XXIX.

CONTRIBUTO ALLO STUDIO DELLE FUNZIONI PERMUTABILI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XX_1, 1911_1, pp. 296–304.

§ 1. – Osservazioni sulla composizione.

1. La operazione di *composizione* (composizione di prima specie) delle due funzioni finite e continue f e φ,

$$\int_x^y f(x,\xi)\,\varphi(\xi,y)\,d\xi,$$

si può evidentemente considerare indipendentemente dalla permutabilità delle due funzioni (1). Rappresentandone il resultato col simbolo $f\varphi(x,y)$ o più semplicemente col simbolo $f\varphi$, avremo che se f e φ non saranno permutabili $f\varphi$ sarà diverso da φf.

La operazione stessa gode in generale della proprietà associativa. Infatti

$$\int_x^y f(x,\xi)\,d\xi \int_\xi^y \varphi(\xi,\eta)\,\psi(\eta,y)\,d\eta = \int_x^y \psi(\eta,y)\,d\eta \int_x^\eta f(x,\xi)\varphi(\xi,\eta)\,d\xi.$$

Potremo dunque enunciare il teorema: *Siano o no permutabili le funzioni* f,φ,ψ, *avremo sempre*

$$(f\varphi)\,\psi = f\,(\varphi\psi).$$

2. Da questa proposizione discende immediatamente l'altra che enunciammo in una precedente Nota (2), cioè che *tutte le funzioni ottenute per composizione da più funzioni permutabili sono permutabili fra loro e colle funzioni date.*

Infatti, se f,φ,ψ sono permutabili, avremo

$$(f\varphi)\,\psi = f\,(\varphi\psi) = f\,(\psi\varphi) = (f\psi)\,\varphi = (\psi f)\,\varphi = \psi\,(f\varphi).$$

(1) Cfr. *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali.* « Rend. Acc. dei Lincei », seduta del 20 febbraio 1910, § 1. [In questo vol.: XXIII, pp. 311–322].

(2) Ibid.

§ 2. – Risoluzione di equazioni integrali.

1. Se f e φ sono funzioni derivabili, ed inoltre sono rispettivamente funzioni di ordini m ed n (3) con $m > n$, l'equazione integrale di prima specie

$$(1) \qquad f(x, y) = \int_x^y \psi(x, \xi)\, \varphi(\xi, y)\, d\xi$$

ammette un'unica soluzione che è la soluzione dell'equazione integrale di seconda specie

$$(2) \qquad f_n(x, y) = \psi(x, y)\, \varphi_{n-1}(y, y) + \int_x^y \psi(x, \xi)\, \varphi_n(\xi, y)\, d\xi,$$

ove si è scritto in generale

$$f_p(x, y) = \frac{\partial^p f(x, y)}{\partial y^p} \quad , \quad \varphi_p(x, y) = \frac{\partial^p \varphi(x, y)}{\partial y^p}.$$

Ciò si riconosce immediatamente derivando n volte l'equazione (1) e tenendo conto che

$$\varphi_p(y, y) = 0 \quad , \quad \text{se } p < n - 1 \quad , \quad \varphi_{n-1}(y, y) \gtrless 0$$

$$f_p(x, x) = 0 \quad , \quad \text{se } p \leq n - 1$$

ed osservando inoltre che, ogni funzione che soddisfa la (1) deve verificare la (2) e reciprocamente.

2. Dimostriamo ora che *se f e φ sono permutabili*; ψ *è permutabile con ambedue queste funzioni*.

Infatti la (1) si potrà scrivere

$$f = \psi\varphi$$

quindi

$$(3) \qquad \varphi f = \varphi(\psi\varphi) = (\varphi\psi)\,\varphi$$

$$(4) \qquad f\varphi = (\psi\varphi)\,\varphi.$$

Ma per ipotesi $\varphi f = f\varphi$, onde, se risolviamo la equazione (3) considerando $\varphi\psi$ come incognita, troveremo, in virtú di quanto è detto precedentemente, la stessa soluzione che risolvendo la (4) in cui si consideri $\psi\varphi$ come incognita.

(3) Nella presente Nota supporremo sempre, senza ripeterlo esplicitamente ogni volta, che le funzioni che si considerano siano finite e continue e così le derivate loro di cui si deve tener conto. Per la definizione di *ordine* di una funzione, vedi: *Sopra le funzioni permutabili*. « Rend. Acc. dei Lincei », seduta del 17 aprile 1910, § 3. [In questo vol.: XXVI, pp. 331–342].

