SUR L'ÉQUIVALENCE DES POLYÈDRES, EN PARTICULIER DES POLYÈDRES RÉGULIERS, ET SUR LA DISSECTION DES POLYÈDRES RÉGULIERS EN POLYÈDRES RÉGULIERS

Conférence faite à la Section cracovienne de la Société Polonaise de Mathématique le 1-er Juin 1938[1])

Par M. Henri Lebesgue, Paris

J'ai choisi ce sujet de conférence parce qu'il est intimement lié aux questions de mesures des grandeurs, dont je me suis occupé toute ma vie; mais aussi parce qu'il y s'agira de polyèdres, ces corps si peu étudiés par les mathématiciens. A peu près seuls les ont considérés ceux qui se sont occupés de cristallographie; et puisque votre Président et Doyen, M. Zaremba, est l'un de ces rares mathématiciens, ce sujet me donne la joie de lui adresser ici mon hommage.

1. Pendant longtemps le nombre attaché à une collection, une longueur, l'aire d'un domaine, le volume d'un corps ont été considérés comme des notions premières dont l'examen critique était du ressort de la métaphysique; les mathématiciens, eux, devaient se borner à évaluer ces nombres, ces longueurs, ces aires et ces volumes; c'est-à-dire essentiellement à décider de leur égalité ou de leur inégalité, et, dans ce second cas, à les classer en plus petits et plus grands. Cette conception est encore celle qui sert de base à la plupart des exposés élémentaires non axiomatiques. Bien avant de faire de l'axiomatique systématiquement les mathématiciens furent cependant obligés de traduire les points de départ métaphysiques en termes logiques qui servirent de bases à leurs raisonnements; mais cette traduction était si indiquée qu'elle se fit sans qu'on

[1]) Je me suis permis de développer ici plusieurs points que j'avais du, oralement, me contenter d'indiquer très brièvement.

s'en rende nettement compte et dès les débuts de la science. Si bien que, tandis que la définition axiomatique des aires et des volumes, par exemple, n'a été expressement formulée qu'au XIX-e siècle, c'est pourtant cette même définition qui a toujours été utilisée dans toutes les recherches, élémentaires ou élevées.

Mais l'unité des considérations et leur grande simplicité n'est apparue que lorsque les savants eurent assez utilisé la notion de limite pour considérer que l'emploi de l'infini était chose naturelle, claire et légitime. L'infini s'introduit comme l'on sait dès la comparaison de deux longueurs, et c'est alors la fameuse question des incommensurables; mais elle s'introduit autrement encore dans l'étude des volumes. Il y a, à cet égard, une différence essentielle entre le problème des aires des polygones et celui des volumes des polyèdres: tandis qu'une comparaison de telles aires se ramène à une comparaison de longueurs sans l'emploi de l'infini, cet emploi est indispensable pour la comparaison des volumes des polyèdres. C'est de ce fait, prouvé au début du XX-e siècle, et de quelques questions connexes que je veux vous parler.

2. Le point de départ métaphysique de la notion d'aire, c'est l'idée que des domaines plans quelle que soit leur position absolue et relative occupent toujours une même *place*; ceci se traduit logiquement ainsi:

I. *Deux domaines D et D' formés respectivement par la réunion des domaines $D_1, D_2, \ldots, D_p$ et par la réunion des domaines $D'_1, D'_2, \ldots, D'_p$, D_i et D'_i étant égaux, ont même aire. Deux tels domaines seront dits équivalents de façon finie (en abrégé éq. de f. f.). Si D' n'est formé que par la réunion de certains seulement des D'_i l'aire de D est plus grande que celle de D'.*

Si, de plus. on veut traduire par un nombre le résultat de la comparaison, on exige qu'à deux domaines de même aire soit attaché le même nombre et qu'à un domaine d'aire plus grande que l'aire d'un autre soit attaché un nobmre aire plus grand que le nombre aire du second domaine; d'où le problème:

II. *Attacher à chaque domaine D un nombre positif tel qu'à l'addition des domaines corresponde l'addition des nombres attachés et qu'à deux domaines éq. de f. f. soient attachés les mêmes nombres.*

Cet énoncé est celui du problème des aires si les domaines D et D' sont plans, c'est le problème des volumes si les domaines D et D' sont à trois dimensions, ce serait le problème des longueurs si les domaines D et D' étaient découpés sur la droite et si l'on avait obtenu le nombre le plus général autrement que par la comparaison même des longueurs.

Le problème précédent peut encore s'énoncer:

III. *Attacher à chaque domaine plan D un segment d tel qu'à deux domaines D et D' éq. de f. f. correspondent deux segments d et d' éq. de f. f.*

Si l'on laissait au mot domaine une trop grande généralité on devrait s'attendre à avoir à considérer des domaines partiels D_i dépendant d'une infinité de paramètres de forme, on ne pourrait donc espérer résoudre le problème précédent sans un appel à l'infini; au contraire, cela est possible lorsque la famille des D est celle des polygones, auquel cas celle des D_i peut être supposée celle des triangles.

3. Soit en effet ABB_1A_1 un parallélogramme et A_2 un point du segment A_1B_1; il définit un parallélogramme ABB_2A_2 qui est éq. de f. f. au premier; prenant un point A_3 de A_2B_2 on arrive au parallélogramme ABB_3A_3 éq. de f. f. à ABB_2A_2 donc à ABB_1A_1 comme on le voit en traçant sur ABB_2A_2 à la fois les deux séries de segments de droites qui servaient à le subdiviser pour les passages à ABB_1A_1 et à ABB_3A_3. En continuant ainsi on voit que ABB_1A_1 est éq. de f. f. à tout parallélogramme $AB\beta\alpha$ où α est sur la droite indéfinie A_1B_1.

Choisissons α de manière que $A\alpha$ soit un nombre entier de fois l'unité de longueur choisie; soit par exemple 5 fois. Partageons $A\alpha$ en 5 parties égales, par les points de subdivision menons des parallèles à AB, nous obtenons 5 parallélogrammes qui, disposés autrement, donnent $AB'\beta'\alpha'$ tel que AB' soit porté par AB et égal à 5 fois AB et que $A\alpha'$ porté par $A\alpha$ soit égal à l'unité.

Recommençons les opérations du début, mais en faisant jouer à $A\alpha'$ le rôle de AB, nous obtenons un rectangle $AB_0\beta_0\alpha'$ dont la base $A\alpha'$ est égale à l'unité.

Soit un triangle ABC, β et γ les milieux de AB et de AC; faisons tourner $A\beta\gamma$ de π autour de C, β vient en β' et nous avons le parallélogramme $BC\beta'\beta$ éq. de f. f. à ABC. D'où un rectangle de base unité équivalent de façon finie à un polygone D qu'on décomposera d'abord en triangles; le second côté de ce rectangle peut être considéré comme le segment d cherché.

Du moins si le problème est possible, ce qui tout d'abord exige que le segment d soit unique. Pour être certain qu'il en est ainsi, décomposons tout polygone donné $ABCD...$ en la somme algébrique des triangles $OAB, OBC, ...; O$ étant un point du plan choisi une fois pour toutes. Et au polygone attachons le segment somme algébrique de ceux attachés aux triangles $OAB, OBC, ...$ Ceux-ci sont bien déterminés car dans la transformation des parallélogrammes le produit de la base par la hauteur n'a pas changé. Ainsi nous attachons à notre polygone un segment orienté, de mesure positive et égale à

$$\tfrac{1}{2}[\varepsilon AB\cdot(O,AB)+\varepsilon' BC\cdot(O,BC)+...];$$

les symboles tels que (O,AB) désignant les distances de O aux côtés tels que AB; les $\varepsilon, \varepsilon', ...$ étant égaux à $+1$ ou à -1 suivant qu'aux voisinages des milieux de $AB, BC, ...$ le polygone est ou non du même côté que O par rapport $AB, BC, ...$

Si donc nous avions un polygone D divisé en deux autres D_1, D_2 par une ligne polygonale dont AB serait l'un des côtés, le produit $AB\cdot(O,AB)$ figurerait dans les nombres attachés à D_1 et D_2, mais avec des signes contraires et de là résulte immédiatement que le nombre attaché à D serait la somme de ceux associés à D_1 et à D_2. Ceci s'étend à D partagé en $D_1, D_2, ..., D_p$. Or on peut supposer que tous les D_i sont des triangles et l'on vérifie facilement que le nombre que notre procédé attache à un triangle est $+\frac{1}{2}$ base $\times$ hauteur.

