XXXI.

SOPRA UNA PROPRIETÀ GENERALE DELLE EQUAZIONI INTEGRALI ED INTEGRO-DIFFERENZIALI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XX_2, 1911_2; pp. 79–88.

1. In alcuni precedenti lavori ebbi più volte occasione di mostrare come da equazioni differenziali ordinarie o a derivate parziali si potesse pervenire a equazioni integro-differenziali con limiti costanti o con limiti variabili, passando dalle soluzioni delle une a quelle delle altre (1). Mi permetto qui di esporre su questo soggetto le considerazioni generali che mi hanno guidato nella trattazione di quei varii casi, ponendo a riscontro il passaggio a equazioni aventi limiti costanti coll'analogo passaggio a equazioni con limiti variabili e la natura diversa delle soluzioni che si trovano nell'uno e nell'altro caso.

2. Abbiansi le quantità finite

$$m_{hk}\,,\, n_{hk}\,,\, p_{hk}\,,\, q_{hk}\,,\cdots \qquad (h\,,k=1\,,2\,,\cdots,g)$$

le quali siano fra loro permutabili, cioè tali che siano verificate le eguaglianze

$$\sum_{1}^{g}{}_{l}\, m_{hl}\, n_{lk} = \sum_{1}^{g}{}_{l}\, n_{hl}\, m_{lk}\,,$$

$$\sum_{1}^{g}{}_{l}\, n_{hl}\, p_{lk} = \sum_{1}^{g}{}_{l}\, p_{hl}\, n_{lk}\,,$$

$$\sum_{1}^{g}{}_{l}\, p_{hl}\, m_{lk} = \sum_{1}^{g}{}_{l}\, m_{hl}\, p_{lk}$$

per tutte le combinazioni due a due delle $m_{hk}\,,\, n_{hk}\,,\, p_{hk}\,,\, q_{hk}\,,\cdots$

Scriveremo le espressioni precedenti coi simboli $(m\,,n)_{hk} = (n\,,m)_{hk}$, $(n\,,p)_{hk} = (p\,,n)_{hk}$, $(p\,,m)_{hk} = (m\,,p)_{hk}\cdots$ e analogamente scriveremo $(m\,,n\,,p)_{hk} = ((m\,,n)\,,p)_{hk}$ e così di seguito. Porremo poi

$$(m\,,m)_{hk} = (m^2)_{hk}$$

(1) *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali.* « Rend. Acc. dei Lincei », vol. XIX_1, ser. 5ª, 1910_1 [in questo vol.: XXIII, pp. 311–322] § 8; *Equazioni integro-differenziali con limiti costanti* ... Ibid., vol. XX_1 ser. 5ª, 1911_1. [In questo vol.: XXVIII, pp. 359–363].

ed in generale, se α è il numero delle m contenute nella parentesi, scriveremo

$$(m\,,m\,,\cdots,m)_{hk}=(m^\alpha)_{hk}$$

in modo che il significato della espressione

$$(m^\alpha\,,n^\beta\,,p^\gamma\,,q^\delta\,,\cdots)_{hk}\,,$$

in cui $\alpha\,,\beta\,,\gamma\,,\delta\,,\cdots$ sono numeri interi, resta perfettamente definito.

3. Ciò premesso, siano

$$\Sigma_\alpha\,\Sigma_\beta\,\Sigma_\gamma\,\Sigma_\delta\cdots a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}\,z^\alpha\,u^\beta\,v^\gamma\,w^\delta\cdots$$
$$\Sigma_\alpha\,\Sigma_\beta\,\Sigma_\gamma\,\Sigma_\delta\cdots b_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}\,z^\alpha\,u^\beta\,v^\gamma\,w^\delta\cdots$$

delle *funzioni intere* qualsiasi delle variabili complesse, $z\,,u\,,v\,,w\,,\cdots$ con $a_{0,0,0\ldots}=b_{0,0,0\ldots}=0$. Poniamo

