

## XXXIII.

## SULLE TEMPERATURE NELL'INTERNO DELLE MONTAGNE

«Nuovo Cimento», ser. 6<sup>a</sup>, vol. IV, 1912, pp. 111-126(\*).

1. Si suol rappresentare la distribuzione del calore nell'interno della terra con le *superficie isogeotermiche*, luogo dei punti che, ad un dato istante, hanno la stessa temperatura. È probabile che esse, al di là di una certa profondità (1500-2000 m), siano delle superficie piane e parallele o, più esattamente delle sfere concentriche. Tali superficie, man mano che ci si avvicina all'esterno, abbandonano l'aspetto pianeggiante per assumere quelle inflessioni prodotte dai rilievi del suolo e dalla temperatura dell'aria ambiente. In particolare, mentre al disotto di un piano di uniforme temperatura le superficie isotermiche procedono parallele ad esso, a misura che ci avviciniamo all'esterno, al disotto di un massiccio montagnoso invece, tali superficie cessano di essere parallele e pianeggianti per assumere un andamento del tutto irregolare. In altre parole: nella pianura basta la conoscenza del *gradiente termico* (aumento di temperatura corrispondente all'approfondirsi di un metro nell'interno della terra) in un sol punto di essa, per precisare senz'altro la posizione delle isogeotermiche. Le cose non vanno altrettanto semplicemente nelle montagne, a cagione della variabilità del gradiente punto per punto. Tutto questo, nella tacita ipotesi che la terra sia omogenea, conduca ugualmente il calore in tutte le direzioni (isotropa) e che non vi siano nell'interno di essa sorgenti locali di calore di qualsiasi natura.

Appare dunque in linea generale molto difficile l'assegnare la temperatura in ogni luogo di un massiccio montagnoso; eppure questo problema, sia pure trattato sotto forma approssimata, ha una importanza pratica notevole. Esso interessa principalmente l'ingegnere nella escavazione delle gallerie ferroviarie. Infatti, com'è noto, importa conoscere quale temperatura s'incontrerà nei vari punti di una galleria in modo da preparare, al momento opportuno, i mezzi acconci di aereazione perché il lavoro, iniziato, prosegua con la più grande economia di tempo e di denaro. Si sa, a proposito, come alcuni trafori siano riusciti dispendiosi eccessivamente, perché l'alta temperatura, non preveduta a tempo, rese malagevoli i lavori. Per dare un'idea

(\*) Conferenza tenuta alla Società di Fisica il 25 marzo 1911. Ringrazio vivamente il dott. PIETRO SENEPÀ per la redazione della presente conferenza.

delle temperature che s'incontrano nei tunnel, riporto qui sotto la tabella delle osservazioni fatte nel 1870 da GIORDANO <sup>(2)</sup> nel Moncenisio:

| Distanza dall'imbocco sud | Profondità al di sotto della superficie del terreno | Temperatura dell'aria | Temperatura della roccia |
|---------------------------|---|-----------------------|--------------------------|
| 500 m                     | —   | 10,5° C               | 14,2° C                  |
| 1000                      | 520 m   | 15,3°                 | 17°                      |
| 2000                      | —   | 17,8°                 | 19,5°                    |
| 3000                      | —   | 20,3°                 | 22,8°                    |
| 4000                      | —   | 23°                   | 23,6°                    |
| 5000                      | 910   | 24,5°                 | 27,5°                    |
| 6000                      | 1370  | 26,8°                 | 28,8°                    |
| 6450                      | 1690  | 30,1°                 | 29,5°                    |
| 6662                      | —   | —                     | 28°                      |
| 7000                      | 1447  | 25°                   | 27°                      |

Il traforo ha il punto culminante a 1296 m sul livello del mare, 1609 m al disotto della cresta alpina.

Nel S. Gottardo, l'altezza verticale sopra la galleria è superiore di 100 m a quella che domina il tunnel del Cenisio. Il massimo della temperatura fu trovato di 30,75° C.