Notre problème est donc possible; nous l'avons résolu et nos considérations montrent que la solution de ce problème est unique à un multiplicateur près correspondant au choix de l'unité d'aire.

4. Supposons maintenant que les domaines soient des polyèdres de l'espace euclidien ordinaire et traitons le problème des volumes.

Si D est un prisme, une opération analogue à celle qui nous permit de passer de $ABCD$ à $AB\beta\alpha$, opération qui est d'ailleurs classique, permettra de remplacer le prisme D par n'importe quel autre prisme ayant même longueur d'arête, même surface latérale prismatique indéfinie. Le nouveau prisme pourra être supposé droit. Opérant sur la base de ce prisme comme au numéro précédent, nous obtenons un rectangle dont un des côtés est 1 par déplacements de morceaux de cette base; si chaque morceau emporte avec lui un prisme droit dont il est base et dont la hauteur est celle du prisme droit de départ, nous obtenons un parallélépipède rectangle dont une des arêtes est égale à l'unité. Considérons cette arête comme la hauteur et recommençons la même opération; nous construisons un parallélépipède rectangle dont une base est le carré de côté 1 et dont la hauteur est un segment qui jouera le rôle de d. Il est visible que la mesure de ce segment est le produit de la hauteur de D par l'aire de la base de D.

Jusqu'ici rien n'est donc changé et si nous ne considérions comme domaines partiels ou totaux que des prismes, le problème serait résolu car on vérifierait facilement que notre résultat remplit bien toutes les conditions imposées.

Mais nous voulons envisager des polyèdres quelconques, il faudrait donc savoir associer un segment à un tétraèdre, c'est à dire savoir construire un prisme qui soit éq. de f. f. à ce téraèdre. Et d'ailleurs, si l'on savait faire cela, le problème serait traité.

On sait que dans les cours on n'effectue cette construction que par un appel à l'infini, soit qu'on considère le tétraèdre comme la limite d'une suite indéfinie de corps construits avec des prismes, soit qu'on le considère comme la réunion d'une infinité actuelle de différentielles ou d'indivisibles. Entre tous ces procédés il n'y a que des différences de présentation, je puis donc les réunir en disant qu'il y s'agit toujours de l'emploi des méthodes du calcul intégral.

L'emploi de ces méthodes a quelque chose de choquant; un souci d'élégance, un besoin pédagogique de simplicité ont dû inciter de très bonne heure à rechercher pour le cas des volumes quelque méthode écartant le recours à l'infini.

L'un de mes auditeurs au Collège de France, M. R. Cast, m'a signalé à cet égard une phrase de la „Lettre de Diderot sur les aveugles à l'usage de ceux qui voient", où il est question du mathématicien aveugle SAUNDERSON qui fut professeur à l'Université de Cambridge: „Il est l'auteur d'un ouvrage très parfait dans son genre. Ce sont des éléments d'algèbre où l'on n'aperçoit qu'il était aveugle qu'à la singularité de certaines démonstrations qu'un homme qui voit n'eut peut-être pas rencontrées. C'est à lui qu'appartient la division du cube en six pyramides égales qui ont leurs sommets au centre du cube, et pour base, chacune une de ses faces. On s'en sert pour démontrer d'une manière très simple que toute pyramide est le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur...".

Que DIDEROT croie pouvoir nommer le premier homme ayant remarqué une chose aussi visible que la décomposition d'un cube en six pyramides égales fait sourire; qu'il présente cette remarque comme presque inaccessible aux voyants serait étonnant si l'on ne savait que tous ceux qui écrivent sur les aveugles, à commencer par les aveugles eux-mêmes, pour bien mettre en valeur la substitution des sens, en arrivent à présenter la possession du sens de la vue comme la plus désastreuse des infirmités. Mais que veut dire DIDEROT par les derniers mots cités? Je l'ai demandé à M. JEAN ITARD, professeur au Lycée Michelet. M. ITARD, qui connait bien les manuels de Géométrie des XVI-e, XVII-e et XVIII-e siècles [1]), a pu me renseigner immédiatement:

„Diderot se trompe sur SAUNDERSON. L'algèbre de ce dernier est sortie en 1740. En 1741 CLAIRAUT publiait sa Géométrie où il emploie le même procédé. Cela consiste à montrer d'abord par une méthode plus ou moins voisine des indivisibles que le volume de la pyramide est en langage moderne $kB \cdot H$ (k coefficient de proportionnalité encore indéterminé). En prenant ensuite la pyramide sixième du cube, sommet au centre et base sur une face, k apparaît égal à 1/3 [2]).

---

[1]) Voir *L'Enseignement scientifique*, 9-ième Ann., No 87, Avril 36; 10-ième Ann., No 94, Janv. 37; 11-me Ann., No 102, Nov. 37.

[2]) Pour préciser ce passage de la lettre de M. Itard, considérons deux pyramides T_1, T_2 de hauteurs H_1, H_2 et dont les bases convexes ont des

D'ALEMBERT aura dit, je le suppose, que son ennemi intime CLAIRAUT n'avait fait que reprendre une idée de SAUNDERSON et DIDEROT aura sauté sur l'occasion.

Mais SÉBASTIEN LE CLERC, en 1690, justifie dans sa Géométrie le facteur $^1/_3$ par la même considération, laissant de côté tout l'essentiel, c'est-à-dire ce qui précède.

LE CLERC était graveur et professeur à l'Académie de peinture où il était du parti de LEBRUN et donc adversaire de l'école de DESARGUES. Il était donc loin d'être aveugle! Je ne sais même pas, vu ses origines lorraines (il est né à Metz), s'il ne faudrait pas voir dans ses travaux des influences de DÜRER. En tout cas la méthode du cube est une invention de peintres, de sculpteurs, de gens qui voient".

La lettre de M. ITARD[1]) montre bien que l'évaluation du volume du tétraèdre a été l'occasion de multiples essais qui, d'une façon plus ou moins consciente, visaient à éliminer l'emploi de la méthode du calcul intégral, à utiliser seulement l'équivalence.

5. On remarquera que, dans ces essais, la notion d'équivalence est parfois élargie. L'équivalence simple que nous avons considérée supposait que les deux corps D et D' (dans

---

aires B_1, B_2. Soient deux arêtes S_1a_1, S_2a_2 respectivement de T_1 et T_2; divisons les chacune en n parties égales par les points $a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots$, d'une part; $a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots$ d'autre part. Enfermons T_1 dans le corps C_1, formé des prismes d'arêtes $a_1b_1, b_1c_1, \ldots$ et dont les bases sont les sections de T_1 par les plans parallèles à la base et passant par $a_1, b_1, \ldots$ Faisons de même pour T_2. Deux prismes de même rang dans C_1 et C_2 ont des bases dont les aires sont entre elles comme B_1 et B_2 et des hauteurs qui sont entre elles comme H_1 et H_2, donc leurs volumes sont entre eux comme $B_1 \cdot H_1$ et $B_2 \cdot H_2$ et par suite il en est de même des volumes de C_1 et C_2:

$$\frac{\text{Vol.}\,(C_1)}{\text{Vol.}\,(C_2)} = \frac{B_1H_1}{B_2H_2}.$$

On passera de là à l'égalité analogue pour T_1 et T_2 par les procédés ordinaires; c'est-à-dire en prenant plus ou moins de précautions suivant le degré de rigueur que l'on désire atteindre.

[1]) Cette lettre n'a pas été écrite pour être publiée; mais elle sépare si nettement ce qui est renseignement précis de ce qui est supposition ou suggestion que j'ai cru pouvoir la reproduire ici en entier.

la suite ce seront toujours deux polyèdres ou deux ensembles formés d'un nombre fini de polyèdres) pouvaient être partagés en un nombre fini de corps partiels D_i d'une part, D'_i de l'autre, respectivement égaux deux à deux; D_i égal à D'_i. Si LE CLERC trouve que la pyramide P à base carrée qu'il considère est équivalente au prisme P' de même base et dont la hauteur est le tiers de la hauteur de la pyramide, c'est parce qu'on peut former le même cube avec six pyramides égales à P ou avec six prismes égaux à P'. D'où l'*équivalence par multiplication*: D et D' seront dits équivalents par multiplication si un corps formé d'un certain nombre entier de fois D est éq. de f. f. simple avec un corps formé du même nombre de fois D'.