$$\frac{\Sigma_\alpha\,\Sigma_\beta\,\Sigma_\gamma\,\Sigma_\delta\cdots a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}\,z^\alpha\,u^\beta\,v^\gamma\,w^\delta\cdots}{1+\Sigma_\alpha\,\Sigma_\beta\,\Sigma_\gamma\,\Sigma_\delta\cdots b_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}\,z^\alpha\,u^\beta\,v^\gamma\,w^\delta\cdots}=\Sigma_\alpha\,\Sigma_\beta\,\Sigma_\gamma\,\Sigma_\delta\cdots c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}\,z^\alpha\,u^\beta\,v^\gamma\,w^\delta\cdots$$

Evidentemente, mentre gli sviluppi che compariscono al numeratore ed al denominatore sono validi qualunque siano i valori di $z\,,u\,,v\,,w\,,\cdots$ l'ultimo sviluppo varrà, in generale, soltanto finché i moduli di queste variabili saranno inferiori a dati limiti.

Costruiamo poi le funzioni

$$\Phi_{hk}(z\,,u\,,v\,,w,\cdots)=\Sigma_\alpha\,\Sigma_\beta\,\Sigma_\gamma\,\Sigma_\delta\cdots a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}(m^\alpha\,n^\beta\,p^\gamma\,q^\delta\cdots)_{hk}\,z^\alpha\,u^\beta\,v^\gamma\,w^\delta\cdots \tag{1}$$

$$\Psi_{hk}(z\,,u\,,v\,,w,\cdots)=\Sigma_\alpha\,\Sigma_\beta\,\Sigma_\gamma\,\Sigma_\delta\cdots b_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}(m^\alpha\,n^\beta\,p^\gamma\,q^\delta\cdots)_{hk}\,z^\alpha\,u^\beta\,v^\gamma\,w^\delta\cdots \tag{2}$$

$$\mathrm{F}_{hk}(z\,,u\,,v\,,w,\cdots)=\Sigma_\alpha\,\Sigma_\beta\,\Sigma_\gamma\,\Sigma_\delta\cdots c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}(m^\alpha\,n^\beta\,p^\gamma\,q^\delta\cdots)_{hk}\,z^\alpha\,u^\beta\,v^\gamma\,w^\delta\cdots \tag{3}$$

Avremo i teoremi seguenti:

1° *Le funzioni* $\Phi_{hk}(z\,,u\,,v\,,w\,,\cdots)$, $\Psi_{hk}(z\,,u\,,v\,,w\,,\cdots)$ *sono funzioni intere delle variabili complesse* $z\,,u\,,v\,,w\,,\cdots$

2° *La funzione* $\mathrm{F}_{hk}(z\,,u\,,v\,,w\,,\cdots)$ *è il rapporto di due funzioni intere delle variabili* $z\,,u\,,v\,,w\,,\cdots$

3° $\Phi_{hk}\,,\Psi_{hk}\,,\mathrm{F}_{hk}$ *sono permutabili colle* $m_{hk}\,,n_{hk}\,,p_{hk}\,,q_{hk}\,,\cdots$

Per dimostrare la prima proposizione basta osservare che, scelti arbitrariamente i numeri positivi $\mathrm{R}_1\,,\mathrm{R}_2\,,\mathrm{R}_3\,,\mathrm{R}_4\,,\cdots$, potremo trovare un numero positivo M tale che

$$|a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}|<\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}_1^\alpha\,\mathrm{R}_2^\beta\,\mathrm{R}_3^\gamma\,\mathrm{R}_4^\delta\cdots}\,.$$

