SUGLI INTEGRALI ABELIANI RIDUCIBILI (*)

Nota II.

8 (**). Un sistema di $\frac{1}{2}\,p\,(p-1)$ relazioni fra i periodi $\omega_{j,k}$ del tipo

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\,\omega_{j,r}\,\omega_{k,s}=0 \quad (j,k=1,2,\dots p\,;\ j<k), \tag{5}$$

dove le $c_{r,s}$ siano dei numeri interi costituenti gli elementi di un determinante emisimmetrico d'ordine $2p$, si dirà, per i periodi $\omega_{j,k}$, un *sistema di relazioni di Riemann.*

Un sistema di relazioni di Riemann (5) si dirà poi un sistema di Riemann *principale* se, indicati con

$$\xi_j+i\eta_j \quad (i=\sqrt{-1}\,;\ \xi_j \text{ e } \eta_i \text{ reali}\,;\ j=01\dots 2p)$$

i periodi di una combinazione lineare omogenea qualunque degli integrali $u_1, u_2, \dots, u_p$ nel fissato sistema primitivo di cicli lineari, si abbia sempre

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\,\xi_r\,\eta_s>0$$

o sempre

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\,\xi_r\,\eta_s<0\,.$$

Per quanto è detto nella mia già citata Nota di Palermo ([16]), ciò equivale a dire che il sistema di relazioni di Riemann (5) è prin-

(*) *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei,* vol. XXIV, Serie 5ª 1º sem. 1915, pp. 645-654.

(**) La numerazione degli articoli, delle formule e delle note è fatta in continuazione di quella della Nota I,

([16]) Scorza, loc. cit. ([5]), n. 1.

cipale o non, secondo che è definita o non la forma Hermitiana nelle variabili $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ (e nelle loro coniugate $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2 \ldots \overline{\lambda}_p$) data da

$$\frac{1}{2i} \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} \sum_{j,k}^{1\ldots p} c_{r,s}\, \omega_{j,r}\, \overline{\omega}_{k,s}\, \lambda_j\, \overline{\lambda}_k .$$

Per un classico teorema di RIEMANN e WEIERSTRASS, poichè le $\omega_{j,k}$ sono i periodi degli integrali $u_1, u_2, \ldots u_p$, *un sistema principale di relazioni di* RIEMANN *per le $\omega_{j,k}$ esiste certamente.*

Se i periodi $\omega_{j,k}$ sono legati dalle relazioni di due sistemi di RIEMANN, aventi l'uno i coefficienti $c_{r,s}$ e l'altro i coefficienti $c'_{r,s}$, i periodi stessi sono legati da tutti i sistemi di relazioni di RIEMANN aventi per coefficienti le $\varrho c_{r,s} + \sigma c'_{r,s}$, ove ϱ e σ sono intieri qualunque; quindi, di codesti sistemi di relazioni di RIEMANN, o ve n'ha uno solo — principale — (i suoi coefficienti essendo determinati a meno di un fattore di proporzionalità intero), o ve n'è tutta un'infinità discontinua assimilabile a quella dei punti razionali di uno spazio lineare.

La *caratteristica* di un sistema di relazioni di RIEMANN sarà la caratteristica (necessariamente pari) del relativo determinante $|c_{r,s}|$; quindi, per un teorema ben noto ([17]), la caratteristica di un sistema principale è $2p$.

9. Ora si osservi che scrivere le (5) equivale a scrivere le condizioni necessarie e sufficienti perchè il sistema nullo razionale di Σ, rappresentato dall'equazione

$$(5^{bis}) \qquad \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s}\, y_r\, x_s = 0,$$

abbia in τ (e quindi, attesa la realità delle $c_{r,s}$, anche in $\overline{\tau}$) uno spazio totale; dunque:

In Σ esistono sempre dei sistemi nulli razionali aventi in τ e $\overline{\tau}$ due spazî totali; e se ne esiste più di uno, ne esistono senz'altro infiniti, la loro totalità potendo assimilarsi a quella (discontinua) dei punti razionali di un conveniente spazio lineare.

([17]) KRAZER, loc. cit. ([7]), pag. 119. Del resto, questo fatto e quello invocato più sopra (cfr. la citazione ([7])) son tutte e due compresi nella diseguaglianza che, coi simboli della nostra Nota di Palermo, è ivi scritta $\Delta_p > 0$ o $\Delta_1\, \Delta_p > 0$.

