).$$

Das allgemeine Integral läßt sich daher in reeller Form durch den Ausdruck

$$e^{\alpha x}[c_1\cos(\alpha' x) + c_2\sin(\alpha' x)]$$

darstellen, wo wieder c_1, c_2 beliebige Konstante bedeuten.

560. Schwingungsgleichung. — Beispiele von Differentialgleichungen, die sich nach den eben gewonnenen Regeln integrieren lassen, sind die schon in Nr. **538** unter 1 angeführten Gleichungen für die freie und für die gedämpfte Schwingung eines durch elastische Verbindungen an eine feste Gleichgewichtslage geknüpften materiellen Punktes. Setzt man die Masse m dieses Punktes der Einfachheit wegen gleich Eins, so hat man es im Fall der freien, ungedämpften Schwingung mit der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = 0 \tag{1549}$$

und im Fall der gedämpften Schwingung mit der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + a^2x = 0 \tag{1550}$$

zu tun.

Die zu der ersten dieser Gleichungen gehörende charakteristische Gleichung

$$r^2 + a^2 = 0$$

hat die beiden konjugiert imaginären Wurzeln $\pm ai$. Folglich hat die Differentialgleichung (1549) die beiden partikulären Integrale $\cos(at)$ und $\sin(at)$ und das allgemeine Integral

$$x = c_1 \cos(at) + c_2 \sin(at),$$

wo die Konstanten c_1, c_2 jedesmal aus den gegebenen Anfangsbedingungen zu bestimmen sind. Sieht man von dem besonderen Fall ab, daß $c_1 = c_2 = 0$, also auch x dauernd gleich Null ist, so kann man

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2} = A; \qquad \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \sin\varepsilon; \qquad \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \cos\varepsilon$$

setzen und erhält dann

$$x = A \sin(at + \varepsilon).$$

Die Bewegung des betrachteten Punktes ist daher eine reine Sinusschwingung von der lediglich durch die Größe des Faktors a bestimmten Periode $\frac{2\pi}{a}$. Die Amplitude A dieser Schwingung und ihre Phase ε zur Zeit $t = 0$ hängen dagegen von den gegebenen Anfangsbedingungen ab und können, die erstere jeden positiven, die letztere jeden beliebigen Wert erhalten.

Bei der Betrachtung der Differentialgleichung (1550), die über den Verlauf einer gedämpften Schwingung Aufschluß gibt, können sich je nach der Größe der Konstanten λ drei verschiedene Fälle darbieten, nämlich

I. Der Fall starker Dämpfung, wenn $\lambda^2 > a^2$ ist.

In diesem Fall hat die charakteristische Gleichung

$$r^2 + 2\lambda r + a^2 = 0$$

die beiden reellen Wurzeln

$$r_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - a^2} \qquad \text{und} \qquad r_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - a^2},$$

also die Differentialgleichung (1550) das allgemeine Integral

$$\Phi(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t},$$

wo c_1 und c_2 Konstante bedeuten. Da r_1 und r_2 beide negativ sind, nähert sich die Funktion $\Phi(t)$ bei unbegrenzt wachsendem t stets dem Grenzwert 0, und zwar entweder gleich von Anfang an beständig, oder so, daß die Art ihrer Änderung eine, aber auch nur eine Umkehrung erfährt. Denn die Ableitung $\Phi'(t)$ wird durch die Gleichung

$$\Phi'(t) = c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t} = e^{r_1 t}\left[c_1 r_1 + c_2 r_2 e^{2\sqrt{\lambda^2 - a^2}\,t}\right]$$

gegeben und kann höchstens für einen einzigen Wert von t gleich Null werden, also auch höchstens einen Vorzeichenwechsel erleiden.

II. Der Zwischenfall, wenn $\lambda = a$ ist.

In diesem Fall hat die charakteristische Gleichung die Doppelwurzel $(-\lambda)$, also die Differentialgleichung (1550) das allgemeine Integral

$$X(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\lambda t},$$

wo c_1 und c_2 Konstante bedeuten.