Siano ora $m_1\,,m_2\,,m_3\,,m_4\,,\cdots$ rispettivamente i limiti superiori dei valori assoluti delle

$$gm_{hk}\,,gn_{hk}\,,gp_{hk}\,,gq_{hk}\,,\cdots\qquad(h\,,k=1\,,2\,,\cdots,g);$$

sarà

$$|a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots}(m^\alpha n^\beta p^\gamma q^\delta \cdots)_{hk}| < \frac{M}{\left(\frac{R_1}{m_1}\right)^\alpha \left(\frac{R_2}{m_2}\right)^\beta \left(\frac{R_3}{m_3}\right)^\gamma \left(\frac{R_4}{m_4}\right)^\delta \cdots}$$

quindi la serie (1) è convergente finché

$$|z| < \frac{R_1}{m_1} \quad , \quad |u| < \frac{R_2}{m_2} \quad , \quad |v| < \frac{R_3}{m_3} \quad , \quad |w| < \frac{R_4}{m_4}, \cdots$$

e, poiché R_1, R_2, R_3, R_4, $\cdots$ possono scegliersi tanto grandi quanto si vuole, così la serie (1) sarà una funzione intera. Nello stesso modo si dimostra che la serie (2) è pure intera.

Per dimostrare la seconda proposizione si consideri il sistema di equazioni algebriche lineari

$$\text{(A)} \qquad X_{hk} + \sum_{1}^{g} {}_l \Psi_{hl} X_{lk} = \Phi_{hk} \qquad (h, k = 1, 2, \cdots, g).$$

Esso evidentemente è soddisfatto se alle incognite X_{hk} noi sostituiamo le F_{hk}. Ma se risolviamo il sistema algebrico precedente (A) noi troviamo che le X_{hk} si esprimono come rapporti di polinomii razionali e interi nelle Φ_{hk} e Ψ_{hk}, quindi come rapporti di funzioni intere nelle $z, u, v, w, \cdots$ Il denominatore comune di questi rapporti non è identicamente nullo, giacché esso si riduce eguale all'unità per $z = u = v = w = \cdots = 0$. La 2ª proposizione è dunque dimostrata.

La terza proposizione risulta immediatamente osservando che le Φ_{hk}, Ψ_{hk}, F_{hk} sono serie i cui termini sono permutabili colle m_{hk}, n_{hk}, p_{hk}, q_{hk}, $\cdots$

4. Seguendo il concetto fondamentale che ho posto a base di tutti gli studî sulle equazioni integrali ed integro–differenziali, si ha che facendo crescere indefinitamente il numero g, mentre m_1, m_2, m_3, m_4, $\cdots$ si mantengono finiti, si passa facilmente dalle quantità m_{hk}, n_{hk}, p_{hk}, q_{hk}, $\cdots$ alle funzioni finite e continue permutabili di *seconda specie* [2] $S_1(x, y)$, $S_2(x, y)$, $S_3(x, y)$, $S_4(x, y)$, $\cdots$ tali cioè che

$$\ddot{S}_i \ddot{S}_h (x, y) = \ddot{S}_h \ddot{S}_i (x, y) = \int_0^1 S_i(x, \xi) S_h(\xi, y) d\xi = \int_0^1 S_h(x, \xi) S_i(\xi, y) d\xi$$

e nel caso limite i teoremi del § precedente conducono alle seguenti proposizioni:

1° *Le funzioni*

$$\Phi(z, u, v, w, \cdots | x, y) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \cdots a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots} \ddot{S}_1^\alpha \ddot{S}_2^\beta \ddot{S}_3^\gamma \ddot{S}_4^\delta \cdots z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta \cdots$$

$$\Psi(z, u, v, w, \cdots | x, y) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \cdots b_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots} \ddot{S}_1^\alpha \ddot{S}_2^\beta \ddot{S}_3^\gamma \ddot{S}_4^\delta \cdots z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta \cdots$$

sono funzioni intere delle variabili complesse $z, u, v, w, \cdots$

(2) *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro–differenziali*, precedentemente citata, § 8.

