XXXVI.

L'EVOLUZIONE DELLE IDEE FONDAMENTALI DEL CALCOLO INFINITESIMALE

« La Revue du Mois », Paris 1912; *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris Gauthier-Villars 1913, Chap. I, pp. 1-21; *Saggi scientifici*, Bologna Zanichelli (s. d.) [1920], pp. 159-188 (*).

Mi propongo di esporre in queste pagine alcuni nuovi concetti matematici che si sono principalmente sviluppati in questi ultimi anni ed i metodi analitici che vi si riferiscono. In modo particolare desidero stabilire la derivazione di tali concetti e metodi dalle idee svoltesi nel campo delle matematiche dalle epoche più remote e la loro correlazione con questioni moderne della filosofia naturale. Emergerà così la loro vera situazione nella storia generale delle scienze matematiche e qualche dato, che permetterà di giudicare del loro avvenire.

Comincerò dal notare l'esistenza di un sentimento, che tutti gli analisti provano, pur senza rendersene sempre conto. In uno dei suoi ultimi scritti ENRICO POINCARÉ, studiando la questione dei *quanta*, dopo aver mostrato come non sia possibile far a meno dell'ipotesi che l'energia varii con discontinuità, dice: « Les lois physiques ne seront-elles plus susceptibles d'être exprimées par des équations différentielles? » [1].

Queste parole che racchiudono indubbiamente un senso di rammarico, manifestano lo stato d'animo di ogni matematico, indotto a ritenere che uno strumento ammirabile, quale il calcolo infinitesimale, debba essere abbandonato nello studio di qualche fenomeno. Infatti, dalle età più remote fino ai nostri giorni, l'idea del continuo ha dominato le speculazioni matematiche e tutte le loro applicazioni più interessanti e feconde. Quando le condizioni dei problemi l'hanno permesso, si è sempre cercato di ricondurre (talvolta anche intuitivamente ed incoscientemente), i casi di discontinuità a casi di continuità, con procedimenti, che si potrebbero chiamare di natura statistica; anzi, nella pratica dei calcoli, a volte si è stati indotti, dalla potenza dei metodi infinitesimali, a prescindere dalle concezioni ed ipotesi più probabili, riferentisi alla natura stessa dell'argomento, pur di potervi applicare

(*) Di questa conferenza, tenuta dal VOLTERRA nel 1912 alla Sorbona come lezione introduttiva al Suo corso sulle *funzioni di linee* (e poi ripetuta in quel medesimo anno all'École Polytechnique di Parigi) si è ritenuto opportuno riprodurre qui la traduzione italiana (con lievissime modificazioni formali) da Lui stesso pubblicata fra i Suoi *Saggi scientifici*.

(1) « Comptes rendus », t. 153, p. 1103.

i procedimenti infinitesimali. D'altra parte si è riconosciuto che, volendo rendere rigorose le considerazioni relative a questi metodi, bisognava esaminare prima casi di discontinuità e arrivare dopo al continuo, mediante passaggi al limite, per modo che l'origine delle più importanti proprietà del calcolo infinitesimale è stata l'estensione al calcolo stesso di proprietà conosciute dell'algebra finita e dell'aritmetica. Si è dunque avuta un'azione reciproca; i casi di discontinuità sono stati studiati con metodi infinitesimali e, nello stesso tempo, ogni questione infinitesimale è stata considerata come caso limite di questioni riguardanti il discontinuo. Non occorre moltiplicare gli esempi, per provare ciò che ho detto: se ne trovano le prove più eloquenti nella fisica-matematica, a cui la dottrina sulla costituzione molecolare dei corpi non ha impedito l'uso del calcolo infinitesimale. Infatti il FOURIER, nella teoria del calore, come il CAUCHY ed il POISSON nella elasticità, e tutti i matematici classici partirono dall'ipotesi della discontinuità della materia, ma risolsero i problemi che si erano posti, con l'aiuto delle equazioni differenziali e dei loro integrali; e, anche nelle più recenti applicazioni all'economia politica e alla statistica, si è seguito lo stesso cammino.

* * *

L'uso di quantità infinitamente piccole risale certo alle prime ricerche sistematiche di geometria [2]. EUDOSSO di Cnido, che visse nel quarto secolo avanti Cristo, conobbe i metodi infinitesimali e li applicò al teorema sulla eguaglianza di volume delle piramidi che hanno la stessa altezza e basi eguali. Non è infatti possibile [3] dimostrare questa proposizione mediante la decomposizione dell'intero volume in un numero finito di parti, vale a dire in modo simile a quello che si tiene per le aree. EUDOSSO, e forse anche altri prima di lui, comprese che bisognava ricorrere alla decomposizione del volume in un numero infinito di strati infinitamente sottili: ed è questo il primo esempio che si conosca, di metodi infinitesimali. EUCLIDE l'espone nella settima proposizione del dodicesimo libro, ma fa uso del metodo di esaustione; egli riduce il caso del continuo al caso limite d'una somma di un numero finito di termini. Si vede così apparire il primo germe dei metodi moderni del calcolo integrale e del principio di DEDEKIND, che è stato solo parecchi secoli dopo formulato in modo completo ed astratto.

Ma l'applicazione sistematica dei metodi infinitesimali, si trova per la prima volta in ARCHIMEDE, di cui abbiamo potuto penetrare l'intimo pensiero, grazie alla celebre scoperta del HEIBERG [4]. Dalla lettera di ARCHIMEDE ad ERATOSTENE si rileva come egli facesse uso per le sue scoperte

(2) Ringrazio il prof. VACCA, dell'Università di Roma, delle notizie storiche che mi ha favorito.