2. Le prime ricerche sul gradiente termico si riferiscono al piano; così le più antiche di SAUSSURE e di GENSANNE. Tralascio però di fare una estesa bibliografia dell'argomento che mi porterebbe troppo lontano, per accennare, di volo, alle ricerche più importanti e più recenti <sup>(3)</sup>.

Nel 1857, nel pozzo artesiano di Mondorf nel Lussemburgo, profondo 730 m., WALFERDIN <sup>(4)</sup> trovò un accrescimento di 1° C ogni 31,04 m di aumento di profondità, ossia, come suol dirsi, un *grado geotermico* di 31,04 m. Le misure di W. THOMSON e SYMONS del 1869 dettero il grado geotermico variabile tra i limiti di 45 e 27 m. La diversità di formazione e di posizione degli strati, la presenza di acqua nei pozzi, han dato spiegazione delle forti divergenze trovate.

Ottimi, dal lato sperimentale, si mostrarono i sondaggi eseguiti a Spereberg in vicinanza di Berlino, inquantoché, un foro profondo 1260 m., si trovò intieramente scavato in un enorme giacimento omogeneo di salgemma <sup>(5)</sup>.

DUNKER, che fece esperienze in questo pozzo, trovò il gradiente termico variabile; al grado geotermico assegnò un valore medio di 32,51 metri.

(2) « Revue de Géologie », t. IX, p. 158.

(3) Per maggiori dettagli bibliografici vedi DE LAPPARENT, *Traité de Géologie*.

(4) Cfr. E. THOMA, *Über das Wärmeleitungsproblem bei wellig begrenzter Oberfläche und dessen Anwendung auf Tunnelbauten*. Karlsruhe 1906.

(5) Cfr. DE LAPPARENT, loc. cit.

Dalle esperienze di Speremberg e da altre, l'autore trasse la formula empirica

$$T = 7,10^{\circ} + 0,01298572 S - 0,00000125791 S^2,$$

che ci dà la temperatura T alla profondità S. Da questa espressione di T, risulterebbe che la temperatura non va uniformemente aumentando con la profondità, ma che a 1621 m raggiunge il massimo di 50,87°, per poi diminuire annullandosi a 3420 m. Tale risultato, in aperta contraddizione con la teoria del calore interno terrestre, fu appoggiato da valenti scienziati.

Senonché HENRICH, nel 1876, osservò come i dati di DUNKER, anziché con la formula del medesimo, si comprendono meglio con l'altra:

$$T = 0,0077928 S + 11,8277^{\circ}$$

che dà come grado geotermico il valore costante di 32,27 m.

Estendendo successivamente le ricerche, DUNKER stesso si persuase ad abbandonare la sua formula antica, per assumerne un'altra di tipo lineare come è quella di HENRICH.

Tralascio di parlare di un gran numero di ricerche fatte nelle miniere in Ungheria, in Inghilterra, nelle Indie <sup>(6)</sup>, per concludere che si può ritenere, in base a esperienze le più accreditate in *terreni normali*, cioè esenti da locali perturbazioni, come ogni 36,37 metri si abbia un aumento di 1° C di temperatura. A questo valore del grado geotermico, viene a corrispondere un gradiente di 0,027° C. Così pure si deduce dalla seguente tabella <sup>(7)</sup>.

| Località                     | Profondità del foro | Grado geotermico |
|------------------------------|---------------------|------------------|
| Sudenburg . . . . .          | 568 m               | 32,3 m           |
| Sennewitz (Halle) . . . . .  | 1084                | 36,6             |
| Lieth (Altona) . . . . .     | 1259                | 35,9             |
| Artern (Thüringen) . . . . . | —                   | 37,7             |
| Scarle (Lincoln) . . . . .   | 609                 | 37,8             |
| Kertish-Town . . . . .       | 307                 | 36,8             |

Dal lato teorico, è importante una relazione del Comitato dell'Associazione Britannica pubblicata da EVERETT nel 1882. Essa è una particolareggiata analisi critica dell'argomento in questione; così, tra l'altro, viene studiato come il lavoro di escavazione dei pozzi possa alterare, ed in che grado, le misurazioni di temperatura, e come il calore solare e le condizioni geologiche possano influire sulle variazioni del grado geotermico.

