SULLE CURVE ELLITTICHE SINGOLARI (*)

Il compianto dott. Torelli, studiando le superficie con due fasci ellittici di curve [1], si imbattè nel seguente problema:

Quali sono sopra una curva ellittica le involuzioni birazionalmente identiche ad essa?

A questa domanda, nel lavoro citato a piè di pagina, egli dette una risposta esauriente per il solo caso delle curve ellittiche a modulo generale; ma poichè tale risposta può darsi, e in modo definitivo, per una curva ellittica qualunque, giova riprender la questione ed esaminarla in modo completo.

In quanto verremo dicendo non vi è alcuna novità sostanziale di risultati; si tratta di cose, sotto altra forma, ben conosciute. Ma come l'origine di questa Nota è puramente didattica, così anche il suo scopo non è che didattico. Essa non mira ad altro che a mettere in circolazione tra i giovani cultori della geometria i teoremi fondamentali della teoria delle funzioni ellittiche a moltiplicazione complessa, indicandone in modo esplicito l'importante contenuto geometrico.

Intanto, appunto perchè lo sviluppo dei concetti qui posti di curve ellittiche singolari di *prima* o di *seconda* specie e di *determinante* di una curva ellittica singolare non esigerebbe che un facile lavoro di *traduzione* di teoremi aritmetici e analitici ben noti, io mi limiterò sul riguardo a brevissimi cenni.

1. Chiedersi se esista una involuzione di ordine ν (≥ 1) situata sopra una curva ellittica C e birazionalmente identica ad essa, o, come diremo, per brevità di discorso, se esista su C una γ^1_ν, val quanto chiedersi se sopra C possa esistere una corrispondenza (algebrica) T con gli indici (ν, 1).

(*) Rend. Reale Accad. dei Lincei. (5) 27_1 (1818), pp. 171-175.

[1] R. Torelli, *Sulle superficie algebriche contenenti due fasci ellittici di curve* [questi Rendiconti, 1912, serie 5ª, vol. XXI, pp. 453-457].

Per dare nel secondo caso alla formula riguardante ν un aspetto più semplice giova porre, indicando con τ una nuova indeterminata intera,

$$\sigma = \tau - \frac{Q}{2}\varrho \quad \text{o} \quad \sigma = \tau - \frac{Q-1}{2}\varrho$$

secondo che Q è pari o dispari; corrispondentemente risulta

$$\nu = \tau^2 + \frac{D}{4}\varrho^2 \quad \text{oppure} \quad \nu = \tau^2 + \tau\varrho + \frac{D+1}{4}\varrho^2.$$

dove $D = 4PR - Q^2$ è positivo.

Se la curva C è singolare, il numero D che non dipende dalla scelta dei periodi primitivi di J, e che, per quanto risulterà tra poco, ha un significato geometrico fondamentale per la curva C, lo diremo il *determinante* di C; e, sempre con linguaggio evidentemente suggerito dalla teoria aritmetica delle forme quadratiche, diremo che C è della *prima* o della *seconda specie*, secondo che Q è pari o dispari, o, ciò che fa lo stesso, secondo che è

$$D \equiv 0 \quad \text{oppure} \quad D \equiv 3 \qquad (\text{mod. } 4).$$

Notando che se C è armonica è $D = 4$, mentre se C è equianarmonica è $D = 3$ (e viceversa), risultano dalle cose dette i seguenti teoremi:

I. *Se la curva C non è singolare, essa ammette infinite γ^1_ν con gli ordini*

$$1, 4, 9, \ldots$$

avendosi una γ^1_ν per ogni valore dell'ordine.

II. *Se la curva C è singolare e il valore del suo determinante è D, gli ordini delle infinite γ^1_ν esistenti su C sono dati dai numeri positivi rappresentabili mediante l'una o l'altra delle due forme*

$$f \equiv \tau^2 + \frac{D}{4}\varrho^2, \quad f' \equiv \tau^2 + \tau\varrho + \frac{D+1}{4}\varrho^2$$

secondo che C è della prima o della seconda specie; e per ogni valore dell'ordine ν si hanno su C tante γ^1_ν diverse quanto è il numero delle rappresentazioni diverse di ν mediante la forma f o f' diviso per 2, per 4 o per 6, secondo che è $D > 4$, $D = 4$ o $D = 3$.

m, n, p, q rappresenta, se $\alpha \neq 0$, la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza su C di (una e quindi di) infinite corrispondenze $(\nu, 1)$ aventi il moltiplicatore α e l'indice $\nu = mq - pn \geq 1$.

