Deux types de relations logiques et la méthode de Poretsky.

Par

Zygmunt Kobrzyński (Varsovie).

Je considère une suite T finie ou du type ω des termes $t_1, t_2, \ldots$ Je désigne par E l'ensemble des fonctions logiques, dans le sens de Poretsky, des termes de la suite T; par E_n l'ensemble des fonctions logiques des termes du segment T_n de la suite T, c'est-à-dire des termes $t_1, t_2, \ldots, t_n$; par M_n l'ensemble des *minima*, dans le sens de Poretsky, de l'ensemble E_n; par $M_n(a)$, a appartenant à E_n, l'ensemble des minima du développement de la fonction logique a en une somme des minima de l'ensemble E_n.

Je discerne deux types de l'équivalence et de l'inclusion logiques des élements de l'ensemble E: l'*équivalence* (resp. l'*inclusion*) *structurale* et l'*équivalence* (resp. l'*inclusion*) *relative*.

Je dis que *a est structuralement équivalent à b dans l'ensemble* E_n, si a et b appartiennent à E_n et les ensembles $M_n(a)$ et $M_n(b)$ sont identiques; a sera dit *structuralement contenu dans b dans l'ensemble* E_n, si a et b appartiennent à E_n et $M_n(a)$ est contenu dans $M_n(b)$.

E_n étant contenu dans E_ν, les fonctions logiques structuralement équivalentes dans l'ensemble E_n le sont aussi dans l'ensemble E_ν; je les considère donc comme *structuralement équivalentes dans l'ensemble E*. Ces fonctions restent structuralement équivalentes, lorsqu'on change l'ordre des termes de la suite T ou lorsqu'on remplace la suite T par une suite des termes par rapport auxquels les termes de la suite T sont des fonctions logiques. Ces remarques concernent également la relation de l'inclusion.

T' désignant une suite à termes en général différents de T et

E' l'ensemble de leurs fonctions logiques, je fais correspondre à chaque terme de la suite T une et seulement une fonction logique appartenant à E'. Ainsi à chaque fonction logique a appartenant à E vient correspondre une et seulement une fonction logique appartenant à E', à savoir la fonction qui s'obtient de a en y remplaçant les termes de T par les élements correspondants de E'.

a et b appartenant à E, je dis que *a est équivalent à b dans l'ensemble E relativement à l' ensemble E'*, si les éléments de E' correspondants à a et b sont structuralement équivalents dans E'; a sera dit *contenu dans b dans l'ensemble E relativement à l'ensemble E'*, si l'élement de E' correspondant à a est structuralement contenu dans celui correspondant à b.

Dans le cas particulier l'équivalence et l'inclusion relatives se laissent définir par une *coupure* de l'ensemble E en deux classes disjointes F et V à proprietés suivantes:

1⁰ La somme des fonctions logiques a et b appartenant à E appartient à F alors et seulement alors, lorsque a et b appartiennent à F.

2⁰ Le produit des fonctions logiques a et b appartenant à E appartient à V alors et seulement alors, lorsque a et b appartiennent à V.

3⁰ Ni F ni V ne contient la négation d'aucun de ses éléments.

Dans le cas considéré, a sera dit *équivalent à b relativement à cette coupure* , si a et b appartiennent simultanément à F ou à V; je dirai de-même que *a est contenu dans b relativement à cette coupure*, si a et b appartiennent à E et a appartient à F ou b appartient à V. Ces définitions sont équivalentes aux precédentes dans le cas de la suite T' formée de deux termes (que l'on fera correspondre respectivement aux ensembles F et V).

Les deux types des relations ci dessus verifient les formules du Calcul de Schroeder, c'est-à-dire du Calcul logique sans principe d'assertion; ces relations appartiennent donc à l'Algèbre des Ensembles, les notions de „terme" et de „fonction logique" pouvant être définies par la seule description de leur structure. indépendamment de tout système de la Logique.

Application: En désignant par $N(M)$, où M est un ensemble fini, le nombre des éléments de l'ensemble M, j'appelle la *probabilité de la fonction logique a dans l'ensemble E_n* la relation $\frac{N(M_n(a))}{N(M_n)}$,

a appartenant à E_n; d'une façon analogue j'appelle la *probabilité de a par rapport à b dans l'ensemble E_n*, la relation $\frac{N(M_n(a))}{N(M_n(b))}$, a et b appartenant à E_n et étant $N(M_n(b)) \neq 0$.

E_n étant contenu dans E_ν et a appartenant à E_n, les probabilités de la fonction logique a dans les ensembles E_n et E_ν sont égales. Leur valeur commune peut être considérée comme *probabilité de la fonction logique a dans l'ensemble E*. La même remarque concerne la probabilité de a par rapport à b.

Les formules fondamentales du Calcul des Probabilités, analogues à celles du Calcul des „Wahrheitswerte" de M. Jan Łukasiewicz, exposées dans son ouvrage: „*Die logischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*" (Krakau, Akad. der Wissensch. 1913), concernent dans ce cas l'équivalence et l'inclusion structurales.