XXX.

SOPRA LE FUNZIONI PERMUTABILI DI 2ª SPECIE E LE EQUAZIONI INTEGRALI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XX₁, 1911₁; pp. 521–527.

1. Consideriamo le funzioni finite e continue

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x) \quad ; \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x),$$

quindi poniamo

$$\int_0^1 \varphi_s(x) f_i(x)\, dx = \lambda_{si},$$

e supponiamo che il determinante delle λ_{si} sia diverso da zero.

Formiamo adesso le funzioni

$$\text{(I)} \qquad F(x, y) = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s a_{is} f_i(x) \varphi_s(y)$$

$$\text{(II)} \qquad \Phi(x, y) = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s b_{is} f_i(x) \varphi_s(y).$$

Se operiamo sopra F e Φ una composizione di seconda specie [1] otterremo la funzione

$$\ddot{F}\ddot{\Phi}(x, y) = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s c_{is} f_i(x) \varphi_s(y),$$

essendo

$$c_{is} = \Sigma_h \Sigma_k a_{ih} \lambda_{hk} b_{ks}.$$

Per rappresentare questo scriviamo le sostituzioni

$$(1) \quad A = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (2) \quad B = \begin{vmatrix} b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n} \\ b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}, b_{n2}, \cdots, b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$(3) \quad \Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_{11}, \lambda_{12}, \cdots, \lambda_{1n} \\ \lambda_{21}, \lambda_{22}, \cdots, \lambda_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \cdots, \lambda_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (4) \quad C = \begin{vmatrix} c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1n} \\ c_{21}, c_{22}, \cdots, c_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}, c_{n2}, \cdots, c_{nn} \end{vmatrix}$$

(1) *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*. « Rend. Acc. Lincei », seduta 20 febbraio 1910, [in questo vol. XXIII, pp. 311–322], § 8.

ed avremo

$$C = A\Lambda B ,$$

ove il secondo membro denota il prodotto delle tre sostituzioni A, Λ, B.

Ne segue che la condizione necessaria e sufficiente per la permutabilità di seconda specie delle funzioni (I) e (II) è espressa da

$$A\Lambda B = B\Lambda A . \tag{5}$$

2. Ciò premesso osserviamo che la relazione precedente è equivalente all'altra

$$(\Lambda A)(\Lambda B) = (\Lambda B)(\Lambda A) , \tag{5'}$$

dunque, *condizione necessaria e sufficiente per la permutabilità di seconda specie di* F *e* Φ *è che le sostituzioni* ΛA *e* ΛB *siano fra loro permutabili*.

Nella ipotesi in cui B si riduca all'identità, cioè

$$B = \begin{vmatrix} 1, 0, \cdots, 0 \\ 0, 1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, 1 \end{vmatrix} = 1$$

e quindi

$$\Phi(x, y) = \sum_1^n {}_i f_i(x)\, \varphi_i(y) \tag{6}$$

la condizione precedente si riduce a

$$A\Lambda = \Lambda A ,$$

ossia che *le sostituzioni* Λ *e* A *siano fra loro permutabili*, mentre se $\Lambda = 1$ essa diviene

$$AB = BA ,$$

ossia che *siano permutabili le sostituzioni* B *ed* A.

3. Ho studiato la questione della permutabilità delle sostituzioni nei Preliminari della seconda parte della mia Memoria: *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari* (2).

Rimando quindi alla suddetta Memoria per la trattazione del problema di trovare tutte le sostituzioni permutabili con una data sostituzione. Perciò *nota la funzione* (II) *potremo avere tutte le funzioni della forma* (I) *permutabili di* 2ª *specie con essa*.

4. Nella Memoria adesso citata (3) ho dimostrato il teorema seguente: *La condizione necessaria e sufficiente affinché le sostituzioni permutabili con una data sostituzione siano permutabili fra loro è che i divisori elementari della*

(2) «Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL)», ser. III, tomo XII. [In queste «Opere»: vol. secondo, XXX, pp. 383-451].

(3) Preliminari, § 6.

sostituzione data siano potenze di basi tutte differenti fra loro. Quando questa condizione è verificata ho chiamato la sostituzione *elementare.*

Ne segue che *la condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le funzioni* (I) *permutabili colla* (II) *siano permutabili fra loro è che il prodotto delle sostituzioni* ΛB *sia elementare.*

5. Vogliamo dare subito una applicazione dei precedenti risultati ad una questione di equazioni integrali.

Supponiamo ΛB *elementare* e siano $F_0, F_1, F_2, \cdots, F_m$, $m+1$ funzioni della forma (I) permutabili di 2ª specie con (II): esse saranno permutabili fra loro.