Enfin la décomposition faite plus haut d'un polygone en une somme algébrique de triangles incite à convenir que: deux corps D et D' seront dits *équivalents par différence* s'il existe deux corps Δ et Δ', éq. de f. f. simple et tels que $D+\Delta$ et $D'+\Delta'$ soient équivalents par multiplication.

L'emploi simultané de tous ces procédés constituera l'équivalence générale[1]); nous allons étudier l'équivalence des polyèdres en nous bornant à l'équivalence simple, mais les résultats qui ont été obtenus et que nous indiquerons sont valables pour l'équivalence générale.

6. Nous avons vu que le problème des aires, énoncé sous la forme II, était possible et admettait une solution déterminée, à un multiplicateur près, quand les domaines D sont les polygones du plan euclidien. Supposons que, par un raisonnement quelconque, on ait prouvé le même fait pour le cas où les polygones D sont découpés dans le plan de LOBATCHEWSKI et pour le cas où ils sont découpés sur la sphère; ce qu'il est effectivement possible de faire. On vérifie immédiatement qu'une solution du problème est donnée par le nombre:

$$\text{somme des angles de } D - \pi\times(\text{nombre de côtés de } D - 2)$$

---

[1]) Il est inutile de rechercher ici s'il est ou non necessaire de recourir plusieurs fois à ces procédés pour transformer un corps D en un corps D'.

s'il s'agit de géométrie sphérique et par ce même nombre, changé de signe s'il s'agit de géométrie lobatchewskienne; donc, celle des solutions qu'on appellera l'aire vérifiera la relation:

$$\text{somme des angles de } D-\pi\times(\text{nombre de côtés de } D-2)= \\ =k\times\text{aire de } D,$$

k étant une constante indépendante de D. Cette constante est positive pour la géométrie sphérique, nulle pour la géométrie euclidienne, négative pour la géométrie de LOBATCHEWSKI. On retrouve ainsi, en particulier, le théorème d'ALBERT GIRARD sur l'aire du triangle sphérique.

C'est en partant de ces faits que M. BRICARD a donné une impulsion décisive à l'étude de l'équivalence finie [1]. En s'efforçant de construire à l'aide des dièdres d'un polyèdre D une solution de notre problème II on est arrêté tout de suite, mais de tels efforts permirent à M. BRICARD d'apercevoir qu'entre les dièdres de deux polyèdres D et D' éq. de f. f. il existe une relation; du moins dans certains cas, car M. BRICARD avait fait implicitement une hypothèse que nous allons expliciter.

D et D', étant éq. de f. f., sont formés respectivement par la réunion des polyèdres $d_1, d_2, \ldots, d_p$ et par la réunion de d'_1, $d'_2, \ldots d'_p$; d_i et d'_i étant égaux pour chaque valeur de i. Nous supposerons de plus que si a_j est l'une quelconque des arêtes des d_i, aucun sommet de ces polyèdres d_i n'est situé à l'intérieur du segment a_j et de même qu'à l'intérieur de toute arête a'_j des d'_i il n'y a jamais de sommets des d'_i. Alors chaque arête a_j sera en général confondue avec plusieurs autres arêtes d_i; autour de ces arêtes on rencontrera plusieurs des dièdres α_m des d_i; les dièdres α_m se groupant ainsi en familles $s_1, s_2, \ldots$ Ceci étant, guidé par les faits rappelés au début de ce numéro, commençons par attacher à chaque d_i la somme Σ_n des dièdres correspondants; la somme des nombres attachés à $d_1, d_2, \ldots, d_p$ sera:

$$\sum_m \alpha_m = \sum_n (\sum \text{ des dièdres } \alpha_m \text{ de la série } s_n) = \sum_n \Sigma_n.$$

Or la parenthèse est égale à A_k, à 2π ou à π, suivant que l'arête de la série s_k est portée par l'arête d'un dièdre D de

[1]) Nouv. Ann. de Mathématiques, 1896. Voir aussi Sforza (Per. di Mat. 1897).

mesure A_k, ou est entiérement entourée de dièdres des d_i, ou qu'elle est intérieure soit à une face de D, soit à une face des d_i.

Ainsi on a:

$$\sum_m a_m = \sum e_k A_k + e\pi,$$

les e étant des entiers positifs. Mais on a de même

$$\sum_m a'_m = \sum e'_k A'_k + e'\pi,$$

et comme les dièdres a_m et a'_m sont respectivement égaux, il en résulte

$$\sum e_k A_k - \sum e'_k A'_k = E\pi,$$

E étant un entier positif, négatif ou nul.

M. Bricard applique ce résultat au cas où D serait un tétraèdre régulier — tous les A_k ont alors une même valeur T —, et où D' serait un cube, — tous les A'_k seraient égaux à $\pi/2$; la relation précédente exigerait donc que T soit commensurable avec π, ce qui n'est pas. Donc un tétraèdre régulier ne peut être transformé en un cube par une transformation de la nature de celles envisagées.

7. Mais, pour étendre cette conclusion à toute équivalence simple, c'est-à-dire pour prouver qu'alors il existe une ou plusieurs relations linéaires homogènes à coefficients entiers (ou rationnels ce qui est la même chose) entre les A_k, A'_k et π, il fallait faire appel à une idée nouvelle. M. Dehn [1]) montra que, pour obtenir ces relations à coefficients rationnels, on pouvait, à l'exemple de ce que l'on fait dans certaines questions d'analyse indéterminée ou d'approximations, utiliser comme intermédiaire des relations linéaires à coefficients quelconques.

Groupant encore les dièdres a_m en séries s_n associées chacune à un même segment d'arête des d_i, limité par deux sommets des d_i et ne contenant à son intérieur aucun tel sommet, il associe à chaque série la somme Σ_n des a_m la constituant et la longueur σ_n du segment d'arête considéré. On n'aurait plus, en général

$$\sum \Sigma_n = \sum \Sigma'_{n'}$$

[1]) Math. Ann. Bd. LV (1902).

parce qu'un dièdre des d_i appartient à un certain nombre de séries s_n et le dièdre homologue α' peut appartenir à un nombre différent de séries s'_n; mais il est tout à fait clair que l'on a:

$$\sum \sigma_n \Sigma_n = \sum \sigma'_{n'} \Sigma'_{n'}.$$

Cette relation s'écrit encore:

$$\sum L_k A_k - \sum L'_k A'_k = N\pi,$$

relation dans laquelle N est un nombre quelconque inconnu. Il semblerait donc qu'elle ne pourra servir à rien. Mais, traduisant les considérations géométriques donnant ce résultat en des déductions purement algébriques, M. DEHN recherche des conditions auxquelles doivent être soumises des variables $\bar{L}_k, \bar{L}'_k$ quelconques pour que les mêmes calculs algébriques puissent être mis en oeuvre et il arrive ainsi à cet énoncé:

Soit $(\mathfrak{L})$ *le système des relations homogènes à coefficients entiers liant les arêtes* L_k *et* L'_k *de deux polyèdres ou systèmes de polyèdres* D, D'; *dans* $(\mathfrak{L})$ *on a remplacé les nombres* L_i, L'_i *par des inconnues* $\bar{L}_i, \bar{L}'_i$; *si* D *et* D' *sont éq. de f. f., à toute solution rationnelle* $(\bar{L}_i)_r$, $(\bar{L}'_i)_r$ *des équations* $(\mathfrak{L})$ *correspond un nombre rationnel* R, *positif, négatif ou nul, tel que l'on ait*:

$$(B) \qquad \sum (\bar{L}_k)_r A_k - \sum (\bar{L}'_k)_r A'_k = R \cdot \pi.$$

8. Cet énoncé [1]), qui est exact aussi bien pour l'équivalence générale que pour l'équivalence simple, fait donc apparaître des relations $(\mathfrak{B})$ de la forme de celles prévues par M. BRICARD. Une telle relation, au moins, existe bien toujours car les équations $(\mathfrak{L})$ étant à coefficients entiers, admettent une solution rationnelle soit confondue avec, soit aussi voisine qu'on le veut de leur solution L_i, L'_i. Ainsi on peut supposer que, dans $(\mathfrak{B})$, les nombres rationnels $(\bar{L}_k)_r$, $(\bar{L}'_k)_r$ sont ou confondus avec les L_k, L'_k ou aussi voisins qu'on le veut de ceux-ci.