Se stabiliamo di chiamare *associati* i (due, quattro o sei) numeri $\eta\alpha$, e diciamo che α è un *moltiplicatore* di C se è diverso da zero ed esistono degli interi m, n, p, q legati ad esso e ai periodi ω ed ω' dalle eguaglianze (1), possiamo dire che:

Ad ogni involuzione γ^1_ν esistente su C risponde un gruppo di moltiplicatori associati di C e viceversa.

Segue che:

Saranno determinate tutte le γ^1_ν esistenti su C appena sieno determinati tutti i suoi moltiplicatori.

3. Ora tale determinazione è immediata.

La curva C è non singolare o singolare secondo che l'integrale J non è od è a moltiplicazione complessa; se J è a moltiplicazione complessa, sia

$$P\omega^2 + Q\omega\omega' + R\omega'^2 = 0 \qquad (Q^2 - 4PR < 0)$$

l'equazione quadratica a coefficienti interi cui soddisfanno ω e ω', equazione che è univocamente determinata, se, come è lecito, supponiamo che P, Q, R siano primi fra di loro e che inoltre sia $P > 0$, $R > 0$.

Poichè dalle (1) si deduce per ω e ω' la relazione a coefficienti interi

$$p\omega^2 + (q - m)\,\omega\omega' - n\omega'^2 = 0,$$

segue che, indicando con ϱ e σ delle indeterminate intere, i sistemi di interi caratteristici m, n, p, q corrispondenti ai varî moltiplicatori α di C e questi moltiplicatori stessi sono dati tutti nel primo caso dalle formule

$$n = p = 0, \quad m = q = \varrho, \quad \alpha = \varrho \qquad (\varrho \neq 0)$$

e nel secondo caso dalle formule

$$m = \sigma, \quad n = -R\varrho, \quad p = P\varrho, \quad q = \sigma + Q\varrho, \quad \alpha = \sigma - R\frac{\omega'}{\omega}\varrho$$

$$(\varrho^2 + \sigma^2 \neq 0).$$

Corrispondentemente per $\nu = mq - pn$ si ha, nei due casi,

$$\nu = \varrho^2 \quad \text{oppure} \quad \nu = \sigma^2 + Q\varrho\sigma + PR\varrho^2.$$

Per dare nel secondo caso alla formula riguardante ν un aspetto più semplice giova porre, indicando con τ una nuova indeterminata intera,

$$\sigma = \tau - \frac{Q}{2}\varrho \quad \text{o} \quad \sigma = \tau - \frac{Q-1}{2}\varrho$$

secondo che Q è pari o dispari; corrispondentemente risulta

$$\nu = \tau^2 + \frac{D}{4}\varrho^2 \quad \text{oppure} \quad \nu = \tau^2 + \tau\varrho + \frac{D+1}{4}\varrho^2.$$

dove $D = 4PR - Q^2$ è positivo.

Se la curva C è singolare, il numero D che non dipende dalla scelta dei periodi primitivi di J, e che, per quanto risulterà tra poco, ha un significato geometrico fondamentale per la curva C, lo diremo il *determinante* di C; e, sempre con linguaggio evidentemente suggerito dalla teoria aritmetica delle forme quadratiche, diremo che C è della *prima* o della *seconda specie*, secondo che Q è pari o dispari, o, ciò che fa lo stesso, secondo che è

$$D \equiv 0 \quad \text{oppure} \quad D \equiv 3 \qquad (\text{mod. } 4).$$

Notando che se C è armonica è $D = 4$, mentre se C è equianarmonica è $D = 3$ (e viceversa), risultano dalle cose dette i seguenti teoremi:

I. *Se la curva C non è singolare, essa ammette infinite γ_ν^1 con gli ordini*

$$1, 4, 9, \ldots$$

avendosi una γ_ν^1 per ogni valore dell'ordine.