Per quel che riguarda le montagne, lo studio delle temperature s'iniziò con la escavazione dei primi grandi trafori alpini. Abbiamo già riportata la tabella delle osservazioni fatte sul Cenisio dal GIORDANO. Esperienze di grande importanza, furono quelle fatte da STAPFF <sup>(8)</sup> durante la costruzione

(6) THOMA, loc. cit., pag. 11 e seg.

(7) S. ARRHENIUS, *Lehrbuch der kosmischen Physik*. Bd. I, p. 280. Leipzig 1903.

(8) Cfr. THOMA, loc. cit., p. 16.

della galleria del Gottardo. Una formula empirica riassume i risultati: essa dà la temperatura, lungo la galleria, in funzione della distanza nella direzione nord-sud dalla imboccatura di Göschenen, dell'altezza relativa del luogo al disopra di Göschenen. Il grado geotermico, secondo STAPFF, cresce rapidamente con l'aumentare del pendio del monte da un minimo di 35,53 m, ad un massimo di 63,5. Ma la parte più importante del lavoro di STAPFF è quella ove si mette in relazione la temperatura di un punto interno del monte, sia con la distanza verticale, sia con la più breve distanza del punto medesimo dalla superficie esterna.

3. Vediamo come si dovrebbe impostare la questione delle temperature nell'interno delle montagne, se si volesse applicare la teoria della propagazione del calore.

Rappresentiamoci un monte (fig. 1) (che consideriamo fin d'ora come costituito di roccia omogenea) e supponiamo che la distribuzione delle tem-

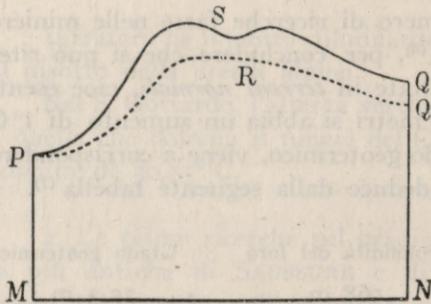


Fig. 1.

perature sia dovuta al solo fenomeno della conduzione, senza che vi siano speciali sorgenti di calore nel monte stesso; supponiamo inoltre che nel massiccio roccioso non vi siano correnti d'acqua, o almeno siano trascurabili, in modo che il calore si trasporti tutto per conduzione termica e non per scorrimento di materia. Immaginiamo di isolare la montagna dal resto della terra per mezzo di una base orizzontale MN e di una

superficie laterale verticale PM, QN. Se si conosce l'andamento annuo e giornaliero della temperatura sulla superficie esterna PSQ, sulla base MN e sulle superficie laterali PM e QN e inoltre il coefficiente di conducibilità, il calorico specifico e la densità della roccia, la teoria di FOURIER ci dice che la temperatura in ogni punto e in ogni istante è determinata.

Per semplificare il problema, supponiamo di prescindere dalle oscillazioni annue e giornaliere delle temperature, prendendo la media, e di considerare questa come stazionaria. Con ciò il problema è evidentemente semplificato, avendo eliminato il tempo. Supponiamo ancora che attraverso la superficie laterale non vi siano passaggi di calore ossia che approssimativamente, in direzione normale a PM e QN, non vi sia conduzione termica; finalmente che la base della montagna sia presa così profonda, in modo da poter considerare come costante la temperatura lungo MN.

