II.

ÉCRIT ANONYME INÉDIT

SUR

LA CHUTE DES GRAVES

SON ATTRIBUTION A FERMAT.

(Tome II, p. 26, 28, 37, 55.)

(Florence, Bibl. Naz., Mss. Galileiani, Parte V, Tomo VII, f[os] 98 recto à 100 verso.)

Selon le regretté Duhem (¹), la règle qui permet d'évaluer l'espace parcouru, en un certain temps, par un mobile mû d'un mouvement uniformément varié, se trouverait clairement formulée déjà dans l'Ouvrage où Nicolas Oresme posait les principes essentiels de la Géométrie analytique ; elle fut discutée dans les nombreux commentaires qui, en Italie, au commencement du xv[e] siècle, visaient les traités produits par la Dialectique d'Oxford et aussi dans les divers Ouvrages de Physique produits par la scolastique parisienne. Toutefois on n'avait pas encore eu l'idée d'appliquer cette règle à la chute des corps et c'est seulement plus tard, par le moyen de la règle formulée par Oresme, que la loi de cette chute fut trouvée par un élève des scolastiques parisiens, le dominicain espagnol Soto, qui la publia dans ses *Questions sur la Physique d'Aristote*, imprimées en 1545, c'est-à-dire vers l'époque où, en Italie, Tartaglia y consacra ses efforts.

(¹) *Études sur Léonard de Vinci*, troisième série (Paris, 1913).

Tout récemment, le juge le plus compétent en la matière a nié l'influence de ces écrits sur les idées de Galilée (¹). On doit reconnaître toutefois que Cardan et Benedetti rapprochaient la date de la découverte en propageant l'opinion que, dans le vide, tous les graves parcourent la même distance dans le même intervalle de temps, regardant leur chute comme produite par un mouvement uniforme qui reçoit continuellement une impulsion nouvelle. C'était par ce dernier principe, et en appliquant celui de l'indépendance de l'effet de la pesanteur et du mouvement antérieurement acquis, que Galilée réussit à nouveau à déterminer l'excès résultant de ce mouvement, excès qu'il vérifia par l'observation de la chute au long du plan incliné — arrangement qui diminuait la résistance de l'air et retardait la chute suffisamment pour y pouvoir appliquer la mesure. Ainsi, dans une lettre à Guidobaldo del Monte, datée de Padoue, le 29 novembre 1602, il énonça à son protecteur le tautochronisme des chutes par des cordes inclinées différemment sur le diamètre perpendiculaire d'un cercle, et, dans une autre lettre à Sarpi du 16 octobre 1604, il pouvait déclarer *gli spazii passati dal moto naturale essere in proporzione doppia dei tempi, e per consequenza gli spazii passati in tempi eguali essere come i numeri impari* ab unitate (²).

En résolvant le problème de la sommation des actions continuelles d'une vitesse qui s'accroît par le temps, ce qui est le problème fondamental de la Dynamique, Galilée faisait le raisonnement suivant :

Supposons que le mobile, partant du lieu de repos A (*fig.* 4), représenté par zéro, acquiert pendant son parcours vers B, qui se fait pendant le premier intervalle de temps (par exemple une minute), cinq degrés de vitesse. Divisons cet intervalle en cinq moments égaux ; comme la vitesse s'augmente à chaque moment de quantités égales, et devient 1, 2, 3, 4, 5, donc tous les espaces seront ensemble

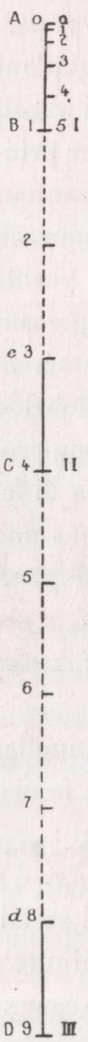
$$0+1+2+3+4+5=15.$$

(¹) A. Favaro, *Léonard de Vinci a-t-il exercé une influence sur Galilée et son école?* (*Scientia*. vol. XX, 1916, p. 247-265); A. Favaro, *Galileo Galilei e i Doctores parisienses* (*Rendiconti della Reale Accad. dei Lincei*, vol. XXVII, seduta del 21 aprile 1918).

(²) *Le Opere di Galileo Galilei*, ed. naz., vol. X, 1900, resp. p. 99 et 115.

Or, le mobile étant arrivé en B, supposons qu'il poursuit son cours pendant le second intervalle de temps (qui est égal au premier) avec un mouvement uniforme dont la vitesse est égale à celle qu'il avait acquise en dernier lieu, c'est-à-dire à 5. Il s'ensuit que, le nombre des termes étant resté 6, la somme des espaces contenus dans la ligne Bc sera 30, et le mobile, se mouvant pendant le même intervalle de temps, avec une vitesse égale à celle du plus haut degré 5, passera par un espace qui sera le double de celui qu'il a parcouru depuis son lieu de repos A jusqu'à B par le mouvement accéléré. Soit donc $Bc = 2AB$ et $cC = AB$, l'espace BC, parcouru dans l'intervalle second, sera égal à 3 AB; et ainsi de suite $CD = 5\,AB$, etc.

Fig. 4.



Cette même loi des *spatia ut quadrata temporum* fut prouvée aussi par Descartes à la fin de l'année 1618, lors de son séjour à Bréda, suivant les principes et à la prière de son ami Beeckman, par le moyen de l'aire d'un triangle rectangle qui porte de petits triangles différentiels ([1]). Et ce fut par un procédé analogue que la loi fut prouvée à nouveau par Galilée aussi, après qu'il eut connaissance, en 1622, de la méthode des indivisibles de son ami Cavalieri.

Il va sans dire cependant que toute démonstration, quelle qu'elle fût, devait être inadmissible pour ceux qui n'admettaient pas les prémisses.

Notamment, la plupart des philosophes niait le vide pour des raisons philosophiques : c'était précisément une des objections les plus puissantes qui militait contre le vide que la vitesse d'un corps tombant y serait à chaque moment infinie et une telle vitesse n'existe pas, disait-on, dans la nature. Cette raison était objectée ultérieurement par exemple par Mydorge ([2]). En 1643, au nom de la Société des Mathématiciens de Paris, on objectait par la bouche de Mersenne contre les *Discorsi* de Galilée, parus en 1638 :

([1]) *OEuvres de Descartes*, éd. cit., t. X, 1908, p. 58-61, 75-78 et 219-220.

([2]) *Op. cit.*, t. II, 1898, p. 592-593, 618-619, 632-633; t. III, 1899, p. 11.

Supponit corpora gravitare in vacuo pag. 73, *quod falsum est* (¹).

