

ANNÉE 1638.

V.

MÉTHODE DE MAXIMIS ET MINIMIS.

Inédit de Fermat (Tome I, p. 140-147.)

[Groningue, Bibl. de l'Université, Ms. 110 (Collection van Schooten) f^o 7 verso-9 verso.
— Florence, Bibl. Naz., Mss. Galileiani, *Discepoli*, vol. CIII, f^o 85-verso-88 recto.]

Aussitôt après que les deux écrits les plus anciens de Fermat sur sa méthode de maximis et minimis et la construction des tangentes aux courbes planes que nous connaissons (t. I, 1891, p. 133-134 et 134-136) furent remis, à la fin de l'année 1637, par Carcavi à Mersenne, pour les envoyer à Descartes en Hollande (*Œuvres de Descartes*, éd. cit., t. I, 1897, p. 483), cette méthode devint le sujet de discussions entre le philosophe et Roberval, qui soutenait avec Étienne Pascal le parti de Fermat. Une copie de l'écrit du dernier sur l'application de sa méthode à la détermination des centres de gravité (t. I, 1891, p. 136-139) ne parvint à Roberval qu'au mois de février 1638 (t. II, 1894, p. 133-134). Ce n'est qu'à une époque un peu postérieure que nous croyons pouvoir fixer la date du présent écrit, dont la date et le destinataire ne sont pas connus d'ailleurs. En effet, les trois écrits cités y sont mentionnés en des termes qui indiquent que leur envoi à Paris était récent (1). D'ailleurs, un exposé postérieur de la méthode, comme celui envoyé par Fermat à Paris en juin 1638 (t. II, 1894,

(1) Voir ci-après p. 74, la note 2, et p. 83, la note 2.

p. 154-162), n'y est pas encore mentionné. Quant au destinataire, il n'apparaît pas que le présent écrit ait rendu service à Roberval et à Étienne Pascal dans leurs débats de cette année avec Descartes. Toutefois il résulte, de la citation des trois écrits précédents, qu'il faut chercher le destinataire parmi les curieux dans le voisinage immédiat des deux géomètres nommés. C'est ainsi qu'on pourrait penser à Mydorge ou à Desargues (*cf.* t. II, p. 133), après qu'il avait tâché, par sa lettre à Mersenne du 4 avril 1638 (¹), de concilier les vues différentes sur le problème de la construction des tangentes; ou bien à Hardy ou à Debeaune, quoique ce dernier ne fût mis au courant de la méthode de Fermat que dans l'automne de 1638 (*voir ci-après*, p. 101).

De l'écrit suivant on ne connaît jusqu'ici que le texte latin, qui a été imprimé dans l'édition des *Œuvres de Fermat* de 1679 (p. 66-69), et auquel manque aussi toute la fin de la pièce. Il y fut inséré ainsi, sans doute d'après le vœu de Fermat (*voir* l'Introduction, p. XIX), et reproduit tome I, 1891, p. 140-147. Comme dans les éditions, ce travail fait aussi dans les deux recueils manuscrits une suite immédiate aux trois anciens écrits de Fermat sur la même question, portant ici le titre de *Touchant la mesme méthode* (²). Notons enfin que le manuscrit de Groningue a adopté entièrement la notation soi-disant cartésienne, même pour le signe d'égalité, tandis que celui de Florence a adopté la notation cartésienne seulement pour les exposants, en conservant du reste (lettres majuscules pour les *notes*, les produits indiqués par *in* et les coefficients non au commencement des termes, mais chacun à la place qui lui convient directement) celle

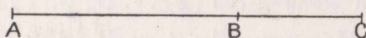
(¹) *Œuvres de Descartes*, éd. cit., t. XI, 1909, p. VII des *Errata* à la fin du volume; *Œuvres de Fermat*, éd. cit., t. IV, 1912, p. 47 et l'*Analyse d'autographes et d'autres écrits de Girard Desargues* (1593-1662) par H. BROCARD (Bar-le-Duc, 1913), p. 16.

(²) « Tous les opuscules de Fermat, — est-il dit (t. I, Introduction, p. XXXIII) — « étant en latin, un écrit de lui en français appartient nécessairement à sa correspondance ». On peut donc se demander si l'écrit présent devrait garder sa place parmi les écrits proprement dits de Fermat.

de Viète, dont s'est servi Fermat et que nous reproduisons dans le texte suivant.

Je veux par ma méthode *couper la ligne AC (fig. 18) donnée en telle sorte au point B, que le solide compris sous le quarré*

Fig. 18.



de AB et la ligne BC soit le plus grand de tous les solides décrits de mesme sorte, en coupant AC en quelque autre point que ce soit (1).

