XXXVIII.

VIBRAZIONI ELASTICHE NEL CASO DELLA EREDITÀ

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XXI₂, 1912₂; pp. 3-12.

1. I problemi delle vibrazioni di una corda elastica, di una sbarra elastica, in generale di corpi elastici conducono, quando si tenga conto della eredità, ad equazioni integro-differenziali di tipo iperbolico della forma

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial^2 u(z,\tau)}{\partial z^2} \psi(t,\tau)\, d\tau$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^4 u(z,t)}{\partial z^4} + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial^4 u(z,\tau)}{\partial z^4} \psi(t,\tau)\, d\tau$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2} = \Delta^2 u(x,y,z,t) + \int_{t_0}^{t} \Delta^2 u(x,y,z,\tau)\, \psi(t,\tau)\, d\tau ,$$

in cui t_0 denota un istante anteriormente al quale l'eredità si suppone trascutabile [1].

Fino dalla prima Nota sulle equazioni integro-differenziali ho posto in evidenza equazioni di questa natura [2], accennando a quelle speciali equazioni integro-differenziali nelle quali una stessa variabile comparisce come variabile di derivazione e fra le variabili di integrazione (nelle prime due la seconda variabile di cui è funzione la u, e nella terza equazione la quarta variabile da cui dipende la u).

Esporrò in una prossima Nota altri metodi di analisi. Qui mi permetto di limitarmi ad indicare brevemente i risultati ai quali conduce il metodo della separazione delle variabili, che è il più opportuno impiegare per le applicazioni pratiche a cui sono rivolte queste questioni, cioè a indicare come si possa ricavare le leggi della eredità dalle osservazioni sperimentali.

2. Riprendiamo dapprima la (I). Onde applicare il procedimento analogo a quello che si tiene nel caso ordinario della corda vibrante, poniamo

$$(1) \qquad u(z,t) = \operatorname{sen} m(z+\alpha) f(t),$$

in cui m ed α sono quantità costanti.

(1) Alla equazione integro-differenziale (II), delle vibrazioni di una sbarra elastica, è giunto il prof. WEBSTER nelle sue interessanti ricerche, e me l'ha segnalata.

(2) *Sulle equazioni integro-differenziali*. « Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XVIII, 1909₁ e p. 167. [In questo vol.: XVII, pp. 269-275].

Avremo che f dovrà soddisfare l'equazione integro-differenziale

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + m^2 \left[f(t) + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, \psi(t, \tau)\, d\tau \right] = 0 . \tag{2}$$

Supponendo per semplicità $t_0 = 0$, sia

$$a = \left(\frac{df(t)}{dt} \right).$$

Con una integrazione avremo

$$\frac{df(t)}{dt} + m^2 \int_0^t f(\tau) \left\{ 1 + \int_\tau^t \psi(\xi, \tau)\, d\xi \right\} d\tau = a ,$$

e ponendo

$$(f(t))_{t=0} = b ,$$

si avrà

$$f(t) + m^2 \int_0^t f(\tau) \left\{ (t - \tau) + \int_\tau^t d\xi \int_\tau^\xi \psi(\eta, \tau)\, d\eta \right\} d\tau = at + b .$$

Scrivendo

$$(t - \tau) + \int_\tau^t d\xi \int_\tau^\xi \psi(\eta, \tau)\, d\eta = \mathrm{F}(t, \tau) ,$$

l'equazione precedente diverrà

$$f(t) + m^2 \int_0^t f(\tau)\, \mathrm{F}(t, \tau)\, d\tau = at + b .$$

3. Ciò premesso sia

$$\mathrm{S}(t, \tau \mid x) = -x\mathrm{F}(t, \tau) + x^2\, \mathrm{F}^2(t, \tau) - x^3\, \mathrm{F}^3(t, \tau) + \cdots , \tag{3}$$

ove $\mathrm{F}^2, \mathrm{F}^3, \cdots$ denotano resultati di operazioni di composizione di prima specie [(3)], cioè

$$\mathrm{F}^2(t, \tau) = \int_\tau^t \mathrm{F}(t, \xi)\, \mathrm{F}(\xi, \tau)\, d\xi$$

$$\mathrm{F}^3(t, \tau) = \int_\tau^t \mathrm{F}^2(t, \xi)\, \mathrm{F}(\xi, \tau)\, d\xi$$

. . . .

$$\mathrm{F}^i(t, \tau) = \int_\tau^t \mathrm{F}^{i-j}(t, \xi)\, \mathrm{F}^j(\xi, \tau)\, d\xi \qquad (j = 1, 2, \cdots, i-1)$$

. . . .