Ciascuno di questi sistemi nulli razionali si dirà, per comodità di discorso, un *sistema nullo di* V_p (relativo al sistema prescelto di cicli lineari).

10. Quando dal sistema di relazioni di RIEMANN (5) per i periodi $\omega_{j,k}$ si passa al corrispondente sistema nullo (5^{bis}) di V_p, viene a perdersi, in quest'ultimo, ogni traccia della scelta dei p integrali $u_1, u_2, \dots, u_p$ fra gli ∞^{p-1} integrali semplici di 1ª specie di V_p. Ciò significa che il sussistere delle (5) per i periodi degli integrali $u_1, u_2, \dots, u_p$ implica il sussistere di relazioni con gli *stessi* coefficienti per i periodi di altri p *qualsiansi* integrali semplici di 1ª specie indipendenti di V_p (18); quindi i coefficienti di un sistema di

(18) È facile comporre una dimostrazione algebrica diretta di questa circostanza. Dagli integrali $u_1, u_2, \dots, u_p$ (coi periodi $\omega_{j,k}$) si passi agli integrali indipendenti $U_1, U_2, \dots U_p$ (coi periodi $\Omega_{j,k}$), essendo

$$u_j = \sum_{l=1}^{l=p} \mu_{j,l}\, U_l, \qquad (j = 1, 2, \dots p)$$

e il determinante $|\mu_{j,l}|$ diverso da zero.

Sarà

$$\omega_{j,r} = \sum_{l=1}^{l=p} \mu_{j,l}\, \Omega_{l,r} \qquad (j = 1, \dots p;\ r = 1, 2, \dots 2p),$$

e quindi, posto

$$a_{l,m} = \sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\, \Omega_{l,r}\, \Omega_{m,s} \qquad (l, m = 1, 2, \dots p),$$

da

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\, \omega_{j,r}\, \omega_{k,s} = 0 \qquad (j, k = 1, \dots p;\ j < k),$$

seguirà

$$(\alpha) \qquad \sum_{l,m}^{1\dots p} \mu_{j,l}\, \mu_{k,m}\, a_{l,m} = 0 \qquad (j, k = 1, \dots p;\ j < k).$$

Poichè $a_{m,l} = -a_{l,m}$, le $a_{l,m}$ distinte e non nulle sono $\frac{1}{2} p(p-1)$ e si ottengono tutte fissando di considerare soltanto quelle per cui $l < m$. Le relazioni lineari omogenee (α) che le legano sono appunto in numero di $\frac{1}{2} p(p-1)$; e in ciascuna delle (α) il coefficiente complessivo di una $a_{l,m}$ ($l < m$) è del tipo $\mu_{j,l}\mu_{k,m} - \mu_{j,m}\mu_{k,l}$, cioè è un minore del 2° ordine del determinante $|\mu_{j,l}|$. Ma allora, per un teorema di SYLVESTER, le (α) sono indipendenti, e le $a_{l,m}$ sono, come volevasi, tutte nulle.

relazioni di RIEMANN dipendono non già dalla scelta di p integrali indipendenti fra gli ∞^{p-1} integrali semplici di 1ª specie di V_p, ma dalla scelta del sistema primitivo di cicli lineari sulla riemanniana di V_p.

Per render conto di questo fatto anche col linguaggio, come parliamo di sistemi nulli di V_p (relativamente a un fissato sistema di cicli), parleremo anche di *relazioni di* RIEMANN *di* V_p (relativamente a un fissato sistema di cicli), queste ultime rispondendo biunivocamente a quelli, quando si prescinda da fattori di proporzionalità intieri. E la *caratteristica* di una relazione di RIEMANN di V_p sarà, naturalmente, la caratteristica di uno qualunque dei sistemi di RIEMANN a cui essa dà luogo.