Mais aussi, en admettant le vide pour un moment, le mot du poète *vires acquirunt eundo*, appliqué aux corps tombants par Galilée et Descartes, pouvait être contesté quand on l'interprétait dans ce sens que le mouvement s'augmentait toujours également. Descartes lui-même, qui croyait son résultat encore valable en 1629, lorsqu'il était sujet de discussion entre lui et Mersenne (²), semble l'avoir rejeté à l'époque où il rédigeait son *Monde*, bouleversant en 1631 toute son ancienne démonstration par la remarque que, même dans le vide, il soit faux « *que la force qui faisoit mouvoir cette pierre agissoit tousiours esgalement, ce qui repugne apertement aux lois de la Nature : car toutes les puissances naturelles agissent plus ou moins selon que le sujet est plus ou moins disposé à recevoir leur action; et il est certain qu'une pierre n'est pas également disposée à recevoir un nouveau mouvement ou une augmentation de vitesse, lorsqu'elle se meut desia fort viste et lorsqu'elle se meut fort lentement* ». Vers la même époque, Mersenne fut amené à d'autres conclusions absurdes, en raison des inconvénients de l'observation directe de la chute des graves (³).

Une seconde objection était celle que, pour garder dans le vide les proportions des nombres 1, 3, 5, 7, etc., il était nécessaire que le grave tombât par tous les degrés de tardiveté et que cela n'était point, puisque la pierre avait au commencement de sa chute déjà une certaine vitesse.

La preuve du théorème que les corps tombants passent par tous les degrés de vitesse troubla déjà Cavalieri, qui en demanda une démons-

(¹) Ch. Henry, article cité à la page 12, note 1, p. 14.

(²) *OEuvres de Descartes*, éd. cit., t. I, 1897, p. 71-74, 75, 88-89 et 90-95 ; Descartes commit alors une faute assez étrange dans la déduction de la loi.

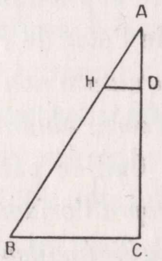
(³) Ainsi dans sa lettre à Jean Rey du 1ᵉʳ septembre 1631, le Minime s'oppose à l'opinion de ceux qui croyent « *que le mouvement des choses graves est plus viste vers la fin qu'au commencement : l'expérience me fait voir le contraire, car un boulet de canon descend aussi viste vers les vingt-cinq premiers pieds de roy que les vingt-cinq derniers* », en admettant cependant qu'un « *charbon tombant de vos mains ira aussi viste à terre qu'un semblable morceau de plomb* » [*Essais de Jean Rey*, éd. Maurice Petit (Paris, 1907), p. 79-80].

tration plus exacte à Galilée dans une lettre du 21 mars 1626 (1). La question a d'ailleurs du rapport avec celle-ci, si *grave sibi imprimit motum primo momento* qui fut posée plus d'une fois par Mersenne entre autres, à Descartes. Le philosophe répondit au Minime, le 4 novembre 1630, que cette thèse était pour lui une conséquence nécessaire de certains principes qui lui paraissaient évidents (2). Toutefois, il assurait bientôt, dans ses lettres à Mersenne d'octobre ou de novembre 1631, qu'il est faux de supposer « *que le mouvement qui s'y fait soit au premier instant qu'il commence le plus tardif qui se puisse imaginer et qu'il s'augmente tousiours par apprès esgalement* » (3). En effet, selon lui, on ne pouvait rien déterminer de la vitesse d'un corps tombant, sans avoir déterminé ce qu'est la pesanteur (4), à laquelle il consacra vers cette époque tout un chapitre de son *Monde* (5). Il la croyait produite par la matière subtile tournant fort vite autour de la Terre; si cette matière ne tournait point, aucun corps ne serait pesant (6) et ainsi dans le vide, que le philosophe d'ailleurs rejetait, la pesanteur serait nulle (7). En réalité, la matière subtile chasse, selon Descartes, les corps vers le centre avec plus de force lorsqu'ils n'ont point encore commencé à descendre que lorsqu'ils descendent déjà; enfin, s'il arrive qu'ils descendent aussi vite que la matière subtile se meut, elle ne les poussera plus du tout et, s'ils descendent plus vite, elle leur résistera (8). Il s'ensuit que les corps pesants sont moins poussés par la matière subtile à la fin de leur mouvement qu'au commencement (9); mais il est impossible de déterminer la vitesse dont chaque corps pesant descend au commencement, car cela dépend de la vitesse de la matière subtile (10).

(1) *Le Opere di Galileo Galilei*, éd. naz., vol. XIII, 1903, p. 312.
(2) *OEuvres de Descartes*, éd. cit., t. I, 1897, p. 176.
(3) *Op. cit.*, t. I, 1897, p. 222, 230-231.
(4) *Op. cit.*, t. I, 1897, p. 228, 392; t. II, 1898, p. 385.
(5) Chapitre XI (*OEuvres*, éd. cit., t. XI, 1909, p. 75 et suiv.); *cf.* t. I, 1897, p. 324.
(6) *OEuvres de Descartes*, éd. cit., t. II, 1898, p. 635.
(7) *Op. cit.*, t. II, 1898, p. 385, 442, l. 17-18.
(8) *Op. cit*., t. II, 1898, p. 544; t. III, 1899, p. 10, 134-135.
(9) *Op. cit.*, t. III, 1899, p. 37-38 et 79.
(10) *Op. cit.*, t. III, 1899, p. 36.