Allora la questione si presenta così: la temperatura  $T$  nell'interno del massiccio montagnoso è una funzione armonica la quale è costante lungo la base MN e tale che la derivata normale  $\partial T / \partial n$  lungo la superficie laterale PM, QN è nulla. Se si conoscono i valori della temperatura nei punti situati sopra PSQ, e la temperatura costante lungo MN, essa è determinata dovun-

que all'interno. Ma, pur supponendola costante, sulla base la temperatura è tuttavia di fatto incognita; possiamo però sostituire a questa costante ignota il valore di un'altra costante di possibile diretta determinazione, ad esempio: la media del gradiente su PSQ, o il gradiente medio sulla base della montagna, oppure ancora il gradiente in un punto qualsiasi di PSQ.

In tutti i casi il problema resta sempre completamente determinato, pur rimanendo in generale praticamente insolubile, per le grandi difficoltà che presenta. Esso è del tipo del problema di DIRICHLET, le cui soluzioni (NEUMANN ecc.) appaiono piuttosto soluzioni teoriche che pratiche, allorché si vogliono tradurre in numeri. Ora è appunto la questione numerica e pratica che vogliamo trattare. Se ci riuscirà di trovare un modo per tracciare nell'interno della montagna un seguito di isoterme, avremo raggiunto lo scopo, giacché, sapendo la temperatura spettante ad ognuna di esse, rimarrà senz'altro individuata, punto per punto, la temperatura nell'interno del massiccio.

Ma vediamo di fare ancora un passo che ci semplificherà notevolmente la questione. La fig. 1 ci rappresenti una sezione verticale della montagna passante per l'asse della galleria. Se noi, anziché studiare la conduzione del calore nel massiccio, la studiamo semplicemente nel piano della sezione, supposta staccata dal resto, le linee isoterme verranno in generale modificate. Sarebbe come se si sostituisse alla forma irregolare della montagna, quale è effettivamente, un cilindro avente le generatrici orizzontali e per base la fig. 1.

Tale sostituzione, se non è rigorosa, ci permette però di passare da un problema nello spazio, ad un problema nel piano, talché noi l'accettiamo, tanto più che ha dato in pratica risultati soddisfacenti.

Un'ultima semplificazione si può avere nel modo seguente, col quale al contorno primitivo PSQ, si viene a sostituire una prima linea di livello. Le temperature date lungo la linea PSQ sono in generale variabili da punto a punto; se noi conosciamo il gradiente superficiale nei vari punti, od anche quello medio, potremo abbassare le ordinate della curva PSQ proporzionalmente alla differenza di temperatura fra P e i vari punti di PSQ, in modo da avere la isoterma passante per P. In tal modo il problema così si presenta:

Costruire una funzione armonica di cui si conosce il valore costante lungo la curva nota PRQ, (isoterma passante per P), il valor medio del gradiente sulla linea PRQ, oppure sulla retta MN, mentre si sa che nei tratti PM, QN, la funzione ha la derivata normale nulla e lungo MN è costante.

Anche ridotto sotto questa forma, così semplificata, il problema è sempre assai complesso in quanto che la irregolarità del profilo esterno del monte, e quindi della linea di livello PRQ, costituisce la difficoltà della soluzione.

4. Ecco come è stata proposta una soluzione approssimata dal dottor THOMA (9), la quale fu applicata al Gottardo con un certo successo.

(9) Loc. cit., p. 22 e seg.

Prendiamo la funzione:

$$(1) \quad \vartheta = \frac{1}{2} \log (A + \sqrt{A^2 - 1})$$

ove

$$A = e^{\frac{2x}{b}} + \sqrt{1 - \left(2 \cos \frac{2y}{b} - e^{\frac{2x}{b}}\right) e^{\frac{2x}{b}}}$$

e  $b$  è una costante (\*)

Le linee  $\vartheta = \text{cost.}$ , nel piano  $xy$ , sono ondulate così come si vedono nella fig. 2.

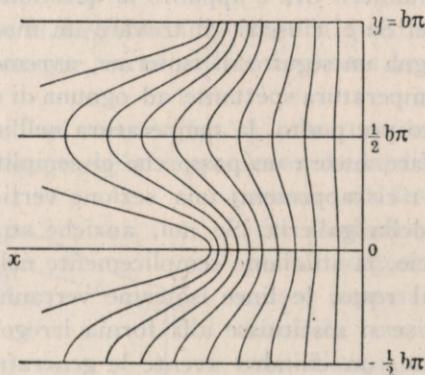


Fig. 2.

