XLI.

SOPRA EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI AVENTI I LIMITI COSTANTI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XXII₂, 1913₂; pp. 43-49.

1. Ho avuto già occasione di trattare questo stesso soggetto in un'altra Nota pubblicata in questi Rendiconti, nella quale ho considerato le equazioni della forma

$$\sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \cdots, x_p \mid t)}{\partial x_i^2} + \int_0^1 \sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \cdots, x_p \mid \tau)}{\partial x_i^2} f_i(t, \tau)\, d\tau = 0$$

in cui le funzioni $f_i(t, \tau)$ sono permutabili di 2ª specie e, dopo aver stabilito in generale il teorema di reciprocità analogo a quello di GREEN, ho più specialmente esaminato il caso in cui $p > 2$ è pari, che è il più semplice [1]. Nel caso di p dispari, nel quale non può applicarsi il principio del passaggio da soluzioni rapporti di funzioni intere di equazioni differenziali alle soluzioni pure rapporti di funzioni intere delle equazioni integro-differenziali correlative, si può far uso di un metodo analogo a quello impiegato nel § 5 dell'altra mia Nota avente per titolo: *Sopra le funzioni permutabili di 2ª specie* [2].

Mi permetto qui di trattare il caso di $p = 3$ (giacché gli altri casi di p dispari non offrono diversa difficoltà) cioè l'equazione

$$\text{(I)} \qquad \Delta^2 u(t) + \int_0^1 \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right\} d\tau = 0$$

nella quale, per semplicità, ho soppresso di scrivere esplicitamente le variabili x, y, z da cui dipende la funzione u.

2. Tutto sta nel trovare una soluzione fondamentale di quella equazione che ho chiamato aggiunta della (I), la quale non differisce da essa che per una semplice trasposizione delle variabili t e τ in $f(t, \tau)$, $\varphi(t, \tau)$, $\psi(t, \tau)$ [3].

(1) *Equazioni integro-differenziali con limiti costanti*. Seduta del 22 gennaio 1911 [in questo vol.: XXVIII, pp. 359-363]. Ho pure considerato equazioni integro-differenziali con limiti costanti nelle Note: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, 20 febbraio 1910 [in questo vol.: XXIII, p. 311-322]; *Sopra una proprietà generale delle equazioni integrali ed integro-differenziali*, 6 agosto 1911 [in questo vol.: XXI, pp. 380-388]. L'anno scorso nelle mie lezioni alla Sorbona ho mostrato come quelle a nuclei simmetrici possano ricavarsi da questioni di calcolo delle variazioni.

(2) Seduta del 23 aprile 1911. [In questo vol.: XXX, pp. 373-379].

(3) *Equazioni integro-differenziali con limiti costanti*, § 2.

Basterà dunque dare un metodo per trovare una soluzione fondamentale della (I).

Supponiamo f, φ, ψ permutabili di 2ª specie, e consideriamo dapprima l'equazione

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(1 + z_1) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(1 + z_2) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(1 + z_3) = 0 .$$

La sua soluzione fondamentale sarà

$$\frac{c}{\sqrt{\dfrac{x^2}{1+z_1} + \dfrac{y^2}{1+z_2} + \dfrac{z^2}{1+z_3}}}$$

$$= \frac{c}{r}\sqrt{\frac{1 + (z_1 + z_2 + z_3) + (z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2) + z_1 z_2 z_3}{1 + \alpha^2 (z_2 + z_3) + \beta^2 (z_3 + z_1) + \gamma^2 (z_1 + z_2) + \alpha^2 z_2 z_3 + \beta^2 z_3 z_1 + \gamma^2 z_1 z_2}}$$

ove c è una costante e

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad , \quad \alpha = \frac{x}{r} \quad , \quad \beta = \frac{y}{r} \quad , \quad \gamma = \frac{z}{r} \cdot$$

Cominciamo dal costruire le funzioni

$$f + \varphi + \psi + \overset{**}{\varphi}\,\overset{**}{\psi} + \overset{**}{\psi}\,\overset{**}{f} + \overset{**}{f}\,\overset{**}{\varphi} + \overset{**}{f}\,\overset{**}{\varphi}\,\overset{**}{\psi} = \lambda(t, \tau)$$

$$\alpha^2(\varphi + \psi) + \beta^2(\psi + f) + \gamma^2(f + \varphi) + \alpha^2 \overset{**}{\varphi}\,\overset{**}{\psi} + \beta^2 \overset{**}{\psi}\,\overset{**}{f} + \gamma^2 \overset{**}{f}\,\overset{**}{\varphi} = \mu(t, \tau)$$

ove i doppi asterischi segnati sulle lettere f, φ, ψ denotano che le operazioni sopra esse eseguite non sono moltiplicazioni, ma composizioni di seconda specie (4).

