XXVIII.

EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI CON LIMITI COSTANTI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5^a, vol. XX_1, 1911_1, pp. 95–99.

1. Nella mia prima Nota sulle equazioni integro-differenziali (1), in cui ho considerato la equazione integro-differenziale

$$(\mathrm{I}) \qquad \Delta^2 u(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right\} d\tau = 0 ,$$

ho accennato alla possibilità di estendere l'analisi ad equazioni integro-differenziali con limiti costanti. Mi permetto qui di trattare questo argomento, valendomi dei principii esposti in alcune Note nelle quali ho introdotto la considerazione delle funzioni permutabili e delle operazioni di composizione (2). Già in una di queste Note avevo avuto occasione di studiare equazioni integro-differenziali con limiti costanti, le quali conducono ad una classe di trascendenti uniformi che comprendono le funzioni ellittiche, ma in tali equazioni compariva una sola variabile di derivazione, e quindi esse dal lato differenziale potevano compararsi alle equazioni differenziali ordinarie. In questa Nota considererò invece delle equazioni integro-differenziali con limiti costanti, le quali dal lato differenziale possono, al pari della (I), compararsi alle equazioni a derivate parziali.

2. Consideriamo la equazione integro-differenziale

$$(\mathrm{II}) \qquad \sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \cdots, x_p \,|\, t)}{\partial x_i^2} + \int_0^1 \sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \cdots, x_p \,|\, \tau)}{\partial x_i^2} f_i(t, \tau)\, d\tau = 0 .$$

Come equazione aggiunta assumeremo

$$(\mathrm{II}') \qquad \sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 v(x_1, x_2, \cdots, x_p \,|\, t)}{\partial x_i^2} + \int_0^1 \sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 v(x_1, x_2, \cdots, x_p \,|\, \tau)}{\partial x_i^2} f_i(\tau, t)\, d\tau = 0 ,$$

(1) « Rend. Acc. dei Lincei », 21 febbraio 1909, § 1. [In questo vol.: XVII, pp. 269–275].

(2) « Rend. Acc. dei Lincei », 20 febbraio 1910. *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*. [In questo vol.: XXIII, pp. 311–322]. Ibid., *Sopra le funzioni permutabili*, 17 aprile 1910. [In questo vol.: XXVI, pp. 331–342].

ed avremo il teorema di reciprocità espresso dalla formula

$$\text{(III)} \qquad 0 = \mathrm{K}_\sigma([u, v]) = \int_0^1 dt \left\{ \int_\sigma \left(v(t) \frac{\partial u(t)}{\partial n} - u(t) \frac{\partial v(t)}{\partial n} \right) d\sigma \right.$$

$$\left. + \int_0^1 d\tau \int_\sigma \sum_1^p{}_i \left(v(t) \frac{\partial u(\tau)}{\partial x_i} - u(\tau) \frac{\partial v(t)}{\partial x_i} \right) f_i(t, \tau) \cos n x_i \, d\sigma \right\}$$

ove σ è il contorno di un iperspazio S_p nel campo $x_1, x_2, \cdots, x_p$ e n ne è la normale esterna.

3. Si tratta ora di trovare la soluzione fondamentale dell'equazione aggiunta, e a tal fine sostituiamo $z f_i(t, \tau)$ a $f_i(t, \tau)$, onde le (II) e (II') diverranno

$$\text{(II}_a\text{)} \qquad \sum_1^p{}_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \cdots, x_p \mid t)}{\partial x_i^2} + z \int_0^1 \sum_1^p{}_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \cdots, x_p \mid \tau)}{\partial x_i^2} f_i(t, \tau) \, d\tau = 0$$

$$\text{(II}'_a\text{)} \qquad \sum_1^p{}_i \frac{\partial^2 v(x_1, x_2, \cdots, x_p \mid t)}{\partial x_i^2} + z \int_0^1 \sum_1^p{}_i \frac{\partial^2 v(x_1, x_2, \cdots, x_p \mid \tau)}{\partial x_i^2} f_i(\tau, t) \, d\tau = 0 .$$

