SULLA QUARTICA DI KLEIN E LA QUINTICA DI SNYDER (*)

Alla varietà jacobiana di una qualsiasi curva algebrica (non razionale) — o alla curva stessa — sono collegati, come ad ogni altra varietà abeliana, due caratteri fondamentali, gli *indici di singolarità e di moltiplicabilità* (1). Ove siano aumentati di 1, essi coincidono coi *numeri-base* delle corrispondenze algebriche simmetriche (2) o di tutte le corrispondenze algebriche appartenenti alla curva, e se p è il genere della curva i valori massimi di cui essi sono suscettibili sono rispettivamente $p^2 - 1$ e $2p^2 - 1$. Inoltre, se $p > 1$, codesti valori massimi, ove siano raggiunti, sono raggiunti dai due indici contemporaneamente (3).

Ora io ho dimostrata l'esistenza di varietà abeliane con indici massimi per ogni valore della dimensione della varietà, e le ho anche pienamente caratterizzate (4); ma poichè la varietà jacobiana legata ad una curva di genere p è, per $p > 1$, una varietà abeliana particolare, resta dubbio se per ogni valore di p esistano curve di genere p con indici massimi (5).

(*) Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania, (5) 10 (1917), n. 16.

(1) Per la definizione di questi caratteri vedi la mia Memoria: *Intorno alla teoria generale delle matrici di* Riemann *e ad alcune sue applicazioni* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XLI (1916), pp. 263-380].

(2) Che l'indice di singolarità di una curva algebrica aumentato di 1 eguagli il numero-base delle corrispondenze algebriche simmetriche situate su di essa è conseguenza di note e belle ricerche del sig. Rosati. Vedi la sua Memoria: *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e in particolare fra i punti di una curva di genere due* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie 3a, vol. XXV (1915), pp. 1-32].

(3) Loc. cit. (1), Parte Prima, n. 58.

(4) Loc. cit. (1), Parte Prima, n. 54 e 58.

(5) Veramente, e per ragioni tutte note, il dubbio non è giustificato se non quando sia $p > 3$.

Lo stesso dubbio si potrebbe naturalmente affacciare per tutti i teoremi di natura esistenziale riflettenti le varietà abeliane, qualora si volesse trasportarli senz'altro alle varietà jacobiane.

Così, per es., io ho pure dimostrata l'esistenza di varietà abeliane impure di dimensione pari, prive di sistemi regolari isolati di integrali riducibili, coi sistemi regolari puri tutti di dimensione 1, e le ho classificate in quattro tipi fondamentali (6); ma ciò non autorizza a concludere che, corrispondentemente ad ognuno di questi tipi, esistano delle varietà che siano addirittura jacobiane.

Indipendentemente da queste osservazioni, data la scarsezza delle conoscenze che per ora si hanno sui numeri-base in discorso, è interessante moltiplicare gli esempi di curve per le quali gli indici di singolarità e moltiplicabilità possano essere esplicitamente assegnati e indicare dei metodi che, nei singoli casi concreti, possano essere utilmente adoperati per il calcolo effettivo degli indici stessi.

Tra le infinite curve di genere 3 per le quali gli indici di singolarità e moltiplicabilità raggiungono i valori massimi 8 e 17 ho avuto occasione di far rilevare che è compresa la così detta *quartica di* KLEIN; e questa circostanza l'ho dedotta, applicando teoremi generali sulle matrici riemanniane, dal fatto, osservato prima da POINCARÉ e poi dallo HURWITZ, che la curva possiede terne di integrali ellittici indipendenti a moltiplicazione complessa e vincolati (7).

Qui voglio far vedere come quella circostanza e questo fatto possano dedursi con estrema semplicità partendo dalla considerazione delle trasformazioni collineari in sè, a periodo 7, ammesse dalla curva; e per mostrare con un'altro esempio la fecondità del procedimento lo applico anche alla determinazione degli indici della *quintica di* SNYDER, cioè della quintica di genere 6 che è rappresentata in coordinate cartesiane dall'equazione

$$x^4 y + y^4 + x = 0,$$

e che ammette un gruppo di trasformazioni collineari in sè, d'ordine 39, generato da due collineazioni, l'una a periodo 13 e l'altra a periodo 3 (8).

(6) Loc. cit. (1), Parte Prima, n. 55.