Ne segue che

$$\varphi\psi = \psi\varphi$$

onde φ e ψ sono permutabili ed in conseguenza sono pure permutabili f e ψ.

3. È facile riconoscere che, risolvendo la (1), *la soluzione* ψ *sarà di ordine* $m - n$. Quindi, se i numeri m ed n saranno primi fra loro, colla risoluzione di successive equazioni integrali potremo sempre trovare funzioni di primo ordine permutabili con f e con φ.

4. In modo perfettamente analogo a quanto si è fatto precedentemente si dimostra che, *se* f *e* φ *sono funzioni permutabili di ordini rispettivamente* m *ed* n *con* $m > np$, *e se*

$$f = \psi\varphi^p ,$$

ψ *è permutabile con* f *e* φ.

§ 3. – Ricerca di tutte le funzioni permutabili con una funzione di 2° ordine.

1. Supponendo $f(x, y)$ di 2° ordine e nota per tutti i valori di x, y, tali che

$$a \leq x \leq y \leq b ,$$

proponiamoci di trovare tutte le funzioni $\varphi(x, y)$ con essa permutabili.

Con un procedimento analogo a quello che abbiamo tenuto in una Nota precedente [4] potremo ricondurre il problema al caso in cui si abbia

$$f(x, x) = 0 \quad , \quad f_1(x, x) = -1 \quad , \quad f_2(x, x) = 1$$

$$f_{11}(x, x) = 0 \quad , \quad f_{12}(x, x) = 0 \quad , \quad f_{22}(x, x) = 0,$$

avendo posto

$$f_1(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad , \quad f_2(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

$$f_{11}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \quad , \quad f_{12}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \quad , \quad f_{22}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} .$$

2. Scriviamo

$$\Phi(x, y) = \int_x^y f(x, \xi)\, \varphi(\xi, y)\, d\xi = \int_x^y \varphi(x, \xi) f(\xi, y)\, d\xi . \tag{5}$$

(4) *Sopra le funzioni permutabili*. « Rend. Acc. dei Lincei », seduta 17 aprile 1910, § 1. [In questo vol.: XXVI, pp. 331–342].

Avremo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \varphi(x,y) + \displaystyle\int_x^y f_{11}(x,\xi)\,\varphi(\xi,y)\,d\xi \\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \varphi(x,y) + \displaystyle\int_x^y \varphi(x,\xi)\,f_{22}(\xi,y)\,d\xi \end{cases}$$

e, ponendo

$$f_{11}(x,y) - f_{11}^2(x,y) + f_{11}^3(x,y) - \cdots = F_{11}(x,y),$$

$$f_{22}(x,y) - f_{22}^2(x,y) + f_{22}^3(x,y) - \cdots = F_{22}(x,y),$$

ove le potenze denotano operazioni di composizione, sarà

$$(6)\qquad \begin{cases} \varphi(x,y) = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \displaystyle\int_x^y F_{11}(\xi,x)\,\frac{\partial^2 \Phi(\xi,y)}{\partial \xi^2}\,d\xi \\ \varphi(x,y) = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \displaystyle\int_x^y F_{22}(\xi,y)\,\frac{\partial^2 \Phi(x,\xi)}{\partial \xi^2}\,d\xi . \end{cases}$$

Ora

$$F_{11}(x,x) = 0 \quad , \quad F_{22}(x,x) = 0,$$

quindi, posto

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_{11}(x,y)}{\partial y} = \lambda_{11}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 F_{11}(x,y)}{\partial y^2} = \mu_{11}(x,y) \\ \dfrac{\partial F_{22}(x,y)}{\partial x} = \lambda_{22}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 F_{22}(x,y)}{\partial x^2} = \mu_{22}(x,y) \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_{11}(x,x) = \lambda_1(x) \\ \mu_{11}(x,x) = \mu_1(x) \\ \lambda_{22}(x,x) = \lambda_2(x) \\ \mu_{22}(x,x) = \mu_2(x) \end{cases}$$

e, osservando che $\Phi(x,y)$ è di ordine superiore al secondo e perciò

$$\left(\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}\right)_{x=y} = 0,$$

le (6) si trasformeranno facilmente, mediante integrazioni per parti, nelle equazioni seguenti

$$\varphi(x,y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \lambda_1(x)\,\Phi(x,y) - \int_x^y \mu_{11}(x,\xi)\,\Phi(\xi,y)\,d\xi$$

$$\varphi(x,y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \lambda_2(y)\,\Phi(x,y) - \int_x^y \mu_{22}(\xi,y)\,\Phi(x,\xi)\,d\xi .$$