Ripetendo dei calcoli analoghi a quelli eseguiti per ottenere la funzione fondamentale nella prima delle Note precedentemente citate [3] noi avremo come funzione fondamentale della (II'$_a$), nella ipotesi $p > 2$,

$$(1) \qquad \mathrm{V}(x_1, x_2, \cdots, x_p \mid t)$$

$$= \mathrm{F}(t)\, r^{2-p} + \int_0^1 \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m \mathrm{F}(\xi)\, z^m \, d\xi}{2 \cdot 4 \cdots 2m \cdot (4-p)(6-p) \cdots (2(m+1)-p)}$$

$$\times \sum_{h_1 + \cdots + h_p = m} \frac{\partial^{2m} r^{2(m+1)-p}}{\partial x_1^{2h_1} \cdots \partial x_p^{2h_p}} \mathrm{F}_{h_1, \ldots, h_p}(\xi, t) ,$$

ove $\mathrm{F}(t)$ è una funzione arbitraria, e

$$r = \sqrt{\sum_1^p{}_i (x_i - a_i)^2},$$

$$f_1(t, \tau) = \mathrm{F}_{1,0,\ldots,0}(t, \tau), \; f_2(t, \tau) = \mathrm{F}_{0,1,\ldots,0}(t, \tau), \cdots, f_p(t, \tau) = \mathrm{F}_{0,0,\ldots,1}(t, \tau),$$

$$\mathrm{F}_{h_1, h_2, \ldots, h_p}(t, \tau) = \int_0^1 \sum_{q_1 + q_2 + \cdots + q_p = \varrho} \mathrm{F}_{q_1, q_2, \ldots, q_p}(t, \xi)\, \mathrm{F}_{h_1 - q_1, h_2 - q_2, \ldots, h_p - q_p}(\xi, \tau) \, d\xi .$$

(3) « Rend. Acc. Lincei, 21 febbraio 1909 [in questo vol.: XVII, pp. 269–275], § 5.

La somma $\sum_{q_1+q_2+\cdots+q_p=\varrho}$ si intende estesa a tutti i valori interi di $q_1, q_2, \cdots, q_p$ la cui somma è costante ed eguale a ρ mentre si suppone che una F con indici negativi sia nulla.

La serie (1) sarà convergente finché $|z|$ sarà inferiore ad un dato limite.

Ciò premesso supponiamo che $f_1, f_2, \cdots, f_p$ siano funzioni fra loro permutabili di 2ª specie (4). Allora, facendo uso della notazione, usata nella Nota ora citata, per denotare la operazione di composizione di seconda specie, potremo scrivere

$$F_{h_1,h_2,\cdots,h_p}(t,\tau) = N_{h_1,h_2,\cdots,h_p} \ddot{f}_1^{h_1} \ddot{f}_2^{h_2} \cdots \ddot{f}_p^{h_p}(t,\tau),$$

in cui $N_{h_1,h_2\cdots h_p}$ è un numero facilmente calcolabile mediante $h_1, h_2, \cdots, h_p$. Avremo quindi che la (1) potrà scriversi

$$(1') \qquad V(x_1, x_2, \cdots, x_p \mid t)$$

$$= F(t)\, r^{2-p} + \int_0^1 \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m F(\xi)\, z^m\, d\xi}{2\cdot 4\cdots 2m\cdot(4-p)(6-p)\cdots(2(m+1)-p)}$$

$$\times \sum_{h_1+\cdots+h_p=m} N_{h_1,\cdots,h_p} \frac{\partial^{2m}\, r^{2(m+1)-p}}{\partial x_1^{2h_1}\cdots\partial x_p^{2h_p}} \ddot{f}_1^{h_1}\cdots \ddot{f}_p^{h_p}(\xi, t).$$

4. Prendiamo ora l'equazione differenziale

$$\sum_1^p{}_i \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} + z \sum_1^p{}_i\, m_i \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} = 0 .$$

Purché $|z|$ sia inferiore ad un certo limite, la soluzione fondamentale potrà scriversi

$$W = C r^{2-p} + \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m C z^m}{2\cdot 4\cdots 2m'\cdot(4-p)(6-p)\cdots(2(m+1)-p)}$$

$$\times \sum_{h_1+\cdots+h_p=m} N_{h_1,\cdots,h_p} \frac{\partial^{2m}\, r^{2(m+1)-p}}{\partial x_1^{2h_1}\cdots\partial x_p^{2h_p}} m_1^{h_1}\cdots m_p^{h_p},$$

ove C denota una costante arbitraria.

Ma questa stessa soluzione può mettersi anche sotto la forma

$$W = \frac{C}{\left(\sum_1^p{}_i \frac{(x_i-a_i)^2}{1+zm_i}\right)^{(p-2)/2}},$$

(4) « Rend. Acc. Lincei », 20 febbraio 1910; *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali* [in questo vol.: XXIII, pp. 311-322], § 8.

e, se supponiamo $p = 2q$ con $q > 1$ e intero, avremo

$$W = \frac{C}{\left(\sum_{1}^{2q}{}_i \frac{(x_i - a_i)^2}{1 + zm_i}\right)^{q-1}},$$

ossia W sarà razionale in z, e potrà ancora scriversi

$$W = \frac{C}{r^{2q-2}} \frac{[(1 + zm_1)(1 + zm_2)\cdots(1 + zm_{2q})]^{q-1}}{\left\{1 + \sum_{1}^{2q}{}_i \frac{(x_i - a_i)^2}{r^2}[(1 + zm_1)\cdots(1 + zm_{i-1})(1 + zm_{i+1})\cdots(1 + zm_{2q}) - 1]\right\}^{q-1}}.$$

5. Da quanto è ora stato ottenuto si deduce il modo seguente per calcolare la richiesta funzione fondamentale della equazione aggiunta (II'$_a$).