(3) DEHN, *Ueber den Rauminhalt* («Math. Ann.», t. LV, p. 465).

(4) Vedere l'interessante pubblicazione del PAINLEVÉ e del REINACH: *Un traité de Géométrie inédit d'Archimède*, «Revue générale des Sciences», t. XVIII, 1907; *Archimedis, Opera Omnia*. Ed. Heiberg, Vol. II, p. 427. Lipsiae, 1913.

del metodo delle quantità infinitamente piccole, e, solo per esporre i risultati al pubblico, ricorresse al metodo dell'esaustione e a quello delle serie. Basta ricordare le differenti soluzioni ch'egli ha date, allo scopo di trovare l'area della parabola, per riconoscere i principî fondamentali, mediante i quali il calcolo infinitesimale si è sviluppato da quell'epoca remota fino ai nostri giorni. La più elegante e la più suggestiva delle soluzioni è quella che si ottiene, mostrando che un segmento di parabola ed un triangolo rettangolo isoscele (avente la stessa base del segmento e un'altezza doppia) posti l'uno accanto all'altro sul braccio di una leva il cui punto d'appoggio sia nel mezzo, sono in equilibrio, poiché ogni coppia simmetrica di ordinate della parabola ha lo stesso momento della coppia corrispondente del triangolo [5]. Non ricorderemo qui i differenti risultati ai quali ARCHIMEDE è stato condotto dall'applicazione dei suoi metodi; basta infatti classificarli, come ora abbiamo fatto, in tre gruppi; quello degli infinitesimi, quello di esaustione ed infine quello delle serie, per veder delinearsi tutte le concezioni fondamentali del calcolo infiniesimale.

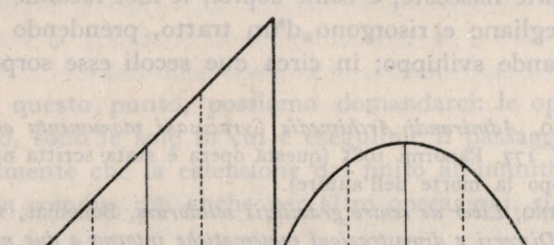
Gli ultimi metodi si riallacciano evidentemente alla teoria dei limiti, che si ritrovano poi negli stadi successivi del calcolo infinitesimale.

* * *

Ma ARCHIMEDE era troppo profondo per essere facilmente compreso: egli gettò sul terreno un seme, che ha impiegato dei secoli per germogliare. I continuatori ed i commentatori di ARCHIMEDE non penetrarono in tutte le sue concezioni, e gli Arabi trovarono più comodo di sviluppare la teoria delle coniche, che non presentava difficoltà così grandi.

Solo durante il Rinascimento si cominciò a comprendere la vera grandezza di ARCHIMEDE e TARTAGLIA [6] riprodusse in parte le opere del grande

(5) Basta guardare l'annessa figura, in cui sono segnate punteggiate le ordinate aventi lo stesso momento rispetto al punto d'appoggio O della leva AB, per comprendere la dimostrazione.



(6) TARTAGLIA, *La terza parte del general trattato dei numeri et misure*. Lib. III, Venetia 1560. – Opera Archimedis Syracusani, Venetiis 1543.

geometra, senza forse riuscire ad appropriarsi i suoi metodi infinitesimali. Una conoscenza più profonda di questi si trova, invece, in MAUROLICO [7] e COMMANDINO [8], che, oltre riprodurre le dimostrazioni di ARCHIMEDE, ritrovarono anche quei risultati sul centro di gravità, da lui scoperti, e che erano andati perduti. Ma i veri continuatori ed i primi allievi di ARCHIMEDE, quelli cioè che ne ereditarono lo spirito, furono GALILEO e KEPLERO.

Per studiare con successo i problemi della dinamica, bisogna impiegare metodi infinitesimali, ed infatti la questione più semplice, quella della caduta dei gravi, è stata risoluta dal GALILEI decomponendo il tempo della caduta in piccoli intervalli e considerando il movimento in ogni intervallo, come uniforme [9].

Questo passaggio dei procedimenti infinitesimali della geometria alla meccanica segna una data memorabile e mostra tutta la portata dei metodi stessi. Fra i nomi più specialmente legati ai progressi del calcolo infinitesimale, ricorderò quelli di KEPLERO, CAVALIERI, DESCARTES, FERMAT, TORRICELLI, WALLIS.

KEPLERO ha spinto le quadrature più innanzi di quanto facesse ARCHIMEDE ed è riuscito a calcolare volumi di solidi di rivoluzione e ad integrare funzioni trigonometriche [10]; CAVALIERI, nella sua Geometria degli indivisibili [11], ha reso sistematici i procedimenti infinitesimali ed ha dato la chiave per fare le quadrature più semplici; DESCARTES, FERMAT e TORRICELLI considerarono poi nuovi casi; PASCAL e FERMAT ritornarono al metodo di esaustione, che era stato abbandonato, e dettero così rigore e nuovo sviluppo a tutto un vasto insieme di ricerche.

Anche WALLIS, pur essendo meno rigoroso del suo contemporaneo PASCAL e pur non essendo riuscito al celebre concorso sulla *roulette*, portò un nuovo contributo al calcolo infinitesimale, sia studiando gli integrali, che ora chiamiamo *integrali euleriani*, sia studiando i prodotti infiniti e le serie [12].