(7) Loc. cit. (1), Parte Prima, n. 59, nota a piè di pagina.

(8) Per questa interessante quintica vedi: V. SNYDER, *Plane Quintic Curves Which Possess a Group of Linear Transformations* [American Journal of Mathema-

Gli indici di questa quintica sono rispettivamente 17 e 35; e la sua jacobiana dà appunto un esempio di varietà jacobiana di dimensione 6 (cioè, pari), impura, priva di sistemi regolari isolati di integrali riducibili, e coi sistemi regolari puri tutti di dimensione 1.

§ 1.

1. Consideriamo la quartica di KLEIN C^4, rappresentata in coordinate cartesiane dall'equazione

$$x^3 y + y^3 + x = 0. \tag{1}$$

Tre suoi integrali indipendenti di 1ª specie sono dati evidentemente da:

$$u_1 = \int \frac{dx}{3y^2 + x^3}, \quad u_2 = \int \frac{x\,dx}{3y^2 + x^2}, \quad u_3 = \int \frac{y\,dx}{3y^2 + x^3}.$$

Adesso si consideri la matrice riemanniana costituita da sei sistemi di periodi primitivi degli integrali u_1, u_2, u_3, e sia in un $S_4(x' y' z' t')$:

$$x' = x'(v_1, v_2, v_3)$$

$$y' = y'(v_1, v_2, v_3)$$

$$z' = z'(v_1, v_2, v_3)$$

$$t' = t'(v_1, v_2, v_3)$$

la rappresentazione parametrica, per funzioni abeliane dei parametri v_1, v_2, v_3, di una varietà abeliana V appartenente a codesta matrice.

La V può riguardarsi come la varietà jacobiana di C^4, e si ha una corrispondenza biunivoca T fra le serie lineari g_3 (di dimensione 0 o 1) di C^4 e i punti di V facendo corrispondere alla g_3 determinata da un gruppo G_3 di tre punti di C^4 il punto di V, per cui il parametro v_j ha come valore la somma dei valori dell'integrale u_j nei punti di G_3.

tica, vol. XXX (1908), pp. 1-9], ed E. CIANI, *Le quintiche piane autoproiettive* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXVI (2º sem. 1913), pp. 58-78]. Appunto perchè lo SNYDER è stato il primo a richiamar l'attenzione sul gruppo da essa posseduto, mi son permesso di indicarla col nome di *quintica di* SNYDER.

Ciò posto, si osservi che, detta α una radice primitiva settima dell'unità, la trasformazione collineare (affine) a periodo 7:

$$x = \alpha^3 X \qquad (2)$$
$$y = \alpha Y$$

muta in sè la curva C^4 tenendone fermi i tre punti che coincidono con l'origine delle coordinate e coi punti all'infinito degli assi x e y (9). Se quindi si suppone che l'origine dalla quale si fanno partire i cammini (indipendenti da j) lungo i quali si calcolano gli integrali u_j sia uno di questi tre punti, e si dicono u_j e U_j i valori dell'integrale u_j in due punti di C^4 omologhi nella collineazione (2), si può supporre (10):

$$u_1 = \alpha U_1\,, \quad u_2 = \alpha^4 U_2\,, \quad u_3 = \alpha^2 U_3\,. \qquad (3)$$

Ma allora la trasformazione birazionale della varietà V in sè stessa in cui si rifiette, a traverso T, la trasformazione birazionale in sè della C^4 subordinata dall'affinità (2) è quella che è rappresentata dalla sostituzione lineare

$$v_1 = \alpha V_1\,, \quad v_2 = \alpha^4 V_2\,, \quad v_3 = \alpha^2 V_3 \qquad (4)$$

sui parametri v_1, v_2 e v_3.

Segue che le radici dell'equazione caratteristica della *sostituzione riemanniana* modulare di V rispondente alla sua trasformazione birazionale rappresentata dalle (4) sono tutte semplici (11) e che quindi la matrice di RIEMANN cui appartiene V, cioè la matrice di RIEMANN cui è collegata C^4, è *isomorfa* alla seguente matrice di gene-

(9) L'involuzione d'ordine 7 generata su C^4 dalla trasformazione che su di essa induce l'affinità 2) ha dunque tre gruppi ridotti ciascuno a un punto settuplo, e all'infuori di questi non ha altri punti multipli. Segue per la formula di ZEUTHEN, che essa è una g^1_7.