La résolution des équations $(\mathfrak{L})$ donneront:

$$\bar{L} = t_1 \mathfrak{L}_{k,1} + t_2 \mathfrak{L}_{k,2} + \ldots, \qquad \bar{L}'_k = t_2 \mathfrak{L}'_{k,1} + t_2 \mathfrak{L}'_{k,2} + \ldots,$$

les t étant des paramètres arbitraires, les $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}'$ des nombres rationnels fournissant un système de solutions indépendantes.

[1]) Pour sa justification, voir la Note I placée à la suite de cette conférence.

Ces solutions $\mathcal{L}_{k,f}, \mathcal{L}'_{k,f}$ sont en nombre $N-p$, si N est le nombre total des arêtes de D et D' et s'il y a p équations $(\mathcal{L})$ indépendantes; elles nous fournissent $N-p$ relations $(\mathcal{B})$. Celles-ci sont indépendantes car, s'il existait une combinaison linéaire homogène des premiers membres des $(\mathcal{B})$ qui soit identiquement nulle par rapport aux A_k, A'_k c'est que cette même combinaison faite, pour chaque valeur de k, sur les $\mathcal{L}_{k,f}$ et sur les $\mathcal{L}'_{k,f}$ donnerait des résultats nuls ce qui est impossible, les $\mathcal{L}_{k,f}, \mathcal{L}'_{k,f}$ étant des solutions indépendantes.

Donc, le théorème de M. Dehn exige, pour l'équivalence de D et D', un nombre total de conditions indépendantes égal au nombre total N des arêtes de D et D'. p de ces conditions, $p \leqslant N-1$, sont de la forme $(\mathcal{L})$, les $N-p$ autres, $N-p \geqslant 1$, font partie de la famille $(\mathcal{A})$ des relations linéaires, homogènes à coefficients entiers liant les A_i, A'_j et π.

On voit ainsi à nouveau que, s'il y a équivalence, il y a toujours une relation $(\mathcal{B})$. Donc, dans le cas d'équivalence, la famille $(\mathcal{A})$ contient toujours au moins une relation; mais se peut-il que la famille $(\mathcal{L})$ n'en contienne aucune? Pour que cela se produise, les $(\bar{L}_k)_r, (\bar{L}'_k)_r$ étant alors des nombres rationnels arbitraires, il faudrait que tous les A_i, A'_j soient commensurables avec π. Lorsque cette condition est réalisée l'équivalence peut exister sans qu'il y ait de relations $(\mathcal{L})$; les deux parallélipèdes rectangles de côtés

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}; \quad \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{\frac{6}{35}},$$

qui sont éq. de f. f. puisqu'ils ont même volume, en sont un exemple.

Pour généraliser ces remarques supposons que parmi les dièdres de D et D' nous en ayions distingués certains en nombre N_1; les L, L', A, A' correspondant seront dits *distingués*. Si, dans les $(\mathcal{L})$, il y a μ_1 relations, $\mu_1 \leqslant N_1$ linéairement indépendantes par rapport aux L, L' distingués, les $\bar{L}, \bar{L}'$ correspondants dépendront de $N_1 - \mu_1$ paramètres, d'où $N_1 - \mu_1$ relations $(\mathcal{B})$ linéairement indépendantes par rapport aux A, A' distingués. Donc, *parmi les relations $(\mathcal{L})$ et $(\mathcal{A})$ il y en a au total au moins N_1, qui sont indépendantes par rapport aux L, L' distingués et par rapport aux A, A' distingués.*

9. Pour appliquer ces généralités, déduisons en que l'*équivalence finie entre un tétraèdre D et le cube D' de même volume est un fait tout à fait exceptionnel.* Définissons D par 6 paramètres, par exemple par les longueurs des six arêtes; elles ne sont assujetties qu'à des conditions d'inégalités, les égalités limites de ces inégalités donnent les frontières du domaine de l'espace à 6 dimensions dans lequel il faut prendre le point de coordonnées $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$ figuratif des longueurs d'arêtes choisies. Une relation $(\mathcal{L})$ sera de la forme:

$$r_1 L_1 + r_2 L_2 + r_3 L_3 + r_4 L_4 + r_5 L_5 + r_6 L_6 + r_7 \sqrt[3]{V} = 0,$$

les r étant entiers et V étant l'expression du volume du tétraèdre en fonction de ses arêtes. Une relation de cette forme est représentée dans l'espace à 6 dimensions par une variété algébrique à cinq dimensions, à moins qu'elle ne soit vérifiée par tous les points de l'espace. Cette dernière hypothèse est évidemment à rejeter; disons, par exemple, soient L_1, L_2, L_3 les longueurs des arêtes SX, SY, SZ et L_4, L_5, L_6 les longueurs des arêtes respectivement opposées YZ, ZX, XY; si la relation algébrique était une identité, elle serait vérifiée pour S confondue avec X, auquel cas V est nul et l'on a: $L_1 = 0, L_2 = L_6$, $L_3 = L_5$; la relation linéaire d'où nous sommes partis, ou l'une de celles qui s'en déduisent par des changements de signes des r_i, serait vérifiée, ce qui donne:

$$(\pm r_2 \pm r_6) L_6 + (\pm r_3 \pm r_5) L_5 + r_4 L_4 = 0;$$

or une telle relation entre les 3 longueurs des côtés d'un triangle arbitraire est nécessairement identiquement nulle d'où $r_4 = 0$. Et de la même manière on montrerait que $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ sont nuls, donc aussi r_7.

Ainsi, pour que le système $(\mathcal{L})$ ne contienne aucune relation, puisque l'ensemble des systèmes de nombres entiers $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7$ est dénombrable, il suffira de prendre le point représentatif hors d'une infinité dénombrable de variétés algébriques.

De même, une relation $(\mathcal{A})$ étant

$$r_1 A_1 + r_2 A_2 + r_3 A_3 + r_4 A_4 + r_5 A_5 + r_6 A_6 + r_7 \pi = 0,$$

se traduira par une relation algébrique entre les $\bar{L}$ non identiquement satisfaite car, autrement, elle resterait vraie pour la figure limite de celle obtenue en faisant tourner XYZ autour de XY, de façon à l'amener sur XYS, c'est-à-dire qu'on pourrait faire dans la relation linéaire entre les A_i ou dans celles qui s'en déduisent en modifiant certains des signes des r_i,

$$A_4=\pi-A_2, \quad A_5=\pi-A_1, \quad A_6=0.$$

Mais ceci donnerait une relation entre les trois dièdres A_1, A_2, A_3 du trièdre quelconque $SXYZ$, ce qui est impossible; la relation obtenue devrait donc être satisfaite quels que soient A_1, A_2, A_3 d'où, en particulier, $r_3=0$. Mais, de même, on annulerait $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ d'où r_7.

Ainsi, pour que le système $(\mathcal{A})$ ne contienne aucune relation, il suffit de prendre le point représentatif hors d'une infinité dénombrable de variétés algébriques.

En résumé: *le tétraèdre le plus général n'est pas éq. de f. f. à un prisme. Pour lui, aucune des six conditions nécessaires pour cette équivalence, exigées par le théorème de M. Dehn, n'est remplie.*

Pour préciser la portée analytique de cet enoncé, il faudrait étudier l'indépendance [1]) des conditions $(\mathcal{L})$ et $(\mathcal{A})$ soit qu'on particularise les constantes qu'elles contiennent, soit qu'on leur attribue toute la généralité possible; contentons-nous d'une remarque. Les longueurs des six arêtes étant indépendantes, l relations $(\mathcal{L})$, $l \leqslant 6$, n'entrainent aucune autre relation $(\mathcal{L})$ mais elles se traduisent par l relations entre dièdres. Et comme entre les six dièdres d'un tétraèdre quelconque il y a une relation, cela peut nous conduire, au plus, à $l+1$ relations analytiques indépendantes entre les dièdres. a relations $(\mathcal{A})$ se traduisent par a relations entre les longueurs d'arêtes. Donc l relations $(\mathcal{L})$ et a relations $(\mathcal{A})$ entraînent au plus $2l+2a+1$ relations entre les longueurs d'arêtes et les grandeurs de dièdres; ce qui fera donc au plus, $2l+2a+1$

---

[1]) De par leur définition même les $(\mathcal{L})$ et $(\mathcal{A})$ sont linéairement indépendantes mais il s'agirait d'étudier si elles sont ou non indépendantes quand on tient compte des relations qui lient, dans un tétraèdre, les L_i aux A_j et les A_i entre eux.

relations $(\mathcal{L})$ et $(\mathcal{A})$. Pour avoir six telles relations il faut donc $l+a \geqslant 3$. *Ainsi il faut écrire au moins trois relations* $(\mathcal{L})$ *et* $(\mathcal{A})$ *entre les longueurs d'arêtes et les grandeurs des dièdres du tétraèdre le plus général pour qu'il puisse être éq. de f. f. à un prisme.*

Les trois relations dont il s'agit sont indépendantes non seulement linéairement, mais aussi compte tenu des relations analytiques qui lient dièdres et arêtes.