L'ampiezza della ondulazione, per un determinato valore di  $\vartheta$ , è data dalla formula

$$D = b \log \frac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}$$

che ci mostra come per  $\vartheta = 0$  questa ampiezza sia infinitamente grande, e come vada diminuendo al crescere di  $\vartheta$ , per divenire zero quando  $\vartheta = \infty$ . In tal caso la linea ondulata degenera in una retta parallela all'asse  $y$ .

Se vogliamo esprimere  $\vartheta$  in funzione di  $D$ , dalla precedente formula ricaviamo:

$$(2) \quad \vartheta = \frac{1}{2} \log \frac{e^{\frac{D}{b}} + 1}{e^{\frac{D}{b}} - 1}$$

Il calcolo della  $\partial\vartheta/\partial x$  lungo le rette

$$y = nb\pi,$$

$$y = \left(n + \frac{1}{2}\right)b\pi$$

(\*) La funzione  $A$  proposta dal THOMA è la parte reale della funzione analitica  $w$ , definita dalla relazione  $\text{ch } \omega = e^{2|z|}$ , ove  $z = x + iy$ . Le due formole del testo ((1) e seg.) sono valedoli solo per i valori  $nb\pi$ ,  $(n + 1/2)b\pi$  di  $y$ , valori che soli intervengono nei calcoli successivi. [N.d.R.].

dà rispettivamente

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{1}{b} \frac{e^{\frac{2x}{b}} + e^{\frac{x}{b}} \sqrt{e^{\frac{2x}{b}} - 1}}{e^{\frac{2x}{b}} + e^{\frac{x}{b}} \sqrt{e^{\frac{2x}{b}} - 1} - 1}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{1}{b} \frac{e^{\frac{2x}{b}} + e^{\frac{x}{b}} \sqrt{e^{\frac{2x}{b}} + 1}}{e^{\frac{2x}{b}} + e^{\frac{x}{b}} \sqrt{e^{\frac{2x}{b}} + 1} + 1}$$

Al crescere di  $x$  tendono queste due espressioni verso il valore comune

(3) 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) = \frac{1}{b}$$

minimo per l'una, massimo per l'altra.

Ora osserviamo che la (1) è una funzione armonica del piano, cioè soddisfa l'equazione  $\Delta^2 \vartheta = 0$ ; le linee ondulate  $\vartheta = \text{cost.}$  possono quindi rappresentare delle isoterme. Dunque diremo con THOMA:

*Se si limita una parte di piano mediante due linee isoterme, delle quali una è ondulata e l'altra è retta, allora la formula (1) dà per un mezzo omogeneo, qualora siano soddisfatte le condizioni ai limiti, la temperatura nell'interno della superficie.*

Con la funzione (1) si viene così a risolvere il problema enunciato alla fine del n. 3, nel caso particolare in cui la PRQ sia una linea ondulata, in un piano che si prolunga indefinitamente secondo la direzione della base MN. Nel caso del piano limitato osserviamo che alle rette generiche  $y = n\pi b$ ,  $y = (n + 1)\pi b$  si fa tenere qui il posto di PM, QN della fig. 1. Ed infatti si verifica facilmente che

$$\left( \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y = n\pi b} = 0 \quad , \quad \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y = (n + 1)\pi b} = 0.$$

Il dott. THOMA ha applicato al Gottardo il risultato della sua teoria, per dedurre la temperatura in ogni punto di quel tratto di tunnel che corre sotto il massiccio principale del monte, tra il pianoro di Andermatt e Airolo. Egli si serve del disegno del monte eseguito da STAPFF sostituendo però al profilo reale un *profilo corretto*, cioè quell'arco di sinusoidi che con la parallela all'asse del tunnel, condotta all'altezza di Andermatt, racchiude un'area equivalente a quella compresa tra la stessa parallela e il profilo vero. Calcola così che l'al-

