LE VARIETA' DI VERONESE E LE FORME QUADRATICHE DEFINITE (*)

Sia

$$f = \sum_{i,j}^{1\dots r+1} a_{i,j}\, x_i\, x_j$$

una forma quadratica a coefficienti reali nelle $r+1$ variabili reali $x_1, x_2, \dots, x_{r+1}$, essendo al solito $a_{i,j} = a_{j,i}$.

Posto

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,h} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{h,1} & a_{h,2} & \dots & a_{h,h} \end{vmatrix},$$

perchè la f sia definita (positiva o negativa) occorre e basta, com'è ben noto, che le Δ_h siano tutte diverse da zero, quelle di indice pari essendo tutte positive e quelle di indice dispari essendo tutte del medesimo segno.

Ora si supponga di considerare le $a_{i,j}\ (i \leqq j)$ come coordinate omogenee di punto in uno spazio a $\frac{r(r+3)}{2}$ dimensioni; a ogni forma quadratica f nelle variabili $x_1, x_2, \dots, x_{r+1}$ risponderà *un* punto di questo spazio e ad ogni punto di questo spazio *una* forma f, se si suppone di riguardare come non distinte due forme quadratiche i cui coefficienti differiscano soltanto per un fattore di proporzionalità. Come si caratterizza geometricamente il campo a $\frac{r(r+3)}{2}$ dimensioni che per tal modo viene a corrispondere alla totalità delle forme quadratiche definite nelle $r+1$ variabili $x_1, x_2, \dots, x_{r+1}$?

(*) *Rend. della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli*, Fasc. 11° e 12° - Novembre e Dicembre 1915.

La risposta a questa domanda vien fornita dalle considerazioni che seguono, le quali si svolgono affatto parallelamente ad alcune altre che ho esposte in un recente lavoro sulle funzioni abeliane [1].

Veramente, come avrò occasione di far vedere in altro luogo, valendomi di quest'ultime avrei potuto arrivare allo scopo per una via molto rapida; ma l'alto interesse geometrico delle varietà di VERONESE mi ha indotto a seguire un procedimento diretto, per avere il destro di richiamar l'attenzione sopra alcune delle loro proprietà più salienti.

Solo che, appunto per il parallelismo a cui più sopra ho accennato, mi sarà permesso di sorvolare sui dettagli di qualche ragionamento.

1. In uno spazio proiettivo Σ', a r dimensioni (complesse), consideriamo il sistema lineare $\infty^{\frac{r(r+3)}{2}}$ delle quadriche-inviluppo e riferiamolo omograficamente all'insieme dei punti di uno spazio Σ a $\dfrac{r(r+3)}{2}$ dimensioni (complesse); alla totalità delle quadriche-inviluppo di Σ' specializzate k volte almeno $(k = 1, 2, \ldots, r)$ verrà a corrispondere in Σ una varietà $F^{(k)}$ della dimensione

$$\frac{r(r+3)}{2} - \frac{k(k+1)}{2}.$$

L'ordine di $F^{(k)}$ è stato determinato dal sig. SEGRE [2] ed è dato, per $k = r$, da

$$2^r,$$

per $k < r$ e dispari da

$$\frac{(r+1)_k (r+3)_k \ldots (r+k)_k}{k_k (k+2)_k \ldots (2k-1)_k},$$

e per $k < r$ e pari da

$$\frac{(r+2)_{k+1} (r+4)_{k+1} \ldots (r+k)_{k+1}}{(k+1)_{k+1} (k+3)_{k+1} \ldots (2k-1)_{k+1}},$$

(1) SCORZA, *Il teorema fondamentale per le funzioni abeliane singolari* [Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL), seria 3ª, t. XIX].

(2) SEGRE, *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. IX (2° semestre 1900), pp. 253-260], n°. 4.

dove, al solito, si è fatto uso della notazione definita dall'eguaglianza

$$m_n = \binom{m}{n}.$$

Nella successione

(1) $$F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(r)}$$

delle varietà $F^{(k)}$, $F^{(1)}$ è un'ipersuperficie dell'ordine $r+1$, ed $F^{(r)}$ è la varietà (di dimensione r e ordine 2^r) avente per il sistema di quadriche-inviluppo di Σ' lo stesso significato che la superficie di VERONESE ha per il sistema delle coniche-inviluppo di un piano. Precisando una denominazione introdotta altrove ([3]), la $F^{(r)}$ la diremo, per questo fatto, la *varietà di* VERONESE *di indice* r; per modo che le varietà di VERONESE di indici 0, 1 e 2 sono, ordinatamente, il punto, la conica ordinaria (irriducibile) e la superficie di VERONESE.