Sia $f^{(1)}_{1,2,\cdots,2q}(t, \tau)$ la somma algebrica delle funzioni $f_1(t, \tau)$, $f_2(t, \tau)$, $\cdots$, $f_{2q}(t, \tau)$. Denotiamo con $f^{(2)}_{1,2,\cdots,2q}(t, \tau)$ la somma algebrica delle funzioni ottenute componendo due a due le funzioni stesse, con $f^{(3)}_{1,2,\cdots,2q}(t, \tau)$ la somma algebrica delle funzioni ottenute componendole tre a tre e così di seguito.

Formiamo

$$zf^{(1)}_{1,2,\cdots,2q}(t, \tau) + z^2 f^{(2)}_{1,2,\cdots,2q}(t, \tau) + \cdots + z^{2q} f^{(2q)}_{1,2,\cdots,2q}(t, \tau) = \chi(t, \tau),$$

quindi

$$(q-1)\chi(t, \tau) + \frac{(q-1)(q-2)}{1 \cdot 2}\ddot{\chi}^2(t, \tau)$$

$$+ \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\ddot{\chi}^3(t, \tau) + \cdots + \ddot{\chi}^{q-1}(t, \tau) = \Lambda(t, \tau)$$

e

$$F(t) + \int_0^1 F(\xi)\Lambda(\xi, t)\, d\xi = \Phi(t).$$

Si calcoli poi

$$zf^{(1)}_{1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,2q}(t, \tau) + z^2 f^{(2)}_{1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,2q}(t, \tau) + \cdots$$

$$+ z^{2q} f^{(2q-2)}_{1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,2q}(t, \tau) = \Psi_i(t, \tau),$$

$$\sum_{1}^{2q}{}_i \frac{(x_i - a_i)^2}{r^2}\Psi_i(t, \tau) = \Psi(t, \tau),$$

$$(q-1)\Psi(t, \tau) + \frac{(q-1)(q-2)}{1 \cdot 2}\ddot{\Psi}^2(t, \tau)$$

$$+ \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\ddot{\Psi}^3(t, \tau) + \cdots + \ddot{\Psi}^{q-1}(t, \tau) = \Theta(t, \tau),$$

e si risolva l'equazione integrale

$$(2) \qquad V(t) + \int_0^1 V(\xi)\,\Theta(\xi, t)\,d\xi = \Phi(t).$$

$V(t)$ così ottenuto sarà evidentemente funzione anche di $x_1, x_2, \cdots, x_{2q}$ e di z, e coinciderà colla (1'). Inoltre essa sarà una *funzione meromorfa di* z la cui espressione verrà ottenuta come rapporto di due funzioni olomorfe di z.

6. Dalla (II') segue:

$$\int_\sigma \frac{\partial V(t)}{\partial n}\,d\sigma + \int_0^1 d\tau \int_\sigma \Sigma\,\frac{\partial V(\tau)}{\partial x_i} f_i(\tau, t) \cos nx_i\,d\sigma$$

$$= -2q(2q-2)\frac{(2\pi)^q}{2\cdot 4\cdots 2q} F(t),$$

supponendo che il polo $(a_1, a_2, \cdots, a_{2q})$ sia interno all'iperspazio limitato dal contorno σ. Questa formula vale prendendo per V l'espressione meromorfa che si ricava dalla equazione integrale (2), comunque grande sia $|z|$, esclusi i valori di z che annullano il determinante della equazione integrale.

Prendendo nella (III) $v = V$ ed escludendo il polo mediante uno spazio sferico che si fa tendere a zero, si trova al limite

$$K_\sigma([u, V]) = 2q(2q-2)\frac{(2\pi)^q}{2\cdot 4\cdots 2q}\int_0^1 F(t)\,u_0(t)\,dt,$$

ove $u_0(t)$ denota il valore di $u(x_1, \cdots, x_{2q} \mid t)$ al polo. Da questa formula si ricava subito $u_0(t)$, essendo $F(t)$ una funzione arbitraria.