Plus correctes étaient les opinions énoncées par Galilée dans son *Dialogo* qui tâchait de prouver que la pierre a eu au commencement de sa chute une vitesse moindre que n'importe quelle vitesse donnée. Selon ce qu'il dit dans le *Dialogo primo,* l'état de repos est le degré de tardiveté infinie (*quiete è il grado di tardità infinita*) (p. 13); il n'est pas impossible pour la Nature et Dieu de donner immédiatement la vitesse au corps qui passe de l'état de repos à celui de mouvement, *ma dirò bene che* de facto *la natura non lo fà; talchè il farlo verrebbe ad esser' operazione fuora del corso naturale, e però miracolosa* (p. 13). C'est ce qui est prouvé par Galilée par la remarque *che si possano notar piani tanto poco elevati sopra l'orizonte, che'l mobile, cioè la medesima palla in qualsiuoglia lunghissimo tempo si condurrebbe al termine, già che per conduruisi per il piano non basta tempo infinito; ed il moto si fa sempre più lento, quanto la declività è minore. Bisogna dunque necessariamente confessare potersi sopra il termine* C (voir *fig.* 6 à la page 20) *pigliare un punto tanto ad esso* C *vicino, che tirando da esso al punto* B *un piano, la palla non lo passasse nè anco in vn' anno* (p. 20), d'où il conclut que *finalmente la tardità si conduca a essere infinita, che è quando si finisce l'inclinazione, e s'arriua al piano orizontale* et il suit enfin *che il cadente partendosi dalla quiete, passa per tutti gl' infiniti gradi di tardità* (p. 21). En effet, entre le repos et un degré quelconque de la vitesse se trouve une infinité de degrés de vitesse plus petits, par lesquels le corps passe sans persister en aucun d'eux (p. 14), ce que Galilée explique dans le *Dialogo secondo* en représentant la vitesse et les laps de temps du mouvement par les côtés d'un triangle. *Essendo posto,* dit-il, p. 224, *il termine* A (*fig.* 5) *come momento minimo di velocità, cioè come stato di quiete, e come primo instante del tempo susseguente* AD, *è manifesto che, avanti l'acquisto del grado di velocità* DH *fatto nel tempo* AD, *si è passato per altri infiniti gradi minori e minori guadagnati negli infiniti instanti, che sono nel tempo* DA, *corrispondenti agli infiniti punti, che sono nella linea* DA. *Però per rappresentare la infinità dei grade di velocità, che precedono al grado* DH, *bisogna intendere infinite linee sempre minori e minori che s'intendano tirate dagli* *infiniti punti della linea* DA *parallele alla* DH, *la quale infinità di linee ci rappresenta in ultimo la superficie del triangolo* AHD. *E così intenderemo qualsivoglia spazio passato dal mobile con moto, che, cominciando dalla quiete, si vadia uniformemente accelerando, aver consumato*

Fig. 5.



ed essersi servito di infiniti gradi di velocità crescenti conforme alle infinite linee, che, cominciando dal punto A, *s'intendono tirate parallele alla linea* HD. Toutefois, Galilée maintenait son opinion ancienne ([1]) en niant aussi à présent, comme le firent Mydorge et Descartes ([2]), l'existence d'une vitesse infinie : il énonce l'opinion inexacte que, même dans le vide, la chute ne peut pas durer jusqu'à l'infini, ce qu'il tâche de démontrer aussi (p. 222 et 225-226).

Les opinions de Galilée, telles qu'elles furent publiées en 1632, ne tardèrent pas de mettre les mathématiciens en embarras. En effet, son principe, appliqué au mouvement naturel et disant que les vitesses s'augmentent proportionnellement à la distance du poids au point du départ, semble impossible en ce qu'il en suit que le poids ne peut acquérir une vitesse finie qu'après un laps de temps infini et son principe contredit les conséquences qu'il en veut tirer. La démonstration géométrique de la loi nouvellement publiée et citée plus haut n'est pas trop claire. L'addition des vitesses diverses sans rien de plus pour l'évaluation de l'espace parcouru est permise seulement lorsqu'il s'agit de vitesses moyennes et celles-ci ne sont point représentées par

([1]) *Le Opere di Galileo Galilei*, ed. naz., vol. I, 1890, p. 328 et 411.
([2]) *Voir* ci-avant p. 22-23 et *OEuvres de Descartes*, éd. cit., t. III, 1898, p. 592-593.

les nombres indiqués dans la figure, puisque ces vitesses moyennes devaient être dans chaque intervalle proportionnelles aux termes de la série des nombres impairs 1, 3, 5, 7, etc., ce qui n'a pas lieu. Il est vrai que cette incorrection s'élimine en passant à la limite, mais Galilée s'était abstenu ici de toute explication.

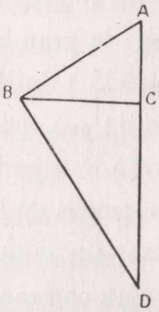
Les géomètres français discutaient bientôt de telles difficultés. Déjà, le 1er novembre 1632, Gassend écrivit de Lyon à Galilée que son exemplaire du *Dialogo*, reçu en octobre par l'intermédiaire de Déodati, était encore le seul que l'on eût à Paris et, au nom de Mersenne, il sollicitait une communication *circa ponderum cadentium inæqualem velocitatem* (1). Vers la même époque, Mersenne interrogea aussi Descartes (2). Un des premiers sans doute, qui s'occupa de l'énigme du degré de vitesse du poids tombant au commencement de sa chute, fut Antoine de Ville, Toulousain de naissance, mais dont nous ignorons s'il avait eu des rapports avec Fermat ou Carcavi, qui était admis conseiller à Toulouse le 20 juillet 1632. Ingénieur militaire au service de la République vénitienne et de grande estime auprès des savants italiens, il adressa le 4 janvier 1633 à Galilée une lettre, dans laquelle il rendait tout au long compte de ses remarques sur le *Dialogo;* en admettant que les corps qui vont à leur perfection (*al suo tutto*) passent de l'état du repos par tous les degrés de tardiveté avant d'acquérir la vitesse, il le nie cependant pour un mouvement retardé (*una sosta*), qui a moins de vitesse à la fin qu'au commencement (3). Aussi Gassend et Boulliaud discutèrent plus d'une fois sur la cause pour laquelle, dans la chute, le mouvement est plus lent au commencement que vers la fin (lettre de Boulliaud à Gassend du 21 juin 1633) (4). Enfin, c'était depuis le commencement de l'année 1634 que Mersenne traitait la question de l'intervalle de temps employé par le corps pendant sa chute jusqu'au centre de la Terre, avec l'astronome belge Wendelin,

(1) Petri Gassendi *Diniensis ecclesicæ præprositi et in Academia Parisiensi Matheseos professoris Epistolæ*, etc., t. VI (Lugduni, 1658), p. 53-54.
(2) *Œuvres de Descartes*, éd. cit., t. I, 1897, p. 261.
(3) *Le Opere di Galileo Galilei*, ed. naz., vol. XIV, 1904, p. 16.
(4) Petri Gassendi, etc., *Epistolæ*, t. VI, 1658, p. 410.

qui trouva pour cet intervalle un laps de temps de 12 minutes au lieu de celui de 6 heures supposé par Galilée et qui assurait encore plus tard à Gassend avoir trouvé la démonstration de la loi des *spatia in ratione duplicata temporum* avant la publication du Maître [1].