2° *La funzione*

$$F(z, u, v, w, \cdots | x, y) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \cdots c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta\ldots} \ddot{S}_1^\alpha \ddot{S}_2^\beta \ddot{S}_3^\gamma \ddot{S}_4^\delta \cdots z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta \cdots$$

è il rapporto di due funzioni intere di $z, u, v, w, \cdots$

3° *Le*

$$\Phi(z, u, v, w, \cdots | x, y), \Psi(z, u, v, w, \cdots | x, y), F(z, u, v, w, \cdots | x, y),$$

considerate come funzioni di x, y, *sono funzioni permutabili di* 2ª *specie colle* $S_1(x, y), S_2(x, y), S_3(x, y), S_4(x, y) \cdots$

Finalmente la funzione $F(z, u, v, w, \cdots, | x, y)$ potrà ottenersi risolvendo l'equazione integrale

$$\text{(A')} \qquad F(z, u, v, w, \cdots | x, y) + \int_0^1 \Psi(z, u, v, w, \cdots | x, \xi) F(z, u, v, w, \cdots | \xi, y) d\xi = \Phi(z, u, v, w, \cdots | x, y).$$

5. Supponiamo ora di avere un sistema di equazioni algebriche o differenziali di un ordine qualsiasi

$$(4) \quad g_s\left(z, z_1, z_2, \cdots, u, u_1, u_2, \cdots, v, v_1, v_2, \cdots, w, w_1, w_2, \cdots, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \cdots \cdots \frac{\partial^{\lambda+\lambda_1+\cdots+\mu+\mu_1\cdots} \mathfrak{F}_h}{\partial z^\lambda \partial z_1^{\lambda_1} \cdots \partial u^\mu \partial u_1^{\mu_1} \cdots} \cdots\right) = 0 \qquad (s = 1, 2, \cdots, r),$$

ove $z, z_1, z_2, \cdots, u, u_1, u_2, \cdots$ figurano come variabili indipendenti di derivazione, $v, v_1, v_2, \cdots, w, w_1, w_2, \cdots$ come parametri, $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \cdots$ come funzioni incognite e supponiamo, per semplicità, che i primi membri siano polinomii razionali e interi delle diverse quantità che vi entrano.

Ammettiamo che esistano delle soluzioni $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \cdots$ che si annullino nel punto $z = u = v = w = \cdots = 0$, regolari nell'intorno di questo punto e che siano esprimibili mediante *rapporti di funzioni intere* delle variabili indipendenti $z, u, \cdots$ e dei parametri $v, w, \cdots$, mentre le altre variabili e gli altri parametri $z_1, z_2, \cdots, u_1, u_2, \cdots, v_1, v_2, \cdots, w_1, w_2, \cdots$ variano entro campi determinati.

Tali soluzioni patranno scriversi

$$\mathfrak{F}_s = \frac{\Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \cdots a^{(s)}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta\cdots} z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta \cdots}{1 + \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \cdots b^{(s)}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta\ldots} z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta \cdots}$$

$$= \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \cdots c^{(s)}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta\ldots} z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta, \cdots,$$

ove l'ultimo sviluppo sarà, in generale, valido finché i moduli di $z, u, v, w, \cdots$ saranno inferiori a dati limiti, mentre gli sviluppi del numeratore e denominatore denotano funzioni intere.

Se prendiamo le espressioni

$$\mathfrak{f}_s = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \cdots c^{(s)}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta\ldots} (z\xi_1)^\alpha (u\xi_2)^\beta (v\xi_3)^\gamma (w\xi_4)^\delta \cdots,$$

in cui $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \cdots$ sono parametri costanti diversi o eguali fra loro, esse verificheranno delle relazioni che si dedurranno immediatamente dalle (4) e potranno ridursi a forma razionale e intera che scriveremo

$$G_s\Big(z, z_1, \cdots, u, u_1, \cdots, v, v_1, \cdots, w, w_1, \cdots, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \cdots$$

$$\cdots \frac{\partial^{\lambda+\lambda_1+\cdots+\mu+\mu_1+\cdots} \mathfrak{f}_h}{\partial z^\lambda \partial z_1^{\lambda_1} \cdots \partial u^\mu \partial u_1^{\mu_1}, \cdots} \cdots, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots\Big) = 0.$$