Sottraendo si avrà

$$\text{(A)}\qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + (\lambda_2(y) + \lambda_1(x))\,\Phi(x, y)$$
$$+ \int_x^y [\mu_{11}(x, \xi)\,\Phi(\xi, y) - \mu_{22}(\xi, y)\,\Phi(x, \xi)]\, d\xi = 0 .$$

Dunque $\Phi(x, y)$ deve soddisfare l'equazione integro–differenziale (A).

3. Poniamo

$$g(x, y) = -(\lambda_2(y) + \lambda_1(x))\,\Phi(x, y)$$
$$- \int_x^y [\mu_{11}(x, \xi)\,\Phi(\xi, y) - \mu_2(\xi, y)\,\Phi(x, \xi)]\, d\xi ;$$

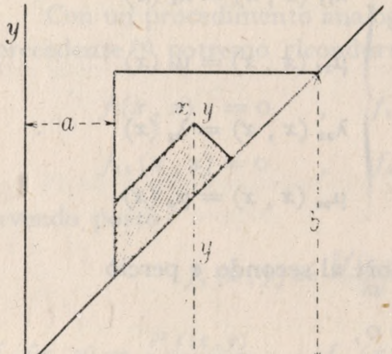
la (A) si scriverà

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = g(x, y),$$

d'onde

$$\Phi(x, y) = \psi(y - x) + \theta(x + y) + \frac{1}{2} \int_{\Lambda_{x,y}} g(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

ove ψ e θ denotano due funzioni arbitrarie, e con $\int_{\Lambda_{x,y}}$ si intende l'integrale esteso allo spazio $\Lambda_{x,y}$ compreso fra la bisettrice degli assi x, y, le due rette inclinate di 45° sugli assi coordinati condotte per il punto x, y e la retta parallela all'asse y che ne dista di a. Lo spazio $\Lambda_{x,y}$ è lo spazio tratteggiato indicato nella figura.



Ma, se facciamo $x = y$, abbiamo

$$\Phi(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\Lambda_{x,y}} g(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0 ,$$

quindi

$$\psi(0) + \theta(2x) = 0 ,$$

ossia θ deve essere una costante eguale a $-\psi(0)$.

Se dunque prendiamo ψ in modo che si annulli per $x = y$, avremo

$$\text{(A')}\qquad \Phi(x, y) = \psi(y - x) + \frac{1}{2} \int_{\Lambda_{x,y}} g(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta ,$$

e per conseguenza si potrà sostituire all'equazione integro–differenziale (A) l'equazione integrale (A').

4. Si riconosce facilmente che, nota $\psi(y-x)$, la funzione Φ è determinata dalla (A′), ossia se $\psi(y-x)$ è nulla, anche Φ è nulla. Ciò si ottiene impiegando metodi analoghi a quelli che abbiamo adoperato in circostanze simili in precedenti Memorie [(5)].

La risoluzione della equazione integrale (A′) non presenta difficoltà. La funzione $\Phi(x, y)$ è di terzo ordine o di ordine superiore al terzo, quindi dovremo prendere anche $\psi(y-x)$ di terzo ordine o di ordine superiore al terzo. Si dimostra che, assumendo in tal maniera $\psi(y-x)$, la funzione Φ, ottenuta risolvendo l'equazione integrale (A′), soddisfa le (5) ed è dello stesso ordine di $\psi(y-x)$. Risolvendo una delle (5) si otterranno tutte le funzioni permutabili con $f(x, y)$. In particolare prendendo $\psi(y-x)$ del terzo ordine, $\varphi(x, y)$ risulterà del primo ordine.

Il problema di ottenere tutte le funzioni permutabili con una funzione del secondo ordine è quindi risoluto.