En dehors de ces considérations, nous possédons celles de Mersenne, qui rendait compte des démonstrations de Galilée sur le théorème en question dans le *Livre second* de son *Harmonie universelle*, dans lequel il inséra une *Proposition VII* portant le titre de *Expliquer les mouvemens des poids sur les plans inclinez à l'horizon, avec la proportion de leurs vitesses; et déterminer si le poids, qui tombe, passe par tous les degrez possibles de tardiveté* (*p.* 108-112). En effet, en considérant ces plans, « *il est certain que le poids descend d'autant plus lentement que le plan est plus incliné, par exemple il va plus lentement sur* AB (*fig.* 6) *que sur* CA, *de sorte que l'on en peut donner un si peu incliné à l'horizon, que*

Fig. 6.



le mobile ne fera que 15 *pieds de Roy dans un an, ou en cent ans, ou en tant de tems que l'on voudra; ce qui monstre une extrême tardivité* ». Et en rapprochant les énoncés de Galilée sur le moment des graves au long des plans de diverse inclinaison à ses propres expériences, le Minime se met au calcul de l'angle BAC pour quelques exemples, et trouve que ce sont « 4 *dixiesmes et* 21 *onziesmes* [2], *qui donnent*

[1] *De Briefwisseling van Constantijn Huygens uitgegeven door Dr J. Worp*, t. II, 1913, p. 174-175, 455 et 511; t. III, 1914, p. 167, 210, 217-218 et 249. GASSEND, *Epistolæ*, t. VI, 1658, p. 166, 428, 455 et 460.

[2] Subdivisions de la *seconde* et des mots formés de manière analogue.

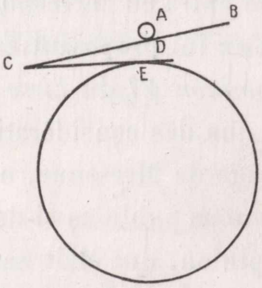
l'inclination du plan AB *sur lequelle le poids estant en* B, *aura acquis une vistesse capable de faire* 30 *pieds en cent ans. Or estant tombé en* C *par la perpendiculaire* AC, *il aura seulement la mesme vitesse; par consequent il passe par tous les degrez de tardivité avant que d'avoir acquis un certain degré de vitesse, attendu que l'on peut encore moins incliner le plan* AB. *Et mesme si l'on prend la vitesse du mobile lorsqu'il est en* E, *que je suppose éloigné de* A *de* 3 *pieds* $\frac{3}{4}$ (*car* AE *est le quart de* AB), *il ne fera* AE *qu'en* 50 *ans et ne fera que* 15 *pieds en cent ans, s'il continue dans cette mesme vitesse, laquelle fera aussi diminuer la vitesse de la cheute perpendiculaire* AC *en mesme proportion* ».

On a vu plus haut que cette partie de l'Ouvrage de Mersenne était achevée d'imprimer en septembre 1635 et que c'était au mois d'avril 1636 que le Minime entra en correspondance avec Fermat par l'intermédiaire de Carcavi en lui proposant entre autres une question qui correspond à la *Proposition VI* du *Livre second* de son *Harmonie universelle*. Mais on verra que des considérations comme celles de la *Proposition VII* de l'Ouvrage de Mersenne, ont été un sujet de discussion dans un écrit que nous publions ci-dessous et dans lequel on défend contre Galilée l'opinion, qui était entre autres aussi celle de Descartes, que le grave possède déjà une vitesse lorsqu'il commence à descendre. L'auteur y ajoute un raisonnement qui a pour but de prouver l'inexactitude de la loi de la chute des graves telle qu'elle était énoncée par le savant de Florence, qui n'avait pas admis la variabilité de l'accélération et celle du poids d'un corps en raison de sa distance au centre de la Terre. En laissant pour le moment les raisons pour lesquelles nous tenons l'écrit pour une communication de Fermat à Mersenne en réponse à des considérations des mathématiciens de Paris, nous ferons sur la loi probable de l'attraction, dont ces variabilités dépendent, les remarques suivantes.

Le postulat de la convergence des actions de la pesanteur vers le centre de la Terre était posé par Archimède comme base de sa doctrine de l'équilibre des corps flottants; mais en étudiant les conditions de l'équilibre du levier, il suppose les lignes de directions de ces actions parallèles entre elles. Au moyen-âge, ce sont, entre autres, Albert de Saxe et Léonard de Vinci qui défendent la doctrine de la convergence de ces lignes et l'on en tire déjà des conséquences pour le poids variable d'un corps : selon Blaise de Parme, l'inclinaison mutuelle des divers poids des parties d'un grave fait que le poids total du grave est d'autant plus petit que le corps est plus voisin du sol (1).

La question se présenta à Cardan à plus d'une reprise. Dans l'Ouvrage des proportions, qu'il publia dans sa vieillesse, il l'applique à la chute d'un corps au long des plans inclinés, qui peuvent avoir une inclinaison si petite que le point C (*fig.* 7) a plus de distance au centre

Fig. 7.



de la Terre que le point D et néanmoins le corps pesant *feretur ex* D *in* C *motu naturali, ut demonstratum est, ergo per purum motum naturalem poterit* A *removeri a centro mundi. Hoc volui proponere, ut intelligeres in plano vero* CE *non moveri a sponte, quia* C *necessario altior est* D; *si ergo movebitur, non erit* CE *recta, sed pars proportionis circuli superficiei Terræ, quæ sensu a recta distingui non poterit* (2). D'ailleurs, ayant traité déjà autrefois, dans son ouvrage *De subtilitate*, paru en 1552, de la fameuse question « un levier, qui a les deux bras AM, MB et aussi les poids égaux, retourne-t-il à sa position horizontale après avoir été touché en B (3)? », il conclut qu'un corps pèse d'au-

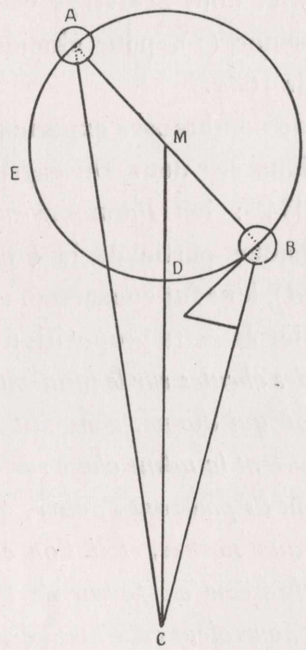
(1) Duhem, *Les origines de la Statique*, t. I (Paris, 1905), p. 150-151; t. II, 1906, p. 56, 58, 81-84 et 174.

(2) *Opus novum de proportionibus*, etc. (Bas., 1570), p. 85.

(3) *De Subtilitate*, éd. de Lyon, 1580, p. 37 et suiv.

tant plus qu'il se trouve plus proche du centre de la Terre (1). A cet égard le raisonnement de Guidobaldo del Monte était le suivant : Soient C (*fig.* 8) le centre de la Terre, AC et BC les lignes convergentes de

Fig. 8.



direction, l'angle CBD — dit-il (2) — sera plus petit que l'angle CAE, donc la chûte de B par BD sera moins oblique que celle de A par AE et par conséquent le poids en B pèsera plus que celui en A, ce qui est contraire aux opinions de Jordan de Nemore et de Tartaglia (*quod est penitus oppositum eius, quod ipsi ostendere conati sunt*). Toutefois l'opinion de ceux-ci fut défendue à nouveau par Benedetti qui disait que le poids d'un corps ne varie pas en raison inverse, mais en raison directe de sa distance au centre de la Terre.