* * *

Vediamo dunque che, dopo un periodo di diciassette secoli, durante il quale erano restate nascoste, e come sopite, le idee feconde del calcolo infinitesimale si svegliano e risorgono d'un tratto, prendendo con slancio improvviso, un grande sviluppo; in circa due secoli esse sorpassano notevol-

(7) MAUROLICO, *Admirandi Archimedis Syracusani monumenta omnia mathematica, quae extant, etc.*, p. 177, Panormi 1685 (questa opera è stata scritta nel 1548 ed è stata pubblicata solo dopo la morte dell'autore).

(8) COMMANDINO, *Liber de centro gravitatis solidorum*, Bononiae, 1565 (foglio 42, r.).

(9) GALILEI, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Leida 1638, p. 171 e sg. (Edizione nazionale, vol. VIII, Firenze 1898).

(10) KEPLERO, *Nova stereometria doliorum Vinariorum*, Lincii 1615 (*Opera omnia*, vol. IV). *De motibus stellae Martis*, Pragae 1609 («Opera omnia», vol. III, p. 390).

(11) CAVALIERI, *Geometria Indivisibilibus continuorum etc.*, Bononiae 1635; *Exercitationes geometricae sex*, Bononiae 1647.

(12) WALLIS, *Arithmetica infinitorum*, Oxonii 1655.

mente i loro limiti primitivi e, quel che è più importante, escono dalla Geometria e creano, mediante la loro penetrazione nella Filosofia naturale, la Scienza moderna.

Si deve ad HUYGENS la continuazione dell'opera del GALILEI, mediante lo studio infinitesimale dei problemi della Dinamica: così le questioni della *catenaria*, della *tautocrona* e lo studio delle leggi fondamentali della Meccanica, costituiscono progressi sempre più cospicui nell'uso dei metodi infinitesimali.

Nello stesso tempo, va sviluppandosi anche l'Analisi pura con l'introduzione dei logaritmi, fatta da NEPER, con l'integrazione per serie che conduce MERCATOR alla serie logaritmica, e con la scoperta dei processi d'integrazione per parti e per sostituzione, fatta da BARROW, movendo da considerazioni geometriche.

Fin qui noi abbiamo seguito lo sviluppo del *calcolo integrale*; il *calcolo differenziale*, invece, parte dal problema delle tangenti che gli antichi avevano già studiato per le spirali e le coniche. Si deve a DESCARTES l'aver concepito la tangente come limite di una secante [13], a TORRICELLI e ROBERVAL l'aver ottenuto le tangenti dalla composizione di movimenti, a FERMAT l'aver considerato quello che noi chiamiamo *rapporto incrementale* [14].

Ai tempi di BARROW già si aveva un metodo generale, e tutto era maturo, perché le operazioni di differenziazione e d'integrazione, considerate come operazioni inverse l'una dell'altra, divenissero le basi di una nuova scienza, che permettesse di risolvere sistematicamente i problemi della Geometria e della Meccanica.

In tal modo sorse il calcolo differenziale ed integrale, che NEWTON eresse a sistema, integrando le equazioni differenziali, per approfondire i problemi che si presentavano nelle applicazioni della sua legge [15] alla Meccanica celeste. LEIBNIZ dette al nuovo calcolo le notazioni che ancora adoperiamo [16].

Come abbiamo visto, il concetto fondamentale del calcolo infinitesimale è il continuo considerato in se stesso, o riguardato come un limite, e le operazioni fondamentali sono l'integrazione, a cui si arriva trasportando il concetto di somma dal finito all'infinito, e la derivazione, che è l'operazione inversa dell'integrazione.

* * *

Arrivati a questo punto, possiamo domandarci: le operazioni di cui abbiamo parlato, sono le sole in cui è eseguibile il passaggio suddetto? Si comprende facilmente che la estensione dal finito all'infinito può farsi, non solamente per la somma, ma anche per altre operazioni, sia per mezzo del

(13) DESCARTES, *La Géometrie*. 1637, trad. latina di Schooten, Amstelædami 1659, p. 43.

(14) FERMAT, *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, (« Oeuvres de Fermat », t. I, p. 133 e t. III, p. 121, Paris 1891–96).

(15) ISAACI NEWTON, *Epistola prior*, 13 junii 1676; *Epistola posterior*, 24 octob. 1676 (*Opuscula, Lausannae et Genevae*, 1744, t. I).

(16) LEIBNIZ, *Nova methodus, etc.* « Acta eruditorum », Lipsiae 1684.

procedimento detto delle serie, sia con un processo simile a quello del calcolo integrale, in cui si considera cioè (a quel modo che faceva GALILEO per studiare la caduta dei gravi) la variazione di una quantità, come l'insieme delle successive variazioni infinitamente piccole, che si ottengono dividendo la variazione totale in intervalli parziali.

Così, per trovare l'integrale di una equazione differenziale ordinaria, in un certo campo, si possono eseguire prima delle operazioni algebriche in intervalli parziali, e poi passare al limite, facendo diminuire indefinitamente la grandezza degli intervalli ed aumentandone indefinitamente il numero. Tale è il metodo di CAUCHY, che ordinariamente si segue per dimostrare l'esistenza degli integrali, parallelamente ai metodi delle serie ed al metodo di PICARD delle approssimazioni successive [17].

Il principio su cui è basato il metodo di CAUCHY, si presta in infiniti modi a ricondurre problemi complicati a problemi più semplici e già risoluti. Per dare un esempio, consideriamo il problema dei tre corpi; e, per semplicità, supponiamo che la massa del terzo corpo C, sia trascurabile rispetto a quelle degli altri due corpi A e B, per modo che il movimento di questi ultimi segua le leggi di KEPLERO; ci resterà allora da determinare soltanto il movimento del terzo corpo C. Ora, in un intervallo di tempo piccolissimo, si può trascurare lo spostamento dei corpi A e B e, per conseguenza, ritenere il moto di C come quello di un corpo attratto da due centri fissi: tale movimento è noto, poiché LEGENDRE ne ha esposta e discussa la soluzione in tutti i suoi particolari. Decomponendo quindi un dato intervallo di tempo in intervalli parziali piccolissimi, potremo decomporre il movimento di C, approssimativamente, in successivi movimenti noti; al limite, facendo diminuire indefinitamente questi intervalli, si avrà il movimento di C in tutto l'intervallo dato.