Ciò premesso costruiamo le funzioni

$$F_s(z, \cdots, u, \cdots | x, y) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \cdots c^{(s)}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta\ldots} z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta \cdots \ddot{S}_1^\alpha \ddot{S}_2^\beta \ddot{S}_3^\gamma \ddot{S}_4^\delta \cdots$$

ove $S_1, S_2, S_3, S_4 \cdots$ sono funzioni permutabili di seconda specie. Esse saranno, in virtù delle precedenti proposizioni, rapporti di funzioni intere delle $z, u, v, w, \cdots$ e verificheranno le relazioni

$$G_s\Big(z, z_1, \cdots, u, u_1, \cdots, v, v_1, \cdots, w, w_1, \cdots, \ddot{F}_1, \ddot{F}_2$$

$$\cdots \frac{\partial^{\lambda+\lambda_1+\cdots+\mu+\mu_1\cdots} \ddot{F}_h}{\partial z^\lambda \partial z_1^{\lambda_1} \cdots \partial u^\mu \partial u_1^{\mu_1}, \cdots} \cdots, \ddot{S}_1, \ddot{S}_2, \ddot{S}_3, \cdots\Big) = 0,$$

ove il doppio punto situato sopra alle $S_1, S_2, S_3, S_4, \cdots, F_1, F_2, \cdots$ e alle loro derivate denota che i simboli di operazioni di potenza e moltiplicazione ad esse applicate, che figurano nelle espressioni delle G_s, vanno interpretati come operazioni di composizione.

Se inizialmente la condizione che le $\mathfrak{F}_s$ si annullino per $z = u = v = w = \cdots = 0$ non fosse soddisfatta, basterebbe moltiplicare le $\mathfrak{F}_s$ per dei parametri per ottenerla verificata.

Analogamente, se nel punto $z = u = v = w = \cdots = 0$ qualche denominatore delle $\mathfrak{F}_s$ si annullasse, basterebbe fare un cambiamento di variabili $z' = z - a_1$, $u' = u - a_2$, $v' = v - a_3$, $w' = w - a_4, \cdots$ perché nell'intorno del punto $z' = u' = v' = w' = \cdots = 0$ le $\mathfrak{F}_s$ fossero regolari.

6. Noi possiamo quindi enunciare la proposizione generale seguente: *Ad ogni problema algebrico o differenziale, la cui soluzione conduce a funzioni esprimibili come rapporti di funzioni intere di un certo numero di variabili, corrisponde un problema integrale o integro–differenziale la cui soluzione è pure esprimibile mediante rapporti di funzioni intere delle stesse variabili.*

I due problemi possono dirsi *correlativi* e *dalla soluzione dell'uno si può passare a quella dell'altro.*

La generalità di questa proposizione è facile a riconoscersi. Per persuadersene basta pensare alla vasta serie di problemi (come quelli che s'incontrano nella teoria delle funzioni ellittiche, abeliane ecc.) che conducono a funzioni espresse come rapporti di funzioni intere.

Noi abbiamo accennato già in precedenti Memorie a due esempî: uno il quale porta ad una nuova classe di trascendenti meromorfe che comprende le funzioni ellittiche (3), l'altro alla determinazione della soluzione fondamentale di una equazione integro–differenziale a limiti costanti ottenuta come estensione della equazione di LAPLACE (4).

Nel primo esempio si partiva da un sistema di equazioni differenziali ordinarie le cui soluzioni (funzioni ellittiche) erano rapporti di funzioni intere della variabile indipendente.