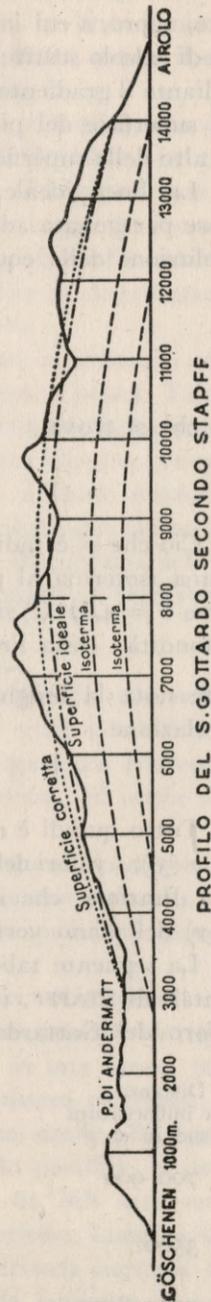


Fig. 3.

tezza dell'arco di senoide deve essere di 1190 metri. Ma al profilo corretto, sopra, a cui la temperatura varia da punto a punto, l'autore per necessità di calcolo sostituisce il *profilo ideale*, disegnando la isoterma  $4,82^\circ$  dedotta mediante il gradiente termico dal suddetto profilo sinusoidale; essa incomincia alla superficie del pianoro di Andermatt e scorre 240 m al disotto del luogo più alto della superficie corretta, ossia 950 m al disopra di Andermatt.

La linea ideale, secondo THOMA, può, con buona approssimazione, essere paragonata ad una linea ondulata. Osserviamo pertanto che, se la (2) è soluzione della equazione differenziale  $\Delta^2 \vartheta = 0$ , lo è pure

$$(2') \quad \vartheta = \frac{c_1}{2} \log \frac{e^{\frac{D}{b}} + 1}{e^{\frac{D}{b}} - 1} + c_2$$

con che si trova

$$(3') \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) = \frac{c_1}{b}$$

Ciò che si è indicato con D, rappresenta la distanza dal più alto punto di una isoterma al punto più basso; per la linea ideale del Gottardo (isoterma  $\vartheta = 4,82^\circ \text{C}$ ) si ha dunque  $D = 950 \text{ m}$ . Il gradiente termico a grande profondità, ossia  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\partial \vartheta / \partial x)$ , lo assumemmo uguale a  $0,027^\circ \text{C}$ . D'altra parte nota la lunghezza L del tratto tra Andermatt e Airolo, (12000 m), la relazione

$$b \pi = L \quad \text{ci dà} \quad b = \frac{L}{\pi}$$

Tutto quindi è noto in maniera da poter determinare, con le equazioni (2') e (3'), i valori delle costanti  $c_1$  e  $c_2$ ; questo in breve vuol dire la conoscenza della funzione che ci individua, senz'altro, la temperatura in ogni punto  $(x, y)$  del piano verticale del monte, passante per l'asse della galleria.

La seguente tabella dà, in particolare, paragonandoli con quelli sperimentali di STAPFF, i risultati ottenuti con la teoria di THOMA, applicata al traforo del Gottardo:

| Distanza della imboccatura sud in m | Temp. osservata da STAPFF | Temp. calcolata da THOMA | Differenza media |
|-------------------------------------|---------------------------|--------------------------|------------------|
| 700-900                             | 13,80° C —<br>14,96°      | 15°                      | 0,62°            |
| 3500                                | 25,92°                    | 25,98°                   | 0,06°            |
| 7700-8000 (cresta)                  | 30,43° —<br>31,74°        | 32,49°                   | 1,41°            |
| 9500                                | 25,21°                    | 25,98°                   | 0,77°            |
| 12000                               | 18,07° —<br>19,08         | 15°                      | —3,5°            |

L'esempio qui portato presuppone che si possa sostituire il profilo del monte con quello corretto a forma di arco di senoide. In linea generale questo può però essere non sempre possibile. Tuttavia THOMA estese il suo metodo al caso più comune del monte di forma qualsiasi.