In prima approssimazione, si potrà anche supporre costante la forza agente su C, durante ogni intervallo parziale di tempo, in ciascuno dei quali C descriverà un arco di parabola; quindi si potrà considerare il moto di C come una successione infinita di movimenti parabolici infinitamente piccoli. Potremo infine supporre che il movimento di C sia uniforme in ogni intervallo parziale di tempo: calcolando di istante in istante la variazione della velocità, si otterrà il movimento come una successione di un numero infinito di movimenti, rettilinei ed uniformi.

* * *

Ritorniamo al passaggio dal finito all'infinito, nella sua applicazione più generale alle operazioni. Abbiamo già fatto parola, accennando all'opera di

(17) CAUCHY, *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, Paris, t. I, 1840, p. 327; LIPSCHITZ, *Disamina della possibilità di integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie*, («Annali di Matematica», II serie, t. II, 1868-1869, p. 288); VOLTERRA, *Sui principii del calcolo integrale* «Giornale di Matematiche», vol. XIX, 1881 [in queste «Opere»: vol. primo, III, pp. 16-48].

WALLIS, dei prodotti infiniti, che si ottengono estendendo il concetto di serie dal caso della somma a quello del prodotto. Nello stesso modo, possiamo trasportare l'idea di integrazione, di cui abbiamo parlato, dal campo della somma a quello del prodotto, ottenendo così l'integrazione logaritmica.

Ma è possibile portare la nostra attenzione su tipi ancor più generali di operazioni, che comprendano la somma e la moltiplicazione; basterà considerare ad esempio la deformazione di una figura piana. I tipi più semplici di tali deformazioni consistono in una dilatazione, o in una contrazione, ottenute moltiplicando le dimensioni della figura, per un certo parametro. La risultante di più deformazioni di questo genere si avrà facendo il prodotto dei parametri che definiscono ogni singola deformazione.

Consideriamo ora la trasformazione lineare più generale di una figura piana. Essa potrà ottenersi, dal punto di vista analitico, mediante una sostituzione lineare sulle coordinate. Eseguendo successivamente più trasformazioni lineari della figura, ossia più sostituzioni lineari sulle coordinate, verremo a fare ciò che comunemente si chiama un *prodotto di sostituzioni*. La ordinaria moltiplicazione, e anche la somma ordinaria rientrano come casi particolari nella moltiplicazione delle sostituzioni.

Moltiplichiamo fra loro infinite sostituzioni lineari di cui ognuna corrisponda ad una trasformazione geometrica infinitamente piccola. Ciò corrisponderà ad un passaggio dal finito all'infinito, analogo a quello che conduce dalla somma di un numero finito di termini ad una integrazione. È evidente anzi, che la ordinaria operazione di integrazione non è che un caso particolare di quella che abbiamo per ultimo definita.

Ora, questa successione infinita di trasformazioni infinitesime corrisponde ad una trasformazione finita, e l'operazione sopra indicata, che ad essa conduce, può chiamarsi l'*integrazione delle sostituzioni lineari*. L'inversa di questa operazione, si potrà denominare la *derivazione delle sostituzioni*; si avrà così un calcolo integrale e differenziale delle sostituzioni, simile in tutto al calcolo integrale e differenziale ordinario.

Questo calcolo corrisponde a quello che in Analisi si chiama l'*integrazione delle equazioni differenziali lineari*, tutta la teoria delle quali può esporsi da questo nuovo punto di vista, coordinando fra loro molti resultati, di cui non apparivano gl'intimi legami. In tal modo, dai teoremi dei residui di CAUCHY si passa ai teoremi di FUCHS, e la teoria algebrica dei divisori elementari, e la geometria delle omografie, si riannodano alla teoria delle equazioni differenziali lineari, mediante un legame analitico, che conduce a nuove proposizioni [18].

(18) Questa teoria è sviluppata nelle seguenti Memorie: VOLTERRA, *Sulle equazioni differenziali lineari*, « Rend. R. Acc. dei Lincei », 15 maggio 1887 [in queste « Opere »: vol. primo, XVI, pp. 291–293]: *Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. II, 1888 [ibidem, XX, pp. 351–335]; *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari*, « Memorie della Società italiana delle Scienze, detta dei XL », 1ª Parte, 3ª serie, vol. VI, 1887; 2ª Parte 3ª serie, vol. XII, 1899 [in queste « Opere »: vol. primo, XV, pp. 209–290; vol. secondo, XXX, pp. 383–451]; Cfr. SCHLESINGER, *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen*, Leipzig 1908.

* * *

Le dottrine relative al passaggio dal finito all'infinito, dal discontinuo al continuo, ricevono nuovo impulso e sono suscettibili di maggiore estensione, quando il concetto fondamentale che le ispira si trasporti nel campo della teoria delle funzioni.