Nel secondo esempio si partiva da una equazione alle derivate parziali e si considerava la soluzione come rapporto di due funzioni intere di un certo numero di parametri.

È facile riconoscere quale posizione assume il problema della risoluzione delle equazioni integrali lineari nel campo generale di questioni abbracciato dalla proposizione precedente. Esso rappresenta il caso più elementare che possa presentarsi, ossia esso è il *correlativo* del problema della risoluzione di una equazione algebrica di 1° grado, il quale evidentemente conduce ad una funzione *meromorfa* dei suoi coefficienti. Infatti se abbiamo l'equazione

$$(v + v_1)\,\mathfrak{F} = w \tag{5}$$

la soluzione sarà

$$\mathfrak{F} = \frac{w}{v + v_1}$$

e supponendo $v_1 \gtreqless 0$ il problema correlativo sarà

$$v_1\,\mathrm{F}(x\,,y) + v\int_0^1 \mathrm{F}(x\,,\xi)\,\mathrm{S}_1(\xi\,,y)\,d\xi = w\,\mathrm{S}_2(x\,,y)$$

ove S_1 e S_2 sono funzioni permutabili di seconda specie (5).

Si rifletta ora a tutto l'insieme dei problemi i quali conducono a soluzioni rapporti di funzioni intere in confronto al problema (5) e si avrà il grado di generalità delle questioni integrali e integro–differenziali che scaturiscono dalla precedente proposizione generale in confronto al problema delle equazioni integrali lineari.

7. Ritorniamo alla considerazione delle quantità.

$$m_{hk}\,,\ n_{hk}\,,\ p_{hk}\,,\ q_{hk}\,,\ \cdots$$

e supponiamo ora

$$k > h$$

(3) *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro–differenziali*, precedentemente citata, § 8.

(4) *Equazioni integro–differenziali con limiti costanti*, precedentemente citata.

(5) Il caso in cui S_2 e F sono indipendenti da x segue immediatamente dalla risoluzione dell'equazione precedente, come è ben noto.

e alla permutabilità intesa nel senso esaminato nel § 2 sostituiamo l'altra condizione

$$(6) \qquad \sum_{h+1}^{k-1} {}_l\, m_{hl}\, n_{lk} = \sum_{h+1}^{k-1} {}_l\, n_{hl}\, m_{lk}\,,$$

e le analoghe per tutte le combinazioni due a due delle $m_{hk}\,, n_{hk}\,, p_{hk}\,, q_{hk}\,, \cdots$

Per denotare le espressioni (6) faremo uso dei simboli

$$[m\,, n]_{hk} = [n\,, m]_{hk}\,,$$

ossia sostituiremo alle parentesi tonde del § 2 le parentesi quadre. Scriveremo

$$[[m\,, n]\,, p]_{hk} = [m\,, n\,, p]_{hk}\,.$$

$$[m\,, m]_{hk} = [m^2]_{hk}\,,$$

e così di seguito.

Se ora noi costruiamo le funzioni

$$\varphi_{hk}(z\,, u\,, v\,, w\,, \cdots) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \cdots a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots} [m^\alpha n^\beta p^\gamma q^\delta \cdots]_{hk}\, z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta \cdots$$

$$\psi_{hk}(z\,, u\,, v\,, w\,, \cdots) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \cdots b_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots} [m^\alpha n^\beta p^\gamma q^\delta \cdots]_{hk}\, z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta \cdots$$

$$f_{hk}(z\,, u\,, v\,, w\,, \cdots) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \cdots c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots} [m^\alpha n^\beta p^\gamma q^\delta \cdots]_{hk}\, z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta \cdots$$

avremo che *esse saranno funzioni intere di* $z\,, u\,, v\,, w\,, \cdots$ *e saranno permutabili, nel senso ora considerato, con* $m_{hk}\,, n_{hk}\,, p_{hk}\,, q_{hk}\,, \cdots$

Che φ_{hk} e ψ_{hk} siano funzioni intere è ovvio. Che lo sia anche f_{hk} si dimostra osservando che le equazioni

$$(\mathrm{B}) \qquad x_{hk} + \sum_{h+1}^{k-1} {}_l\, \psi_{hl}\, x_{lk} = \varphi_{hk}$$

sono soddisfatte prendendo $x_{hk} = f_{hk}$ e che risolvendo le (B) rispetto alle x_{hk} si esprimono queste quantità mediante polinomî razionali ed interi nelle φ_{hk} e ψ_{hk}.