Determiniamo quindi la funzione $\nu(t, \tau)$ tale che

$$\frac{1 + \overset{**}{\lambda}}{1 + \overset{**}{\mu}} = 1 + \nu ,$$

ossia in modo che

$$\lambda = \mu + \nu + \overset{**}{\mu}\,\overset{**}{\nu}$$

Essa si otterrà risolvendo l'equazione integrale

$$\lambda(t, \tau) - \mu(t, \tau) = \nu(t, \tau) + \int_0^1 \mu(t, \xi)\, \nu(\xi, \tau)\, d\xi .$$

Basterà ora considerare l'equazione integrale di 2° grado

$$\sqrt{1 + \overset{**}{\nu}} = 1 + \pi ,$$

cioè

$$1 + \nu = (1 + \overset{**}{\pi})^2 ,$$

(4) Ho adottato qui gli asterischi, invece dei punti di cui avevo fatto uso nelle Note precedenti.

ossia

$$\nu = 2\pi + \overset{**}{\pi}{}^{2},$$

che può scriversi

$$\nu(t, \tau) = 2\pi(t, \tau) + \int_0^1 \pi(t, \xi)\, \pi(\xi, \tau)\, d\xi$$

e, se ci riesce ad ottenere $\pi(t, \tau)$ permutabile, insieme alle sue derivate rispetto a x, y, z, con f, φ, ψ, sarà

$$\text{(II)} \qquad \frac{F(t) + \int_0^1 F(\tau)\, \pi(t, \tau)\, d\tau}{r}$$

la soluzione fondamentale richiesta, ove $F(t)$ è una funzione arbitraria di t, indipendente da x, y, z.

3. Noi faremo uso adesso del metodo delle sostituzioni permutabili applicato nella Nota precedentemente citata (5). Abbiasi la sostituzione

$$A = \left| \begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{matrix} \right| = T^{-1} \left| \begin{matrix} A_1, & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & A_2, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & 0, & A_3, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & A_g \end{matrix} \right| T \ {}^{(6)}$$

ove T è una sostituzione a determinante diverso da zero e

$$A_i = \left| \begin{matrix} a_i, & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ a_i', & a_i, & 0, & \cdots, & 0 \\ a_i'', & a_i', & a_i, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_i^{(h_i)}, & a_i^{(h_i-1)}, & a_i^{(h_i-2)}, & \cdots, & a_i \end{matrix} \right|, \quad (h_1 + h_2 + \cdots + h_g = n).$$

Noi denoteremo con $B, C, L, M, \cdots$ delle sostituzioni perfettamente analoghe alla A in cui però le $a_{is}, a_i, a_i', a_i'', \cdots, A_i, \cdots$, sono rispettivamente sostituite dalle lettere $b_{is}, b_i, b_i', b_i'', \cdots, B_i, \cdots$, oppure $c_{is}, c_i, c_i', c_i'', \cdots, C_i \cdots$, ecc., rimanendo la stessa la sostituzione T e non alterandosi i numeri

(5) *Sopra le funzioni permutabili di 2ª specie.*

(6) Secondo una notazione di cui ho fatto uso in altri miei lavori questa sostituzione può scriversi ancora $T^{-1} \left| \prod_1^g A_i \right| T$.

$h_1, h_2, h_3, \cdots, h_g$. Tutte le sostituzioni A, B, C, $\cdots$ saranno fra loro permutabili e le funzioni

$$f = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s a_{rs}\, \alpha_r(t)\, \alpha_s(\tau)$$

$$\varphi = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s b_{rs}\, \alpha_r(t)\, \alpha_s(\tau)$$

$$\psi = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s c_{rs}\, \alpha_r(t)\, \alpha_s(\tau)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

ove $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \cdots, \alpha_n(t)$ sono funzioni normalizzate, saranno permutabili fra loro.