Proponiamoci il problema di *trovare una funzione* F, *avente la forma* (I) *e permutabile con* (II), *la quale verifichi l'equazione integrale di grado m*

$$\text{(III)} \qquad \ddot{F}_0 \ddot{F}^m + \ddot{F}_1 \ddot{F}^{m-1} + \ddot{F}_2 \ddot{F}^{m-2} + \cdots + \ddot{F}_{m-1} \ddot{F} + F_m = 0 .$$

Posto

$$F_h = \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s \, a_{is}^{(h)} f_i(x) \varphi_s(y) ,$$

$$A_h = \begin{Bmatrix} a_{11}^{(h)}, & a_{12}^{(h)}, & \cdots, & a_{1n}^{(h)} \\ a_{21}^{(h)}, & a_{22}^{(h)}, & \cdots, & a_{2n}^{(h)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^{(h)}, & a_{n2}^{(h)}, & \cdots, & a_{nn}^{(h)} \end{Bmatrix} ,$$

dovremo avere

$$\text{(III}_a) \qquad (\Lambda A_0)(\Lambda A)^m + (\Lambda A_1)(\Lambda A)^{m-1} + (\Lambda A_2)(\Lambda A)^{m-2} + \cdots$$
$$+ (\Lambda A_{m-1})(\Lambda A) + \Lambda A_m = 0 .$$

Ora, riducendo le sostituzioni $\Lambda A_0, \Lambda A_1, \cdots, \Lambda A_m, \Lambda A$, alla *forma normale* [4] potremo scrivere

$$\Lambda A_h = T^{-1} \left\{ \overline{\prod_{1}^{p}{}_g R_{h,g}} \right\} T ,$$

$$\Lambda A = T^{-1} \left\{ \overline{\prod_{1}^{p}{}_g R_g} \right\} T ,$$

(4) *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari.* Parte prima. «Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL)», ser. III, vol. VI. [In queste «Opere»; vol. primo, XV, pp. 209–290], Preliminari, § 2. Vedi anche Parte seconda (prec. citata), Preliminari, § 6.

ove

$$R_{h,g} = \begin{pmatrix} \alpha_{h,g}^{(1)}, & 0 & , 0 & , \cdots, 0 \\ \alpha_{h,g}^{(2)}, & \alpha_{h,g}^{(1)} & , 0 & , \cdots, 0 \\ \alpha_{h,g}^{(3)}, & \alpha_{h,g}^{(2)} & , \alpha_{h,g}^{(1)} & , \cdots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{h,g}^{(\chi_g)}, & \alpha_{h,g}^{(\chi_g-1)} & , \alpha_{h,g}^{(\chi_g-2)} & , \cdots, \alpha_{h,g}^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$R_{g} = \begin{pmatrix} \alpha_{g}^{(1)}, & 0 & , 0 & , \cdots, 0 \\ \alpha_{g}^{(2)}, & \alpha_{g}^{(1)} & , 0 & , \cdots, 0 \\ \alpha_{g}^{(3)}, & \alpha_{g}^{(2)} & , \alpha_{g}^{(1)} & , \cdots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{g}^{(\chi_g)}, & \alpha_{g}^{(\chi_g-1)} & , \alpha_{g}^{(\chi_g-2)} & , \cdots, \alpha_{g}^{(1)} \end{pmatrix}$$

mentre

$$\chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_p = n,$$

e T è una sostituzione a determinante diverso da zero. Ne segue

$$R_{0,g} R_g^m + R_{1,g} R_g^{m-1} + R_{2,g} R_g^{m-2} + \cdots + R_{m-1,g} R_g + R_{m,g} = 0, \tag{7}$$

$$(g = 1, 2, \ldots, p).$$

Potremo dunque prendere $\alpha_g^{(1)}$ eguale ad una qualunque delle radici della equazione algebrica di grado m

$$\alpha_{0,g}^{(1)} x^m + \alpha_{1,g}^{(1)} x^{m-1} + \alpha_{2,g}^{(1)} x^{m-2} + \cdots + \alpha_{m-1,g}^{(1)} x + \alpha_{m,g}^{(1)} = 0. \tag{8}$$

Ottenuto $\alpha_g^{(1)}$, i valori di $\alpha_g^{(2)}, \alpha_g^{(3)}, \cdots, \alpha_g^{(\chi_g)}$, tali che la (7) sia soddisfatta, si calcoleranno risolvendo successive equazioni lineari.