Nella serie (1), $F^{(2)}, F^{(3)}, \dots, F^{(r)}$ sono, successivamente, la varietà dei punti doppi, tripli, ..., r-pli di $F^{(1)}$ (di guisa che $F^{(k)}$ sta, per $k > 1$, su $F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(k-1)}$) mentre le $F^{(r-1)}, F^{(r-2)}, \dots, F^{(1)}$ sono, ordinatamente, i luoghi delle corde, dei piani trisecanti, ..., degli S_{r-1} r-secanti della varietà di VERONESE $F^{(r)}$.

L'ipersuperficie $F^{(1)}$ si dirà *l'ipersuperficie congiunta ad* $F^{(r)}$, ed $F^{(r)}$ si dirà il *nucleo* di $F^{(1)}$ e della successione $F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(r-1)}$.

2. Una quadrica-inviluppo di Σ' k volte specializzata è l'insieme degli iperpiani tangenti a una quadrica-inviluppo non specializzata di un S_{r-k} di Σ', che si dice il suo *nucleo*; quindi la totalità dei punti di $F^{(k)}$ viene ad esser rappresentata biunivocamente, senza eccezioni, sull'insieme delle quadriche inviluppo non specializzate degli $S_{r-k}, S_{r-k-1}, \dots, S_0$ di Σ'.

In particolare $F^{(r)}$ si riflette sull'insieme dei punti di Σ', le imagini delle sezioni iperpiane di $F^{(r)}$ essendo, com'è noto, le quadriche-luogo di Σ'; ed $F^{(r-1)}$ si riflette sulle coppie (non ordinate) di punti di Σ'.

Nella corrispondenza omografica indotta, dalla rappresentazione di $F^{(r)}$ su Σ', fra gli iperpiani di Σ e le quadriche-luogo di Σ',

([3]) SCORZA, *Sulle varietà a quattro dimensioni di* S_r ($r \geq 9$) *i cui* S_4 *tangenti si tagliano a due a due* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXVII, 1909), nota ([5]) a piè di pagina.

alla totalità delle quadriche-luogo di Σ' specializzate k volte almeno risponde in Σ una varietà di iperpiani $\Phi^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ e la successione di varietà

$$(2) \qquad \Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots, \Phi^{(r)}$$

non è che una trasformata per dualità della successione (1). Da ciò segue, in particolare, che la dimensione e la classe di $\Phi^{(k)}$ eguagliano, rispettivamente, la dimensione e l'ordine di $F^{(k)}$.

3. Per illustrare, nel modo più nitido e più completo, le relazioni mutue delle successioni di varietà (1) e (2), giova rifarsi dalle considerazioni che seguono.

Consideriamo lo spazio Σ' come uno spazio rappresentativo della varietà di VERONESE $F^{(r)}$, nel senso dichiarato più sopra. Allora ai punti di un S_k di Σ' $(0 \leq k < r)$ rispondono su $F^{(r)}$ i punti di una varieta di VERONESE di indice k, che al variare di quell'S_k entro Σ' descrive una schiera della dimensione

$$(k+1)(r-k).$$

Indicheremo questa schiera col simbolo $[k]$; la sua varietà corrente si chiamerà $L^{(k)}$ e lo spazio di appartenenza di $L^{(k)}$, che ha la dimensione $\frac{k(k+3)}{2}$, si dirà $\sigma^{(k)}$.

Le schiere $[k]$ ed $[r-k-1]$ di $F^{(r)}$ si diranno *complementari* e tali si diranno pure una $L^{(k)}$ ed una $L^{(r-k-1)}$ quando non abbiamo punti comuni, cioè quando si riflettano sopra un S_k e un S_{r-k-1} di Σ', che siano fra loro indipendenti.