5. Se $f(x, y)$ è della forma $f(y-x)$, allora

$$\lambda_{11}(x, y) = -\lambda_{22}(x, y) = \lambda(y-x),$$

per conseguenza

$$\lambda_1(x) = -\lambda_2(y) = \lambda(0).$$

Inoltre

$$\mu_{11}(x, y) = \mu_{22}(x, y) = \mu(y-x).$$

Ne segue che

$$g(x, y) = \int_x^y [\mu(y-\xi)\,\Phi(x, \xi) - \mu(\xi - x)\,\Phi(\xi, y)]\, d\xi,$$

onde l'equazione integrale (A′) è soddisfatta prendendo

$$\Phi(x, y) = \psi(y-x).$$

Se ne deduce che tutte le funzioni permutabili con $f(y-x)$ appartengono al gruppo delle funzioni permutabili coll'unità.

§ 4. — Risoluzione dell'equazione integrale

$$\text{(I)} \qquad \int_x^y \varphi(x, \xi)\,\varphi(\xi, y)\, d\xi = \psi(x, y)$$

ove ψ è una funzione data del 2° ordine e φ è incognita.

1. Poniamo

$$x = f(x_1) \quad , \quad y = f(y_1) \quad , \quad \xi = f(\xi_1)$$

(5) *Sopra le funzioni permutabili*. « Rend. Acc. dei Lincei », seduta 17 aprile 1910, § 2. [In questo vol.: XXVI, pp 331–342].

con $f'(\xi_1)$ sempre positivo, in modo che le precedenti equazioni possano invertirsi univocamente ed avere

$$x_1 = f_1(x) \quad , \quad y_1 = f_1(y_1) \quad , \quad \xi_1 = f_1(\xi).$$

Colla precedente sostituzione si otterrà

$$(7) \qquad \int_{x_1}^{y_1} \varphi(x_1, \xi_1)\, \varphi(\xi_1, y_1)\, f'(\xi_1)\, d\xi_1 = \psi(x_1, y_1).$$

Sia

$$\sqrt{f'(x_1) f'(y_1)}\, \varphi(x_1, y_1) = \varphi_1(x_1, y_1)$$

$$\sqrt{f'(x_1) f'(y_1)}\, \psi(x_1, y_1) = \psi_1(x_1, y_1).$$

La equazione (7) si scriverà

$$\int_{x_1}^{y_1} \varphi_1(x_1, \xi_1)\, \varphi_1(\xi_1, y_1)\, d\xi_1 = \psi_1(x_1, y_1).$$

Supponiamo ora che

$$\lim_{y=x} \frac{\psi(x, y)}{x - y} = \lambda^2(x).$$

Potremo assumere $\lambda(x)$ diverso da zero e positivo. Ma

$$\lim_{y_1 = x_1} \frac{x - y}{y_1 - x_1} = f'(x_1) = \frac{1}{f_1'(x)},$$

quindi

$$\lim_{y_1 = x_1} \frac{\psi_1(x_1, y_1)}{y_1 - x_1} = \left(\frac{\lambda(n)}{f_1'(n)}\right)^2,$$

onde, preso $f_1'(x) = \lambda(x)$, avremo

$$\lim_{y_1 = x_1} \frac{\psi_1(x_1, y_1)}{y_1 - x_1} = 1.$$

Potremo dunque, con una conveniente trasformazione di variabili e di funzioni, ricondurre la equazione (I) al caso in cui sia

$$\lim_{y=x} \frac{\psi(x, y)}{y - x} = 1.$$

Noi ammetteremo quindi soddisfatta senz'altro questa condizione.

2. Ciò premesso calcoliamo, col procedimento indicato nel paragrafo precedente, una funzione $\theta(x, y)$ di primo ordine permutabile con $\psi(x, y)$. È facile riconoscere, da quanto si è trovato nel detto paragrafo, che $\theta(x, x)$ dovrà essere una costante diversa da zero. Moltiplicando quindi $\theta(x, y)$ per un fattore costante, potremo ricondurci al caso in cui $\theta(x, x) = 1$.