Auch jetzt ist der Verlauf der Erscheinung ein ähnlicher wie im vorigen Fall. Denn die Funktion $X(t)$ wird bei unbegrenzt wachsendem t wieder unendlich klein, und ihre Ableitung

$$X'(t) = (c_2 - \lambda c_1 - \lambda c_2 t)e^{-\lambda t}$$

kann ebenfalls für höchstens einen Wert von t gleich Null werden.

III. Der Fall schwacher Dämpfung, wenn $\lambda^2 < a^2$ ist.

In diesem Fall hat die charakteristische Gleichung die beiden konjugiert imaginären Wurzeln

$$-\lambda + i\sqrt{a^2 - \lambda^2} \qquad \text{und} \qquad -\lambda - i\sqrt{a^2 - \lambda^2}.$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\sqrt{a^2 - \lambda^2} = k,$$

so ergibt sich als allgemeines Integral der Differentialgleichung (1550) der Ausdruck

$$\Psi(t) = e^{-\lambda t}[c_1 \cos(kt) + c_2 \sin(kt)],$$

dem man, wenn man wieder von dem Fall absieht, daß die Konstanten c_1, c_2 beide gleich Null sind, und dann

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2} = A; \qquad \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \sin\varepsilon; \qquad \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \cos\varepsilon$$

setzt, auch die Form

$$\Psi(t) = A e^{-\lambda t} \sin(kt + \varepsilon)$$

geben kann. Der betrachtete Punkt rückt daher seiner Gleichgewichtslage in der Weise unbegrenzt nahe, daß er um dieselbe unendlich viele immer kleiner werdende Schwingungen ausführt. Die Zeiten, zu denen die größten Ausschläge nach der einen oder der anderen Seite erfolgen, sind die Wurzeln der Gleichung

$$\Psi'(t) = A e^{-\lambda t}[-\lambda \sin(kt + \varepsilon) + k \cos(kt + \varepsilon)] = 0$$

oder

$$\operatorname{tg}(kt + \varepsilon) = \frac{k}{\lambda}$$

und bilden daher eine arithmetische Reihe mit der Differenz $\frac{\pi}{k}$. Die absoluten Werte der Ausschläge selbst bilden somit eine abnehmende geometrische Reihe mit dem Quotienten $e^{-\frac{\lambda \pi}{k}}$. Folglich bilden ihre Logarithmen wieder eine arithmetische Reihe, und zwar eine Reihe mit der Differenz $\left(-\frac{\lambda \pi}{k}\right)$. Der absolute Wert dieser Differenz wird nach C. F. Gauß[1]) als logarithmisches Dekrement bezeichnet.

561. Lineare Differentialgleichungen mit zweitem Glied. — Die Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{(1551)} \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + f_1(x) \frac{dy}{dx} + f_2(x) y = f_3(x),$$

in der $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ stetige Funktionen einer in einem Intervall frei beweglichen Veränderlichen x bezeichnen und das zweite Glied $f_3(x)$ nicht dauernd gleich Null ist, läßt sich wenigstens dann auf Quadraturen zurückführen, wenn es gelungen ist, die einfachere durch Weglassung des zweiten Gliedes entstehende homogene lineare Differentialgleichung

$$\text{(1552)} \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + f_1(x) \frac{dy}{dx} + f_2(x) y = 0$$

vollständig zu integrieren. Hat man nämlich als partikuläre Integrale dieser letzteren Differentialgleichung zwei Funktionen $\varphi(x)$,

1) C. F. Gauß, Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837, Göttingen 1838, IV, S. 68 = Werke, Bd. 5. zweiter Abdruck, Göttingen 1877, S. 383.