(10) Occorre appena avvertire che perchè sussistano le 3) bisogna scegliere opportunamente il valore di U_j dopo che sia stato fissato quello di u_j. Volendo, anzi che delle uguaglianze, si potrebbero scrivere delle congruenze rispetto ai periodi come moduli.

(11) Per il teorema che si trova al n. 22 della mia Memoria più volte citata (Parte Prima), le radici dell'equazione caratteristica in discorso sono α, α^4, α^2, α^6, α^3, α^5.

re 3 [12]:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 \\ 1 & \alpha^4 & \alpha & \alpha^5 & \alpha^2 & \alpha^6 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^6 & \alpha & \alpha^3 \end{matrix} \right\|$$

o, ciò che fa lo stesso, una volta che

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = 0,$$

alla matrice:

$$(5) \qquad \left\| \begin{matrix} \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 & \alpha^6 \\ \alpha^4 & \alpha & \alpha^5 & \alpha^2 & \alpha^6 & \alpha^3 \\ \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^6 & \alpha & \alpha^3 & \alpha^5 \end{matrix} \right\|.$$

Ora si applichi a questa matrice l'*operazione* A [13] che consiste nel sostituire alle sue righe le loro combinazioni lineari omogenee secondo i numeri

$$(1,\ 1,\ 1), \quad (\alpha^3,\ \alpha^5,\ \alpha^6), \quad (\alpha,\ \alpha^4,\ \alpha^2).$$

Posto

$$\alpha + \alpha^2 + \alpha^4 = a,$$

per modo che sarà

$$\alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6 = -1 - a,$$

la matrice (5) si muterà nella matrice ad essa *equivalente* [14]

$$(6) \qquad \left\| \begin{matrix} a & a & -1-a & a & -1-a & -1-a \\ a & -1-a & -1-a & 3 & a & a \\ a & -1-a & a & -1-a & -1-a & 3 \end{matrix} \right\|.$$

Poichè si può supporre

$$a = \frac{-1 + \sqrt{-7}}{2},$$

la matrice (6) è ad indici massimi [15], dunque è tale anche quella legata alla curva C^4 e gli indici di singolarità e moltiplicabilità di questa curva sono 8 e 17.

[12] Loc. cit. [1], n. 23 (Parte Prima).
[13] Loc. cit. [1], n. 1 (Parte Prima).
[14] Loc. cit. [1], n. 2 (Parte Prima).
[15] Loc. cit. [1], n. 54 (Parte Prima).

§ 2.

2. Adesso consideriamo la quintica di SNYDER C^5 rappresentata in coordinate cartesiane dall'equazione:

$$x^4 y + y^4 + x = 0.$$

Essa è del genere 6 e sei suoi integrali indipendenti di 1ª specie sono dati da:

$$u_1 = \int \frac{dx}{4y^3 + x^4}, \quad u_2 = \int \frac{x\,dx}{4y^3 + x^4}, \quad u_3 = \int \frac{y\,dx}{4y^3 + x^4},$$
$$u_4 = \int \frac{xy\,dx}{4y^3 + x^4}, \quad u_5 = \int \frac{x^2\,dx}{4y^3 + x^4}, \quad u_6 = \int \frac{y^2\,dx}{4y^3 + x^4}.$$

Indicata con α una radice primitiva tredicesima dell'unità, l'affinità

$$\text{(7)} \qquad \begin{aligned} x &= \alpha X \\ y &= \alpha^{10} Y \end{aligned}$$

muta in sè la curva C^5; inoltre per le (7) gli integrali u_j si mutano negli integrali della stessa forma in X e Y moltiplicati, successivamente, per i fattori

$$\alpha^{10}, \ \alpha^{11}, \ \alpha^7, \ \alpha^8, \ \alpha^{12}, \ \alpha^4.$$