Ces réflexions étaient d'ailleurs connues en France du moins, depuis l'année 1626, lorsque Mersenne y consacra une partie de sa *Synopsis*

(1) *Opus novum*, etc. (Bas., 1570), p. 103-104.
(2) *Mechanicorum Liber* (Pisauri, 1577), f° 19 verso.

mathematica (1). Or, Galilée ayant négligé dans ses propositions sur le plan incliné la convergence des lignes de direction telle qu'il l'admettait dans son étude sur la spirale, et n'ayant point admis la variabilité de l'accélération aussi hors de la Terre, on reprit la doctrine de Guidobaldo del Monte, dont l'Ouvrage est cité plus d'une fois à cette époque par Mersenne (2), pour élucider la théorie du Maître émise dans le *Dialogo* de 1632.

On retrouve le récit de nombreuses expériences sur le plan incliné faites par Mersenne, dans ses deux Ouvrages, dont les manuscrits étaient achevés en 1634 : les *Harmonicorum libri* et l'*Harmonie universelle*, dont une bonne partie de la *Proposition VII* déjà citée (108-112 du *Livre second*), leur fut consacrée. « *Je doute* » — ajouta-t-il dans le Corollaire premier de cette proposition — « *que le Sieur* Galilée *ayt fait les expériences des cheutes sur le plan puisqu'il n'en parle nullement, et que la proportion qui donne, contredit souvent l'expérience; et désire que plusieurs esprouvent la même chose sur des plans différens avec toutes les précautions, dont ils pourront s'aviser, afin qu'ils voyent si leurs expériences respondront aux nostres, et si l'on en pourra tirer assez de lumière pour faire un théorème en faveur de la vitesse de ces cheutes obliques, dont les vitesses pourroient estre mesurées par les differens effets du poids, qui frappera dautant plus fort que le plan sera moins incliné sur l'horizon, et qu'il approchera davantage de la ligne perpendiculaire* » ; et dans le Corollaire second : « *Ceux qui ont veu nos expériences et qui y ont aidé, sçavent que l'on n'y peut proceder avec plus de justesse, soit pour le plan qui est bien droit et bien poli, et qui contraint le mobile de descendre droit, ou pour la rondeur, et la pesanteur des boulets et pour les cheutes; d'où l'on peut conclure que l'expérience n'est pas capable d'engendrer une science, et qu'il ne se faut pas trop fier au seul raisonnement, puisqu'il ne respond pas toujours à la vérité des apparences, dont il s'éloigne bien souvent. Ce qui n'empêchera pas que je ne parle du plan*

(1) Duhem, *op. cit.*, t. I, 1905, p. 295-299; t. II, 1906, p. 123 et suiv.

(2) *Les questions théologiques, physiques*, etc. Paris, 1634), et *Les Méchaniques de Galilée* (*Ibid.*, 1634).

également incliné, tel qu'il doit estre, afin que les corps pesans le pressent et pèsent également sur chacun de ses points. » En effet, Mersenne relève dans les *Propositions VIII* et *IX* de ces deux Ouvrages l'application de la théorie de la convergence des lignes de direction au plan incliné et détermine aussi (*Harmonie universelle*, Livre second, Prop. IX, p. 119-121; *Harmonicorum libri*, Præfatio, *Propositio* IV) la forme du plan également incliné, c'est-à-dire de la ligne qui coupe les lignes de direction convergentes sous des angles égaux; et c'est dans cette première construction de la spirale logarithmique qu'il déclare *qu'un poids se mouveroit perpétuellement par ce plan également incliné sans pouvoir jamais arriver au centre de la Terre, autour duquel le plan torneroit toujours sans y arriver; et conséquemment que ce plan ne se rencontre en nul lieu de la nature, qui ne fait rien en vain, et qui donne un terme ou un centre à chaque chose* » (¹).

C'est depuis cette époque que la doctrine de la convergence des lignes de direction allait jouer, avec celle de la pesanteur qui s'y rattache, un rôle essentiel dans le développement de la Statique, en provoquant chez les savants français d'importantes découvertes.

Son application à la question géostatique fut rendue fameuse par Beaugrand, secrétaire du roi à Paris. Dans l'automne de l'année 1635, visitant, comme Carcavi, Galilée à Arcetri, Cavalieri à Bologne, Castelli à Rome, il leur communique son idée que l'attraction est proportionnelle à la distance des corps au centre de la Terre, qu'un corps pèse d'autant moins qu'il se trouve plus proche de ce centre et que le centre de gravité a dans le corps un lieu variable, opinions qui furent partagées aussi par Cavalieri et par Castelli (²). De même Fermat, l'ami intime de Beaugrand, se montra partisan de ces idées, comme il

(¹) Descartes était moins heureux dans sa réplique aux assertions de Mersenne sur la courbe (*Œuvres de Descartes*, éd. cit., t. I, 1897, p. 439, 446-447; t. II, 1898, p. 233, 360 et 390).

(²) *Voir* sur la communication de ces idées par Beaugrand à Galilée et Castelli sa lettre à Galilée du 3 novembre 1635 (*Le Opere di Galileo Galilei*, ed. naz., vol. XVI, 1905, p. 336-337), la lettre de Castelli à Galilée du 30 novembre 1635 avec une démonstration apparaît de la correspondance qu'il engagea avec les mathématiciens de Paris, depuis le mois d'avril 1636, par l'intermédiaire de Carcavi; toutefois non sans que le géomètre de Toulouse critiquât, avec Desargues et Guy de la Brosse, la manière dont Beaugrand avait défendu ses opinions dans un opuscule qui parut à Paris en mai 1636 (1).