(3) *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*. « Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XIX, 1º sem., 1910. [In questo vol. XXIII, pp. 311-322].

La funzione $S(t, \tau \mid x)$ sarà una funzione intera di x e avremo

$$(4) \qquad f(t) = a\left\{t + \int_0^t \tau S(t, \tau \mid m^2)\, d\tau\right\} + b\left\{1 + \int_0^t S(t, \tau \mid m^2)\, d\tau\right\}.$$

Posto

$$t + \int_0^t \tau S(t, \tau \mid x)\, d\tau = S_1(t \mid x),$$

$$1 + \int_0^t S(t, \tau \mid x)\, d\tau = S_2(t \mid x),$$

S_1 e S_2 saranno due trascendenti intere di x e la (4) e la (1) si scriveranno

$$(4') \qquad f(t) = aS_1(t \mid m^2) + bS_2(t \mid m^2)$$

$$(1') \qquad u(z, t) = \operatorname{sen} m(z + \alpha)\,[aS_1(t \mid m^2) + bS_2(t \mid m^2)].$$

Combinando linearmente un numero infinito di tali soluzioni otterremo (nelle ben note ipotesi di convergenza, continuità e derivabilità della serie) la soluzione della (I)

$$u(z, t) = \sum_0^\infty{}_n \operatorname{sen} m_n(z + \alpha_n)\,[a_n S_1(t \mid m_n^2) + b_n S_2(t \mid m_n^2)],$$

ove

$$u(z, t)_{t=0} = \sum_0^\infty b_n \operatorname{sen} m_n(z + \alpha_n)$$

$$\left(\frac{\partial u(z, t)}{\partial t}\right)_{t=0} = \sum_0^\infty a_n \operatorname{sen} m_n(z + \alpha_n).$$

Nella ipotesi, per esempio, che la corda, di lunghezza l, sia fissa agli estremi, avremo

$$\alpha_n = 0 \quad , \quad m_n = \frac{n\pi}{l}$$

e

$$u(z, t) = \sum_1^\infty{}_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l} z\right)\left[a_n S_1\left(t \,\middle|\, \frac{n^2\pi^2}{l^2}\right) + b_n S_2\left(t \,\middle|\, \frac{n^2\pi^2}{l^2}\right)\right].$$

4. Consideriamo il caso particolare in cui sia verificato il principio del ciclo chiuso [4].

Posto

$$t - \tau = \xi,$$

sarà

$$\psi(t, \tau) = \psi(t - \tau) = \psi(\xi).$$

(4) *Sulle equazioni della elettrodinamica.* « Rend. Acc. Lincei », ser. V, vol. XVIII_1, 1909_1, art. 3 [in questo vol.: XVIII, pp. 276–283]. *Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications.* « Acta Mathematica », tome 35, 1912, chapitre II, art. 2ème, [ibidem: XXXV, pp. 487–538].

Quindi

$$(5)\qquad F(t,\tau) = \xi + \int_0^{\xi} d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \psi(\xi_2)\, d\xi_2 = F(\xi)$$

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} F^2(t,\tau) &= \int_0^{\xi} F(\xi_1)\, F(\xi-\xi_1)\, d\xi_1 = F^2(\xi) \\ F^3(t,\tau) &= \int_0^{\xi} F^2(\xi_1)\, F(\xi-\xi_1)\, d\xi_1 = F^3(\xi) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F^i(t,\tau) &= \int_0^{\xi} F^j(\xi_1)\, F^{i-j}(\xi-\xi_1)\, d\xi_1 = F^i(\xi), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

$$(7)\qquad S(t,\tau\,|\,x) = -xF(\xi) + x^2 F^2(\xi) - x^3 F^3(\xi) + \cdots = S(\xi\,|\,x),$$

$$(8)\qquad S_1(t\,|\,x) = t + \int_0^t \tau S(t-\tau\,|\,x)\, d\tau = t + \int_0^t (t-\tau)\, S(\tau\,|\,x)\, d\tau,$$

$$(9)\qquad S_2(t\,|\,x) = 1 + \int_0^t S(t-\tau\,|\,x)\, d\tau = 1 + \int_0^t S(\tau\,|\,x)\, d\tau.$$