Due schiere complementari hanno la stessa dimensione: per $k+1$ punti generici di $F^{(r)}$ passa una ed una sola varietà della schiera $[k]$; una $L^{(k)}$ e una $L^{(k')}$ o non hanno punti comuni o si tagliano in una varietà $L^{(k'')}$, essendo k'' un indice opportuno; ecc. ecc.

Si osservi che:

Le varietà della schiera $[h]$ *di una* $L^{(k)}$ $(h < k)$ *appartengono tutte alla schiera* $[h]$ *di* $F^{(r)}$;

e che:

Se $G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots, G^{(k-1)}$ *sono le varietà di cui è nucleo una* $L^{(k)}$, $G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots, G^{(k-1)}, L^{(k)}$ *appartengono rispettivamente ad* $F^{(r-k+1)}$, $F^{(r-k+2)}, \ldots, F^{(r-1)}, F^{(r)}$.

4. La schiera di varietà (di iperpiani) di VERONESE avente per $\Phi^{(r)}$ lo stesso significato che $[k]$ ha per $F^{(r)}$ si indicherà con $|k|$, la sua varietà corrente si dirà $\lambda^{(k)}$, la stella cui appartiene $\lambda^{(k)}$ si chiamerà $s^{(k)}$ e il sostegno di $s^{(k)}$ si indicherà con $S^{(k)}$.

Poichè $s^{(k)}$, come totalità di iperpiani, ha la dimensione $\dfrac{k(k+3)}{2}$, $S^{(k)}$ avrà la dimensione

$$\frac{r(r+3)}{2} - \frac{k(k+3)}{2} - 1.$$

5. Uno spazio $\sigma^{(k)}$ è l'imagine, entro Σ, del sistema lineare di quadriche-inviluppo di Σ, specializzate $r-k$ volte almeno, aventi il nucleo in un determinato S_k di Σ', dunque:

Gli spazi $\sigma^{(k)}$ cui appartengono le varietà $L^{(k)}$ della schiera $[k]$ stanno tutti sulla $F^{(r-k)}$.

Viceversa, si vede subito che:

Se per un punto P di $F^{(r-k)}$ (e quindi di $F^{(r-k-1)}, \ldots, F^{(2)}, F^{(1)}$) $F^{(r-k)}$ è la $F^{(l)}$ di indice l più elevato che lo contiene, per P passa uno ed un solo spazio $\sigma^{(k)}$; se invece tale indice è dato da $r-k+h$ (con $h>0$), per il punto P passano $\infty^{h(r-k)}$ spazi $\sigma^{(k)}$ ed uno ed un solo spazio $\sigma^{(k-h)}$, quest'ultimo essendo la completa intersezione di quelli.

6. Lo spazio S_r tangente a $F^{(r)}$ in un suo punto P, avente per imagine in Σ' il punto P', è, per un noto ragionamento, lo S_r di Σ (situato su $F^{(r-1)}$) rispondente alle coppie di punti di Σ' che hanno un punto fisso in P'; ed è pur noto che un punto e un iperpiano di Σ si appartengono, quando la quadrica inviluppo e la quadrica-luogo di Σ', in cui essi si riflettono, sono coniugate od armoniche.

Ciò posto, si consideri una varietà $L^{(k)}$ di $F^{(r)}$, che abbia per imagine in Σ' l'$S_k\,\alpha$. Perchè un iperpiano di Σ contenga tutti gli S_r tangenti a $F^{(r)}$ nei singoli punti di $L^{(k)}$ occorre e basta, per quanto è stato detto, che la quadrica-luogo di Σ' ad esso corrispondente sia specializzata almeno $k+1$ volte ed abbia un S_k singolare nello spazio α: d'altro canto, al sistema lineare dei coni quadrici di Σ' il cui vertice coincide con (o contiene) α risponde in Σ l'insieme degli iperpiani di una stella $s^{(r-k-1)}$, dunque gli S_r tangenti ad $F^{(r)}$ nei punti di $L^{(k)}$ stanno tutti nel sostegno $S^{(r-k-1)}$ di una stella $s^{(r-k-1)}$ e questo è il loro spazio di appartenenza.