8. Nel caso adesso contemplato, con un passaggio al limite analogo a quello a cui abbiamo accennato nel § 4, si passa dalle quantità $m_{hk}\,, n_{hk}\,, p_{hk}\,, q_{hk}\,, \cdots$ alle funzioni finite e continue permutabili di 1ª specie [(6)] $s_1(x\,, y)\,, s_2(x\,, y)\,, s_3(x\,, y)\,, s_4(x\,, y)\,, \cdots$, cioè tali che

$$\int_x^y s_i(x\,, \xi)\, s_h(\xi\,, y)\, d\xi = \int_x^y s_h(x\,, \xi)\, s_i(\xi\,, y)\, d\xi\,,$$

e la proposizione del § precedente nel caso limite diviene:

(6) *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, precedentemente citata, § 1.

Le funzioni

$$\varphi(z, u, w, \cdots | x, y) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \cdots a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots} \, s_1^\alpha \, s_2^\beta \, s_3^\gamma \, s_4^\delta \cdots z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta \cdots$$

$$\psi(z, u, w, \cdots | x, y) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \cdots b_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots} \, s_1^\alpha \, s_2^\beta \, s_3^\gamma \, s_4^\delta \cdots z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta \cdots$$

$$f(z, u, w, \cdots | x, y) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \cdots c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots} \, s_1^\alpha \, s_2^\beta \, s_3^\gamma \, s_4^\delta \cdots z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta \cdots$$

(in cui i simboli di potenza e di moltiplicazione applicate alle $s_1, s_2, s_3, s_4, \cdots$ denotano operazioni di composizione di 1ª specie) sono funzioni intere delle variabili complesse $z, u, v, w, \cdots$ e, considerate come funzioni di x, y, sono funzioni permutabili di 1ª specie colle $s_1(x, y)$, $s_2(x, y)$, $s_3(x, y)$, $s_4(x, y)$, $\cdots$

Inoltre la funzione $f(z, u, v, w, \cdots | x, y)$ potrà ottenersi risolvendo l'equazione integrale

$$(\mathrm{B}') \qquad f(z, u, v, w, \cdots | x, y) + \int_x^y \psi(z, u, v, w, \cdots | x, \xi) f(z, u, v, w, \cdots | \xi, y)\, d\xi = \varphi(z, u, y, w, \cdots | x, y).$$

9. Riprendiamo le equazioni (4) e costruiamo le funzioni

$$f_s(z \cdots u \cdots | x, y) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \cdots c^{(s)}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots} z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta \cdots s_1^\alpha \, s_2^\beta \, s_3^\gamma \, s_4^\delta \cdots,$$

ove le operazioni applicate alle $s_1, s_2, s_3, s_4, \cdots$ debbono intendersi operazioni di composizione di 1ª specie. Esse saranno funzioni intere delle z, u, v, w, $\cdots$ e verificheranno le relazioni

$$\mathrm{G}_s\Big(z, z_1, \cdots, u, u_1, \cdots, v, v_1, \cdots, w, w_1, \cdots, f_1, f_2, \cdots \cdots \frac{\partial^{\lambda+\lambda_1+\cdots+\mu+\mu_1\cdots} f_h}{\partial z^\lambda \partial z_1^{\lambda_1} \cdots \partial u^\mu \partial u_1^{\mu_1} \cdots} \cdots \dot{s}_1, \dot{s}_2, \dot{s}_3, \cdots\Big) = 0,$$

ove il punto segnato sopra alle $s_1, s_2, s_3, s_4, \cdots, f_1, f_2, \cdots$ e alle loro derivate denota che i simboli delle operazioni di potenza e moltiplicazione da applicarsi a queste funzioni nelle espressioni G_s significano operazioni di composizione di 1ª specie.