Segue, come prima, tenendo conto dell'identità

$$\text{(8)} \qquad \sum_{j=0}^{12} \alpha^j = 0,$$

che la matrice di RIEMANN cui è legata C^6 è isomorfa alla matrice di genere 6:

$$\text{(9)} \qquad \begin{Vmatrix} \alpha^3 & \alpha^{10} & \alpha^7 & \alpha^4 & \alpha & \alpha^{11} & \alpha^8 & \alpha^5 & \alpha^2 & \alpha^{12} & \alpha^9 & \alpha^6 \\ \alpha^2 & \alpha^{11} & \alpha^9 & \alpha^7 & \alpha^5 & \alpha^3 & \alpha & \alpha^{12} & \alpha^{10} & \alpha^8 & \alpha^6 & \alpha^4 \\ \alpha^6 & \alpha^7 & \alpha & \alpha^8 & \alpha^2 & \alpha^9 & \alpha^3 & \alpha^{10} & \alpha^4 & \alpha^{11} & \alpha^5 & \alpha^{12} \\ \alpha^5 & \alpha^8 & \alpha^3 & \alpha^{11} & \alpha^6 & \alpha & \alpha^9 & \alpha^4 & \alpha^{12} & \alpha^7 & \alpha^2 & \alpha^{10} \\ \alpha & \alpha^{12} & \alpha^{11} & \alpha^{10} & \alpha^9 & \alpha^8 & \alpha^7 & \alpha^6 & \alpha^5 & \alpha^4 & \alpha^3 & \alpha^2 \\ \alpha^9 & \alpha^4 & \alpha^8 & \alpha^{12} & \alpha^3 & \alpha^7 & \alpha^{11} & \alpha^2 & \alpha^6 & \alpha^{10} & \alpha & \alpha^5 \end{Vmatrix}.$$

Adesso si applichi alla (9) l'operazione A, definita, nel senso chiarito più sopra, dallo schema

$$(0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0)$$

$$(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1)$$

$$(0,\ \alpha^2,\ \alpha^6,\ \alpha^5,\ 0,\ 0)$$

$$(\alpha^3,\ 0,\ 0,\ 0,\ \alpha,\ \alpha^9$$

$$(0,\ \alpha^{11},\ \alpha^7,\ \alpha^8,\ 0,\ 0)$$

$$\alpha^{10},\ 0,\ 0,\ 0,\ \alpha^{12},\ \alpha^4).$$

Posto, per comodità di scrittura:

$$\alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^6 = a, \quad \alpha + \alpha^3 + \alpha^9 = b,$$

$$\alpha^7 + \alpha^8 + \alpha^{11} = c, \quad \alpha^4 + \alpha^{10} + \alpha^{12} = d,$$

per modo che sarà

$$1 + a + b + c + d = 0,$$

la (9) si convertirà nella matrice equivalente:

$$(10) \qquad \left\| \begin{matrix} a & c & b & c & a & b & b & d & d & c & a & d \\ b & d & c & d & b & c & c & a & a & d & b & a \\ d & 3 & c & b & c & a & b & b & d & d & c & a \\ a & 3 & d & c & d & b & c & c & a & a & d & b \\ 3 & b & c & a & b & b & d & d & c & a & d & a \\ 3 & c & d & b & c & c & a & a & d & b & a & b \end{matrix} \right\|,$$

e quindi gli indici di singolarità e moltiplicabilità della nostra quintica eguaglieranno quelli di questa matrice.

La matrice (10) è visibilmente isomorfa a una matrice *composta* [16] con tre matrici di genere 2 identiche alla matrice

$$(11) \qquad \left\| \begin{matrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{matrix} \right\|,$$

[16] Loc. cit. [1], n. 27 (Parte Prima).

o, ciò che fa lo stesso, alla matrice ad essa equivalente

$$\begin{Vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & b & c & d \end{Vmatrix}, \tag{12}$$

dunque, in ordine a teoremi generali, gli indici di (10) si avranno subito appena siano calcolati quelli della matrice (12).

Per questo, si incominci dall'osservare che fra le quantità a, b, c, d passano le relazioni:

$$ab = a + b + c\,; \quad ac = 2 - a - c\,; \quad ad = -1 - c\,;$$

$$bc = -1 - a\,; \quad bd = 3 + a + c\,; \quad cd = -1 - b\,;$$

$$a^2 = -1 - a - b + c\,; \; b^2 = -2 - a - 2b - 2c\,; \; c^2 = 2a + b\,; \; d^2 = 2b + c\,; \tag{13}$$

e che se si indica con (j, l) il minore di 2^0 ordine formato con le colonne j^{ma} ed l^{ma} di (12) si ha:

$$(1, 2) = b - a\,; \; (1, 3) = c - b\,; \; (1, 4) = d - c = -1 - a - b - 2c\,;$$