Posons en notes que la ligne AC s'appelle *B* et la ligne AB inconnue *A*, BC sera *B - A*. Il faudra donc que le solide *Aq. in B - Ac.* satisfasse à la question.

Prenons derechef au lieu de *A*, *A + E*; le solide qui se fera du quarré de *A + E* et de *B - A - E* sera :

$$\begin{aligned} & B \text{ in } Aq. + B \text{ in } Eq. + B \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis} \\ & - Ac. - A \text{ in } Eq. \text{ ter} - Aq. \text{ in } E \text{ ter} - Ec. \end{aligned}$$

Je le compare avec le premier solide

$$Aq. \text{ in } B - Ac.,$$

comme s'ils estoient esgaux, bien qu'en effect ils ne le soient pas, et j'ay appellé en mon escrit latin (2) cette sorte de comparaison *adæqualitatem* comme Diophante l'appelle, car le mot grec παρισότης dont il se sert, peut estre ainsy traduit (3). Cela fait de ces deux solides, j'en oste ce qu'ils ont de commun, qui est

$$B \text{ in } Aq. - Ac.;$$

(1) Fermat a traité le même exemple au lieu reproduit, t. I, p. 149 et ci-après, p. 123.

(2) La *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (t. I, p. 133-134), qui était en mains des géomètres de Paris, du moins à la fin de 1637.

(3) Voir tome II, p. 133, note 2.

après quoy il ne reste rien plus d'un costé; et de l'autre il reste

$$B \text{ in } Eq. + B \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis} - A \text{ in } Eq. \text{ ter} - Aq. \text{ in } E \text{ ter} - Ec.$$

Il faut donc comparer les homogènes qui sont marqués du signe + avec ceux qui sont marqués du signe —, et faire derechef comparaison *adæqualitatem* (1) entre

$$B \text{ in } Eq. + B \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis} \quad \text{d'un costé,}$$

et

$$A \text{ in } Eq. \text{ ter} + Aq. \text{ in } E \text{ ter} + Ec. \quad \text{de l'autre.}$$

Diuisons le tout par E ; la comparaison *adæqualitatem* sera entre

$$B \text{ in } E + B \text{ in } A \text{ bis} \quad \text{et} \quad A \text{ in } E \text{ ter} + Aq. \text{ ter} + Eq.$$

Cette diuision estant faite, si tous les homogènes sont diuisibles par E , il faudra derechef faire la diuision par E , iusques à ce qu'il se treuve quelqu'un des homogènes qui ne puisse pas estre diuisé par E , c'est-à-dire, à parler comme Viète (2), *quod non adficiatur ab E*. Mais parce qu'en nostre exemple nous treuons que la diuision ne se peut pas plus refaire, il en faut demeurer là.

Cela fait, i'efface de tous les deux costéz tous les homogènes *quæ adficiuntur ab E*; reste

$$\text{d'un costé} \quad B \text{ in } A \text{ bis,} \quad \text{et de l'autre} \quad Aq. \text{ ter,}$$

entre lesquels il ne faut plus faire, comme auparavant, des comparaisons feintes et *adæquales*, mais une vraie équation. Diuisons le tout par A , donc

$$B \text{ bis} \quad \text{sera égal à} \quad A \text{ ter}$$

(1) Le texte latin présente ici et trois lignes après une difficulté, qui est soulevée par la rédaction française (t. I, p. 141, note 1).

(2) Voir tome I, p. 141, note 2.

et

B sera à A comme 3 à 2.

Reuenons à nostre question et diuison AC au point B en sorte que

AC soit à AB comme 3 à 2,

ie dis que le solide du quarré AB en BC sera le plus grand de tous ceux qui peuvent semblablement estre descris sur la ligne AC en quelque autre section que ce soit.

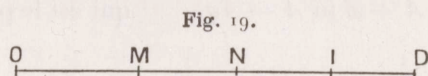
Affin de faire connoistre la certitude de cette méthode, ie prendray un exemple tiré du liure d'Apollonius *De determinata sectione*, lequel au rapport de Pappus au commencement de son 7^{me} liure *difficiles determinationes habebat* ⁽¹⁾, et ie pense que celle qui suit est une des plus difficiles; elle est supposée comme trouuée dans le 7^{me} liure de Pappus, car il ne démontre pas qu'elle soit uraye, mais la supposant telle, il en tire d'autres conséquences. C'est en ce lieu que Pappus appelle *minimam proportionem μοναχὸν καὶ ἐλάχιστον, minimam et singularem*. De quoy la rayson est qu'à proposer la question en grandeurs données, il y a tousiours deux endroits qui satisfont à la question; au plus petit ou au plus grand terme, il n'y a qu'un seul endroit qui satisface à la question. C'est pourquoy Pappus appelle *minimam et singularem*, c'est-à-dire *unique*, la moindre proportion de toutes celles qui peuvent estre mises en question. Commandin en ce lieu est en peine *quid per μοναχὸς intelligat Pappus* ⁽²⁾; ie crois peut estre que uoiant le mot de *moine* conioint avec celui de *minime*, il songeoit à l'ordre du Père Mersenne. Quoy qu'il en