$\chi(x)$ gefunden, deren Quotient keine Konstante ist, so kann man zum Ziel gelangen, wenn man in dem allgemeinen Integral $[c_1\varphi(x)+c_2\chi(x)]$ der Differentialgleichung (1552) die Konstanten c_1, c_2 durch zwei vorläufig unbekannte differenzierbare Funktionen $u(x), v(x)$ von x ersetzt und dann diese so zu bestimmen sucht, daß die Funktion

$$y = u(x)\varphi(x) + v(x)\chi(x) \tag{1553}$$

der ursprünglich gegebenen Differentialgleichung (1551) genügt. In der Tat wird bei diesem Ansatz

$$\frac{dy}{dx} = u(x)\varphi'(x) + v(x)\chi'(x) + \varphi(x)u'(x) + \chi(x)v'(x),$$

und wenn man die beiden unbekannten Funktionen $u(x), v(x)$ zur Vereinfachung der weiteren Rechnung zunächst der Forderung unterwirft, daß

$$\varphi(x)u'(x) + \chi(x)v'(x) = 0 \tag{1554}$$

sein soll, so wird

$$\frac{dy}{dx} = u(x)\varphi'(x) + v(x)\chi'(x). \tag{1555}$$

Dann ist aber

$$\frac{d^2y}{dx^2} = u(x)\varphi''(x) + v(x)\chi''(x) + \varphi'(x)u'(x) + \chi'(x)v'(x), \tag{1556}$$

also, wie aus den Gleichungen (1553), (1555), (1556) durch Multiplikation mit den Faktoren $f_2(x), f_1(x)$, 1 und nachfolgende Addition folgt,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)y = u(x)[\varphi''(x) + f_1(x)\varphi'(x) + f_2(x)\varphi(x)]$$
$$+ v(x)[\chi''(x) + f_1(x)\chi'(x) + f_2(x)\chi(x)] + \varphi'(x)u'(x) + \chi'(x)v'(x)$$

oder, da $\varphi(x)$ und $\chi(x)$ partikuläre Integrale der Differentialgleichung (1552) sein sollten,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)y = \varphi'(x)u'(x) + \chi'(x)v'(x).$$

Die durch die Gleichung (1553) gegebene Funktion y genügt daher der gegebenen Differentialgleichung (1551), sobald die Funktionen $u(x), v(x)$ außer der Gleichung (1554) auch noch die Gleichung

$$\varphi'(x)u'(x) + \chi'(x)v'(x) = f_3(x) \tag{1557}$$

erfüllen. Diese beiden Gleichungen werden aber befriedigt, wenn man

$$u'(x) = \frac{-\chi(x) f_3(x)}{\varphi(x)\chi'(x) - \varphi'(x)\chi(x)}; \qquad v'(x) = \frac{\varphi(x) f_3(x)}{\varphi(x)\chi'(x) - \varphi'(x)\chi(x)},$$

also

$$(1558) \quad \begin{aligned} u(x) &= -\int \frac{\chi(x) f_3(x)}{\varphi(x)\chi'(x) - \varphi'(x)\chi(x)}\, dx + c_1 \\ v(x) &= \int \frac{\varphi(x) f_3(x)}{\varphi(x)\chi'(x) - \varphi'(x)\chi(x)}\, dx + c_2 \end{aligned}$$

setzt, wo c_1 und c_2 beliebige Konstante bedeuten, und auf diesem Wege müssen sich aus (1553) auch alle partikulären Integrale der Differentialgleichung (1551) ergeben, da die Differenz zweier solchen Integrale offenbar jedesmal ein Integral der Differentialgleichung (1552) darstellt.

Der hier zur Integration benutzte Kunstgriff wird als Methode der Variation der Konstanten bezeichnet. Ganz allgemein besteht diese Methode in folgendem: Wenn die Integration einer gegebenen Differentialgleichung Schwierigkeiten bereitet, so sucht man die Differentialgleichung durch Wegstreichen eines Bestandteiles so weit zu vereinfachen, daß die entstehende einfachere Differentialgleichung vollständig integriert werden kann, und führt deren Integration aus. Hierauf ersetzt man in dem als Ergebnis erhaltenen Ausdruck die darin vorkommenden willkürlichen Konstanten durch vorläufig unbekannte im allgemeinen veränderliche Funktionen der unabhängigen Veränderlichen (eben darin besteht die Variation der Konstanten) und sucht diese Funktionen so zu bestimmen, daß der abgeänderte Ausdruck ein Integral der ursprünglich gegebenen Differentialgleichung darstellt.