Noi prenderemo le funzioni f, φ, ψ della equazione (1) date dalle espressioni precedenti, supponendo le T, A_i, B_i, C_i indipendenti da x, y, z. È evidente allora che avremo

$$\lambda = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s l_{rs}\, \alpha_r(t)\, \alpha_s(\tau)$$

$$\mu = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s m_{rs}\, \alpha_r(t)\, \alpha_s(\tau)$$

$$\nu = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s n_{rs}\, \alpha_r(t)\, \alpha_s(\tau)$$

$$\pi = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s p_{rs}\, \alpha_r(t)\, \alpha_s(\tau)$$

e fra le sostituzioni corrispondenti passeranno le relazioni

$$A_i + B_i + C_i + B_i C_i + C_i A_i + A_i B_i + A_i B_i C_i = L_i$$

$$\alpha^2 (B_i + C_i) + \beta^2 (C_i + A_i) + \gamma^2 (A_i + B_i) + \alpha^2 B_i C_i + \beta^2 C_i A_i + \gamma^2 A_i B_i = M_i$$

$$(1 + L_i)(1 + M_i)^{-1} = 1 + N_i,$$

ove con 1 si rappresenta la sostituzione identica, cioè

$$\begin{vmatrix} 1, 0, 0, \cdots, 0 \\ 0, 1, 0, \cdots, 0 \\ 0, 0, 1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, 0, \cdots, 1 \end{vmatrix}.$$

In altri termini

$$1 + N_i = [\alpha^2 (1 + A_i)^{-1} + \beta^2 (1 + B_i)^{-1} + \gamma^2 (1 + C_i)^{-1}]^{-1}.$$

Finalmente sarà

$$N_i = 2\,P_i + P_i^2$$

ossia

$$(1 + P_i)^2 = 1 + N_i\,.$$

4. È facile con semplici operazioni algebriche calcolare gli elementi delle sostituzioni P_i. Infatti posto dapprima

$$\alpha^2 (1 + A_i)^{-1} + \beta^2 (1 + B_i)^{-1} + \gamma^2 (1 + C_i)^{-1} = 1 + Q_i\,,$$

si avrà

$$1 + q_i = \frac{\alpha^2}{1 + a_i} + \frac{\beta^2}{1 + b_i} + \frac{\gamma^2}{1 + c_i}$$

$$q'_i = -\frac{a'_i\,\alpha^2}{(1 + a_i)^2} - \frac{b'_i\,\beta^2}{(1 + b_i)^2} - \frac{c'_i\,\gamma^2}{(1 + c_i)^2}$$

$$q''_i = \alpha^2\left(-\frac{a''_i}{(1 + a_i)^2} + \frac{a'^2_i}{(1 + a_i)^3}\right)$$

$$+\,\beta^2\left(-\frac{b''_i}{(1 + b_i)^2} + \frac{b'^2_i}{(1 + b_i)^3}\right) + \gamma^2\left(-\frac{c''_i}{(1 + c_i)^2} + \frac{c'^2_i}{(1 + c_i)^3}\right)$$

. . . .

quindi

$$1 + n_i = \frac{1}{\dfrac{\alpha^2}{1 + a_i} + \dfrac{\beta^2}{1 + b_i} + \dfrac{\gamma^2}{1 + c_i}}$$

$$n'_i = -\frac{q'_i}{(1 + q_i)^2}$$

$$n''_i = -\frac{q''_i}{(1 + q_i)^2} + \frac{q'^2_i}{(1 + q_i)^3}$$

. . . .

Finalmente

$$1 + p_i = \sqrt{1 + n_i} = \sqrt{\frac{1}{\dfrac{\alpha^2}{1 + a_i} + \dfrac{\beta^2}{1 + b_i} + \dfrac{\gamma^2}{1 + c_i}}}$$

$$p'_i = \frac{n'_i}{2\sqrt{1 + n_i}}$$

$$p''_i = \frac{1}{2\sqrt{1 + n_i}}\left(n''_i - \frac{n'^2_i}{4(1 + n_i)}\right)$$

. . . .

Basterà dunque che siano

$$1 + a_i \quad , \quad 1 + b_i \quad , \quad 1 + c_i > 0$$

perché le $p_i\,, p'_i\,, p''_i\,, \cdots$, *possano senz'altro ottenersi, ed esse saranno determinate prendendo positivi tutti i radicali che figurano nelle formule precedenti.*

Da queste quantità possono ricavarsi le p_{is}, quindi π; ed è evidente che essa e le sue derivate rispetto a x, y, z saranno permutabili con f, φ, ψ.

La soluzione fondamentale (II) assumerà quindi la forma

$$\frac{F(t) + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_i \, p_{is} k_s \alpha_i(t)}{r},$$

ove

$$k_s = \int_1^0 \alpha_s(\tau) \, F(\tau) \, d\tau,$$

onde il problema propostoci sarà risoluto.

Si può esaminare abbastanza facilmente la estensione al caso di $n = \infty$.