(1) Voir, t. I, p. 142, note 1.

(2) Voir ce qu'il est dit par Fermat sur ce sujet dans l'écrit que nous donnons ci-après, p. 122 et d'ailleurs t. I, p. 142, note 2.

soit, il n'a pas ueu la verité que ie viens d'expliquer. Mais voicy la proposition :

Soit la droite donnée OMID (*fig. 19*), et en icelle les



4 points O, M, I, D donnés. Il faut diuiser la portion MI au point N en telle sorte que le rectangle OND soit au rectangle MNI en proportion moindre que celle d'aucun rectangle pareil à OND, à quelque autre pareil à MNI.

Supposons en notes que la ligne OM donnée s'appelle *B*, la ligne DM donnée s'appelle *Z* et MI donnée *G*. Feignons maintenant que MN que nous cerchons s'appelle *A*; donc le rectangle OND en notes sera

$$B \text{ in } Z - B \text{ in } A + Z \text{ in } A - Aq.,$$

et le rectangle MNI en notes sera

$$G \text{ in } A - Aq.$$

Il faut donc faire que la proportion de

$$B \text{ in } Z - B \text{ in } A + Z \text{ in } A - Aq. \quad \text{à} \quad G \text{ in } A - Aq.$$

soit la moindre proportion de toutes celles qui se peuvent faire par quelque autre diuision que ce soit de la ligne MI.

Prenons derechef au lieu de *A*, *A + E*, nous aurons maintenant la proportion de

$$B \text{ in } Z - B \text{ in } A - B \text{ in } E + Z \text{ in } A + Z \text{ in } E - Aq. - Eq. - A \text{ in } E \text{ bis}$$

à

$$G \text{ in } A + G \text{ in } E - Aq. - Eq. - A \text{ in } E \text{ bis},$$

qu'il faudra comparer avec la première *per adaequalitatem*,

c'est à dire multiplier le premier terme par le quatriesme d'un costé et le second par le troisieme de l'autre. Et comparant ensemble ces deux produits, le produict de

$$B \text{ in } Z - B \text{ in } A + Z \text{ in } A - Aq., \quad \text{qui est le premier terme,}$$

par

$$G \text{ in } A + G \text{ in } E - Aq. - Eq. - A \text{ in } E \text{ bis,} \quad \text{qui est le quatriesme,}$$

faict

$$\begin{aligned} & B \text{ in } Z \text{ in } G \text{ in } A - G \text{ in } B \text{ in } Aq. + G \text{ in } Z \text{ in } Aq. - G \text{ in } Ac. \\ & + B \text{ in } Z \text{ in } G \text{ in } E - B \text{ in } A \text{ in } G \text{ in } E + Z \text{ in } A \text{ in } G \text{ in } E - Aq. \text{ in } G \text{ in } E \\ & - B \text{ in } Z \text{ in } Aq. + B \text{ in } Ac. - Z \text{ in } Ac. + Aqq. \\ & - B \text{ in } Z \text{ in } Eq. + B \text{ in } A \text{ in } Eq. - Z \text{ in } A \text{ in } Eq. + Aq. \text{ in } Eq. \\ & - B \text{ in } Z \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis} + B \text{ in } Aq. \text{ in } E \text{ bis} - Z \text{ in } Aq. \text{ in } E \text{ bis} + Ac. \text{ in } E \text{ bis.} \end{aligned}$$

Le produict de

$$G \text{ in } A - Aq., \quad \text{le second terme,}$$

par

$$B \text{ in } Z - B \text{ in } A - B \text{ in } E + Z \text{ in } A + Z \text{ in } E - Aq. - Eq. - A \text{ in } E \text{ bis,}$$

le troisieme terme,

fait

$$\begin{aligned} & B \text{ in } Z \text{ in } G \text{ in } A - G \text{ in } B \text{ in } Aq. - G \text{ in } B \text{ in } A \text{ in } E + G \text{ in } Z \text{ in } Aq. \\ & + G \text{ in } Z \text{ in } A \text{ in } E - G \text{ in } Ac. - G \text{ in } A \text{ in } Eq. - G \text{ in } Aq. \text{ in } E \text{ bis} \\ & - B \text{ in } Z \text{ in } Aq. + B \text{ in } Ac. + B \text{ in } Aq. \text{ in } E - Z \text{ in } Ac. \\ & - Z \text{ in } Aq. \text{ in } E + Aqq. + Aq. \text{ in } Eq. + Ac. \text{ in } E \text{ bis.} \end{aligned}$$