562. Erzwungene Schwingungen. — Ein Beispiel eines Falles, in welchem die in Nr. **561** entwickelten Regeln zum Ziele führen, bietet die folgende

Aufgabe: Auf der ersten Achse eines räumlichen Parallelkoordinatensystems, in bezug auf welches das Trägheitsgesetz gilt, ist ein materieller Punkt P beweglich, dessen Masse der Einfachheit wegen gleich Eins angenommen werden möge. Auf diesen Punkt wirken

1. — eine beständig gegen den Koordinatenanfang hin gerichtete Kraft (von irgend welchen elastischen Verbindungen herrührend), deren Größe jederzeit durch das Produkt einer ge-

gebenen positiven Konstanten a^2 mit dem Abstand des Punktes P vom Koordinatenanfang gegeben wird,

2. — eine Kraft (Widerstandskraft), die stets der augenblicklichen Geschwindigkeit des Punktes entgegen gerichtet und der Größe nach durch das Produkt des absoluten Wertes der Geschwindigkeit mit einer gegebenen positiven Konstanten 2λ gegeben ist,

3. — eine periodisch wechselnde schwingungserregende Kraft (nicht von der elastischen Verbindung mit dem Koordinatenanfang, sondern von anderen Ursachen herrührend), die nach Größe und Richtung für jeden beliebigen Wert t der Zeit durch den Ausdruck

$$b \sin(\nu t)$$

dargestellt wird, wo b und ν zwei positive Konstante bedeuten.

In welcher Weise hängt dann die erste Koordinate x des Punktes P von der Zeit t ab, wenn für irgend einen Wert von t die zugehörigen Werte von x und $\frac{dx}{dt}$ gegeben sind?

Lösung: Die gesuchte Funktion x der Zeit t genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + a^2 x = b \sin(\nu t), \tag{1559}$$

bei deren Behandlung wieder je nach der Größe von λ verschiedene Fälle zu unterscheiden sind. Hier möge es genügen, nur den Fall einer schwachen Dämpfung weiter zu verfolgen, das heißt den Fall, daß

$$\lambda^2 < a^2$$

ist. Unter dieser Annahme hat die durch Weglassung des zweiten Gliedes entstehende Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + a^2 x = 0$$

nach Nr. **560**, wenn wieder

$$\sqrt{a^2 - \lambda^2} = k$$

gesetzt wird, die partikulären Integrale

$$\varphi(t) = e^{-\lambda t} \cos(kt) \qquad \text{und} \qquad \chi(t) = e^{-\lambda t} \sin(kt),$$

deren Ableitungen durch die Gleichungen

$$\varphi'(t) = e^{-\lambda t}[-\lambda\cos(kt) - k\sin(kt)]$$
$$\chi'(t) = e^{-\lambda t}[k\cos(kt) - \lambda\sin(kt)]$$

gegeben werden. Hieraus folgt

$$\varphi(t)\chi'(t) - \varphi'(t)\chi(t) = ke^{-2\lambda t}.$$

Für die beiden nach den Gleichungen (1558) der Nr. **561** zu berechnenden Hilfsfunktionen ergeben sich daher die Gleichungen

$$\begin{aligned}
u(t) &= -\frac{b}{k}\int e^{\lambda t}\sin(kt)\sin(\nu t)\,dt \\
&= \frac{b}{2k}\left\{\int e^{\lambda t}\cos[(\nu+k)t]\,dt - \int e^{\lambda t}\cos[(\nu-k)t]\,dt\right\} \\
v(t) &= \frac{b}{k}\int e^{\lambda t}\cos(kt)\sin(\nu t)\,dt \\
&= \frac{b}{2k}\left\{\int e^{\lambda t}\sin[(\nu+k)t]\,dt + \int e^{\lambda t}\sin[(\nu-k)t]\,dt\right\}.
\end{aligned}$$