Ma v' è di più. Se il sistema (5) di relazioni di RIEMANN fra i periodi $\omega_{j,k}$ è un sistema principale, basta tener conto della prima definizione data di sistemi principali, per accorgersi che sono principali *tutti* i sistemi di relazioni di RIEMANN provenienti, col sistema (5), da una stessa relazione di RIEMANN di V_p; quindi, anzi che di sistemi di relazioni di RIEMANN principali o non, potremo, meglio, parlare di *relazioni di* RIEMANN e di *sistemi nulli — di V_p — principali o non.*

Notisi che i sistemi nulli principali sono tutti *non* singolari, e *di essi ne esiste sempre almeno uno.*

11. Abbiamo già detto quale sia su τ e $\overline{\tau}$ l'effetto di un cambiamento nella scelta del sistema primitivo di cicli lineari sulla riemanniana di V_p; quindi possiamo dire, senz'altro, che il cambiare questo sistema equivale ad applicare ai sistemi nulli di V_p relativi all'antico sistema di cicli una omografia unimodulare razionale, per la quale appunto sistemi nulli razionali vanno in sistemi nulli razionali.

Facciamo vedere che per una tale trasformazione omografica *i sistemi nulli principali si mutano in sistemi nulli principali*; dopo ciò, la nomenclatura introdotta apparirà del tutto giustificata ed opportuna, e la sua importanza verrà posta in tutta la luce desiderabile.

La cosa è intuibile *a priori*, e risulta incidentalmente dall'interpretazione geometrica del teorema di esistenza delle funzioni abeliane che daremo altrove; ma si può dimostrare agevolmente col breve calcolo che segue.

Sia

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\,\omega_{j,r}\,\omega_{k,s} = 0 \qquad (j, k = 1, \dots p\,;\; j < k) \tag{6}$$

un sistema principale di relazioni di RIEMANN per i periodi $\omega_{j,k}$.

Effettuando sui periodi $\omega_{j,k}$ la sostituzione unimodulare a coefficienti interi

$$\omega_{j,k} = \sum_{l=1}^{l=2p} h_{k,l}\,\Omega_{j,l} \qquad (j = 1, 2, \dots p\,;\; k = 1, 2, \dots 2p), \tag{7}$$

il sistema di RIEMANN (6) si muta nel sistema di relazioni di RIEMANN per i periodi trasformati $\Omega_{j,l}$ dato dalle equazioni

$$\sum_{l,m}^{1\dots 2p} C_{l,m}\,\Omega_{j,l}\,\Omega_{k,m} = 0 \quad (j, h = 1, \dots p\,;\; j < k), \tag{8}$$

ove

$$C_{l,m} = \sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\,h_{r,l}\,h_{s,m}\,.$$

Per la sostituzione (7), la forma Hermitiana

$$\frac{1}{2i}\sum_{r,s}^{1\dots 2p}\sum_{j,k}^{1\dots p} c_{r,s}\,\omega_{j,r}\,\overline{\omega}_{k,s}\,\lambda_j\,\overline{\lambda}_k\,,$$

diventa

$$\frac{1}{2i}\sum_{l,m}^{1\dots 2p}\sum_{j,k}^{1\dots p} C_{l,m}\,\Omega_{j,l}\,\overline{\Omega}_{k,m}\,\lambda_j\,\overline{\lambda}_k\,,$$

dunque anche il sistema di RIEMANN (8) è, come (6), un sistema principale.

12. Se un sistema nullo di Σ ha in τ e $\overline{\tau}$ due spazî totali e ha per asse un S_{2l-1}, questo S_{2l-1} deve trovarsi con ciascuno degli spazî τ e $\overline{\tau}$ in un S_{p+l-1}, e quindi deve tagliare τ e $\overline{\tau}$ in spazî la cui dimensione non può essere inferiore a

$$(p-1) + (2l-1) - (p+l-1) = l-1.$$

D'altra parte, poichè τ e $\overline{\tau}$ sono indipendenti, uno spazio di τ (o di $\overline{\tau}$) di dimensione superiore ad $l-1$ non può esser congiunto a uno spazio di $\overline{\tau}$ (o di τ) di dimensione uguale o superiore ad $l-1$

da un S_{2l-1}; dunque quell'S_{2l-1} taglia τ e $\overline{\tau}$ in spazi che hanno proprio la dimensione $l - 1$.

Ciò dimostra che:

Se fra i sistemi nulli di V_p ve n'è uno dotato di asse, V_p ammette un sistema regolare di integrali riducibili avente per asse l'asse del considerato sistema nullo.

Questo teorema, come risulterà dalle osservazioni che seguono, è invertibile; e quindi:

I sistemi regolari di integrali riducibili di V_p della dimensione $q - 1$ sono tanti quanti sono gli assi distinti (di dimensione $2q - 1$) dei sistemi nulli singolari di V_p di specie $2q$.