II. *Se la curva C è singolare e il valore del suo determinante è D, gli ordini delle infinite γ_ν^1 esistenti su C sono dati dai numeri positivi rappresentabili mediante l'una o l'altra delle due forme*

$$f \equiv \tau^2 + \frac{D}{4}\varrho^2, \quad f' \equiv \tau^2 + \tau\varrho + \frac{D+1}{4}\varrho^2$$

secondo che C è della prima o della seconda specie; e per ogni valore dell'ordine ν si hanno su C tante γ_ν^1 diverse quanto è il numero delle rappresentazioni diverse di ν mediante la forma f o f' diviso per 2, per 4 o per 6, secondo che è $D > 4$, $D = 4$ o $D = 3$.

Di qua si possono dedurre numerose proposizioni sfruttando la teoria dei numeri rappresentabili mediante forme quadratiche; ci basti indicare, a titolo di esempio, la seguente che dà luogo a un enunciato semplice ed elegante:

Se C è armonica e ν è un numero dispari positivo, il numero delle γ_ν^1 esistenti su C è dato da $M - N$, essendo M il numero dei divisori di ν della forma $4h + 1$ ed N il numero dei divisori di ν della forma $4h + 3$.

4. Se la curva C non è singolare, le sue infinite γ_ν^1 si ottengono considerando per ogni valore di n la $\gamma_{n^2}^1$ dei gruppi di punti n-pli delle ∞^1 g_n^{n-1} appartenenti a C; se la curva C è singolare, essa, oltre queste infinite $\gamma_{n^2}^1$ che si ottengono supponendo $\varrho = 0$ in tutte le formule precedenti, ne contiene infinite altre. Dette *singolari* queste ultime γ_ν^1 si determina subito per esse il minimo valore che può essere assunto da ν.

Una discussione semplice e sostanzialmente nota, che qui si sopprime per ragioni di spazio, conduce infatti al teorema:

III. *Se la curva C è singolare ed ha il determinante $D > 4$, l'ordine delle sue γ_ν^1 singolari d'ordine minimo è $\frac{D}{4}$ oppure $\frac{D+1}{4}$, secondo che C è della prima o della seconda specie; e il numero di queste γ_ν^1 è, corrispondentemente,* **uno** *o* **due**.

Nel caso delle curve armoniche ed equianarmoniche le γ_ν^1 *singolari* d'ordine minimo sono, rispettivamente, *una* γ_2^1 e *una* γ_3^1.

5. La classificazione delle curve ellittiche singolari in curve di 1ª e 2ª specie e l'introduzione per esse del carattere D, il valore geometrico delle quali risulta chiaramente dal teorema III, mostrano che a ricerche classiche sulla teoria dei numeri e delle funzioni ellittiche a moltiplicazione complessa può darsi un interessante significato geometrico. Il lettore lo riconosce subito appena rifletta che i teoremi seguenti non fanno altro che applicare alle curve ellittiche singolari risultati notissimi di quelle teorie.

IV. *Le curve ellittiche singolari aventi tutte uno stesso determinante, si ripartiscono in un numero finito di classi di curve birazionalmente distinte.*

V. *Gli invarianti assoluti delle curve ellittiche singolari birazionalmente distinte dello stesso determinante* (ove l'invariante assoluto di una curva ellittica, che è determinato a meno di un fattor costante, sia convenientemente definito) *sono numeri interi algebrici,* *radici di una stessa equazione a coefficienti interi irriducibile (nel campo assoluto di razionalità).*

VI. *Una curva ellittica singolare di 2^a specie a determinante D è birazionalmente identica a una involuzione (ellittica) di ordine* 2 *appartenente a una curva ellittica singolare di 1^a specie col determinante $4D$.*

VII. *Il numero delle curve ellittiche singolari di 2^a specie col determinante $D > 3$ birazionalmente distinte, eguaglia quello delle curve ellittiche singolari di 1^a specie a determinante $4D$ o la sua terza parte secondo che è $D \equiv 7$* (mod. 8) *oppure $D \equiv 3$* (mod. 8).

Che se poi $D = 3$, i due numeri sono ancora eguali ed eguali entrambi a 1.

6. Ad evitar malintesi sul concetto di γ^1_ν *singolare* non è forse inutile avvertire esplicitamente che il numero delle involuzioni ellittiche di un determinato ordine esistenti sopra una curva ellittica è sempre finito ed è sempre lo stesso qualunque sia il modulo della curva. Ma *variando il modulo può cambiare il numero delle involuzioni di quell'ordine birazionalmente identiche alla curva.*