Dowód gieometryczny dwuch zasadniczych twierdzeń teorji postępu gieometrycznego.

Oznaczmy kolejne wyrazy postępu przez $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$; wykładnik zaś postępu przez q. Sumy pierwszych dwuch, trzech i t. d. wyrazów postępu niech będę $s_2, s_3, \ldots s_n, \ldots$ Na prostej OX odkładamy odcinek $OA = a_1$, przez A prowadzimy prostą AY, nachyloną do OX pod kątem 45^0, przez punkt O poprowadzimy prostą OZ pod takim kątem α do OX, żeby $\mathrm{tg}\alpha = q$. Przez punkt A poprowadźmy prostopadłą do OX; przypuśćmy, że prostopadła ta przecina prostą OZ w punkcie B. Przez B poprowadźmy równoległą do OX aż do przecięcia się z prostą AY w punkcie C, przez C zaś poprowadźmy prostopadłą do OX i przypuśćmy, że prostopadła przecina OX i OZ odpowiednio w punktach C' i D; przez D poprowadźmy równoległą do OX, przecinającą AY w punkcie E, i t. d.

Mamy $OA = a_1$, $AC' = AB = OA\mathrm{tg}\alpha = a_1 q = a_2$,

$C'E' = CD = BC\mathrm{tg}\alpha = a_2 q = a_1$ i t. d.

W ten sposób rzuty odcinków AC, CE i t. d. na oś OX, równe odcinkom BC, DE i t. d., są kolejnemi wyrazami postępu, poczynając od a_2. Owóż $s_2 = OC'$, $s_3 = OE'$ i t. d.

Przypuśćmy, że między prostemi OZ i AY mamy dwa kolejne odcinki: MN, równoległy do osi, i NP, prostopadły do niej. Przypuśćmy dalej, iż przedłużenie odcinka NP przecina oś w punkcie N' i że $MN = a_n$, $NP = a_{n+1}$. Mamy tedy $s_n = ON'$.

Ponieważ $N'P = ON'\mathrm{tg}\alpha = s_n q$ i $N'P = N'N + NP = AN' + NP = s_n - a_1 + a_1 q^n$, zatym $s_n q = s_n - a_1 + a_1 q^n$, skąd otrzymujemy wzór na s_n.

Rozważmy teraz przypadek postępu nieskończonego. Jeżeli $q < 1$, czyli $\alpha < 45^0$, to proste OZ i AY przecinają się w punkcie Q, którego rzutem na oś niech będzie Q'. Postęp jest nieskończenie malejący; sumą jego jest odcinek $OQ' = OA + QQ'$, czyli $s = a_1 + sq$, skąd otrzymujemy znany wzór na sumę.

Przy $q > 1$ proste AY i OZ nie przetną się po tej stronie osi, po której budujemy kolejne wyrazy postępu. Postęp jest w tym przypadku szeregiem rozbieżnym.

Odesa, w maju. *Romuald Witwiński.*