In base a questo risultato, si vede che lo studio della totalità dei sistemi regolari di integrali riducibili di V_p è intimamente legato a quello della varietà dei sistemi nulli o complessi lineari di Σ aventi in τ e $\overline{\tau}$ due spazî totali.

Ci riserbiamo pertanto di ritornarvi quando avremo utilizzato questa stessa varietà per lo studio delle funzioni abeliane singolari: qui ci limitiamo a far osservare che è facile assegnare un massimo per la dimensione dello spazio lineare che dà coi suoi punti razionali, nel modo detto più sopra, una rappresentazione della totalità dei sistemi nulli di V_p.

Tale massimo è $p^2 - 1$, e può essere effettivamente raggiunto.

13. Sia Π un sistema nullo di V_p, privo di spazio singolare, e A un sistema regolare di integrali riducibili di V_p della dimensione $q - 1$; un sistema nullo come Π esiste certo, qualunque sia V_p.

L'asse A_1 di A è un S_{2q-1} razionale, appoggiato a τ e $\overline{\tau}$ secondo le imagini α e $\overline{\alpha}$ di A: dunque lo spazio polare di A_1 rispetto a Π è un $S_{2(p-q)-1}$ razionale, appoggiato a τ e $\overline{\tau}$ secondo due spazî imaginarii coniugati β e $\overline{\beta}$ della dimensione $p - q - 1$; ma allora questo $S_{2(p-q)-1}$ è l'asse B_1 di un sistema regolare B di V_p della dimensione $p - q - 1$, e quindi abbiamo, intanto, che:

Se V_p ammette un sistema regolare di integrali riducibili della dimensione $q - 1$, ammette pure un sistema regolare di integrali riducibili della dimensione $p - q - 1$.

14. Due sistemi regolari, come A e B del teorema precedente, per cui esiste un sistema nullo di V_p non singolare, tale che rispetto ad esso l'asse dell'un sistema sia lo spazio polare dell'asse dell'altro, si diranno *associati*; due sistemi regolari indipendenti, le cui di-

mensioni abbiano per somma $p - 2$, si diranno col SEVERI, *complementari* (19).

15. Siano A e B due sistemi regolari associati di integrali riducibili di V_p; saranno essi anche complementari, cioè indipendenti?

La risposta è certo affermativa se, per es., nè A nè B contengono un sistema regolare di dimensione inferiore alla propria, e A e B sono distinti; ma un caso assai più interessante, in cui la risposta è sempre affermativa, è dato dal seguente teorema:

Se esiste un sistema nullo principale di V_p, rispetto a cui gli assi di A e B sono l'uno polare dell'altro, A e B sono non solo associati ma anche complementari.

Supponiamo, come è lecito, che A sia il sistema determinato dai q integrali $u_1, u_2, \dots u_q$, e che la tabella (I) (Nota I) dei periodi primitivi abbia l'aspetto

$$(9) \qquad \left| \begin{array}{llll} \omega_{1,1} \dots \omega_{1,2q} & & 0 \dots\dots\dots 0 & \\ \omega_{2,1} \dots \omega_{2,2q} & & 0 \dots\dots\dots 0 & \\ \omega_{q,1} \dots \omega_{q,2q} & & 0 \dots\dots\dots 0 & \\ \omega_{q+1,1} \dots \omega_{q+1,2q} & & \omega_{q+1,2q+1} \dots \omega_{q+1,2p} & \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & \\ \omega_{p,1} \dots \omega_{p,2q} & & \omega_{p,2q+1} \dots \omega_{p,2p} & \end{array} \right| ;$$

ciò è sempre ottenibile con un conveniente mutamento del sistema primitivo dei cicli lineari sulla riemanniana di V_p, con che i sistemi nulli principali vanno in sistemi nulli principali.

Poi sia

$$(10) \qquad \sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\, y_r\, x_s = 0$$

l'equazione del considerato sistema nullo principale.

Poniamo

$$\omega_{j,k} = \alpha_{j,k} + i\beta_{j,k} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

(19) SEVERI, loc. cit. (2), pag. 585.

con le $\alpha_{j,k}$ e $\beta_{j,k}$ reali e costruiamo il determinante Δ, d'ordine $2p$, le cui prime p righe sono date da quelle della matrice (9) quando al posto delle $\omega_{j\cdot k}$ si supponga di sostituire le $\alpha_{j,k}$ e le successive p righe sono date da quelle della matrice ottenuta sempre da (9) scrivendo $\beta_{j,k}$ al posto di $\omega_{j,k}$.