Supponiamo che manchi l'eredità: sarà allora

$$\psi = 0 \quad , \quad F(\xi) = \xi \quad , \quad S(\xi\,|\,x) = -\sqrt{x}\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{x}\,\xi),$$

$$S_1(t\,|\,x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{x}\,t) \quad , \quad S_2(t\,|\,x) = \cos(\sqrt{x}\,t),$$

e la (1') diverrà

$$u(z\,,t = \mathrm{sen}\,m(z+\alpha)\left[\frac{a}{m}\,\mathrm{sen}\,mt + b\cos mt\right],$$

ossia la soluzione si ridurrà all'integrale particolare di TAYLOR della equazione differenziale dalle corde vibranti. Noi vediamo dunque che, per passare dal caso non ereditario al caso ereditario, basta sostituire alle trascendenti intere trigonometriche sen e cos le nuove trascendenti intere $S_1(t|x)$, $S_2(t|x)$ (5).

5. Passiamo adesso all'equazione integro–differenziale (II). Posto $t_0 = 0$, e

$$u(z\,,t) = [Ae^{mz}\,\mathrm{sen}\,m(z+\alpha) + Be^{-mz}\,\mathrm{sen}\,m(z+\alpha)]\, f(t)$$

in cui A , B , m , α sono costanti, si trova

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 4m^4\left[f(t) + \int_0^t f(\tau)\,\psi(t,\tau)\, d\tau\right] = 0,$$

(5) Cfr. *Sopra una proprietà generale delle equazioni integrali ed integro–differenziali.* « Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XX, 2º sem. 1911. [In questo vol.: XXXI, pp. 380–388].

quindi, a e b essendo delle costanti, sarà

$$f(t) = a\mathrm{S}_1(t \mid 4m^4) + b\mathrm{S}_2(t \mid 4m^4).$$

Otteniamo dunque la soluzione

$$u(z, t) = e^{mz} \operatorname{sen} m(z + \alpha)\,[a\mathrm{S}_1(t \mid 4m^4) + b\,\mathrm{S}_2(t \mid 4m^4)]$$
$$+ e^{-mz} \operatorname{sen} m(z + \alpha)\,[a'\,\mathrm{S}_1(t \mid 4m^4) + b'\,\mathrm{S}_2(t \mid 4m^4)],$$

in cui a', b' sono nuove costanti.

Combinando linearmente infinite soluzioni di questa natura otterremo una serie come nel caso precedente.

6. Se nella (III) poniamo

$$u(x, y, z, t) = v(x, y, z) f(t),$$

nella ipotesi $t_0 = 0$, troviamo le equazioni

$$\Delta^2 v + \lambda^2 v = 0 \tag{10}$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \lambda^2 \left[f(t) + \int_0^t f(\tau)\, \psi(t, \tau)\, d\tau \right] = 0. \tag{11}$$

I *valori eccezionali di* λ per cui la (10) è soddisfatta dipendono, come è ben noto, dalle condizioni al contorno. Essendo λ_i uno di tali *valori eccezionali* e $v_i(x, y, z)$ la *soluzione eccezionale* corrispondente, abbiamo la soluzione della (III)

$$u_i(x, y, z, t) = v_i(x, y, z)\,[a\mathrm{S}_1(t \mid \lambda_i^2) + b\mathrm{S}_2(t \mid \lambda_i^2)],$$

in cui a e b sono quantità costanti.

Combinando linearmente infinite di tali soluzioni, otterremo, anche in questo caso, una soluzione data da una serie.

Se confrontiamo la soluzione adesso trovata e quella ottenuta nel § precedente, con quelle che si hanno nel caso in cui manchi l'eredità, si vede che il passaggio dal caso non ereditario a quello ereditario si ottiene sempre sostituendo alle trascendenti trigonometriche sen e cos le nuove trascendenti intere $\mathrm{S}_1(t \mid x)$, $\mathrm{S}_2(t \mid x)$.