Prima di accennare a questo argomento, che è il più delicato che io debba trattare, dirò qualche parola sull'idea generale di funzione. Questa idea e quella di legge fisica son nate nel medesimo tempo; d'altro lato, la teoria della dipendenza analitica fra le quantità variabili è derivata naturalmente dal progresso dell'Algebra. Nondimeno tale teoria non si sarebbe potuta costituire in modo completo, né il concetto di funzione si sarebbe potuto ampiamente sviluppare, senza il sussidio di una rappresentazione di valore concreto e di efficacia intuitiva, quale ci viene offerta dalla Geometria analitica. E infatti solo quando lo studio di una curva è stato ricondotto da DESCARTES allo studio della variazione simultanea delle sue coordinate, la teoria delle funzioni si è costituita come elemento necessario per lo sviluppo della scienza.

Ora, come spesso accade, i concetti fondamentali esistevano di già, direi quasi nascosti, e molti casi particolari erano stati studiati completamente, prima che LEIBNIZ [19] pronunciasse la parola *funzione* e prima che alcuno pensasse a considerare, in modo sistematico e generale, la dipendenza fra le quantità che variano simultaneamente, e tanto meno a creare dall'insieme di nozioni, che scaturivano oramai da ogni lato, una speciale dottrina. Il momento in cui tutti questi concetti si riunirono e coordinarono fra loro dando origine ad un nuovo ramo delle Matematiche segna una data memorabile nella storia della Scienza.

Come ho detto, diversi elementi concorsero a creare la teoria delle funzioni. Essi non si sono mai completamente fusi, tanto che, anche nei trattati moderni, è facile riconoscere le suture fra tali materiali eterogenei. Così, per esempio, nonostante i rapporti che si possono continuamente stabilire fra esse, la teoria delle funzioni analitiche, quella delle funzioni nel senso di DIRICHLET, e la teoria geometrica delle funzioni, vengono sviluppate, in generale, con metodi differenti.

Dapprima prevalse l'indirizzo geometrico, perciò non fu necessaria neppure una parola speciale, per designare la funzione; bastavano il linguaggio fornito dalla geometria, il concetto più o meno vago di curva, e la conoscenza delle sue proprietà.

LAGRANGE [20] si pose invece da un punto di vista opposto: egli volle, con uno sforzo ardito, mediante la teoria delle funzioni analitiche, riallacciare il calcolo integrale e differenziale all'algebra, rendendolo indipendente dalla

(19) LEIBNIZ, *Werke*, (Ed. Gerhardt), «Math. Schrift.», vol. V, p. 307).
(20) LAGRANGE, *Théorie des fonctions analytiques*, Paris 1797.

considerazione di quantità infinitamente piccole e dai metodi di passaggio al limite, da cui il calcolo differenziale, come abbiamo visto, era nato. Bisogna quindi, se non si vuol risalire alla scoperta primitiva della serie di potenze di TAYLOR, concepire le funzioni analitiche, partendo dai concetti di LAGRANGE.

Come nei varii rami del calcolo differenziale ed integrale, così anche nella teoria delle funzioni i bisogni e le richieste della fisica e delle scienze naturali hanno contribuito ad orientare le ricerche, ad approfondire ed estendere nuovi concetti destinati a concretarsi e fissarsi in forma matematica.

La storia della rappresentazione delle funzioni arbitrarie è molto conosciuta: esse sono state introdotte non appena si son cominciati a studiare problemi di Fisica matematica, in cui bisognasse integrare delle equazioni alle derivate parziali. I principî fondamentali sono stati stabiliti da D'ALEMBERT, EULERO, BERNOULLI ed infine da FOURIER, ma la teoria è tuttora in via di svolgimento.

Nelle applicazioni fisiche sarebbe stato impossibile limitarsi a considerare funzioni di una sola variabile, e già NEWTON vide l'interesse che poteva avere l'introduzione delle funzioni di più variabili. Le forze e gli elementi, che definiscono le proprietà di un campo fisico, dipendono dalla posizione e, spesso, anche dal tempo; di qui la necessità di considerare funzioni di tre o quattro variabili. Inoltre, se un fenomeno deve riguardarsi come la conseguenza di più cause, i parametri che lo definiscono, saranno funzioni dei parametri che individuano le varie cause. Anche la Geometria, per esempio la Geometria analitica solida, la Geometria dei complessi di curve, e l'Algebra, quando si applichino le sue operazioni a più quantità, conducono spontaneamente alle funzioni di più variabili. La teoria di tali funzioni si è svolta parallelamente a quella delle funzioni di una sola variabile, sia dal punto di vista analitico, sia sotto altri rapporti.

* * *

A questo punto sorse un'idea ben naturale, che altro non è se non l'estensione dei concetti fondamentali del calcolo integrale al campo della teoria delle funzioni, vale a dire un passaggio dal discontinuo al continuo, del tutto simile a quello con cui si passa dalla somma all'integrale e col quale si arriva alle operazioni più generali di integrazione, di cui abbiamo parlato [21].

È possibile nella Filosofia naturale limitarsi alle funzioni di un numero finito di variabili? Evidentemente, quando si studia un fenomeno come conseguenza di un numero finito di cause, si fa una astrazione, poiché si vengono a trascurare degli elementi, che si considerano come piccolissimi, di fronte ad altri preponderanti. In tal modo l'esame del fenomeno è soltanto

(21) Ho introdotto questa idea nel 1887. I primi lavori su tale soggetto sono le mie tre note: *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*. « Rend. R. Acc. dei Lincei », 2º semestre, 1887 [in queste « Opere »: vol. primo, XVII, pp. 294-314].

approssimato, onde si intravedono facilmente casi nei quali, per approfondire convenientemente la questione, sarà necessario tener conto di un numero infinito di variabili. Un esempio si presenta subito, esaminando un campo fisico: se supponiamo che varino la posizione ed il tempo, siamo condotti a considerare funzioni di quattro variabili, ma se supponiamo che vari anche il campo riguardato come qualche cosa di continuo, i mutamenti dei fenomeni dipenderanno da una infinità di variabili. Inoltre, se in un dato fenomeno si conserva memoria del passato, il presente viene a dipendere da tutta la storia, e quindi, poiché il tempo è continuo, da un'infinità di elementi o di variabili, che individuano i fatti passati [22].