Supponiamo che $\psi(x, y)$ e $\theta(x, y)$ ammettano le derivate seconde e poniamo

$$\frac{\partial\theta(x,y)}{\partial y} = \theta_2(x,y) \quad , \quad \frac{\partial^2\theta(x,y)}{\partial y^2} = \theta_{22}(x,y) \quad , \quad \frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial y^2} = \psi_{22}(x,y)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta^2(x,y)}{\partial y^2} = \theta_2(x,y) + \theta(x,y)\,\theta_2(y,y) + \displaystyle\int_x^y \theta(x,\xi)\,\theta_{22}(\xi,y)\,d\xi = \lambda(x,y) \\ \dfrac{\partial^2(\psi(x,y) - \theta^2(x,y))}{\partial y^2} = \psi_{22}(x,y) - \lambda(x,y) = \mu(x,y). \end{cases}$$

Risolviamo ora l'equazione integrale

$$\mu(x,y) = \chi(x,y) + \int_x^y \chi(x,\xi)\,\lambda(\xi,y)\,d\xi, \tag{8}$$

considerando $\chi(x, y)$ come funzione incognita, e formiamo la serie (la quale per princìpi noti [6] sappiamo esser convergente)

$$\varphi(x,y) = \theta(x,y) + \frac{1}{2}\theta\chi(x,y) \tag{II}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}\theta\chi^2(x,y) + \cdots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\theta\chi^n(x,y) + \cdots$$

ove con $\theta\chi^n(x, y)$ si intende il risultato di una operazione di composizione.

Si dimostra facilmente che $\pm\varphi(x, y)$ verifica l'equazione (I).

Infatti, integrando due volte la (8), si ricava che

$$\psi(x,y) = \theta^2(x,y) + \int_x^y \chi(x,\xi)\,\theta^2(\xi,y)\,d\xi.$$

χ è per conseguenza permutabile con θ e con ψ (vedi § 2). Ne segue, componendo la serie (II) con se stessa,

$$\varphi^2(x,y) = \theta^2 + \theta^2\chi = \psi(x,y).$$

§ 5. – Osservazioni.

1. Si riconosce facilmente che, se $\varphi_1(x, y)$ e $\varphi_2(x, y)$ sono due funzioni permutabili tali che

$$\int_x^y \varphi_1(x,\xi)\,\varphi_1(\xi,y)\,d\xi = \psi(x,y),$$

$$\int_x^y \varphi_2(x,\xi)\,\varphi_2(\xi,y)\,d\xi = \psi(x,y),$$

(6) Vedi la Nota citata precedentemente: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, § 3. [In questo vol.: XXIII, pp. 311–322].

essendo ψ una funzione di 2° ordine, deve aversi o

$$\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y)$$

oppure

$$\varphi_1(x, y) = -\varphi_2(x, y)$$

2. Consideriamo l'equazione integrale

$$(9) \qquad \varphi^n(x, y) = \psi(x, y),$$

ove φ è la incognita e il simbolo di potenza denota un'operazione di composizione, mentre la funzione data ψ è di ordine np multiplo dell'intero n. Con una trasformazione analoga a quella fatta nel § precedente potremo ricondurci al caso in cui

$$\lim_{y=x} \frac{\psi(x, y)}{(y-x)^{np-1}} = 1.$$

Se conosciamo una funzione $\theta(x, y)$ di ordine p permutabile con $\psi(x, y)$ e tale che

$$\lim_{y=x} \frac{\theta^n(x, y)}{(y-x)^{pn-1}} = 1,$$

risolviamo l'equazione integrale

$$\psi(x, y) - \theta^n(x, y) = \int_x^y \chi(x, \xi)\,\theta^n(\xi, y)\,d\xi$$

nella ipotesi che le funzioni θ e ψ posseggano le derivate di ordine n^{esimo}. Calcolata la funzione incognita χ, avremo che la funzione

$$\theta(x, y) + \frac{1}{n}\theta\chi(x, y)$$

$$+ \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1\cdot 2}\theta\chi^2(x, y) + \cdots + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{n}-q+1\right)}{q!}\theta\chi^q(x, y) + \cdots$$

soddisfarà l'equazione (9).

3. Quando $\psi(x, y)$ è della forma $\psi(y-x)$, potremo prendere

$$\theta(x, y) = \frac{[(np-1)!]^{1/n}}{(p-1)!}(y-x)^{p-1}.$$

Nella ipotesi $p = 1$, si ricade nella soluzione data in una Nota precedente (7).

(7) *Sopra le funzioni permutabili*. « Rend. Acc. Lincei », seduta 17 aprile 1910, § 4. [In questo vol.: XXVI, pp. 331–342].