7. Nel caso del ciclo chiuso, dalle (8) e (9) si ricava

$$\frac{d\mathrm{S}_1(t \mid x)}{dt} = \mathrm{S}_2(t \mid x)$$

$$\frac{d\mathrm{S}_2(t \mid x)}{dt} = \mathrm{S}(t \mid x),$$

e dalla (7) [6]

$$x\,\mathrm{F}(\xi) = -\mathrm{S}(x \mid \xi) + \mathrm{S}^2(x \mid \xi) - \mathrm{S}^3(x \mid \xi) + \cdots,$$

(6) *Questioni generali*, ecc., già citato, § 4.

ove gli esponenti denotano operazioni di composizione, cioè

$$S^2(x\,|\,\xi) = \int_0^\xi S(x\,|\,\xi_1)\, S(x\,|\,\xi - \xi_1)\, d\xi_1$$

$$S^3(x\,|\,\xi) = \int_0^\xi S^2(x\,|\,\xi_1)\, S(x\,|\,\xi - \xi_1)\, d\xi_1$$

. . . .

. . . .

Finalmente dalla (5) si ha

$$\frac{d^2 F(\xi)}{d\xi^2} = \psi(\xi)\,.$$

Dunque, *nel caso in cui la condizione del ciclo chiuso sia verificata, si può ricavare il coefficiente di eredità dalla legge di vibrazione.* Per esempio, nel caso della corda elastica, conoscendo il numero dei nodi e la legge di vibrazione di un punto della corda potremo ricavare il coefficiente di eredità.

8. Nel § VII delle lezioni fatte alla Clark University (7) ho mostrato che le oscillazioni di un filo dovuto alla torsione, allorché si tien conto della eredità, dipendono dalla equazione integro–differenziale

$$M(t) - \mu \frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} = \frac{1}{K}\,\omega(t) + \int_{t_0}^{t} \omega(\tau)\, \chi(t, \tau)\, d\tau\,,$$

ove $M(t)$ e $\omega(t)$ denotano rispettivamente il momento e l'angolo di torsione, $\chi(t, \tau)$ è il coefficiente di eredità e μ e K sono coefficienti costanti

Considerando le oscillazioni libere (non forzate) del filo, dovremo fare $M(t) = 0$. Ponendo $1/(K\mu) = m^2$, $K\chi(t, \tau) = \psi(t, \tau)$, $t_0 = 0$, l'equazione precedente si scriverà

$$\frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} + m^2 \left[\omega(t) + \int_0^t \omega(\tau)\, \psi(t, \tau)\, d\tau\right] = 0\,.$$

Si ricade dunque, anche in questo caso, nella equazione integro–differenziale (2). Quindi

$$\omega(t) = a S_1\left(t \,\middle|\, \frac{1}{k\mu}\right) + b S_2\left(t \,\middle|\, \frac{1}{k\mu}\right),$$

ove b denota la torsione iniziale, e a la velocità angolare iniziale di torsione.

9. Rispetto alle radici della equazione

$$f(t) = 0\,,$$

(7) Lectures delivered at the celebration of the twentieth anniversary of the foundation of Clark University, Worcester, Mass., September 1909. [In questo vol.: XXXII, pp. 389–476].

essendo $f(t)$ definita dalla equazione

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + m^2 \left[f(t) + \int_0^t f(\tau)\,\psi(t,\tau)\,d\tau \right] = 0,$$

è facile dimostrare che, *se* $\psi(t,\tau)$ *è positivo, esiste sempre una radice compresa fra* 0 *e* π/m, supposto m positivo.

Infatti consideriamo l'equazione

$$\frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + m^2 \varphi(t) = 0$$

che è soddisfatta da

$$\varphi(t) = \operatorname{sen} mt.$$

Si avrà

$$f(t)\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} - \varphi(t)\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = m^2 \varphi(t) \int_0^t \psi(t,\tau) f(\tau)\,d\tau,$$

d'onde

$$\int_0^{\pi/m} \left\{ f(t)\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} - \varphi(t)\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right\} dt = m^2 \int_0^{\pi/m} \varphi(t)\,dt \int_0^t \psi(t,\tau) f(\tau)\,d\tau,$$

cioè

$$-m\left[f(0) + f\left(\frac{\pi}{m}\right) \right] = m^2 \int_0^{\pi/m} \varphi(t)\,dt \int_0^t \psi(t,\tau) f(\tau)\,d\tau.$$

Se $f(t)$ conservasse lo stesso segno nell'intervallo $(0, \pi/m)$ il primo membro ed il secondo membro risulterebbero di segno contrario (se $f(t)$ non si annullasse in ambedue gli estremi), oppure il primo membro sarebbe nullo senza che lo fosse il secondo (se $f(t)$ si annullasse in ambedue gli estremi) il che è assurdo. Dunque $f(t)$ deve cangiar segno nell'intervallo $(0, \pi/m)$ e per conseguenza $f(t)$ deve avere una radice nell'interno di questo intervallo.