Les propositions de Fermat nous sont conservées dans un écrit qu'il joignit à une lettre à Carcavi, aujourd'hui perdue, et dans un second écrit envoyé à Carcavi aussi, par l'intermédiaire de Mersenne. C'est dans ce second écrit, ainsi que dans la lettre ajoutée du 24 juin 1636 à Mersenne, que Fermat nous apprend (t. II, 1894, p. 19 et 23), qu'il soupçonnait depuis longtemps Archimède de n'avoir pas apporté toute la précision désirable dans l'étude des Mécaniques; se souvenant sans doute des expressions de Guidobaldo del Monte (2), dont l'ouvrage est cité à la fin du second écrit latin, Fermat y admet que la descente des graves par des lignes parallèles est vérifiée sensiblement dans l'expérience courante, à cause de la grande distance du centre de la Terre ; « *mais il y a plaisir à chercher les vérités les plus menues et les plus subtiles et d'ôter toutes les ambiguïtés qui pourraient survenir* » (*Ibid.*, p. 19). En effet les deux écrits de Fermat reçurent un bon accueil de Castelli, auquel ils furent envoyés aussi par Carcavi (3); mais, depuis le mois de juillet 1636, une vive polémique éclata entre Fermat d'un côté, et Etienne Pascal et Roberval de l'autre, à propos des dé-

par Beaugrand lui-même (*op. cit.*, p. 351-354); les lettres de Cavalieri à Castelli du 19 décembre 1635 (CH. HENRY, article cité à la page 12 ci-avant la note 1, p. 16-17) et Rocca du 30 décembre 1635 (*Le Opere di Galileo Galilei*, ed. naz., vol. XVI, 1905, p. 368); enfin le jugement de Magiotti (*Ibid.*. p. 382-384).

(1) *Voir* d'ailleurs sur les idées de Beaugrand et l'accueil qui leur fut fait par les géomètres français : *Œuvres de Descartes*, éd. cit., t. II, 1898, p. 645-647; DUHEM, *op. cit.*, t. II, 1906, p. 156 et suiv., et *Le Opere di Galileo Galilei*, ed. naz., vol. XVII, 1906, p. 110.

(2) *Nisi fortasse dixerint* — celui-ci ajouta à l'exposé de la doctrine de la convergence des lignes de direction — *hæc omnia propter maximam a centro mundi usque ad nos distantiam, adeo insensibilem esse, ut propter insensibilitatem tanquam vera supponi possint* [*Mechanicorum liber* (Pisauri, 1577), f° 15 verso].

(3) C'était à celui-ci sans doute que s'adressait la lettre de Castelli insérée dans les *Œuvres de Fermat*, éd. cit., t. II, 1894, p. 26.

monstrations mécaniques de Fermat (1), polémique à laquelle prit part aussi Mersenne (2), et, depuis l'année 1638, Descartes, soit dans des lettres, soit dans diverses recherches spéciales sur la question de *Sçavoir si un corps pèse plus ou moins, estant proche du centre de la Terre qu'en estant éloigné,* dans lesquelles il conclut à la variabilité du lieu du centre de gravité et revient à la proportionnalité en raison inverse du poids avec la distance au centre, énoncée autrefois par le marquis del Monte (3).

Dans sa lettre à Mersenne du 24 juin 1636 (t. II, 1894, p. 20), Fermat conclut : « *Je vous prie de relire ma proposition des graves et de m'en dire votre avis* », faisant ainsi allusion à une proposition jusqu'ici inconnue. Et à la réception de l'Ouvrage mécanique de Roberval, inséré par Mersenne dans son *Harmonie universelle*, il répondit au géomètre de Paris en août 1636 : « *Vous m'accorderez que ce mouvement sur les plans inclinés se peut prouver encore plus précisément* » (t. II, 1894, p. 35).

C'est que Fermat peut très bien avoir eu en vue par ces expressions le travail, jusqu'à présent inédit, que nous faisons suivre ci-après, également d'après une copie de la Bibliothèque nationale de Florence, écrite de la même main inconnue que le document précédent. La suscription de celui-ci que nous avons attribuée à Carcavi (ci-avant, p. 19) concerne sans doute le présent écrit, qui en est une suite naturelle et qui peut donc être daté de la même époque. Et d'ailleurs, les documents que nous reproduisons (IV, lettres 1-5) nous fourniront la preuve décisive que ce travail, qui ne porte ni date, ni nom d'auteur, est réellement dû à Fermat qui d'ailleurs l'avait

(1) *Voir* pour ses démonstrations, en dehors de la correspondance citée, Duhem, *op. cit.*, t. II, 1906, p. 159-178, et les *Œuvres de Blaise Pascal*, éd. Brunsvicg, Boutroux et Gazier, t. I (Paris, 1908), p. 169-193.

(2) *Harmonie universelle*, seconde Partie (Paris, 1637), Livre VIII, Prop. 18, p. 63, et *Nouvelles observations phys. et math.*, à la fin de la partie seconde (5e *observation*, p. 17).

(3) *Œuvres de Descartes*, éd. cit., t. I, 1897, p. 416-447 ; t. II, 1898, p. 182-189, 222 et suiv., 227-228, 238 suiv., 242 suiv., 270 et 448-449.

communiqué vers l'époque indiquée à Carcavi seul, sans le vouloir livrer à la divulgation (*cfr*, p. 48 ci-après).

De lineâ seu Helice quam describit grave naturaliter descendens secundum proportionem motûs a Galilæo assignatam (1), a nobis multa probata sunt (2); sed quia accuratius perpendenti hæc proportio gravium naturaliter descendentium non satis patet, immo geometricis demonstrationibus repugnare videtur, aliquam in experiendo fallaciam irrepsisse facile crediderim. Quis autem rationem sensibus non prætulerit?

Propositionem geometricam huic experientiæ repugnantem (et si hæc non placeat aliam dabimus) præmisso postulato construemus.

Postulatum hoc sit : *Nullum motum fieri absque celeritate aliquâ corporis moti.*

Quiescat enim in 1ª figura corpus A. Si celeritas, vel a se, hoc est a pondere suo, vel a vi magnetica Telluris quæ ipsum attrahat (3), vel a quâcumque aliâ vi esternâ non mutuetur, nunquam movebitur.

Moveatur enim, si fieri potest, a puncto A in punctum B.

Existimat Galilæus corpus A nullam celeritatem in puncto A habere; acquiri tamen ipsi dum movetur.

(1) *Voir* le Document I ci-avant.

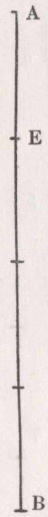
(2) Fermat parle de ses expériences mécaniques dans ses lettres à Pascal, Roberval et Mersenne de 1636 (*Œuvres*, éd. cit., t. II, 1894, p. 55 et 58).

(3) L'assimilation de la Terre à un aimant était en vogue depuis la publication de l'Ouvrage de Gilbert : *de Magnete magnetisque corporibus et de magno magnete Telluris* (Londini, 1600), cité par Galilée dans le *Dialogo*, éd. de 1632, p. 393 et suiv., et par Fermat dans son écrit latin du 24 juin 1636 (t. II, 1894, p. 24). Dans leur longue lettre à Fermat du 16 août 1636, Etienne Pascal et Roberval ont discuté tout au long les trois causes possibles de la pesanteur et leurs conséquences différentes (t. II, 1894, p. 37-41; *voir* d'ailleurs les *Œuvres de Descartes*, éd. cit., t. II, 1898, p. 224; et Duhem, *op. cit.*, *t.* II, 1906, p. 169 et suiv.).