10. Je viens de m'arrêter un moment sur des remarques qui montrent nettement le caractère exceptionnel de l'équivalence finie, s'il s'agissait seulement de mettre en evidence la différence entre équivalence finie et égalité des volumes bien des énoncés amusants pourraient servir.

Soient deux polyèdres équivalents D, D' donc de même volume, je vais faire l'hypothèse que D est convexe, cela n'est pas nécessaire au raisonnement mais me permettra de dire que D est défini par les plans de ses faces, sans ajouter aucun autre renseignement qui sans cela serait nécessaire. Soient OX_1, $OX_2, \ldots, OX_p$ les directions perpendiculaires à ces faces. Je prends, aussi près qu'on le voudra de OX_2, une droite Ox_2 telle que l'angle X_1Ox_2 ne soit exprimable par aucune relation linéaire à coefficients rationnels entre π et les dièdres de D'; puis Ox_3, aussi près qu'on le voudra de OX_3, et telle que X_1Ox_3 et x_2Ox_3 ne soient pas exprimables par des relations de la même espèce entre les mêmes angles et x_1Ox_2; puis Ox_4 de même, mais en tenant compte cette fois de $x_1Ox_2, x_1Ox_3, x_2Ox_3$; puis Ox_5 en tenant compte de $x_1Ox_2, x_1Ox_3, x_1Ox_4, x_2Ox_3, x_2Ox_4, x_3Ox_4$ etc. Faisons tourner chaque face de D autour d'un de ses points pour que, si la position de départ était perpendiculaire à OX_k, la position finale soit perpendiculaire à Ox_k. Nous avons ainsi un nouveau polyèdre D_0 très voisin de D; une homothétie convenable de D_0 donnera un polyèdre D_1 très voisin de D, de même volume que D et D'. Or il est clair que D_1, n'est pas éq. de f. f. à D' puisque aucune relation $(\mathcal{A})$ ne contient les dièdres de D_1.

Ainsi, *étant donnés deux polyèdres de même volume D et D', on pourra modifier d'aussi peu que l'on voudra les inclinaisons mutuelles des faces de D et obtenir un polyèdre D_1 de même volume que D' et non éq. de f. f. à D'.*

Il est clair que, de la même façon, *étant donné un polyèdre* D' *on peut construire une suite indéfinie de polyèdres* $D_1, D_2, D_3 \ldots$ *tous de même volume que* D', *dont aucun n'est éq. de f. f. à* D' *et tels que deux quelconques d'entre eux ne soient pas éq. de f. f.* [1]).

Revenons au cas de deux polyèdres D et D'; nous avons obtenu D_1, de même volume que D' et non éq. de f. f. à lui; serait-il toujours possible d'obtenir un polyèdre $\mathscr{P}_1$ de même volume que D, aussi voisin qu'on le voudra de D, et éq. de f. f. à D'? C'est l'une des nombreuses questions que l'on pourra se poser à l'occasion de ce qui précède. Certes on le pourra si D' est un prisme, il suffirait de prendre $\mathscr{P}_1$ formé de cubes ou de prismes, mais est-ce toujours possible quand D' est quelconque?

Remarquons encore qu'un $\mathscr{P}_1$ formé de cubes et pris très voisin de D peut être cependant fort différent de D par la forme; déjà notre polyèdre D_1 pourrait être fort différent de D bien qu'il ait le même nombre de faces que lui. Ce n'est que dans le cas particulier où D n'aurait eu que des sommets trièdres que D_1 aurait eu même *structure* que D, c'est-à-dire qu'il existerait entre les points frontières de D et D_1 une correspondance continue faisant correspondre sommet à sommet, arête à arête, face à face. La question se pose de savoir si l'on peut trouver D_1 et $\mathscr{P}_1$ de même structure que D; question peut-être délicate à traiter, ce qui suffirait à justifier qu'on s'en occupe.

Une autre question, sans doute difficile, est celle-ci: revenant au cas où D est un tétraèdre et où D' est le cube de même volume, préciser tous les cas possibles quant au nombre de relations ($\mathscr{L}$) et ($\mathscr{C}$) linéairement indépendantes et en donner des exemples précis numériques.

11. C'est à l'aide de tels exemples précis que M. M. Bricard et Dehn ont tout d'abord montré la différence entre égalité des volumes et équivalence finie. M. Bricard avait considéré le cas où D était un tétraèdre régulier et D' un cube; M. Dehn a considéré de plus le cas où, D étant encore un tétraèdre régulier, D' serait formé de deux tels tétraèdres.

[1]) Bien entendu il conviendrait cette fois de remplacer les choix arbitraires par des choix déterminés, ce qui est immédiat.

Par ces exemples, ces Auteurs posaient le problème de l'équivalence dans le cas où D et D' sont deux systèmes de polyèdres réguliers, problème dont nous allons nous occuper.

Il est bon que je rappelle, tout d'abord, comment on peut calculer les éléments des polyèdres réguliers. Soit Ω le centre de la sphère circonscrite à un polyèdre, A un sommet de ce polyèdre, AB une arête dont le milieu est I et soit O le centre d'une des deux faces passant par AB. Les dièdres du trièdre $\Omega A, \Omega O, \Omega I$ sont:

$$\mathfrak{D}\cdot\Omega I=\frac{\pi}{2}, \qquad \mathfrak{D}\cdot\Omega A=\frac{\pi}{s}, \qquad \mathfrak{D}\cdot\Omega O=\frac{\pi}{f},$$

s'il y a s faces passant par chaque sommet et si chaque face a f côtés. Les faces de ce trièdre sont les angles sous lesquels de Ω on voit le $\frac{1}{2}$ côté AI, l'apothème OI, le rayon OA du cercle circonscrit à une face et comme les triangles $\Omega OI, \Omega OA$, ΩIA sont rectangles respectivement en O, en O et en I, le calcul des longueurs à partir de l'une d'elles serait facile. Ce sont les dièdres qui nous intéressent; $OI\Omega$ est la moitié de l'angle plan du dièdre $\mathfrak{D}$ suivant AB, donc la face $O\Omega I$ de notre trièdre est aussi $\frac{\pi}{2}-\frac{\mathfrak{D}}{2}$. D'où la formule:

$$\cos\frac{\pi}{s}=\sin\frac{\mathfrak{D}}{2}\sin\frac{\pi}{f},$$

qui donnera $\sin\frac{\mathfrak{D}}{2}$, d'où $\operatorname{tg}\mathfrak{D}$. On trouve ainsi, pour les dièdres T, H, O, D, I des cinq polyèdres réguliers

$$\operatorname{tg} T=2\sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} H=\infty, \quad \operatorname{tg} O=-2\sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} D=-2, \quad \operatorname{tg} I=-\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Utilisons le fait suivant [1]): *Les seuls angles commensurables avec π dont le carré de la tangente est rationnel sont les angles:*

$$k\frac{\pi}{2}, \qquad k \text{ entier}, \ \operatorname{tg}^2 k\pi=0,\infty,$$

$$k\pi\pm\frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{tg}^2\left(k\pi\pm\frac{\pi}{4}\right)=1,$$

$$k\pi\pm\frac{\pi}{6}, \qquad \operatorname{tg}^2\left(k\pi\pm\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3},$$

$$k\pi\pm\frac{\pi}{3}, \qquad \operatorname{tg}^2\left(k\pi\pm\frac{\pi}{3}\right)=3.$$

[1]) Voir la Note II placée à la suite de cette conférence.