Indem man die rechts stehenden Integrale mittels der Formeln (1224) und (1225) der Nr. **443** berechnet, erhält man

$$\begin{aligned}
u(t) = \frac{b}{2k}e^{\lambda t}\Bigg\{&\frac{(\nu+k)\sin[(\nu+k)t] + \lambda\cos[(\nu+k)t]}{\lambda^2 + (\nu+k)^2} \\
&- \frac{(\nu-k)\sin[(\nu-k)t] + \lambda\cos[(\nu-k)t]}{\lambda^2 + (\nu-k)^2}\Bigg\} + c_1 \\
v(t) = \frac{b}{2k}e^{\lambda t}\Bigg\{&\frac{\lambda\sin[(\nu+k)t] - (\nu+k)\cos[(\nu+k)t]}{\lambda^2 + (\nu+k)^2} \\
&+ \frac{\lambda\sin[(\nu-k)t] - (\nu-k)\cos[(\nu-k)t]}{\lambda^2 + (\nu-k)^2}\Bigg\} + c_2,
\end{aligned}$$

wo c_1 und c_2 beliebige Konstante bedeuten.

Als allgemeines Integral der Differentialgleichung (1559) ergibt sich daher die Funktion

$$\begin{aligned}
x &= u(t)\varphi(t) + v(t)\chi(t) \\
&= \frac{b}{2k}\left\{\frac{(\nu+k)\sin(\nu t) + \lambda\cos(\nu t)}{\lambda^2 + (\nu+k)^2} - \frac{(\nu-k)\sin(\nu t) + \lambda\cos(\nu t)}{\lambda^2 + (\nu-k)^2}\right\} \\
&\quad + e^{-\lambda t}[c_1\cos(kt) + c_2\sin(kt)].
\end{aligned}$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$
(1560)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{b}{2k}\left[\frac{\nu+k}{\lambda^2+(\nu+k)^2}-\frac{\nu-k}{\lambda^2+(\nu-k)^2}\right]=\frac{b(\lambda^2+k^2-\nu^2)}{[\lambda^2+(\nu+k)^2][\lambda^2+(\nu-k)^2]}\\
&\qquad=\frac{b(a^2-\nu^2)}{(a^2-\nu^2)^2+4\lambda^2\nu^2}=A\cos\varepsilon\\
&\frac{b}{2k}\left[\frac{\lambda}{\lambda^2+(\nu+k)^2}-\frac{\lambda}{\lambda^2+(\nu-k)^2}\right]=\frac{-2b\lambda\nu}{[\lambda^2+(\nu+k)^2][\lambda^2+(\nu-k)^2]}\\
&\qquad=\frac{-2b\lambda\nu}{(a^2-\nu^2)^2+4\lambda^2\nu^2}=A\sin\varepsilon,
\end{aligned}
\right.
$$

so erhält man schließlich

$$x=A\sin(\nu t+\varepsilon)+e^{-\lambda t}[c_1\cos(kt)+c_2\sin(kt)].$$

Der einfachste hierbei mögliche Fall ist der, daß die Konstanten c_1, c_2 beide gleich Null sind. Dann besteht die Bewegung des betrachteten Punktes in einer ihm aufgezwungenen reinen Sinusschwingung. Die Periode dieser Schwingung hat den Wert $\frac{2\pi}{\nu}$, stimmt also mit der Periode der erregenden Schwingung überein. Ihre Amplitude A wird durch die Gleichung

$$A=\frac{b\sqrt{(\lambda^2+k^2-\nu^2)^2+4\lambda^2\nu^2}}{[\lambda^2+(\nu+k)^2][\lambda^2+(\nu-k)^2]}=\frac{b}{\sqrt{(\lambda^2+k^2-\nu^2)^2+4\lambda^2\nu^2}}$$
$$=\frac{b}{\sqrt{(a^2-\nu^2)^2+4\lambda^2\nu^2}}$$

gegeben und ihre Phase ε zur Zeit Null hat, wie die Gleichungen (1560) zeigen, einen negativen zwischen $(-\pi)$ und 0 liegenden Wert. Die erzwungene Schwingung bleibt also in der Phase stets hinter der erregenden Schwingung zurück.