Tale estensione consiste nello sviluppare la funzione  $y = \varphi(x)$ , che immaginiamo rappresenti il profilo del monte, in serie di FOURIER. In tale maniera il profilo stesso viene ad essere sostituito dalla sovrapposizione di più linee sinusoidali con periodi ed ampiezze conosciute. Le sinusoidi dovrebbero poi venire sostituite dalle linee ondulate, per ognuna delle quali si calcolerebbe il corrispondente  $\vartheta$ ; la loro somma darebbe la distribuzione delle temperature nell'interno del massiccio montagnoso.

Non vi è chi non veda, però, come tale metodo possa, in generale, condurre ad errori sulla cui entità nulla può essere precisato *a priori*. Talché vien fatto di dubitare se esso risponda alle esigenze pratiche della questione proposita; elementi di giudizio non se ne hanno in quanto l'autore, per quel che io sappia, non ha sottoposta la soluzione a nessun raffronto numerico con dati di esperienza, salvo nel caso particolare già citato del Gottardo.

Fu l'ing. STELLA professore al Politecnico di Torino che, primo, sollevò dei dubbi intorno al valore del metodo di THOMA, invocando un intervento matematico più efficace.

5. Il procedimento che io propongo di applicare in questo caso non è analitico, ma un processo dirò così fisico, il quale non è utile solo nel problema speciale qui trattato, ma in un gran numero di questioni riferentisi alle funzioni armoniche, alle funzioni di variabile complessa, ed anche alla risoluzione di equazioni algebriche.

Sappiamo che su di una superficie conduttrice omogenea, percorsa da una corrente stazionaria, il potenziale elettrico è una funzione armonica.

Lo studio dirò così aritmetico delle funzioni armoniche può farsi facendo lo studio fisico della distribuzione della corrente.

Supponiamo ora, sopra un foglio sottile di stagnola, di disporre una sbarra d'ottone rettilinea di un certo spessore, avente resistenza elettrica molto bassa e una lamina dello stesso metallo, tagliata in una forma tale, che la porzione del foglio di stagnola compresa fra la sbarra rettilinea, la lamina superiore e gli orli del foglio, costituisca una figura simile alla figura MPRQ'N della fig. 1. Facciamo aderire nel miglior modo possibile le parti di ottone alla stagnola e lasciamo entrare la corrente da MN attraverso la sbarra di ottone ed uscire da PRQ' per la lamina di ottone. Lungo i lati PM, Q'N che costituiscono gli orli della stagnola la derivata normale del potenziale elettrico sarà nulla, e, data la sottigliezza della lamina e la conducibilità grande delle due parti di ottone, potremo supporre, con grande approssimazione, che il potenziale stesso lungo MN e lungo PRQ' sia costante, cioè che queste due linee terminali siano linee di livello.

Sulla stagnola le linee di livello vengono esplorate con due sonde rilegate opportunamente ad un galvanometro.

Esperienze in proposito mostrarono che, adoperando della stagnola sufficientemente sottile (0,025 mm) percorsa da una intensità media di 0,1 Amperè per cm, con un galvanometro HARTMANN & BRAUN rilegato alle sonde attraverso ad una resistenza conveniente, si possono individuare i punti ad ugual potenziale a meno di 0,1 — 0,2 mm.

Volendo, si potrebbe aumentare la sensibilità del metodo sia aumentando la corrente tra le sbarre, sia aumentando la sensibilità del sistema galvanometro-sonde, col diminuire della resistenza in serie. Ma la grande sensibilità, andando a scapito della sveltezza della esperienza conviene invece, accontentandosi di poca precisione, di operare su di una lamina di stagnola sufficientemente estesa. Una volta fissata una delle sonde in un punto della lamina, la linea di livello, passante per questo punto, si disegna senz'altro movendo con continuità l'altra sonda in modo che il galvanometro non venga a spostarsi dalla posizione di equilibrio.