$$(2, 3) = ac - b^2 = 4 + 2b + c\,; \tag{14}$$

$$(2, 4) = ad - bc = a - c\,; \quad (3, 4) = bd - c^2 = 3 - a - b + c.$$

Ciò posto, l'indice di singolarità della matrice (12) è il massimo numero delle *forme riemanniane alternate* [17] indipendenti ad essa relative diminuito di 1, dunque per calcolarlo bisognerà cercare con quanti sistemi di valori non tutti nulli degli *interi* A, B, C, D, E, F si può soddisfare all'equazione:

$$A\,(1, 2) + B\,(1, 3) + C\,(1, 4) + D\,(2, 3) + E\,(2, 4) + F\,(3, 4) = 0. \tag{15}$$

Poichè l'equazione di 12^{mo} grado (8), a coefficienti interi, cui soddisfa α, è irriducibile, le quantità a, b, c non possono soddisfare ad un'equazione lineare a coefficienti interi se non a patto che questi siano tutti nulli, dunque la condizione (15) a cui debbono soddisfare gli interi $A, B, \dots, F$ si converte, per le (14), nelle seguenti

[17] Loc. cit. [1], n. 6 (Parte Prima).

quattro:

$$(16)\qquad \begin{aligned} -C+4D+3F&=0\\ -A-C+E-F&=0\\ A-B-C+2D-F&=0\\ B-2C+D-E+F&=0. \end{aligned}$$

Le soluzioni intere delle (16) si ottengono tutte, per es., prendendo gli interi A e C arbitrariamente e poi facendo

$$(17)\qquad B=A+2C,\quad D=C,\quad E=A,\quad F=-C,$$

dunque l'indice di singolarità della matrice (12) è 1.

In base alle (17), si ha

$$AF-BE+CD=-A^2-3AC+C^2,$$

e questa espressione per A e C interi (non entrambi nulli) è certo diversa da zero, dunque la matrice (12) non ammette forme riemanniane alternate degeneri (non identicamente nulle), ossia è *pura* [18].

Segue che il suo indice di moltiplicabilità o è 1 o è 3 [19].

Per decidere quale di questi due sia il suo valore, occorre rifarsi dalla sua definizione [20]; occorre cioè ricercare quante siano le forme riemanniane indipendenti della matrice (12).

Se una tal forma è

$$(18)\qquad \sum_{j,l}^{1\ldots 4} A_{j,l}\, x_j\, y_l$$

dove le A_{jl} sono numeri interi, la (18) deve annullarsi quando vi si pongano per le x_j e le y_l gli elementi di una qualunque delle due righe della matrice (12).

Tenendo conto delle (13) e ragionando come prima si trovano così 16 equazioni lineari omogenee fra gli interi $A_{j,l}$.

Ora facendo una volta

$$x_1=y_1=1,\quad x_2=y_2=a,\quad x_3=y_3=b,\quad x_4=y_4=c,$$

(18) Loc. cit. (1), n. 32 (Parte Prima).

(19) Loc. cit. (2), n. 16 e loc. cit. (1), n. 11 (Parte Seconda).

(20) Loc. cit. (1), n. 6 (Prima Parte).

e un'altra

$$x_1 = y_1 = 1, \; x_2 = y_2 = b, \; x_3 = y_3 = c, \; x_4 = y_4 = d = -1 - a - b - c,$$

si trovano per gli interi $A_{j,l}$ due quadruple di equazioni non distinte, perchè quelle della seconda quadrupla sono identicamente soddisfatte quando vi si pongano per gli interi $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, $A_{1,3}$, $A_{1,4}$ i valori dati, in funzione degli altri interi $A_{j,l}$, da quelle della prima; dunque l'indice di moltiplicabilità di (12) è senz'altro 3.

Ma allora [21]:

Gli indici di singolarità e moltiplicabilità della matrice (10), *cioè della quintica di* SNYDER *sono, rispettivamente,* 17 *e* 35.

Notisi che l'involuzione generata su C^5 dalla trasformazione indottavi dall'affinità (7) è una g^1_{13}; invece quelle rispondenti alle trasformazioni indotte su C^5 dalle collineazioni a periodo 3 che essa ammette, sono del genere 2.

Catania, 8 maggio 1917.

([21]) Loc. cit. ([1]), n. 55 (Parte Prima). Le (III) di questo n. per $p = 6$ dànno $k = 17$ e $h = 35$.