Non si può asserire che una tale eredità sia stata concepita da LEIBNIZ, il quale tuttavia espone nella sua *Monadologia* considerazioni che possono riferivisi [23]. Egli usa espressioni talmente vaghe, che è ben difficile afferrare in esse il suo pensiero, che abbraccia così il tempo, come lo spazio. Il traduttore tedesco non riesce a riprodurne l'idea, che con una parola: *Nachwirkung*, di cui i fisici moderni hanno fatto largo uso. Il PICARD ha detto su questo argomento parole profonde, distinguendo la Meccanica in due parti ch'egli chiama: la *Meccanica ereditaria* e la *Meccanica non ereditaria* [24]. Per chiarire questa distinzione, basta ricordare i ben noti fenomeni della elasticità studiati da BOLTZMANN [25], nei quali si rivela appunto una specie di eredità lasciata nella forma del corpo da tutte le azioni che lo hanno sollecitato. È evidente che in tal caso la deformazione attuale dipende da una infinità di elementi, caratterizzati dalle forze, (variabili in generale ad ogni istante), che hanno agito sul corpo.

Queste considerazioni si riallacciano a questioni elementari di Geometria, di cui con molto interesse si occuparono i Greci: per esempio, all'antico problema di ZENODORO [26] di cercare fra le curve piane, di data lunghezza, quella che racchiude l'area più grande.

Se si studia, per esempio, il problema degli isoperimetri, si considera cioè un'area piana come dipendente dal contorno, abbiamo una quantità che varia con la forma di una curva, ossia ciò che ho chiamato una *funzione di linea* e che ho studiato in modo sistematico. Poiché una curva si può rappresentare con una ordinaria funzione, l'area può ritenersi come una quantità che dipende da tutti i valori di questa funzione. L'area stessa è quindi una funzione di infinite variabili, e difatti si può considerarla come il limite di una funzione di più variabili, supponendo che il numero di queste

(22) Vedere: VOLTERRA, *Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dellaela sticità*, « Rend. Acc. dei Lincei », 2° semestre 1909 [in questo vol.: XX, pp. 288-293].

(23) LEIBNIZ, *La Monadologie* (61) Oeuvres philosophiques de Leibniz, Paris, 1900, p. 716.

(24) *La mécanique classique et ses approximation successives*, « Riv. di Scienza », vol. I, 1907.

(25) BOLTZMANN, *Zur theorie des elastischen Nachwirkung*, « Wien. Berichte ». 1874; « Pogg. Ann. », Bd. 7 1876. Vedere anche, « Wiss, Abh. », I Bd., Leipzig 1909, p. 616.

(26) P. TANNERY, *La Géométrie grecque*, Paris 1887, p. 25.

cresca indefinitamente, allo stesso modo che una curva si può considerare come limite di un poligono, di cui il numero dei lati aumenti all'infinito.

Ma le aree non sono che casi molto particolari. Si possono trovare molti altri esempi di funzioni di linee: basta immaginare una quantità che dipenda, in un modo arbitrariamente dato, dalla forma di una curva, o una quantità che dipenda da tutti i valori di una o più funzioni [27]; così l'azione di una corrente elettrica filiforme e flessibile su di un ago magnetico dipende dalla forma del circuito, e per conseguenza è una funzione di linea.

Considerando le funzioni di linee come tipo di tutte le funzioni ad infinite variabili, si hanno molti vantaggi, perché il nome stesso richiama alla mente un'immagine concreta ed offre una rappresentazione intuitiva molto utile. Si capisce come si potrà passare poi allo studio di quantità dipendenti dalla forma di superficie, ed anche (nel caso degli spazi a più dimensioni) di ipersuperficie.

Tutto ciò che abbiamo detto, mostra che, sia dalle questioni geometriche, sia dai problemi della fisica, si è condotti naturalmente a fare, nella teoria delle funzioni, quel passaggio dal finito all'infinito, che abbiamo già visto compiersi a poco a poco, in modo costante, durante parecchi secoli, fino alla costituzione del calcolo infinitesimale.

Ci possiamo qui domandare se non vi sia una via analitica pura, per arrivare alle stesse nuove concezioni. La teoria delle ordinarie funzioni comprende lo studio delle proprietà di ogni quantità, ottenuta mediante operazioni algebriche. Quindi, come ha notato LAGRANGE [28], l'Algebra non è che un ramo della teoria delle funzioni; infatti i risultati delle operazioni algebriche sono le funzioni più elementari, considerate dall'Analisi. Allo stesso modo, si può trovare in concetti analitici l'origine della teoria delle quantità, che dipendono da tutti i valori di una o più funzioni di forma variabile. Il cammino da seguire è già tracciato: basta sostituire alle operazioni dell'Algebra, fatte su un numero finito di variabili, operazioni analitiche su di un insieme continuo, ovvero su tutti i valori di una funzione.

Conosciamo di già operazioni di questo genere, per esempio l'integrazione delle sostituzioni o, in generale, delle equazioni differenziali. Ripetendo queste operazioni elementari e combinandole fra loro, si arriverà, evidentemente, a calcolare delle classi speciali di funzioni del nuovo tipo. Generalizzando la frase sopra riferita di LAGRANGE, diremo che tutte queste operazioni e le loro teorie sono comprese nella teoria delle funzioni generalizzate di cui si è detto sopra [29]. Si conservano dunque i tre tipi di concezione fondamentale; geometrica, analitica, e il tipo astratto e generale legato all'idea di legge fisica.