10. Supponiamo soddisfatta la condizione del ciclo chiuso; vogliamo vedere se è possibile un moto periodico. Naturalmente dovremo ammettere che la periodicità abbia luogo dal tempo $-\infty$, ossia dovremo supporre nella (2) il limite inferiore dell'integrale $t_0 = -\infty$ (8). Essa quindi si scriverà

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + m^2 \left[f(t) + \int_{-\infty}^t f(\tau)\,\psi(t-\tau)\,d\tau \right] = 0. \tag{12}$$

Per la validità delle formule si porrà

$$|\psi(x)| < \frac{M}{x^{1+\varepsilon}} \qquad (\text{per } x > 0),$$

(8) Cfr. la Nota. *Sulle equazioni della elettrodinamica* già citata, p. 207, nota (1) a piè di pagina [in questo vol.: p. 280, nota (2)].

M ed ε essendo quantità positive.

La (12) può scriversi

$$(12') \qquad \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + m^2 \left[f(t) + \int_0^\infty f(t-x)\, \psi(x)\, dx \right] = 0 .$$

Dimostreremo adesso il teorema: *se $\psi(x)$ è una funzione positiva decrescente, l'equazione precedente non ammette soluzioni periodiche diverse da zero.* La possibilità quindi di moti periodici resta esclusa da questo teorema, quando si ammetta che i coefficienti di eredità siano positivi e decrescenti.

Supponiamo che l'equazione integro-differenziale (12') abbia una soluzione periodica, di periodo T, sviluppabile in serie di FOURIER uniformemente convergente insieme alle sue derivate prima e seconda. Avremo

$$(13) \qquad f(t) = \sum_0^\infty \left[a_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + b_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \right],$$

quindi sostituendo nella (12') sarà

$$0 = \sum_0^\infty \left\{ \left[a_n \left(-\frac{4\pi^2 n^2}{T^2} + m^2 + \int_0^\infty \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \psi(x)\, dx \right) \right. \right.$$

$$\left. + b_n \int_0^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \psi(x)\, dx \right] \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + \left[- a_n \int_0^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \psi(x)\, dx \right.$$

$$\left. \left. + b_n \left(-\frac{4\pi^2 n^2}{T^2} + m^2 + \int_0^\infty \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \psi(x)\, dx \right) \right] \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \right\},$$

e perciò

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} & a_n \left(-\frac{4\pi^2 n^2}{T^2} + m^2 + \int_0^\infty \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \psi(x)\, dx \right) \\ & \qquad\qquad + b_n \int_0^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \psi(x)\, dx = 0 , \\ & - a_n \int_0^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \psi(x)\, dx \\ & \qquad + b_n \left(-\frac{4\pi^2 n^2}{T^2} + m^2 + \int_0^\infty \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \psi(x)\, dx \right) = 0 . \end{aligned} \right.$$

Dalle equazioni precedenti segue che a_n e b_n dovranno esser nulli a meno che il determinante dei loro coefficienti sia nullo, ossia si abbia

$$(15)\qquad 0=\begin{vmatrix} -\dfrac{4\pi^2 n^2}{T^2}+m^2+\displaystyle\int_0^\infty \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\psi(x)\,dx & , & \displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\psi(x)\,dx \\ -\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\psi(x)\,dx & , & -\dfrac{4\pi^2 n^2}{T^2}+m^2+\displaystyle\int_0^\infty \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\psi(x)\,dx \end{vmatrix}.$$

$$=\left[-\frac{4\pi^2 n^2}{T^2}+m^2+\int_0^\infty \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\psi(x)\,dx\right]^2+\left[\int_0^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\psi(x)\,dx\right]^2.$$

Ma se $\psi(x)$ è positivo e decrescente e $n>0$,

$$\int_0^T \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\psi(x)\,dx>0$$

$$\int_T^{2T} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\psi(x)\,dx>0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{hT}^{(h+1)T} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\psi(x)\,dx>0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

h essendo un numero intero e positivo qualunque, onde

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\psi(x)\,dx>0,$$

e per conseguenza l'equazione (15) non può essere soddisfatta. La (12'), dunque, non può ammettere nessuna soluzione periodica all'infuori di $f=0$.