Da tutto ciò segue che:

Gli S_r tangenti a $F^{(r)}$ nei punti di una varietà $L^{(k)}$ appartengono ad uno spazio della dimensione

$$\frac{r(r+3)}{2} - \frac{(r-k-1)(r-k+2)}{2} - 1$$

che è il sostegno $S^{(r-k-1)}$ di una stella $s^{(r-k-1)}$, e viceversa; quindi $\Phi^{(k+1)}$ è l'insieme degli iperpiani di Σ, ciascun dei quali tocca $F^{(r)}$ in tutti i punti di una sua $L^{(k)}$.

L'$S^{(r-k-1)}$, contenente gli S_r tangenti a $F^{(r)}$ nei punti di una $L^{(k)}$, si dirà *lo spazio tangente ad $F^{(r)}$ lungo questa $L^{(k)}$*. Si osservi poi che:

Se per $k+1$ punti di $F^{(r)}$ passa una, ed una sola, varietà della schiera $[k]$, un iperpiano, che contenga gli S_r tangenti a $F^{(r)}$ in quei punti, contiene tutti gli S_r tangenti a $F^{(r)}$ nei punti di questa varietà; e quindi gli S_r tangenti a $F^{(r)}$ in quei $k+1$ punti hanno, come spazio di appartenenza, uno degli spazi $S^{(r-k-1)}$.

Di qua, per una proposizione del sig. TERRACINI [4], si ha che:

Gli spazi tangenti ad $F^{(r)}$ lungo le varietà della schiera $[k]$ toccano, lungo i relativi spazi $\sigma^{(k)}$, la varietà $F^{(r-k)}$; quindi $\Phi^{(k+1)}$ è l'insieme degli iperpiani tangenti ad $F^{(r-k)}$. Cosicchè, in particolare:

Gli iperpiani tangenti di $F^{(1)}$ sono quelli di $\Phi^{(r)}$, e ciascuno di questi tocca $F^{(1)}$ in tutti i punti di uno spazio $\sigma^{(r-1)}$, e tocca $F^{(r)}$ in tutti i punti della $L^{(r-1)}$ appartenente a questo $\sigma^{(r-1)}$.

7. *Se le varietà $L_1^{(k)}$ ed $L_1^{(r-k-1)}$ delle schiere $[k]$ ed $[r-k-1]$ di $F^{(r)}$ sono complementari, lo spazio di appartenenza dell'una è indipendente dallo spazio tangente ad $F^{(r)}$ lungo l'altra: e inversamente.*

E infatti sia $\sigma_1^{(k)}$ lo spazio di appartenenza di $L_1^{(k)}$, ed $S_1^{(k)}$ lo spazio tangente ad $F^{(r)}$ lungo $L_1^{(r-k-1)}$; poi siano α_1 e β_1, rispettivamente, l'S_k e l'S_{r-k-1} di Σ', su cui si rappresentano i punti di $L_1^{(k)}$ ed $L_1^{(r-k-1)}$.

Se gli spazi $\sigma_1^{(k)}$ ed $S_1^{(k)}$, che hanno le dimensioni rispettive

$$\frac{k(k+3)}{2}$$

[4] TERRACINI, *Sulle V_k per cui la varietà degli S_h $(h+1)$-secanti ha dimensione minore dell'ordinario* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXI, 1911, (1º semestre), pp. 392-396].

ed

$$\frac{r(r+3)}{2} - \frac{k(k+3)}{2} - 1,$$

avessero qualche punto comune, $\sigma_1^{(k)}$ starebbe almeno in un iperpiano della stella $s_1^{(k)}$, avente per sostegno $S_1^{(k)}$. Ora i punti di $\sigma_1^{(k)}$ rispondono alle quadriche-inviluppo almeno $r-k$ volte specializzate, che hanno per nucleo una quadrica-inviluppo situata in α_1, e gli iperpiani di $s_1^{(k)}$ alle quadriche-luogo almeno $r-k$ volte specializzate che hanno in β_1 uno spazio doppio; quindi, se $\sigma_1^{(k)}$ ed $S_1^{(k)}$ non fossero indipendenti, dovrebbe esistere una quadrica-luogo passante per α_1 e avente in β_1 uno spazio doppio. Ora una tal quadrica-luogo esiste o non, secondo che α_1 e β_1 non sono o sono indipendenti, dunque la nostra affermazione è pienamente giustificata.