Nous constatons que les angles T, O, D, I sont incommensurables avec H donc *un cube n'est éq. de f. f. avec aucun autre polyèdre régulier de même volume.* C'est la généralisation du résultat tout d'abord indiqué par M. BRICARD, mais on peut aller plus loin.

Des valeurs indiquées des tangentes, il résulte que $T+O=\pi$ donc T et O ne sont pas commensurables entre eux, sans quoi ils le seraient avec π. Soit d'autre part un couple de deux de nos dièdres, sauf le couple T, O, et ne contenant pas H. Par exemple T et I, s'ils étaient commensurables entre eux on aurait $2mT=2nI$, m et n étant entiers; nous savons déjà que $\operatorname{tg} 2mT$ et $\operatorname{tg} 2nI$ ne sont pas nulles puisque T et I sont incommensurables avec π, mais les expressions de $\operatorname{tg} 2mT$ et $\operatorname{tg} 2nI$ nous les donnent sous la forme de polynômes en $\operatorname{tg}^2 T$, ou $\operatorname{tg}^2 I$, multipliés respectivement par $\operatorname{tg} T$, ou $\operatorname{tg} I$. Donc on a:

$$\operatorname{tg} 2mT=r\sqrt{2}, \qquad \operatorname{tg} 2nI=r'\sqrt{5},$$

r et r' étant des nombres rationnels non nuls; l'égalité $2mT=2nI$ est impossible. Donc, *les cinq dièdres des polyèdres réguliers sont incommensurables deux à deux et, par suite, deux polyèdres réguliers ne peuvent être éq. de f. f. que s'il sont égaux.*

Bien entendu on pourrait aussi bien conclure que la figure D, formée d'un nombre fini de polyèdres réguliers semblables entre eux, ne peut être éq. de f. f. à une figure D', formée d'un nombre fini de polyèdres réguliers semblables entre eux, que si tous ces polyèdres sont semblables entre eux. Mais même dans ce cas l'équivalence est-elle possible? Il est clair qu'il y a équivalence s'il s'agit de figures de même volume et formées de cubes, si, au contraire, il s'agissait de figures formées de tétraèdres réguliers nous savons déjà, d'après M. DEHN, que l'équivalence est impossible si l'une des figures contient un seul tétraèdre et l'autre deux. Ceci se généralise facilement: *un polyèdre régulier autre qu'un cube ne peut jamais être transformé par équivalence finie en plusieurs polyèdres semblables à lui.* Soit, en effet, L l'arête du premier polyèdre. l_1, l_2, l_3, l_4, par exemple, les arêtes de quatre polyèdres qu'on aurait déduit du premier par équivalence finie, le théorème de M. DEHN nous donnerait, puisque tous les dièdres sont égaux et incommensurables avec π,

$$\bar{L}=\bar{l}_1+\bar{l}_2+\bar{l}_3+\bar{l}_4$$

pour tout système de solutions rationnelles des $(\mathcal{L})$. Et il y a, on l'a remarqué, des solutions aussi voisines qu'on le veut de L, l_1, l_2, l_3, l_4; on devrait par suite avoir:

$$L=l_1+l_2+l_3+l_4 \text{ [1]}.$$

Mais l'égalité des volumes requérrait

$$L^3=l_1^3+l_2^3+l_3^3+l_4^3,$$

il y a contradiction.

De même, on voit *qu'un système de deux polyèdres réguliers ne peut être équivalent de façon finie à un autre système de deux polyèdres réguliers, si les quatre polyèdres sont semblables entre eux et ne sont pas des cubes*; car l'équivalence requérrait

$$L_1+L_2=l_1+l_2 \qquad \text{et} \qquad L_1^3+L_2^3=l_1^3+l_2^3.$$

Jusqu'ici le fait que T, O, H, D, I sont incommensurables deux à deux est seul intervenu de sorte que les résultats peuvent s'étendre à d'autres polyèdres que les polyèdres réguliers; un seul exemple suffira: *Un polyèdre dont tous les dièdres sont commensurables avec π, sauf certains d'entre eux qui sont égaux, ne peut être transformé par équivalence finie en plusieurs autres polyèdres semblables à lui.* Si, en effet, on représentait par $\mathcal{L}$ la somme des longueurs L des arêtes des dièdres A non commensurables avec π et par $\bar{\mathcal{L}}$ la somme des $\bar{L}$ correspondant, et si $k_1, k_2, \ldots, k_p$ sont les rapports de similitude des polyèdres obtenus au polyèdre primitif, le théorème de DEHN donnerait, R étant rationnel,

$$(\bar{\mathcal{L}}-k_1\bar{\mathcal{L}}-k_2\bar{\mathcal{L}}-\ldots-k_p\bar{\mathcal{L}})A=R\pi,$$

d'où

$$k_1+k_2+\ldots+k_p=1;$$

tandis que l'égalité des volumes exigerait

$$k_1^3+k_2^3+\ldots+k_p^3=1.$$

---

[1]) On peut aussi dire la relation $\bar{L}=\bar{l}_1+\bar{l}_2+\bar{l}_3+\bar{l}_4$ devant faire partie des $(\bar{\mathcal{L}})$, la relation $L=l_1+l_2+l_3+l_4$ fait partie des $(\mathcal{L})$.

Dans le cas le plus général de deux systèmes de polyèdres D et D' il conviendrait de même d'exprimer arithmétiquement tous les dièdres à l'aide de π et du plus petit nombre possible de dièdres, c'est-à-dire de résoudre les équations ($\mathcal{A}$) linéaires à coefficients entiers liant les dièdres et π. Lorsque D et D' ne sont formés que de polyèdres réguliers cela est possible car alors, très exceptionnellement, on sait écrire le système ($\mathcal{A}$).

12. Nous avons trouvé deux relations ($\mathcal{A}$), savoir:

$$2H=\pi, \qquad T+O=\pi;$$

grâce à elles toute autre relation ($\mathcal{A}$) s'écrirait

$$2n_1T+2n_2D+2n_3I=2n_4\pi,$$

d'où

$$\operatorname{tg}(2n_1T+2n_2D)=-\operatorname{tg} 2n_3I=\frac{\operatorname{tg} 2n_1T+\operatorname{tg} 2n_2D}{1-\operatorname{tg} 2n_1T\cdot\operatorname{tg} 2n_2D}\cdot$$

Or nous avons dit que

$$\operatorname{tg} 2n_1T_1=r_1\sqrt{2}, \qquad \operatorname{tg} 2n_2D=r_2, \qquad \operatorname{tg} 2n_3I=r_3\sqrt{5},$$

r_1, r_2, r_3 étant des nombres rationnels non nuls. Donc on aurait

$$-r_3\sqrt{5}=\frac{r_1\sqrt{2}+r_2}{1-r_1r_2\sqrt{2}}=\frac{r_1(1+r_2^2)\sqrt{2}+r_2(1+2r_1^2)}{1-2r_1^2r_2^2},$$

égalité évidemment impossible: *entre les dièdres des polyèdres réguliers et π il n'existe pas d'autres relations linéaires à coefficients entiers que celles qui résultent de $2H=\pi$, $T+O=\pi$.*

Si donc on a deux systèmes D et D' de polyèdres réguliers et que ces systèmes soient équivalents, les relations de DEHN qui s'écrivent, à l'aide de notations qui se comprennent immédiatement,

$$(\bar{\mathcal{L}}_T-\bar{\mathcal{L}}'_T)T+(\bar{\mathcal{L}}_H-\bar{\mathcal{L}}'_H)H+(\bar{\mathcal{L}}_O-\bar{\mathcal{L}}'_O)O+(\bar{\mathcal{L}}_D-\bar{\mathcal{L}}'_D)D+(\bar{\mathcal{L}}_I-\bar{\mathcal{L}}'_I)I=R\pi$$

donnent

$$[(\bar{\mathcal{L}}_T-\bar{\mathcal{L}}_O)-(\bar{\mathcal{L}}'_T-\bar{\mathcal{L}}'_O)]T+(\bar{\mathcal{L}}_D-\bar{\mathcal{L}}'_D)D+(\bar{\mathcal{L}}_I-\bar{\mathcal{L}}'_I)I=R_1\pi,$$

d'où

$$\bar{\mathcal{L}}_T-\bar{\mathcal{L}}_O=\bar{\mathcal{L}}'_T-\bar{\mathcal{L}}'_O, \qquad \bar{\mathcal{L}}_D=\bar{\mathcal{L}}'_D, \qquad \bar{\mathcal{L}}_I=\bar{\mathcal{L}}'_I;$$

relations qui sont satisfaites si, et seulement si, l'on a:

$$\mathcal{L}_T-\mathcal{L}_O=\mathcal{L}'_T-\mathcal{L}'_O, \qquad \mathcal{L}_D=\mathcal{L}'_D, \qquad \mathcal{L}_I=\mathcal{L}'_I.$$