Sind zweitens die Konstanten c_1, c_2 nicht beide gleich Null, so tritt nur die Änderung ein, daß sich über die eben beschriebene erzwungene Schwingung noch eine gedämpfte Eigenschwingung lagert, welche die Periode $\frac{2\pi}{k}$ hat und deren Einfluß mit der Zeit abnimmt und schließlich unendlich klein wird.

Zusatz. Von dem besonderen Fall einer schwingungserregenden Kraft, die sich durch einen Ausdruck von der Form $b\sin(\nu t)$ darstellen läßt, kann man ohne erhebliche Schwierigkeiten zu dem allgemeinen Fall aufsteigen, daß die schwingungserregende Kraft durch irgend eine stetige und periodische, aber sonst beliebige Funktion der Zeit t gegeben ist. Bedeutet nämlich $f(t)$

eine solche Funktion und $\frac{2\pi}{\nu}$ ihre Periode, so ist es, wie die Lehre von den sogenannten Fourierschen Reihen ergeben hat, nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen positiven Konstanten ε immer möglich, eine endliche Anzahl $(2n+1)$ konstanter Zahlen

$$\begin{array}{ccccc} & a_1; & a_2; & a_3; & \cdots a_n \\ b_0; & b_1; & b_2; & b_3; & \cdots b_n \end{array}$$

so zu bestimmen, daß der Unterschied zwischen der Summe

$$\begin{aligned} S(t) = \quad & a_1 \sin(\nu t) + a_2 \sin(2\nu t) + \cdots + a_n \sin(n\nu t) \\ + \tfrac{1}{2} b_0 + {} & b_1 \cos(\nu t) + b_2 \cos(2\nu t) + \cdots + b_n \cos(n\nu t) \end{aligned}$$

und der Funktion $f(t)$ für alle Werte von t absolut genommen kleiner als ε bleibt. Man kann daher eine Funktion x, welche die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + a^2 x = f(t) \tag{1561}$$

mit irgend einem vorgeschriebenen Grade der Genauigkeit erfüllt, dadurch ermitteln, daß man statt ihrer die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + a^2 x = S(t) \tag{1562}$$

integriert. Dies läßt sich aber dadurch ausführen, daß man die rechte Seite der Gleichung (1562) der Reihe nach durch die einzelnen Glieder der Summe $S(t)$ ersetzt und für jede der so entstehenden Differentialgleichungen ein Integral bestimmt, wozu die vorangehenden Regeln unmittelbar oder nach einfachen Änderungen ausreichen. Die Summe aller dieser Integrale liefert dann, wie man leicht erkennt, jedesmal ein Integral der Differentialgleichung (1562).

Ende des Werkes.

Formeltabelle.

$\begin{pmatrix}1236\\ \text{S. 99}\end{pmatrix}$ $$\int \frac{dx}{ax^2+bx-c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}},$$
falls $b^2-4ac<0$ ist.

$\begin{pmatrix}1237\\ \text{S. 99}\end{pmatrix}$ $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = -\frac{2}{2ax+b},\ \text{falls } b^2-4ac=0 \text{ ist.}$$

$\begin{pmatrix}1238\\ \text{S. 99}\end{pmatrix}$ $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \lg \left| \frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right|,$$
falls $b^2-4ac>0$ ist.

$\begin{pmatrix}1240\\ \text{S. 100}\end{pmatrix}$ $$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{2a}\lg|ax^2+bx+c| + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

$\begin{pmatrix}1241\\ \text{S. 100}\end{pmatrix}$ $$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = -\frac{A}{2(n-1)a}\cdot\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

$\begin{pmatrix}1243\\ \text{S. 101}\end{pmatrix}$ $$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{1}{(n-1)(4ac-b^2)}\,\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2(2n-3)a}{(n-1)(4ac-b^2)}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}.$$

$\begin{pmatrix}1257\\ \text{S. 115}\end{pmatrix}$ $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \lg\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right|.$$

$\begin{pmatrix}1259\\ \text{S. 116}\end{pmatrix}$ $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}.$$

$\begin{pmatrix}1256\\ \text{S. 115}\end{pmatrix}$ $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \lg\left|\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}} + \sqrt{ax^2+bx+c}\right|$$
(für $a>0$).