8. Il ragionamento fatto, ove si supponga, in particolare, $k=0$, dimostra pure che:

Lo spazio di appartenenza di una $L^{(r-1)}$ si appoggia all'S_r tangente ad $F^{(r)}$ in un suo punto quando, e solo quando, quella $L^{(r-1)}$ passa per questo punto: e allora i due spazi si tagliano nell'S_{r-1} ivi tangente alla considerata $L^{(r-1)}$.

Si osservi poi che:

Per $k+1$ punti di $F^{(r)}$ passa una ed una sola $L^{(k)}$ quando, e solo quando, ognuno di essi è esterno all'$S^{(r-k)}$ tangente ad $F^{(r)}$ lungo la $L^{(k-1)}$ individuata dai rimanenti k.

9. Giunti a questo punto, basta tener presenti le argomentazioni svolte nel lavoro già ricordato per riconoscere che alcune di di esse possono esser riprodotte qui tal quali senza alcuna modificazione; quindi ci è lecito enunciare i teoremi a cui esse conducono, senza fermarci a ripeterle meccanicamente.

In primo luogo si trova che:

La polare mista di $k+1$ punti di $F^{(r)}$ rispetto ad $F^{(1)}$ è determinata quando, e solo quando, per essi passa una ed una sola varietà della schiera $[k]$. In tal caso, essa è l'iperpiano tangente ad $F^{(r)}$ lungo la $L^{(k)}$ che i punti determinano, se $k=r-1$; se no, è un cono V_{k+1} proiettante, dallo spazio tangente ad $F^{(r)}$ lungo questa $L^{(k)}$, l'ipersuperficie congiunta a una qualunque varietà $L^{(r-k-1)}$ complementare a tale $L^{(k)}$.

I coni, che, in base a questo teorema, vengono ad esser collegati alle singole varietà della schiera $[k]$ $(k \leq r-2)$, formano un sistema che verrà indicato con $[V_{k+1}]$.

In secondo luogo, si supponga di considerare nello spazio Σ' soltanto le quadriche-inviluppo reali (cioè che possono esser rappresentate da equazioni a coefficienti reali), e si supponga inoltre che il riferimento omografico stabilito tra le quadriche-inviluppo di Σ' e i punti di Σ porti le quadriche-inviluppo reali di Σ' nei punti reali di Σ: per es. si supponga, come appunto è fatto nell'introduzione, di far corrispondere a una quadrica-inviluppo di Σ' il punto di Σ che ha per coordinate i coefficienti della sua equazione.

Allora a proposito della totalità dei punti reali della varietà reale $F^{(1)}$, nell'ipotesi che sia $r \geqq 1$, vale la seguente proposizione:

La totalità dei punti reali di $F^{(1)}$ si può distinguere in due parti o falde, aventi in comune tutti e soli i punti reali di $F^{(r)}$. Fra queste, quella che diremo **prima** *falda e indicheremo con $\mathbf{F}_1^{(1)}$ è atta a dividere l'insieme dei punti reali dello spazio ambiente Σ in due regioni R_i ed R_e aventi in essa la frontiera comune e dotate delle seguenti proprietà:*

1) *ogni punto reale dello spazio ambiente non situato su $\mathbf{F}_1^{(1)}$ fa parte di una, ed una sola, delle due regioni R_i ed R_e;*

2) *un segmento rettilineo, che abbia per estremi un punto di R_i e un punto di R_e non situati su $\mathbf{F}_1^{(1)}$, incontra $\mathbf{F}_1^{(1)}$ in un sol punto;*

3) *una retta reale, che passi per un punto di R_i non situato su $\mathbf{F}_1^{(1)}$, incontra $\mathbf{F}_1^{(1)}$ in due e due soli punti distinti;*

4) *fra i due segmenti rettilinei determinati da due punti di R_i ve n'è uno, i cui punti reali appartengono tutti ad R_i;*

5) *l'iperpiano tangente a $\mathbf{F}_1^{(1)}$ in un suo punto semplice non contiene punti di R_i non situati su $\mathbf{F}_1^{(1)}$;*

6) *una retta reale, la quale passi per un punto semplice di $\mathbf{F}_1^{(1)}$ e non stia nell'iperpiano ivi tangente ad $\mathbf{F}_1^{(1)}$, contiene punti di R_i non situati su $\mathbf{F}_1^{(1)}$, e quindi taglia $\mathbf{F}_1^{(1)}$ in un secondo punto;*

7) *in fine, una retta reale, che passi per un punto di R_i, non situato su $\mathbf{F}_1^{(1)}$, taglia $F^{(1)}$ in $r+1$ punti tutti reali* [*di cui, grazie a* 3) *due almeno sono distinti*].