Igitur aut in primo jnstanti acquiritur ipsi velocitas sive celeritas, aut in determinato tempore, verbi gratiâ cùm est in B.

Si in primo instanti acquiritur ipsi celeritas, ergo cùm incipit moveri, habet celeritatem. Est enim instans jndivisibilis. Hoc autem est ex nostrâ sententiâ et contra Galilæum.

Fig. 9.
Prima figura.



Superest igitur, ut dicat Galilæus, celeritatem acquiri in certo tempore, verbi gratiâ cùm est in B. Quod non videtur admittendum (quæ enim ratio cur potius in B quam in E aut alio puncto incipiat celeritas?). Hoc autem ex ipso Galilæo implicat contradictionem : fiat BE tripla EA, celeritas corporis A cùm est in B, est dupla celeritatis eiusdem corporis A cùm est in E ex Galilæo; igitur A in E habet celeritatem contra positiones.

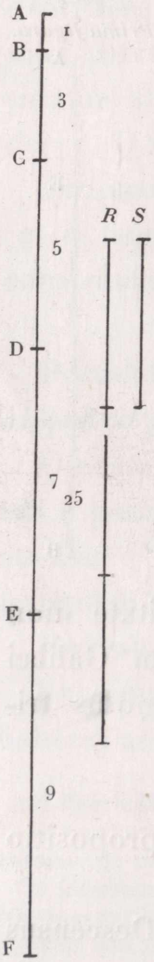
Quia ergo in certo tempore acquiri corpori descendenti celeritatem non est admittendum, ut iam diximus (et patet quia motus sine celeritate non fit), superest et ad tuendam tum veritatem, tum Galilæi sententiam, ut celeritatem corpori in principio motûs tribuamus.

Hoc posito non videtur nobis posse constare propositio Galilæi.

Exponatur in 2ª figura recta descensûs AF. Descensus gravis naturaliter descendentis ab A in F, fiat in tempore *S*. Grave idem, si uniformi celeritate (eâ videlicet quam possidet in principio motûs) descenderet ab A in F, maius tempus absumeret in descensu. Fiat igitur hic motus uniformis in tempore R et sit R ad S proportio tripla, verbi gratiâ (de quâlibet enim demonstratio concludet).

Inveniatur numerus quadratus cuius ad suum latus proportio sit maior proportione R ad S, verbi gratiâ 25. Exponantur tot numeri impares ab unitate quot quadratum 25 constituunt : 1, 3, 5, 7, 9, et recta AF in portiones AB, BC, CD, DE, EF dividatur, quæ proportionem servent numerorum 1, 3, 5, 7, 9. Recta igitur AB vigetiesquinque in tota AF continetur.

Fig. 10.
2a *figura.*



Tempus autem motûs uniformis ab A in B est maius tempore motûs naturalis ab A in B et

ut AF ad AB ita tempus motûs uniformis ab A ad F
ad tempus eiusdem motûs uniformis ab A ad B;

ergo maior est proportio temporis motûs uniformis ab A ad F ad tempus motûs naturalis ab A ad B quàm AF ad AB, hoc est quàm 25 ad 1. Est autem

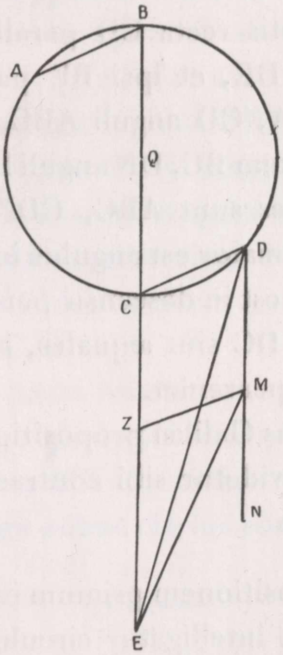
ut tempus motûs naturalis ab A ad B
ad tempus motûs naturalis ab A ad F ita 1 ad 5,

si vera sit propositio Galilæi. Ergo ex æquali maior est proportio temporis motûs uniformis ab A ad F ad tempus motûs naturalis ab A ad F quàm 25 ad 5. Est autem 25 ad 5 maior quam R ad S; longè igitur maior erit proportio temporis motûs uniformis ab A ad F ad tempus motûs naturalis ab A ad F quàm R ad S. Ponebatur tamen æqualis; non potest igitur constare hæc a Galilæo propositio.

Hisce demonstratis superest nobis alia eiusdem Galilæi quæstio excutienda *de motu gravium in planis inclinatis* [1], miro certe ingenii acumine, ut et cætera eius inventa, ab eo excogitata. Sed quod ab eo satis attente considerata non sit, hæc nos movent ut credamus quæ locum habebunt, licet subsisteret proportio accelerationis in descensu gravium ab eo assignata.

Fig. 11.

3ª *figura*.



Exponatur in 3ª figura circulus ACD cuius diameter BC ad centrum Terræ E dirigatur; ducatur utcumque recta BA. Existimat Galilæus grave a puncto B naturaliter descendens, quo tempore percurrit diametrum BC, eodem tempore in plano inclinato percurrere rectam BA et hæc ipsius propositio

(1) Comp. la suscription ajoutée à la copie de notre premier document (ci-avant, p. 19).

refertur pag. 18 in *Dialogis* Ital. (1). Exponatur deinde in eâdem figurâ recta CD, utcumque ducta; idem Galilæus existimat grave a puncto B naturaliter descendens quo tempore percurrit diametrum BC, eodem in plano inclinato percurrere rectam DC, et hæc ipsius sententia ab eodem refertur pag. 445 eiusdem libri (2).

Et primò quidem videntur hæ duæ propositiones se invicem destruere.

Nam sit verbi gratiâ recta CD parallela ideoque æqualis rectæ BA; iungatur DE, et ipsi BE parallela ducatur DN. Propter parallelas BA, CD anguli ABC, BCD sunt æquales; propter parallelas autem BC, DN anguli BCD, CDN sunt etiam æquales, ergo æquales sunt ABC, CDN. Maior igitur ABC quàm CDE. Sed quo maior est angulus inclinationis ad lineam directionis, eo minor est in descensu per plana inclinata velocitas. Ergo cùm BA, DC sint æquales, citiùs idem grave à D ad C, quàm à B ad A perveniet.

Patet igitur duas has Galilæi propositiones non posse simul esse veras; ideoque videtur sibi contradicere quod et etiam veritati.

Posteriorem propositionem primum ita subvertimus.