Il compare ces deux produits *per adaequalitatem*. Ostons ce qu'ils ont de commun et diuisions le reste par E , restera d'un costé

$$\begin{aligned} & B \text{ in } Z \text{ in } G - Aq. \text{ in } G - B \text{ in } Z \text{ in } E + B \text{ in } A \text{ in } E \\ & - Z \text{ in } A \text{ in } E - B \text{ in } Z \text{ in } A \text{ bis} - Z \text{ in } Aq. \text{ bis} + B \text{ in } Aq. \text{ bis,} \end{aligned}$$

et de l'autre costé

$$- G \text{ in } A \text{ in } E - G \text{ in } Aq. \text{ bis} + B \text{ in } Aq. - Z \text{ in } Aq.$$

Effaçons tous les homogènes parmi lesquels E se retrouve, restera

$$B \text{ in } Z \text{ in } G - Aq. \text{ in } G - B \text{ in } Z \text{ in } A \text{ bis} - Z \text{ in } Aq. \text{ bis} + B \text{ in } Aq. \text{ bis}$$

esgal à

$$- G \text{ in } Aq. \text{ bis} + B \text{ in } Aq. - Z \text{ in } Aq.$$

et par transposition

$$- B \text{ in } Aq. + Z \text{ in } Aq. - G \text{ in } Aq. + B \text{ in } Z \text{ in } A \text{ bis}$$

sera esgal à

$$B \text{ in } Z \text{ in } G.$$

Par la résolution de cette équation, nous trouuerons la valeur de la ligne A , c'est à dire la valeur de MN , et par conséquent le point N . Et nous treuuerons la vérité de la proposition de Pappus (1) qui dit que pour treuuer le point N il faut faire

comme le rectangle OMD au rectangle OID
ainsy le quarré MN au quarré NI ,

car la résolution de nostre équation nous conduit à la mesme construction.

Pour l'application de cette méthode aux *tangentes*, voicy comme quoy ie procède.

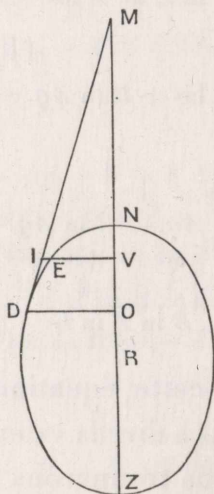
Soit l'*ellipse* par exemple ZDN (*fig.* 20), de laquelle l'axe soit ZN et le centre R (2). Prenons un point comme D dans

(1) Voir le texte de Pappus cité au tome I, p. 142, note 2.

(2) Dans son écrit précédent *de Tangentibus linearum curvarum* (t. I, p. 134-136), Fermat avait donné la construction de la tangente à la parabole.

la circonférence, duquel il faut tirer DM qui touche l'ellipse. Tirons l'appliquée DO et supposons que OZ , qui est donnée, s'appelle B et ON , aussy donnée, s'appelle G ; faignons OM , inconnue que nous cerchons, s'appelle A ; or nous entendons

Fig. 20.



par OM la portion de l'axe comprise entre le point O et le concours de la tangente.

Puisque DM touche l'ellipse, si nous tirons IEV parallèle à DO par le point V , pris à discrétion entre O et N , il est certain que cette ligne IEV coupera la tangente DM et l'ellipse aussy, comme aux points E et I ; et parce que la ligne DM touche l'ellipse, tous ses points horsmis D seront hors de l'ellipse; donc la ligne IV sera plus grande que la ligne EV . Il y aura donc plus grande proportion

du quarré DO au quarré EV que du quarré DO au quarré IV .

Or

comme le quarré DO au quarré EV

ainsy (par la propriété de l'ellipse)

le rectangle ZON est au rectangle ZVN

et

comme le quarré DO au quarré IV, ainsy le quarré OM au quarré VM.

Donc il y a plus grande raison

du rectangle ZON au rectangle ZVN

que

du quarré OM au quarré VM.