10. Il teorema del § 6 può quindi essere completato nella maniera seguente:

Ad ogni problema algebrico o differenziale, la sui soluzione conduce a funzioni esprimibili come rapporti di funzioni intere di un certo numero di variabili, corrisponde (oltre al problema correlativo già considerato nel § 6) *un secondo problema correlativo integrale o integro-differenziale la cui soluzione è data da funzioni intere delle stesse variabili.*

Anche per questo nuovo problema correlativo *la soluzione può ricavarsi da quella del problema primitivo.*

Le relazioni che passano fra il problema primitivo (problema algebrico o differenziale) e i due problemi correlativi risultano ben chiare da tutto l'insieme della teoria che abbiamo svolta.

L'ultima proposizione, riguardante l'esistenza del 2° problema correlativo le cui soluzioni sono funzioni intere, si può considerare come dipendente da un teorema generale che ho dato nella mia Nota: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali* (7) e sotto questo aspetto essa può essere estesa, giacché *si può togliere la restrizione che il problema primitivo dia soluzioni che siano rapporti di funzioni intere, ma basta che esse siano funzioni regolari nell'intorno del punto* $z = u = v = w = \cdots = 0$.

Però per lo scopo, che avevamo in vista, di mettere in raffronto il passaggio a equazioni integrali o integro-differenziali con limiti costanti con quello a equazioni integrali o integro-differenziali con limiti variabili, e di considerare in un unico insieme i tre problemi: quello primitivo ed i due correlativi, conveniva procedere come abbiamo qui fatto.

11. Nel § 6 abbiamo accennato che le funzioni ellittiche, in virtù del 1° problema correlativo conducono ad una nuova classe di trascendenti meromorfe. In virtù del 2° problema correlativo esse conducono anche ad una nuova classe di trascendenti olomorfe. Di ambedue abbiamo brevemente parlato nella Nota precedentemente citata (8) e così dei corrispondenti *teoremi di addizione integrale* a cui esse soddisfano.

Come è stato detto nel § 6, mediante il primo problema correlativo, si passa da una equazione differenziale del tipo di LAPLACE ad una equazione integro-differenziale a limiti costanti di cui si può calcolare la soluzione fondamentale. Per mezzo del 2° problema correlativo si può ottenere la soluzione fondamentale di una equazione analoga integro-differenziale a limiti variabili.

Ma qui torna in acconcio osservare che, mentre pel passaggio al 1° problema correlativo, conviene partire da una equazione del tipo di LAPLACE con un numero pari di variabili maggiore di due, onde poter operare sopra una soluzione esprimibile come rapporto di funzioni intere, tale restrizione non è più necessaria nell'altro caso in virtù di quanto è stato osservato alla fine del § precedente. (Si cfr. la Nota: *Osservazioni sopra le equazioni integro-differenziali ed integrali*) (9).

Tralasceremo in questa Nota di parlare della estensione delle considerazioni svolte al caso di composizioni relative ad integrali multipli, di cui un breve cenno fu dato nella Nota suddetta (10), e delle varie applicazioni delle considerazioni stesse. Ci basti ricordare l'impiego del 2° problema correlativo per la soluzione dei problemi naturali di carattere ereditario.

(7) § 6.

(8) §§ 6, 8.

(9) « Rend. Acc. dei Lincei », vol. XIX, ser. 5ª, 1° sem., 3 aprile 1910. [In questo, vol.: XXV, pp. 328-330].

(10) § 5.