Resta ora da vedere come si possa determinare la temperatura corrispondente alle diverse linee di livello. Fra la temperatura  $T$  della montagna e il potenziale  $V$  corre una relazione lineare:

$$T = \alpha V + \beta,$$

ove  $\alpha, \beta$  sono costanti.

Quindi, se lungo  $PRQ'$  la temperatura è  $T_0$ , e lungo una linea di livello è  $T_1$ , e i potenziali sono rispettivamente  $V_0$  e  $V_1$  si ha

$$(4) \quad T_1 - T_0 = \alpha (V_1 - V_0).$$

Il gradiente termico medio su  $MN$  sarà

$$\lambda = \frac{1}{s} \int_s \frac{\partial T}{\partial n} ds = \frac{\alpha}{s} \int_s \frac{\partial V}{\partial n} ds,$$

in cui  $s$  è la lunghezza della linea  $MN$ . Chiamando  $r$  la resistenza elettrica che offre un quadrato della foglia di stagnola al passaggio della corrente attraverso due lati paralleli <sup>(10)</sup> avremo

$$\frac{\lambda}{r} = \frac{\alpha}{rs} \int_s \frac{\partial V}{\partial n} ds = \frac{\alpha}{s} I$$

essendo  $I$  l'intensità della corrente totale.

Dalla equazione precedente si ricava

$$(1) \quad \alpha = \frac{\lambda s}{rI}.$$

Assumendo il gradiente termico medio a grande profondità (dove supponiamo si trovi la linea  $MN$ ) eguale a 0,027° C per metro si deduce

$$\alpha = 0,00027 \frac{s}{rI},$$

ove  $s$  è misurato in cm.

(10) Evidentemente, lo spessore del foglio di stagnola essendo uniforme,  $r$  è indipendente dalla lunghezza del lato del quadrato.

In virtù della (4) sarà quindi

$$T_1 = T_0 + 0,00027 \frac{s}{rI} (V_1 - V_0).$$

Se  $V$  è il potenziale elettrico lungo  $MN$ , avremo

$$\delta = \frac{V_1 - V_0}{V_2 - V_0} = \frac{V_1 - V_0}{RI},$$

essendo  $R$  la resistenza dell'intero foglio di stagnola compreso fra  $MN$  e  $PRQ'$ . Quindi

$$\frac{V_1 - V_0}{I} = R\delta$$

$$T_1 = T_0 + 0,00027 \frac{R}{r} \delta s;$$

$\delta$  può essere misurato direttamente con un dispositivo potenziometrico.

Si comprende che questo metodo è suscettibile di modificazione; così si potrebbe fare in modo, regolando convenientemente l'accesso della corrente nella laminetta  $PSQ'$ , che il potenziale lungo di essa non sia costante, ma che segua la stessa legge di variazione della temperatura del dorso della montagna; allora per  $PRQ'$  potrebbe prendersi il profilo vero, senza sostituirvi la isoterma.

Si potrebbe anche regolare la conducibilità della lamina in modo da poter imitare, volendo, la diversa conducibilità al calore dei vari strati del massiccio montagnoso.

Però, quando si voglia estendere questo metodo dal piano allo spazio per risolvere il problema analogo nelle tre dimensioni, ci si imbatte in gravi difficoltà di natura sperimentale. D'altra parte, appaiono alquanto faticosi i metodi teorici di calcolo per assegnare, sia pure approssimativamente, le temperature nell'interno di una montagna, astrazione fatta da particolari ipotesi sulla forma della superficie esterna di essa <sup>(11)</sup>.

(11) Mentre questa conferenza è in corso di stampa il prof. SOMIGLIANA mi fa noto che egli, in unione col dott. VERCELLI, ha presentato all'Accademia di Torino una memoria in cui è esposto un nuovo metodo aritmetico pel calcolo della temperatura nell'interno delle montagne.