$\binom{1258}{\text{S. }116}$ $$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{-2ax-b}{\sqrt{b^2-4ac}}\qquad(\text{für } a<0).$$

$\binom{1263}{\text{S. }117}$ $$\left\{\begin{aligned}&\int\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx\\&=(A_0x^{n-1}+A_1x^{n-2}+\cdots+A_{n-1})\sqrt{ax^2+bx+c}\\&\qquad+B\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.\end{aligned}\right.$$

$\binom{1267}{\text{S. }118}$ $$\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{1}{2}a^2\lg\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|.$$

$\binom{1268}{\text{S. }118}$ $$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}.$$

$\binom{1266}{\text{S. }118}$ $$\left\{\begin{aligned}&\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\sqrt{ax^2+bx+c}\\&\qquad+\frac{4ac-b^2}{8a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.\end{aligned}\right.$$

$\binom{1275}{\text{S. }121}$ $$\left\{\begin{aligned}&\int\sqrt{ax^2+bx+c}^{\,3}\,dx\\&=\frac{2ax+b}{8a}\left(ax^2+bx+\frac{20ac-3b^2}{8a}\right)\sqrt{ax^2+bx+c}\\&\qquad+\frac{3(4ac-b^2)^2}{128a^2}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.\end{aligned}\right.$$

$\binom{1272}{\text{S. }120}$ $$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}^{\,3}}=\frac{2}{4ac-b^2}\,\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

$\binom{1273}{\text{S. }120}$ $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}^{\,3}}=-\frac{2}{4ac-b^2}\,\frac{bx+2c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Setzt man

$$ax^2+bx+c=X,$$

so ist

$\binom{1270}{\text{S. }120}$ $$\left\{\begin{aligned}&\int\frac{Ax+B}{X^\lambda\sqrt{X}}\,dx=-\frac{A}{(2\lambda-1)a}\,\frac{1}{X^{\lambda-1}\sqrt{X}}\\&\qquad+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{X^\lambda\sqrt{X}},\end{aligned}\right.$$

$$\begin{pmatrix}1271\\ \text{S. }120\end{pmatrix}\left\{\begin{aligned}\int\frac{dx}{X^{\lambda}\sqrt{X}} &= \frac{2}{(2\lambda-1)(4ac-b^2)}\cdot\frac{2ax+b}{X^{\lambda-1}\sqrt{X}}\\ &\quad+\frac{8(\lambda-1)a}{(2\lambda-1)(4ac-b^2)}\int\frac{dx}{X^{\lambda-1}\sqrt{X}},\end{aligned}\right.$$

$$\begin{pmatrix}1274\\ \text{S. }121\end{pmatrix}\left\{\begin{aligned}\int X^{\lambda}\sqrt{X}\,dx &= \frac{2ax+b}{4(\lambda+1)a}X^{\lambda}\sqrt{X}\\ &\quad+\frac{(2\lambda+1)(4ac-b^2)}{8(\lambda+1)a}\int X^{\lambda-1}\sqrt{X}\,dx.\end{aligned}\right.$$

$$\begin{pmatrix}1280\\ \text{S. }124\end{pmatrix}\left\{\begin{aligned}&\int\frac{Ax+B}{(x^2+q^2)^{\lambda}\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx\\ &\quad=\frac{c_0x^{2\lambda-3}+c_1x^{2\lambda-4}+\cdots+c_{2\lambda-3}}{(x^2+q^2)^{\lambda-1}}\sqrt{ax^2+bx+c}\\ &\qquad+\int\frac{A'x+B'}{(x^2+q^2)\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx\end{aligned}\right.$$

$$\begin{pmatrix}1283\\ \text{S. }126\end{pmatrix}\quad \int\frac{dx}{(x^2+r^2)\sqrt{x^2+s^2}}=\frac{1}{r\sqrt{s^2-r^2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{s^2-r^2}}{r\sqrt{x^2+s^2}}$$

(für $r^2 < s^2$).