Le diverse sostituzioni ΛA, e quindi le diverse A, che verificano la (III $_a$) si avranno dunque mediante la risoluzione di equazioni algebriche (8) di grado m e di equazioni lineari, e a seconda delle combinazioni delle varie radici delle equazioni (8) si otterranno altrettante soluzioni.

Ad ogni sostituzione A che verifica la (III $_a$) corrisponderà una funzione F che soddisfa l'equazione integrale (III).

6. Sia ora $\Psi(x, y)$ una funzione qualunque permutabile di 2ª specie con la (II). Poniamo

$$e_{rs} = \int_0^1\int_0^1 \Psi(x, y)\, \varphi_r(x) f_s(y)\, dx\, dy,$$

$$E = \begin{pmatrix} e_{11}, & e_{12}, & \cdots, & e_{1n} \\ e_{21}, & e_{22}, & \cdots, & e_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{n1}, & e_{n2}, & \cdots, & e_{nn} \end{pmatrix}.$$

In virtù della permutabilità avremo

$$\int_0^1 \Psi(x,\xi)\,\Sigma_i\,\Sigma_s\,b_{is}\,f_i(\xi)\,\varphi_s(y)\,d\xi = \int_0^1 \Psi(\xi,y)\,\Sigma_i\,\Sigma_s\,b_{is}\,f_i(x)\,\varphi_s(\xi)\,d\xi,$$

quindi

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \varphi_h(x)\,f_r(y)\,dx\,dy \int_0^1 \Psi(x,\xi)\,\Sigma_i\,\Sigma_s\,b_{is}\,f_i(\xi)\,\varphi_s(y)\,d\xi$$

$$= \int_0^1\!\!\int_0^1 \varphi_h(x)\,f_r(y)\,dx\,dy \int_0^1 \Psi(\xi,y)\,\Sigma_i\,\Sigma_s\,b_{is}\,f_i(x)\,\varphi_s(\xi)\,d\xi,$$

vale a dire

$$\Sigma_i\,\Sigma_s\,b_{is}\int_0^1\!\!\int_0^1 \Psi(x,\xi)\,\varphi_h(x)\,f_i(\xi)\,dx\,d\xi \int_0^1 \varphi_s(y)\,f_r(y)\,dy$$

$$= \Sigma_i\,\Sigma_s\,b_{is}\int_0^1 \varphi_h(x)\,f_i(x)\,dx \int_0^1\!\!\int_0^1 \Psi(\xi,y)\,\varphi_s(\xi)\,f_r(y)\,d\xi\,dy,$$

d'onde

$$\mathrm{EB}\Lambda = \Lambda\mathrm{BE}. \tag{9}$$

Scriviamo

$$\Psi(x,y) = \Sigma_h\,\Sigma_k\,m_{hk}\,f_h(x)\,\varphi_k(y) + \Theta(x,y)$$

colla condizione

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \Theta(x,y)\,\varphi_r(x)\,f_s(y)\,dx\,dy = 0 \qquad (r\,,s = 1\,,2\,,\cdots,n).$$

Posto

$$\mathrm{M} = \begin{vmatrix} m_{11}\,, m_{12}\,, \cdots, m_{1n} \\ m_{21}\,, m_{22}\,, \cdots, m_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{n1}\,, m_{n2}\,, \cdots, m_{nn} \end{vmatrix},$$

sarà

$$\mathrm{E} = \Lambda\mathrm{M}\Lambda.$$

Quindi, in virtù della (9),

$$(\Lambda\mathrm{M})(\Lambda\mathrm{B}) = (\Lambda\mathrm{B})(\Lambda\mathrm{M}),$$

onde la funzione

$$\Sigma_h\,\Sigma_k\,m_{hk}\,f_h(x)\,\varphi_k(y)$$

sarà permutabile colla (II) e perciò anche Θ sarà permutabile colla (II), cioè

$$\int_0^1 \Theta(x,\xi)\,\Sigma_i\,\Sigma_s\,b_{is}\,f_i(\xi)\,\varphi_s(y)\,d\xi = \int_0^1 \Sigma_i\,\Sigma_s\,b_{is}\,f_i(x)\,\varphi_s(\xi)\,\Theta(\xi,y)\,d\xi.$$