Feignons OV, prise à discrétion, esgale à E :

le rectangle ZON en notes sera B in G ;

le rectangle ZVN en notes sera B in $G - B$ in $E + G$ in $E - Eq.$;

le quarré OM en notes sera $Aq.$;

et

le quarré VM en notes sera $Aq. + Eq. - A$ in E bis.

Il y aura donc plus grande raison

de B in G à B in $G - B$ in $E + G$ in $E - Eq.$

que

de $Aq.$ à $Aq. + Eq. - A$ in E bis.

Par conséquent, si vous multipliés le 1^{er} terme par le dernier, et le 2^{me} par le 3^{me}

$$B \text{ in } G \text{ in } Aq. + B \text{ in } G \text{ in } Eq. - B \text{ in } G \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis,}$$

qui est le produit du 1^{er} terme par le dernier, sera plus grand que

$$B \text{ in } G \text{ in } Aq. - B \text{ in } E \text{ in } Aq. + G \text{ in } E \text{ in } Aq. - Aq. \text{ in } Eq.$$

Il faut donc suivant la précédente méthode comparer ces deux produits *per adæqualitatem*. Ostons ce qu'ils ont de

commun et diuison le reste par E ; restera

d'un costé B in G in E — B in G in A bis,

et de l'autre — B in $Aq.$ + G in $Aq.$ — $Aq.$ in E .

Effaçons les homogènes qui participent de la ligne E ;
restera

d'un costé — B in G in A bis,

et de l'autre costé — B in $Aq.$ + G in $Aq.$

Lesquels deux termes il faut maintenant suiuant la précédente méthode éгалer tout à bon; en diuisant le tout par A et transportant deüement les termes, nous treuuerons

$$B \text{ in } A - G \text{ in } A \text{ esgal à } B \text{ in } G \text{ bis.}$$

Vous voyéz que cette résolution est la mesme que celle d'Apollonius (1); car par ma construction pour treuuer la tangente, il faut faire

comme $B - G$ à G ainsy B bis à A ,
c'est à dire

comme $ZO - ON$ à ON ainsy ZO bis à OM ;

et par celle d'Apollonius, il faut faire

comme ZO à ON ainsy ZM à MN ;

or ces deux constructions, comme il paroist, reuiennent à la mesme.

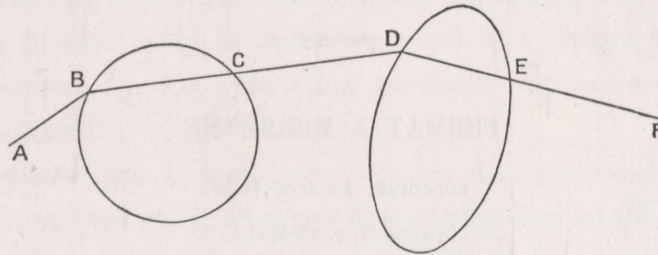
Je pourrois adiouster plusieurs autres exemples, tant du premier que du second cas de ma méthode, mais ceux cy suffisent et feront assez voir qu'elle est générale et qu'elle ne trompe iamais. Je n'adiouste point non plus la démonstration

(1) APOLLONIUS, *Sectiones conicæ*, I, 34.

de la Reigle (1), ny plusieurs autres usages qui pourroient en faire mieux paroistre la perfection, comme de l'invention des centres de gravité, dont i'ay envoyé un exemple à Mons^r de Roberval (2), et (3) plusieurs autres, me contentant de proposer la suivante question à soudre à ceux qui voudront l'entreprendre :

Estant donné le cercle BC (fig. 21) par position, l'ellipse

Fig. 21.



DE, et les deux points A et F, treuver un point dans le cercle, comme B, et un autre dans l'ellipse comme D, en sorte que, ioignant les lignes AB, BD, DF, les trois quarréz AB, BD, DF, pris ensemble, contiennent le plus petit espace qui se puisse faire en quels deux autres points que ce soit. Et les mesmes choses estant données, chercher aussy le plus grand espace.

Ou bien, si cette question paroist trop aisée, ie la rendray plus générale et difficile en proposant :

Datis quotlibet punctis et quotlibet lineis, siue rectis siue curuis, in qualibet linearum invenire quotlibet puncta, ita ut summa quadratorum rectorum, puncta data et quæsitæ ad libitum connectentium, sit minima vel maxima.

(1) Voir, pour une telle démonstration, l'écrit publié ci-après, sous le n° X.

(2) Allusion à l'écrit intitulé *Centrum gravitatis parabolici conoidis*, envoyé par Fermat à Mersenne pour Roberval et Étienne Pascal en février 1638.

(3) Ici s'arrête le texte latin (t. I, p. 147).