$$\begin{pmatrix}1284\\ \text{S. }126\end{pmatrix}\quad \int\frac{dx}{(x^2+r^2)\sqrt{x^2+s^2}}=\frac{1}{2r\sqrt{r^2-s^2}}\lg\frac{r\sqrt{x^2+s^2}+x\sqrt{r^2-s^2}}{r\sqrt{x^2+s^2}-x\sqrt{r^2-s^2}}$$

(für $r^2 > s^2$).

$$\begin{pmatrix}1286\\ \text{S. }127\end{pmatrix}\quad \int\frac{dx}{(x^2+r^2)\sqrt{x^2-s^2}}=\frac{1}{2r\sqrt{r^2+s^2}}\lg\frac{x\sqrt{r^2+s^2}+r\sqrt{x^2-s^2}}{x\sqrt{r^2+s^2}-r\sqrt{x^2-s^2}}.$$

$$\begin{pmatrix}1287\\ \text{S. }127\end{pmatrix}\quad \int\frac{dx}{(x^2+r^2)\sqrt{s^2-x^2}}=\frac{1}{r\sqrt{r^2+s^2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{r^2+s^2}}{r\sqrt{s^2-x^2}}.$$

$$\begin{pmatrix}1216\\ \text{S. }87\end{pmatrix}\quad \int\sin z^2\,dz=-\frac{1}{4}[\sin(2z)-2z]=\frac{1}{2}(-\sin z\cos z+z).$$

$$\begin{pmatrix}1211\\ \text{S. }86,88\end{pmatrix}\int\sin z^3\,dz=-\cos z+\frac{1}{3}\cos z^3=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\cos(3z)-3\cos z\right].$$

$$\begin{pmatrix}1217\\ \text{S. }87\end{pmatrix}\quad \int\sin z^4\,dz=\frac{1}{16}\left[\frac{1}{2}\sin(4z)-4\sin(2z)+6z\right].$$

$\binom{1214}{\text{S. }87}$ $\int \cos z^2\, dz = \frac{1}{4}[\sin(2z) + 2z] = \frac{1}{2}(\sin z \cos z + z)$.

$\binom{1209}{\text{S. }85, 88}$ $\int \cos z^3\, dz = \sin z - \frac{1}{3}\sin z^3 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\sin(3z) + 3\sin z\right]$.

$\binom{1215}{\text{S. }87}$ $\int \cos z^4\, dz = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{2}\sin(4z) + 4\sin(2z) + 6z\right]$.

$\binom{1219}{\text{S. }89}$ $\int \frac{dz}{\cos z} = \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)$.

$\binom{1220}{\text{S. }89}$ $\int \operatorname{tg} z^n\, dz = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg} z^{n-1} - \int \operatorname{tg} z^{n-2}\, dz$.

$\binom{1221}{\text{S. }90}$ $\int \operatorname{ctg} z^n\, dz = -\frac{1}{n-1}\operatorname{ctg} z^{n-1} - \int \operatorname{ctg} z^{n-2}\, dz$.

$\binom{1224}{\text{S. }92}$ $\int e^{az}\sin(bz)\, dz = e^{az}\frac{a\sin(bz) - b\cos(bz)}{a^2 + b^2}$.

$\binom{1225}{\text{S. }92}$ $\int e^{az}\cos(bz)\, dz = e^{az}\frac{b\sin(bz) + a\cos(bz)}{a^2 + b^2}$.

$\binom{1289}{\text{S. }134}$ $\arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \cdots$

$\binom{1290}{\text{S. }134}$ $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$.

$\binom{1363}{\text{S. }241}$ $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\lg x}\, dx = \lg\frac{b+1}{a+1}$.

$\binom{1456}{\text{S. }393}$ $\Pi(n-1) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\, dx = \Gamma(n)$.

$\binom{1458}{\text{S. }398}$ $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

$\binom{1465}{\text{S. }404}$ $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$.

Register zum dritten Bande.

Die Zahlen geben die Seiten an.

Druck von August Pries in Leipzig.

H. MANGOLDT

HÖHERE MATHEMATIK

3