Remarque sur la notion de la définition conditionnelle de Peano

par

Witold Wilkosz (Cracovie)

Parmi les types de définitions considérées par G. Peano dans son opuscule si fréquemment cité et remontant encore à 1894 »*Notations de Logique Mathématique. Introduction au Formulaire de Mathématique* (Turin)« se trouve expliquée la notion de la définition »*conditionnelle*« en ces termes:

— Quelque fois ce qu'on définit n'est pas un signe simple, mais bien un groupe de signes, entre lesquels il y a des signes nouveaux, ou un groupe de signes qui ont séparément une signification, mais tels que leur ensemble n'a pas encore de signification. Alors la définition suit une hypothèse, h, et a la forme:

$$h \cdot \supset \cdot x \overset{\mathrm{df}}{=} a$$

»dans l'hypothèse h, nous écrivons le groupe nouveau x au lieu du groupe a«. P. ex.

$$a, b \,\epsilon\, N \cdot \supset \cdot \mathrm{quot}\,(a, b) \overset{\mathrm{df}}{=} \max\,[N_0 \cap \overline{x \ni}\,(xb \leqq a)].$$

»Si a et b sont des nombres entiers positifs, par *quot* (a, b) nous entendons le plus grand des nombres positifs, le 0 compris, tels que leur produit par b ne surpasse pas a«. —

Expliquons un peu et traduisons ces mots si clairs d'ailleurs, mais à l'époque où ils étaient écrits, dans une langue plus moderne de la logique d'aujourd'hui. On veut définir une notion $A(x, y, \ldots)$ dépendant des variables $x, y, \ldots$ par une expression connue $M(x, y, \ldots)$.

Cette expression peut avoir un sens dans un champ de ses variables $x, y, \ldots$ que l'on veut *restreindre* pour ne définir $A(x, y, \ldots)$

que dans un champ plus étroit. Or, Peano procède ici de la manière suivante. En faisant précéder la définition purement nominale

$$A(x, y, \ldots) \stackrel{\mathrm{df}}{=} M(x, y, \ldots)$$

par une condition (ou hypothèse) $h(x, y, \ldots)$, il obtient ainsi une définition que nous appellons *conditionnelle*

$$h(x, y, \ldots) \cdot \supset \cdot A(x, y, \ldots) \stackrel{\mathrm{df}}{=} M(x, y, \ldots).$$

Nous retrouvons cette forme de définition dans les travaux de l'*École Italienne*. Nous la voyons p. ex. dans le livre bien connu de M. Burali-Forti, *Logica Matematica* (IIe éd. Hoepli, Milan 1919, p. 29) parmi les définitions nominales. Par contre, les logiciens succédants à Peano, autres que ses élèves et collaborateurs de l'École Italienne, ont rejeté complètement cette forme et ne conservent que la définition *purement nominale* dépourvue d'aucune hypothèse ou condition. Et c'est bien juste en principe! C'est Peano qui nous déclare qu'une définition représente pour lui simplement une abréviation symbolique, donc à vrai dire, pas une *proposition* entrant dans les cadres du système. Que serait donc une expression comme:

$$h \cdot \supset \cdot x \stackrel{\mathrm{df}}{=} a?$$

À droite nous avons une *définition*, à gauche une *proposition*. La définition conditionnelle veut ici exprimer une liaison entre deux choses, dont une seulement est une proposition du système logique considéré et l'autre n'est qu'une abréviation d'écriture!

D'autre part il n'est pas à nier que cette forme de définition conditionnelle est, implicitement d'ailleurs, d'un usage courant chez les mathématiciens et qu'elle présente beaucoup d'avantages. Ne pourrait-on pas retenir cette forme d'une telle commodité et utilité dans la pratique en lui rétablissant par quelque artifice la validité logique? Cette question m'est venue de nouveau à l'esprit à cause de la lecture du beau livre de MM. H. Scholtz et H. Schweitzer »*Die sogenannten Definitionen durch Abstraktion*« (Leipzig 1935). J'y ai trouvé—dans un autre contexte d'ailleurs et pour le but d'un cas spécial, un procédé dont je me sers depuis beaucoup de temps[1]) dans toute sa généralité.

[1]) Mais je n'ai d'ailleurs rien publié sur cette question!

Ce procédé fournit une méthode générale permettant de traduire chaque définition conditionnelle de Peano par une définition purement nominale. Voici ce procédé.

Distinguons d'abord deux cas.

Ou bien dans une définition conditionnelle de la forme:

$$(1) \qquad h(x, y, \ldots) \cdot \supset \cdot A(x, y, \ldots) \overset{\mathrm{df}}{=} M(x, y, \ldots)$$

l'expression $M(x, y, \ldots)$ est une proposition variable, ou elle représente un autre objet logique. Dans le premier cas, nous posons simplement:

$$(2) \qquad A(x, y, \ldots) \overset{\mathrm{df}}{=} h(x, y, \ldots) \cdot M(x, y, \ldots)$$

et le problème se trouve déjà résolu. C'est le second cas qui présente plus d'intérêt. Dans ce cas, nous définissons:

$$(3) \qquad A(x, y, \ldots) \cdot \overset{\mathrm{df}}{=} \cdot (\iota z)(h(x, y, \ldots) \cdot z = M(x, y, \ldots)).$$

Nous avons ici une *définition strictement nominale qui nous remplace entièrement* (on le voit immédiatement) la définition conditionnelle (1). C'est précisément de cette manière que MM. Scholtz et Schweitzer ont défini leur »abstraits«.

Lorsque l'hypothèse $h(x, y, \ldots)$ garantit déjà le sens de l'expression $M(x, y, \ldots)$ (ce qui est toujours le cas de Peano), on tire de (1) la proposition vraie:

$$(4) \qquad h(x, y, \ldots) \cdot \underset{x, y, \ldots}{\supset} \cdot A(x, y, \ldots) = M(x, y, \ldots).$$

Or, c'est la même proposition qu'on peut tirer dans ce cas de (3). Ce n'est que par (4) que l'expression $A(x, y, \ldots)$ entre dans les théorèmes. On voit donc que l'on peut sans crainte retenir la forme de la définition conditionnelle (1) en entendant toujours par elle la définition (2) ou (3) qui est déjà d'une légitimité incontestable.