(27) VOLTERRA, *Sopra le funzioni dipendenti da linee*, « Rend. R. Acc. dei Lincei », 2° sem. 1887 [in queste « Opere »: vol. primo, XVIII, pp. 315-328].

(28) LAGRANGE, *Leçons sur le calcul des fonctions*, Paris, 1806, Leçon première.

(29) Cfr. *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, 1913, cap. II.

* * *

Una volta in possesso di questi concetti fondamentali si presentava naturalmente il compito di coordinarli, di rendere sistematiche le ricerche, di studiare i problemi che si riannodano più o meno direttamente alle nuove idee [30]. È necessario compiere un tale lavoro, poiché la concezione da cui son nati i nuovi studi s'impone e perché sarebbe impossibile trattare numerose questioni, senza entrare nell'ordine delle idee esposte. Non si possono ancora classificare i vari rami che oggi esistono e che si svilupperanno in questa categoria di studi, ma si possono indicare i principali indirizzi, a cui si è naturalmente e necessariamente condotti dalla corrente costante di idee e di metodi che abbiamo visto svolgersi.

Se una quantità dipende da una linea, possiamo studiare le sue variazioni, corrispondentemente alle modificazioni di essa; se queste modificazioni sono piccole e limitate all'intorno di un punto della curva, arriviamo alla nozione di derivata d'una funzione di linea; se sovrapponiamo più modificazioni nei singoli punti, giungiamo poi a quella di differenziale o variazione. Questa è espressa da un integrale; infatti una funzione di linea può considerarsi come funzione di infinite variabili; la somma che esprime il differenziale di una funzione di più variabili, condurrà quindi, con passaggio al limite, ad un integrale [31].

Si può proseguire lo studio dei successivi differenziali ed arrivare ad uno sviluppo analitico analogo a quello di TAYLOR per le funzioni di più variabili: le somme doppie, triple, ecc., che figurano nella serie ordinaria, vengono sostituite da integrali doppi, tripli, ecc.

Possiamo anche proporci problemi di massimo e minimo, come abbiamo visto pel caso di un'area piana concepita come funzione della linea di lunghezza costante che la racchiude, anzi possiamo in generale studiare i massimi e minimi delle funzioni di linee. Tale studio, che corrisponde a quello delle condizioni in cui si annulla il differenziale, è assai complesso e conduce a questioni di natura molto varia: ponendo il problema sotto la forma più generale, si arriva infatti sia ad equazioni differenziali, sia a relazioni di natura integrale e a relazioni che sono al tempo stesso dei due tipi, o anche più complicate. Il primo caso corrisponde al calcolo delle variazioni, che è la

(30) Ho principiato tali studii fino dall'anno 1883, ma solo nel 1887 ne ho iniziato la pubblicazione in maniera sistematica colla mia prima nota: *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni* « Rend. R. Acc. dei Lincei », 2° semestre, 1887 [in queste « Opere »: vol. primo, XVII, pp. 294–314], a cui fecero seguito gli altri lavori pubblicati negli stessi Rendiconti fino al 1891 e quello degli « Acta Mathematica » nel 1889. Ho interrotto le pubblicazioni su questi argomenti dal 1891 al 1895 nei quali anni ho dovuto occuparmi di altre ricerche, riprendendole nel 1896 colle note della Accademia di Torino sulla *inversione degli integrali definiti*. Le ho poi ininterrottamente proseguite.

(31) Vedere: *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*. 1ª nota, § 2. « Rend. R. Acc. dei Lincei », 2° sem., 1887 [in queste « Opere »: vol. primo, XVII, pp. 295–299].

creazione più grandiosa di LAGRANGE, ma non esaurisce, come abbiamo detto, la questione dei massimi e minimi delle funzioni di linee; ne costituisce bensì un capitolo. Ora, se si pensa che, partendo dalla Meccanica classica, si può cercare di ricondurre le differenti questioni naturali a problemi di massimi e minimi di certe funzioni del tipo generalizzato, corrispondenti all'azione meccanica, si vede delinearsi un vasto campo di ricerche (32).

Abbiamo or ora parlato dello sviluppo di una funzione di linea in una serie di integrali, che corrisponde allo sviluppo di una funzione analitica in una serie di polinomi omogenei, ossia in serie di TAYLOR; se consideriamo i diversi termini di tale sviluppo, si arriva alle forme analitiche di infinite variabili.

Di qui ha preso le mosse una nuova Algebra, che ha già fatto grandi progressi (33). Possiamo infatti domandarci: a che cosa conduce la corrispondenza fra l'Algebra ordinaria e la nuova Algebra? Si vede facilmente che ogni problema dell'Algebra ordinaria porta ad un nuovo problema, il quale si ottiene passando dal discontinuo al continuo, col processo uniforme precedentemente considerato. Inoltre, nella maggior parte dei casi, la corrispondenza ci addita soluzioni pratiche e feconde, poiché, se i nuovi problemi possono considerarsi come limite dei problemi algebrici ordinari, le loro soluzioni assai spesso non sono che il limite delle soluzioni note dell'algebra. Ciò appunto si verifica allorché si passa dal discontinuo al continuo, nella teoria generale dei sistemi di equazioni algebriche.