Ces conditions nécessaires d'équivalence sont, avec celle qui exprimerait l'égalité des volumes, les seules que nous sachions écrire pour le cas de deux systèmes de polyèdres réguliers. Elles fourniraient naturellement à nouveau les énoncés déjà formulés mais elles permettent d'aller un peu plus loin; on peut affirmer, par exemple, *qu'un polyèdre régulier autre qu'un cube ne peut être transformé en polyèdres réguliers semblables entre eux par équivalence finie.* Les conditions nécessaires précédentes exigeraient en effet que les polyèdres obtenus soient semblables aussi au polyèdre primitif. On peut dire aussi *qu'un polyèdre régulier autre qu'un cube ne peut être transformé par équivalence finie en deux polyèdres réguliers.* En effet, il nous suffit d'examiner le cas où les deux polyèdres obtenus ne sont pas semblables entre eux; mais alors nos conditions exprimeraient que l'un d'eux est semblable au polyèdre primitif et au moins égal à celui-ci, ce qui est impossible.

Quant à l'équivalence finie d'un polyèdre régulier en un système de polyèdres réguliers, nos conditions nécessaires laissent les possibilités suivantes: transformation d'un polyèdre régulier P en des polyèdres P_1, semblables à P et dont la longueur totale des arêtes est la même que pour P, et de plus en des cubes, $\mathcal{C}$, des tétraèdres $\mathcal{T}$, des octaèdres $\mathcal{O}$ la longueur totale des arêtes des tétraèdres $\mathcal{T}$ étant égale à la longueur totale des arêtes des octaèdres $\mathcal{O}$ [1]). Dans le cas où P est un cube, la condition d'égalité de longueur totale entre les arêtes de P et de P_1 disparait; de sorte que, par exemple, il n'est pas exclu qu'un cube puisse être éq. de f. f. à un système formé d'un tétraèdre et d'un octaèdre.

Nous sommes entièrement dépourvus de moyens ayant quelque généralité pour décider si les équivalences que nos conditions nécessaires ne nous ont pas permis de déclarer impossibles, existent ou non. On ne connaît, en effet, aucune condition suffisante d'équivalence, si restrictive soit-elle; on ne connaît que des exemples d'équivalence. C'est là une grave lacune de la théorie actuelle de l'équivalence finie, sur laquelle j'appelle l'attention des jeunes chercheurs.

---

[1]) Bien entendu, même si P est un tétraèdre par exemple, il faut distinguer les P_1 des $\mathcal{T}$.

C'est par des dissections de polyèdres réguliers en polyèdres réguliers — ce qui est un cas particulièrement évident d'équivalence finie simple entre le polyèdre primitif et l'ensemble de ses parties — que je vais répondre, très partiellement, aux questions d'existence soulevées il y a un instant.

13. On connait bien deux telles dissections. Partant d'un cube, d'un tétraèdre régulier ou d'un octaèdre régulier, divisons-en les arêtes en n parties égales, n étant un entier quelconque, et par les points de division menons des plans parallèles aux faces. Nous disséquons le polyèdre initial P en polyèdres réguliers p_i qui sont tous des cubes si P était un cube, qui sont des octaèdres et des tétraèdres si P était un tétraèdre ou octaèdre. Par exemple, on divisera ainsi un cube en 8 cubes, un tétraèdre en 4 tétraèdres et 1 octaèdre, un octaèdre en 6 octaèdres et 8 tétraèdres. La prolongation indéfinie des séries de plans parallèles qui viennent de nous servir donne deux pavages de l'espace: le pavage I en cubes égaux, le pavage II en tétraèdres et octaèdres de même longueur d'arête. Si nous ne conservons que 3 des 4 séries de plans parallèles qui donnaient le pavage II, nous obtenons un pavage III la maille est un parallélipipède à faces losanges, un rhomboèdre. Ce rhomboèdre, qui se présente à nous comme formé d'un octaèdre régulier et de deux tétraèdres réguliers, est, comme tout prisme, éq. de f. f. à un cube. Donc *un cube est éq. de f. f. au système formé de deux tétraèdres réguliers et d'un octaèdre régulier, tous trois de même longueur d'arête.*

Ainsi, partant d'un cube P divisé en cubes p_i, nous pourrons agglomérer certains de ces p_i en cubes plus grands, remplacer d'autres p_i ou certains de ces cubes plus grands par des systèmes de deux tétraèdres et d'un octaèdre; partant d'un tétraèdre ou octaèdre P divisé en tétraèdres et octaèdres p_i nous pourrons agglomérer certains de ces p_i en tétraèdres ou octaèdres plus grands puis remplacer certains des systèmes de deux tétraèdres et d'un octaèdre tous trois de même longueur d'arête par un cube. Bref, nous prouvons que *par équivalence finie un cube, un tétraèdre régulier ou un octaèdre régulier, peut être transformé en un système formé de cubes, de tétraèdres réguliers et d'octaèdres réguliers.*

14. Renonçons à la transformation d'un rhomboèdre en un cube par équivalence, les pavages I et II nous donnent d'abord les p_i, des agglomérations convenables de ces p_i nous donnent quantité de dissections d'un *cube (d'un tétraèdre ou octaèdre) en cubes (en tétraèdres et octaèdres) dont les faces sont parallèles à celles du solide primitif*; *les arêtes de tous ces solides ont une commune mesure*, savoir la n-ième partie de l'arête de P si, pour avoir le pavage, on avait divisé cette arête en n parties égales.

Pour terminer, je vais prouver que *les dissections qui viennent d'être indiquées sont les seules dissections de polyèdres réguliers en polyèdres réguliers qui existent.* En effet, si un polyèdre P est disséqué en polyèdres partiels P_i, chaque dièdre de P est une somme de dièdres des P_i; or entre les dièdres des polyèdres réguliers n'existent que les relations $2H=\pi$, $T+O=\pi$. Donc si P et les P_i sont réguliers, ceux des P_i qui emplissent les dièdres de P sont semblables à P. La longueur totale des arêtes de ceux des P_i qui sont semblables à P doit donc être supérieure à la longueur des arêtes de P, puisque les arêtes de ces P_i, qui ne sont pas toutes confondues avec celles de P, doivent pourtant recouvrir toutes celles de P. Mais nos conditions nécessaires d'équivalence appliquées à P pris pour D et à la famille des P_i prise pour D' montre que si D est un dodécaèdre ou un icosaèdre ces deux longueurs totales doivent être égales. *Un dodécaèdre ou un icosaèdre ne peut donc pas être disséqué en polyèdres réguliers.*

Supposons, pour fixer les idées, que P soit un tétraèdre; ses dièdres sont remplis par des tétraèdres P_i; enlevons-les. Il nous reste un polyèdre, ou un ensemble de polyèdres, P' dont les dièdres inférieurs à π sont égaux à $\pi-T=O$ donc sont remplis par des P_i octaédriques. Ces octaèdres ont leurs faces parallèles à celles de P; donc, en enlevant ces nouveaux P_i, on a un polyèdre P'' dont les dièdres inférieurs à π étant toujours formés par des plans de mêmes directions sont T ou O; on pourra donc continuer le raisonnement jusqu'à ce qu'on ait enlevé tous les P_i. La dissection de notre tétraèdre n'est donc bien possible qu'en tétraèdres et octaèdres à faces parallèles à celles du tétraèdre primitif.

Prenons trois arêtes de celui-ci pour axes de coordonnées et considérons les projections obliques associées à ces coordonnées. Les sommets des P_i projetés divisent les axes en segments que j'appellerai respectivement a_i, b_j, c_k. Appelons l_m l'arête de P_m, l celle de P. Entre toutes ces quantités il existe des relations linéaires, celles qui expriment l et les l_m en fonctions des a_i, en fonctions des b_i, en fonctions des c_i, d'une manière pour les tétraèdres, de deux manières pour les octaèdres qui ont, chacun, deux arêtes parallèles à chaque axe et celles qui expriment que chaque tétraèdre a une face parallèle à celle des faces de P qui n'est pas plan de coordonnées et que chaque octaèdre a deux telles faces. Toutes ces relations sont linéaires homogènes à coefficients entiers, elles permettent d'obtenir sans indétermination les a_i, b_j, c_k en fonction de l et des l_m.