I punti di R_i o di R_e, diversi da quelli di $\mathbf{F}_1^{(1)}$, si diranno rispettivamente *interni* od *esterni* ad $\mathbf{F}_1^{(1)}$.

Nel caso che sia $r = 1$, le due falde di $F^{(1)}$ coincidono e il teorema enunciato si riduce alle note proprietà topologiche delle coniche (irriducibili) a punti reali.

10. Un cono V_{k+1} proietta dal suo vertice l'ipersuperficie congiunta a una varietà di VERONESE di indice $r-k-1$, quindi,

nella stella che lo contiene, esso può concepirsi come una ipersuperficie della stessa natura di $F^{(1)}$. In particolare, i punti reali di un cono V_{k+1} reale si possono distribuire in due falde e fra queste, quella, che diremo la **prima**, gode di proprietà analoghe a quelle della prima falda di $F^{(1)}$.

Ciò posto si ha il seguente teorema:

L'insieme dei punti interni alla prima falda $\mathrm{F}_1^{(1)}$ *della* $F^{(1)}$ *è caratterizzabile, geometricamente, come l'insieme di tutti e soli i punti interni alle prime falde dei coni dei sistemi* $[V_1]$, *o* $[V_2], \ldots$, *o* $[V_{r-1}]$: *analiticamente, come l'insieme di tutti e soli i punti reali soddisfacenti con le loro coordinate a r diseguaglianze del tipo*

$$F > 0, \ \mu G_1 > 0, \ G_2 > 0, \ \mu G_3 > 0, \ldots, \ G_{r-1} > 0$$

o del tipo

$$\mu F > 0, \ G_1 > 0, \ \mu G_2 > 0, \ G_3 > 0, \ldots, \ G_{r-1} > 0$$

secondo che r è dispari, essendo

$$F = 0$$

l'equazione di $F^{(1)}$,

$$\mu = 0$$

l'equazione dell'iperpiano [*di* $\Phi^{(r)}$] *polare misto rispetto a* $F^{(1)}$ *di r punti reali* $A_1, A_2, \ldots, A_r$ *di* $F^{(r)}$ *congiunti da una sola* $L^{(r-1)}$,

$$G_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, r-1)$$

il cono polare misto rispetto a $F^{(1)}$ *dei punti* $A_1, A_2, \ldots, A_j$, *e i coefficienti (reali) dei polinomi* F, μ *e* G_j *essendo opportunamente fissati.*

Di qua, modificando leggermente alcune argomentazioni del lavoro già citato e fatta appunto l'ipotesi che a una quadrica-inviluppo di Σ' risponda il punto di Σ che ha per coordinate i coefficienti della sua equazione([5]), si trae infine il teorema:

([5]) In particolare, fatta questa ipotesi, si osserverà che il determinante indicato nell'introduzione con Δ_h dà, uguagliato a zero, l'equazione della polare mista rispetto a $F^{(1)}$ degli $r+1-h$ punti di $F^{(r)}$ le cui coordinate a_{ij} sono tutte nulle tranne, rispettivamente, la $a_{r+1,r+1}$, o la $a_{r,r}, \ldots$, o la $a_{h+1,h+1}$.

I punti interni alla prima falda $\mathbf{F}_1^{(1)}$ *di* $F^{(1)}$ *sono in* Σ *imagini di tutte e sole le quadriche-inviluppo reali di* Σ' *a iperpiani tutti imaginari ;*
con che resta risoluta la questione costituente l'oggetto di questa Nota.

Un'interessante conseguenza di quest'ultimo teorema è, che la proprietà 7) di $\mathbf{F}_1^{(1)}$ stabilita al n^0 9 si traduce nella ben nota proposizione sulla realtà delle radici dell'equazione caratteristica di un fascio di forme quadratiche reali contenente una forma quadratica definita. Ma per questa via, geometrica, la proposizione in discorso si ottiene anche con una maggiore determinazione.