Moltiplicando per $f_h(y)\,dy$ e integrando fra 0 e 1 si avrà

$$\int_0^1 f_h(y)\,dy \int_0^1 \Theta(x,\xi)\,\Sigma_i\,\Sigma_s\, b_{is} f_i(\xi)\,\varphi_s(y)\,d\xi$$

$$= \Sigma_i\,\Sigma_s\, b_{is} f_i(x) \int_0^1\!\!\int_0^1 \Theta(\xi,y)\,\varphi_s(\xi) f_h(y)\,d\xi\,dy = 0,$$

ovvero

$$\Sigma_i\,\Sigma_s\, b_{is}\,\lambda_{sh} \int_0^1 \Theta(x,\xi) f_i(\xi)\,d\xi = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Ne segue, supposto il determinante della sostituzione $\mathrm{B}\Lambda$ diverso da zero,

$$\int_0^1 \Theta(x,\xi) f_i(\xi)\,d\xi = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{10}$$

In modo perfettamente analogo si ha

$$\int_0^1 \Theta(\xi,y)\,\varphi_i(\xi)\,d\xi = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{10'}$$

Ora la funzione più generale che soddisfa le (10) e (10′) è [5]

$$\Theta(x,y) = \Omega(x,y) - \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s\, \mu_{is}\,\varphi_s(y) \int_0^1 \Omega(x,\xi) f_i(\xi)\,d\xi \tag{11}$$

$$- \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s\, \mu_{is} f_i(x) \int_0^1 \Omega(\xi,y)\,\varphi_s(\xi)\,d\xi$$

$$+ \Sigma_h\,\Sigma_k f_h(x)\,\varphi_k(y)\,\Sigma_i\,\Sigma_s\,\mu_{ik}\,\mu_{hs} \int_0^1\!\!\int_0^1 \Omega(\xi,\eta)\,\varphi_s(\xi) f_i(\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

ove

$$\left\{\begin{matrix} \mu_{11}, & \mu_{12}, & \cdots, & \mu_{1n} \\ \mu_{21}, & \mu_{22}, & \cdots, & \mu_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{n1}, & \mu_{n2}, & \cdots, & \mu_{nn} \end{matrix}\right\} = \Lambda^{-1}$$

e $\Omega(x,y)$ è una funzione arbitraria. Prendendo dunque la funzione più generale della forma (I) permutabile di 2ª specie con (II), ottenuta colla regola delle sostituzioni permutabili, e aggiungendovi la (11) si otterrà la funzione più generale $\Psi(x,y)$ permutabile con (II).

(5) Cfr. LAURICELLA: *Sopra alcune equazioni integrali.* « Rend. Accad. Lincei », seduta 7 giugno 1908.

7. Ritornando alla equazione integrale (III) di grado m, osserviamo che, se alla soluzione F, avente la forma (I), aggiungiamo la funzione Θ otterremo sempre, in virtù delle relazioni (10) e (10'), una funzione che soddisfa l'equazione integrale stessa, ed avremo così la funzione più generale permutabile con la (II) che vi soddisfa.

8. Se prendiamo

$$f_i(x) = \varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

e supponiamo che queste funzioni siano normalizzate, sarà $\Lambda = I$ e

$$\Phi(x, y) = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s b_{is} f_i(x) f_s(y),$$

$$F(x, y) = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s a_{is} f_i(x) f_s(y).$$

Quando le funzioni $f_1, f_2, \cdots, f_n$ fanno parte di un sistema normalizzato $f_1, f_2, \cdots, f_N$ (essendo $N > n$), otterremo delle funzioni Θ che verificano le (10) e (10') prendendo

$$\Theta = \sum_{n+1}^N{}_i \sum_{n+1}^N{}_s q_{is} f_i(x) f_s(y),$$

ove le q_{is} sono costanti arbitrarie. È facile estendere il risultato al caso $N = \infty$.

9. Mi sono permesso di presentare le precedenti osservazioni in occasione della pubblicazione dei risultati eleganti e di notevole interesse dovuti al prof. SINIGAGLIA.

Mi sembra che, ponendo in luce il collegamento della questione delle funzioni permutabili di 2ª specie con quella della permutabilità delle sostituzioni, si riconosca la vera natura del problema e si possa penetrare nella sua intima essenza. Nel tempo stesso possono così anche ottenersi varie estensioni e delle applicazioni del problema medesimo come abbiamo veduto nel § 5.

Vi è poi da osservare che i metodi che servono per le funzioni permutabili di 1ª specie sono diversi da questi, applicabili alle funzioni permutabili di 2ª specie.