La prima e la più elementare questione, che mi si sia naturalmente presentata in questo ordine di idee, nacque dal considerare il primo termine dello sviluppo generalizzato del TAYLOR, di cui sopra ho parlato. Essa può essere enunciata come la risoluzione di infinite equazioni algebriche lineari con un numero infinito di incognite. Il principio generale, ora esposto, ci fornisce immediatamente la soluzione come limite della soluzione algebrica ordinaria, mediante l'impiego di determinati infiniti, ossia applicando ai determinanti lo stesso passaggio dal discontinuo al continuo, che abbiamo visto applicarsi alla somma, al prodotto, alle sostituzioni. La questione comprendeva l'antico problema delle equazioni integrali che ABEL, LIOUVILLE, SONINE e parecchi altri avevano considerato e risoluto con speciali artifizi solo in casi particolari, e per le quali mancava un metodo uniforme e generale per condurne lo studio in modo sistematico; esso è stato trovato il giorno in cui le equazioni integrali sono state poste fra le questioni generali ora accennate e riannodate alle funzioni di linee, ossia il giorno nel quale sono state

(32) Vedere: VOLTERRA, *Sopra un problema di elettrostatica* «Transunti della R. Acc. dei Lincei», 3ª serie, vol. VIII [in queste «Opere»: vol. primo, XI, pp. 188-195]: *Sopra una estensione della teoria Jacobi-Hamilton*, «Rend. R. Acc. dei Lincei», 1º sem., 1890 [in queste «Opere»: vol. primo, XXVIII, pp. 464-475].

(33) Non farò citazioni, poiché la letteratura del soggetto è molto nota e può trovarsi in M. T. LALESCO, *Sur les équations intégrales*, Paris, 1912; G. VIVANTI, *Elementi della teoria delle equazioni integrali lineari*, Milano 1916.

considerate come caso limite di un sistema di equazioni algebriche di primo grado (34).

Mentre l'Algebra procede nell'indirizzo ora esposto, altri rami dell'Analisi si sviluppano nel medesimo senso; basta ricordare la teoria degli integrali delle funzioni di più variabili, che sono, per la loro stessa natura, funzioni del contorno e rientrano quindi nelle funzioni generalizzate, di cui abbiamo parlato. Ma ciò che più interessa, è che la teoria delle equazioni differenziali, per effetto delle stesse idee, può estendersi e raggiungere resultati notevoli di varia natura (35).

* * *

Ponendoci dal punto di vista newtoniano dobbiamo prevedere e seguire l'evoluzione delle cose. L'evoluzione istantanea o elementare è individuata dalla flussione; se questa è conosciuta in ogni istante, ossia se essa dipende esclusivamente in modo noto dalle circostanze esterne, si chiama una *evoluzione forzata*. Tutti gli stati sono determinati a partire da uno stato iniziale conosciuto, mediante la somma o integrale delle infinite evoluzioni elementari.

L'evoluzione degli esseri organici, nelle teorie di LAMARCK e DARWIN, sarebbe del tipo dell'evoluzione forzata. Ma l'evoluzione può anche essere originata da *cause interne*, ed allora sono da distinguersi due tipi: se ad ogni istante essa dipende dalle condizioni attuali, sarà una *evoluzione non ereditaria* e tutti gli stati potranno essere determinati a partire da uno stato dato, mediante l'integrazione delle equazioni differenziali; se invece essa dipende da tutti gli stati attraversati, sarà una *evoluzione ereditaria* e le equazioni differenziali non basteranno più; bisognerà ricorrere alle *equazioni integro–differenziali* ed a quelle alle *derivate funzionali*. È evidente che l'evoluzione forzata differisce da quella interna, anche perché la prima cessa con l'annullarsi delle cause esterne, mentre la seconda no.

I tre tipi di evoluzione possono presentarsi contemporaneamente; così l'oscillazione di una verga può risultare da oscillazioni forzate, da oscillazioni dovute ai suoi propri periodi di vibrazione e, in generale, sarà affetta da azioni di *isteresi* e di *traînage*.

Anche l'evoluzione organica, secondo le più recenti vedute, non può essere dovuta a sole cause esterne, ma probabilmente, poiché si verificano fenomeni di eredità, anche a cause interne. Si arriverà un giorno ad applicare le Matematiche al mondo organico? Se il tipo di evoluzione organica si confermerà quale oggi si crede, l'analisi conveniente per studiarla sarà quella delle equazioni integro–differenziali e delle derivate funzionali, diversa quindi

(34) VOLTERRA, *Sulla inversione degli integrali definiti*, quattro note, « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XXXI, 1896 [in queste « Opere »: vol. secondo, XVIII, pp. 216–254].

(35) Cfr. *Leçons sur les fonctions de lignes* Paris 1913, capitoli III, V e seguenti.

dall'analisi propria della Meccanica celeste. Probabilmente la biometria potrà dare le leggi sulle quali lavoreranno poi i Matematici.

Ma guardiamoci dal passare troppo, pensando all'avvenire, i limiti della Scienza presente, tanto più che sognare l'avvenire, o, per meglio dire, esporre dei sogni sull'avvenire è sempre pericoloso. Torniamo dunque all'eredità nel mondo inorganico, in cui essa ha pure un posto molto importante. Fino a pochi anni fa, mancando un'analisi per trattarle, bisognava abbandonare, non appena poste, le questioni di questo tipo; ma oggi l'analisi è capace di darne soluzioni complete, generali, rigorose, quanto quelle dei problemi in cui non entra l'eredità [36]. La guida per trovarle è sempre la stessa; bisogna ricorrere all'idea semplice e feconda che seguì ARCHIMEDE, studiando, ventidue secoli fa, la quadratura della parabola.

(36) Cfr. *Leçons sur les fonctions de lignes*, capitoli VI, VII, VIII e XIV.