Allora, se si indica con

$$P_{j_1, j_2 \dots j_{2l}}$$

lo pfaffiano del minore principale del determinante $| c_{r,s} |$ formato con le righe e le colonne $j_1^{ma}, j_2^{ma}, \dots j_{2l}^{ma}$, e con

$$\delta_{j_1 j_2 \dots j_{2l}}$$

il minore di Δ formato con le righe

$$1^a, 2^a, \dots l^{ma}, (p+1)^{ma}, \dots (p+l)^{ma}$$

e le colonne

$$j_1^{ma}, j_2^{ma}, \dots j_{2l}^{ma},$$

posto

$$\Delta_l = (-1)^{\frac{l(l-1)}{2}} \sum_{j_1, j_2, \dots j_{2l}} P_{j_1, j_2, \dots j_{2l}} \, \delta_{j_1, j_2, \dots j_{2l}} \tag{11}$$

$$(j_1, j_2, \dots j_{2l} = 1 \dots 2p;\ j_1 < j_2 < \dots < j_{2l}),$$

dire che (10) è un sistema nullo principale di Δ_p equivale ad affermare che le Δ_l son tutte diverse da zero, quelle di indice pari essendo tutte positive e quelle di indice dispari essendo tutte dello stesso segno.

È quanto risulta dalla dimostrazione contenuta nella nosta Nota sul teorema d'esistenza delle funzioni abeliane.

Poichè le $\alpha_{j,k}$ e $\beta_{j,k}$ per $j = 1 \dots q$ e $k = 2q+1, \dots 2p$ sono tutte nulle, Δ_q si riduce al prodotto di

$$(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} \delta_{1,2,\dots 2q}$$

per lo pfaffiano del determinante emisimmetrico

$$C = \begin{vmatrix} 0 & c_{1,2} & c_{1,3} \dots c_{1,2q} \\ c_{2,1} & 0 & c_{2,3} \dots c_{2,2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{2q,1} & c_{2q,2} & c_{2q,3} \dots 0 \end{vmatrix};$$

dunque sarà certo

$$C \neq 0. \tag{12}$$

Ora l'asse A_1 del sistema regolare A è, nel caso in esame, l'S_{2q-1} di Σ secondo cui si tagliano gli iperpiani

$$x_{2q+1} = 0 \dots x_{2p} = 0 :$$

quindi il sistema nullo subordinato dal sistema nullo (10) in questo S_{2q-1} ha per equazione, nell'S_{2q-1} medesimo,

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2q} c_{rs}\, y_r\, x_s = 0. \tag{13}$$

cioè l'equazione che si ricava dalla (10) sopprimendovi tutti i termini che contengono coordinate con indice superiore a $2q$.

In virtù di (12), il sistema nullo (13) è certo non singolare, e quindi A_1 e B_1 sono, come volevasi, indipendenti.

Di qua, una volta che V_p ammette sempre un sistema nullo principale, almeno, risulta subito il classico teorema di Poincaré:

Se una varietà algebrica di irregolarità superficiale p ammette un sistema regolare di integrali riducibili della dimensione q — 1, ammetterà anche un sistema regolare di integrali riducibili della dimensione p — q — 1 indipendente dal primo.

Osservazione. — Gli integrali $u_1, u_2 \dots u_q$, si possono riguardare come q integrali semplici di 1ª specie indipendenti di una varietà algebrica V_q di irregolarità superficiale q; ebbene per questa V_q l'asse A_1 di A ha lo stesso ufficio che Σ ha per V_p e le imagini α e $\overline{\alpha}$ di B hanno lo stesso ufficio che τ e $\overline{\tau}$ per V_p; quindi il sistema nullo (13), che appunto ha due spazî totali in α ed $\overline{\alpha}$, è un sistema nullo di V_q. Ma non basta. Siccome le $\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_q$ involgono soltanto i periodi di $u_1, u_2, \dots u_q$ e i soli coefficienti dell'equazione (13), le disuguaglianze che esprimono l'ipotesi fatta sul sistema nullo (10) implicano, senz'altro, che anche il sistema nullo (13) è in A_1 un sistema nullo principale di V_q; dunque:

Un sistema nullo principale di V_p induce nell'asse di un qualsiasi sistema regolare appartenente a V_p un sistema nullo che è sistema nullo principale per la picardiana a cui competono gli integrali del considerato sistema regolare.