In eadem 3a figura intelligatur circulus una cum rectâ CD centro appropinquasse. Et sit punctum C in Z, recta CD in ZM; iungatur ME. Certum est, et ab eodem Galilæo usurpatur pag. 218 et 219 eiusdem libri, grave naturaliter descendens per lineam directionis ab initio descensûs idem spacium eodem

(1) Galilée ne donna la démonstration de cette assertion que plus tard dans les *Discorsi* (éd. de 1638), p. 180 et suiv.

(2) On trouve le théorème mentionné dans la *Giornata quarta* du *Dialogo* sous le titre des *Problemi maravigliosi di mobili discendenti per una quarta di cerchio, e dei discendenti per tutte le corde di tutto il cerchio*. Mersenne avait traité cette question dans le *Livre second* de son *Harmonie universelle* (Paris, 1636), p. 221 et suiv.

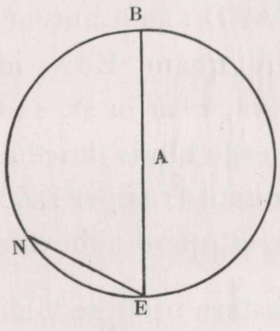
tempore percurrere, sive sit proximum centro terræ, sive ab eo distans.

Sit igitur punctum B in hoc novo situ in puncto Q. Hoc supposito, si verum sit quo tempore grave à puncto B descendit ad C, eodem à puncto D descendere ad punctum C, et quo tempore à Q descendit ad Z, eodem ab M descendere ad Z, ergo, cùm à puncto B ad C eodem tempore descendat quo à puncto Q ad Z (supponendo B et Q initia motuum), igitur à puncto D ad C eodem tempore descendet quo à puncto M ad punctum Z. Propter parallelas autem anguli ZMN, CDM sunt æquales; maior autem angulus EMN angulo EDM, minor igitur angulus ZME angulo CDE. Ideoque grave in puncto M super rectam MZ citiùs descendet quàm super rectam DC quia in hoc casu propius est lineæ directionis. Cùm igitur rectæ DC, MZ sint æquales, citiùs idem grave a puncto M perveniet ad Z quàm à puncto D ad C.

Non videtur igitur posse constare posterior propositio Galilæi. Unde patet *quo propius circulus appropinquat centro*, *eò citiùs grave per lineam* DC *ad punctum* C *perventurum*.

Quod 4ª figura longè adhuc clarius confirmat, in quâ sit cen-

Fig. 12.
4ª *figura.*



trum Terræ E in extremitate diametri et fiat AE æqualis NE. Grave in puncto N constitutum in hoc casu descendens per rectam NE, descendit per lineam directionis. Ergo si descendat à puncto A, ad centrum eodem tempore perveniet quo à puncto N; igitur citiùs quàm si a puncto B descenderet.

Sed hæc non evertunt primam Galilæi propositionem. Immo videtur sane nullum ex eâ absurdum sequi, quia, verbi gratiâ, in 3ª figura angulus ABC inclinatione, sive appropinquet circulus centro Terræ sive ab eodem removeatur, idem permanet.

Eius tamen propositionis errorem 5° diagrammate subtilius investigamus.

Fiat constructio circuli NM, centrum Terræ sit E; recta utcumque NM, secta in B; eique parallela utcumque ADZ; fiat et recta AD æqualis NB. Iungantur BE, DE et sit AZ æqualis NM.

Cùm propter parallelas anguli MNE, ZAE sint æquales, ergo, si vera sit propositio Galilæi primo loco posita, eâdem quâ iam usi sumus argumentatione, probabimus, circulo moto, eo tempore quo grave ab N descendit ad M, eodem ab A descendere ad Z; et quo descendit ab N ad B, eodem descendere ab A ad D. Probabimus etiam grave in D, ab A perveniens, esse eiusdem velocitatis atque à puncto N ad punctum B perveniens. Sed ex constructione patet angulum BEN minorem esse angulo AED : sunt autem æquales DAE, BNE, ergo minor est EDA quàm EBN, ideoque ZDE maior quàm MBE. Igitur grave, cùm in D, ex Galilæo, eiusdem sit velocitatis atque in B, ergo citius descendet à puncto B super rectam BM quàm à puncto D super DZ. Ideoque rectam NM citius quàm AE percurret, quod mihi videtur absurdum.

Ergo non potest constare utraque Galilæi propositio.

Si demonstrationem exactissimam requiras secandæ erunt rectæ NM, AZ in partes quotcumque æquales, nam semper accidet mutari angulus inclinationum. Et si *sextam* figuram construas eodem raticinio concludes *in primo Galilæi casu, quo propior fit centro terræ circulus, eò motum per planum*

Fig. 13.

5ª *figura.*

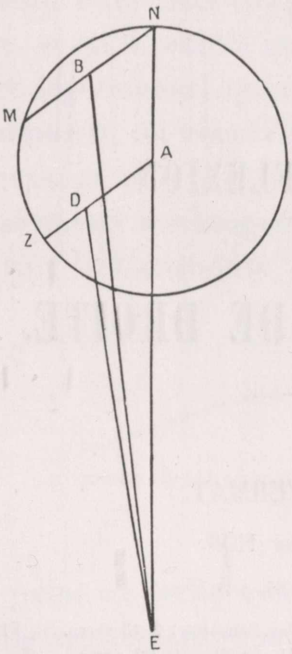
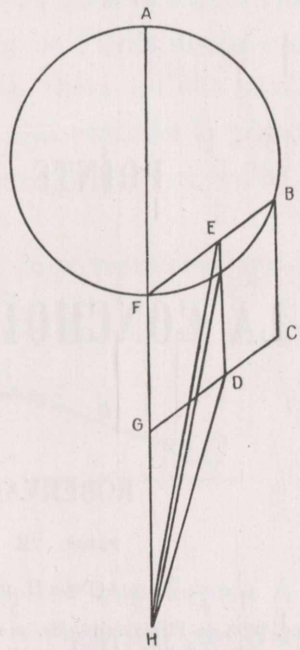


Fig. 14.

6ª *figura.*



inclinatum fieri tardiorem; in secundo, quo propior fit centro terræ circulus, eò motum per planum inclinatum fieri citiorem, quæ res non vacat admiratione.

Omittimus Galilæum supposuisse in plano horizontali nullum fieri motum, cùm tamen unicum sit punctum in quo grave in quolibet plano quiescit (1).

(1) *Voir*, pour le mouvement d'un point sur le plan horizontal, l'explication de Cardan, ci-avant, p. 30. Fermat en a traité dans un écrit latin de décembre 1636 (t. II, p. 88-89, *cf.* p. 91). *Voir* aussi DUHEM, *op. cit.*, t. I, 1904, p. 185, 186, 215 et 225; t. II, 1906, p. 77, 84, 119, 124-125 et 177. En effet il n'y a de vraie horizontale, ou ligne normale à la direction de la pesanteur, que le cercle.