16. Il sistema nullo singolare avente per asse l'asse B_1 del sistema indicato nel n. prec. con B e riflettente in A_1 il sistema nullo (13) è un sistema nullo razionale avente in τ e $\overline{\tau}$ due spazî totali; ora, dei due sistemi A e B, *uno* dei due, per es. B, è un qualsiasi sistema regolare di integrali riducibili di V_p; dunque:

L'asse di un sistema regolare di integrali riducibili di V_p è pure asse di un sistema nullo singolare di V_p.

Con ciò è invertito il primo teorema del n. 11.

17. Abbiamo visto che due sistemi regolari associati di V_p, almeno sotto qualche condizione, sono anche complementari ([20]); invece:

Due sistemi complementari sono sempre due sistemi associati.

E infatti, siano A e B i due sistemi complementari di V_p delle dimensioni rispettive $q - 1$ e $p - q - 1$; A_1 e B_1 i loro assi; α e $\overline{\alpha}$, β e $\overline{\beta}$ le loro imagini.

Sia π_1 un sistema nullo razionale di A_1 che abbia due spazî totali in α e $\overline{\alpha}$; un tal sistema nullo, per quanto risulta dal n. 15 esiste certamente. Poi si indichi con Π_B il sistema nullo (razionale) di Σ che ha per asse B_1 e induce in A_1 il sistema nullo π_1.

Evidentemente, Π_B avrà due spazî totali in τ e $\overline{\tau}$.

Si costruisca, procedendo in modo analogo, un sistema nullo razionale di Σ, Π_A, che abbia per asse A_1 e due spazî totali in τ e $\overline{\tau}$.

I sistemi nulli del fascio determinato da Π_A e Π_B sono tutti, all'infuori di Π_A e Π_B, non singolari; e rispetto a ciascuno di essi, A_1 ha per spazio polare B_1. D'altra parte, fra questi sistemi nulli ve ne sono infiniti che sono razionali; dunque A e B sono come volevasi, associati.

18. Fin qui non ci siamo valsi che delle corrispondenze stabilite fra gli S_k ed S_{2p-k-2} di Σ dai sistemi nulli di V_p non singolari;

([20]) Che due sistemi associati possano non essere complementari si mostra subito con esempi.

ma anche quelli singolari dànno luogo, nello stesso modo, a qualche conseguenza, su cui, per altro, riteniamo inutile di fermarci adesso.

19. Nei teoremi dimostrati è implicitamente contenuto il legame richiesto fra la presenza di sistemi regolari riducibili nel sistema degli integrali (semplici di 1ª specie) di V_p e le relazioni di RIEMANN che intercedono fra i periodi di questi ultimi: basta, per accorgersene, enunciarli in linguaggio algebrico, anzi che geometrico.

Si ottiene così la seguente proposizione che involge e precisa il teorema di POINCARÉ:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà algebrica di irregolarità superficiale p contenga un sistema regolare di integrali semplici di 1ª specie riducibili, è che fra le sue relazioni di RIEMANN *(relative a un fissato sistema primitivo di cicli lineari) ne esista qualcuna di caratteristica inferiore a $2p$.*

Ove esista una di queste relazioni di caratteristica $2q\,(q < p)$, ne esiste anche una di caratteristica $2\,(p - q)$, tale che il fascio di relazioni che esse determinano non contiene altre relazioni di caratteristica inferiore a $2p$.

Si badi che a una relazione di RIEMANN di caratteristica $2q(q<p)$ risponde sulla V_p un ben determinato sistema regolare ∞^{q-1} di integrali riducibili; quello cioè che ha per asse l'asse del sistema nullo singolare di V_p rispondente alla considerata relazione di RIEMANN. Ma poichè per $p > 2$ possono aversi sistemi nulli singolari di V_p diversi aventi lo stesso asse, uno stesso sistema regolare ∞^{q-1} di integrali riducibili di V_p può provenire da infinite relazioni di RIEMANN a caratteristica $2q$ (appartenenti a uno stesso sistema lineare).

Ciò non sussiste, come è chiaro, per il caso $p = 2$; e quindi, per $p = 2$, *la corrispondenza in discorso è perfettamente biunivoca.*