Considérons le système $(\mathcal{S})$ d'équations linéaires obtenu en remplaçant, dans toutes les relations linéaires, homogènes, à coefficients rationnels entre les a, b, c, l, les longueurs connues a_i, b_j, c_k, l_m par des inconnues $\bar{a}_i, \bar{b}_j, \bar{c}_k, \bar{l}_m$. Ce système est possible, nous allons montrer qu'il est déterminé et nous savons qu'il nous suffira pour cela de montrer qu'il détermine les l_m. S'il n'en était pas ainsi on aurait des solutions telles que:

$$\bar{l}_m = l_m + \overset{1}{l}_m t_1 + \overset{2}{l}_m t_2 + \ldots,$$

les $t_1, t_2, \ldots$ étant des paramètres arbitraires. Or, parmi les conséquences algébriques de $(\mathcal{S})$, se trouve la relation qui généralise celle exprimant que le volume de P est la somme de ceux des P_i, savoir:

$$l^3 = \sum \lambda_m \bar{l}_m^3,$$

λ_m étant 1 ou 4 suivant que P_m est un tétraèdre ou un octaèdre. Or ceci s'écrit:

$$l^3 = \sum \lambda_m l_m^3 + \ldots + 3 \sum \lambda_m l_m (\overset{1}{l}_m)^2 \cdot t_1^2 + \ldots$$

Il faudrait donc, en particulier, que l'on ait

$$\sum \lambda_m l_m (\overset{1}{l}_m)^2 = 0,$$

relation impossible puisque tous les termes du premier membre sont positifs. Notre système est donc déterminé, sa résolution donnera les l_m en fonction de l par des calculs rationnels faits à partir des équations $(\mathcal{S})$ à coefficients entiers; les rapports l_m/l sont donc bien tous *rationnels*.

Le raisonnement précédent s'appliquant aussi bien aux cas de l'hexaèdre et de l'octaèdre, notre théorème est démontré.

15. Il est assez curieux de remarquer qu'il conduit à une condition de commensurabilité à rapprocher de celles auxquelles la théorie des quanta, rajeunissant et renouvelant les anciennes lois de rapports simples, a conduit récemment.

Et, puisque nous pensons un instant à la physique, constatons que des méthodes comme celles relatives à l'étude des cristaux par les rayons X, ont montré l'intérêt que présenterait pour les physiciens une connaissance profonde des polyèdres, que les mathématiciens ont jusqu'ici très peu étudiés [1]). C'est l'une des raisons qui m'a fait choisir le problème de l'équivalence comme sujet de cette conférence; ce problème peut en effet fournir une occasion de pénétrer quelque peu dans le monde peu connu des polyèdres.

Ce problème n'est évidemment pas de ceux qui s'imposent avec urgence à l'attention des mathématiciens physiciens, malgré ses origines lointaines qui le rattacheraient quelque peu à l'atomistique: C'est, en effet, le besoin, l'espoir de trouver des constituants simples et constants pour les corps qui fit croire aux mathématiciens que deux longueurs quelconques avaient toujours une commune mesure, un atome commun, et l'équivalence de deux polyèdres dès qu'ils ont le même volume pouvait sembler être une conséquence naturelle de l'existence pour ces deux polyèdres d'atomes communs. En somme, des espoirs en ce sens semblaient fondés puisque la même idée générale avait procuré de remarquables succès: ainsi, en considérant le plan pavé de triangles égaux, on avait été conduit au théorème de THALÈS.

Peu importe, après tout, que le problème de l'équivalence ait ou non une importance concrète; le mathématicien ne s'occupe pas des questions à cause de possibilités d'utilisations immédiates; il lui suffit qu'il reste à chercher, qu'il y ait des difficultés à vaincre, des beautés à découvrir; j'espère avoir réussi à convaincre les jeunes qui ont bien voulu m'écouter que le problème de l'équivalence remplit ces trois conditions.

---

[1]) Récemment un physicien français, M. G. Fournier, retrouvait les nombres de la série de Mendeleef par la considération de certains corps formés à l'aide du pavage II.

Note I

Je vais reprendre ici la démonstration, esquissée dans le texte, du théorème de M. Dehn. Nous sommes partis de deux polyèdres, ou systèmes de polyèdres, D et D', divisés respectivement en polyèdres d_i, d'_i congruents; nous avons considéré un segment s_n d'une arête de l'un des d_i pris aussi grand que possible sans qu'il contienne un sommet des d_i à son intérieur et à ce segment de longueur σ_n, nous avons attaché la somme Σ_n des dièdres α_p des d_i qu'on rencontre en tournant autour de s_n. Or, on a:

$$(1) \qquad \Sigma_n = A_k, \quad 2\pi, \quad \pi;$$

suivant les cas. On a aussi la relation analogue pour D', les Σ'_n étant aussi des sommes de dièdres α_p

$$(1') \qquad \Sigma'_n = A'_k, \quad 2\pi, \quad \pi;$$

Les longueurs l_m des arêtes des d_i et les longueurs L_m des arêtes de D s'expriment par des relations:

$$(2) \qquad l_m = \sum \theta_k \sigma_k, \quad L_m = \sum \eta_k \sigma_k,$$

les θ_k et η_k étant égaux à 0 ou à 1. Et de même

$$(2') \qquad l_m = \sum \theta'_k \sigma'_k, \quad L'_m = \sum \eta'_k \sigma'_k.$$

D'après la définition même des σ_k et σ'_k nous sommes d'ailleurs certains que l'inversion des systèmes (2) et (2′) est possible et donnerait des relations

$$(3) \quad \sigma_k = \sum \zeta_n l_n + \sum \tau_n L_n, \qquad (3') \quad \sigma'_k = \sum \zeta'_n l_n + \sum \tau'_n L'_n$$

les $\zeta, \tau, \zeta', \tau'$ étant égaux à 0 ou à ± 1; chaque σ_k est donné par au moins une égalité (3) mais peut-être donné par plusieurs telles égalités et de même pour σ'_k.

De sorte que lorsque l'on forme, avec M. Dehn, la somme $\sum \sigma_n \Sigma_n$, sa valeur $\sum l_m \alpha_m$, évidente géométriquement, résulte aussi algébriquement des égalités (2) ou (3). On a ainsi, comme conséquence algébrique de (1), (2) la relation:

$$(4) \qquad \sum l_m \alpha_m = \sum L_k A_k + \pi \sum \xi_k \sigma_k,$$

ξ étant égal à *0*, *2* ou *1* suivant que le second membre de l'égalité (1) relative à D_k est un A, est 2π, ou est π. Tenant compte de (3), ceci s'écrit encore:

$$\sum l_m a_m = \sum L_k A_k + \pi \left(\sum E_k L_k + \sum e_k l_k\right), \tag{5}$$

les E et e étant des entiers positifs, négatifs ou nuls.

De même on aura:

$$\sum l_m a_m = \sum L'_k A'_k + \pi \left(\sum E'_k L'_k + \sum e'_k l_k\right), \tag{5'}$$

d'où

$$\sum L_k A_k - \sum L'_k A_k = \pi \left[\sum E_k L_k - \sum E'_k L'_k + \sum (e_k - e'_k)\, l_k\right]. \tag{6}$$

Cette relation, étant conséquence algébrique des précédentes, il suffirait que des variables $\bar{L}_k, \bar{A}_k, \bar{L}'_k, \bar{A}'_k, \bar{l}_m, \bar{a}_m, \bar{\sigma}_n, \bar{\sigma}'_n$ vérifient les relations $(\bar{1})$, $(\bar{1}')$, $(\bar{2})$, $(\bar{2}')$ obtenues en mettant dans (1), (1′), (2), (2′), ces variables à la place de $L_k, A_k, L'_k, A'_k, l_m, a_m, \sigma_n, \sigma'_n$ pour qu'on en déduise:

$$\sum \bar{L}_k \bar{A}_k - \sum \bar{L}'_k \bar{A}'_k = \pi \left[\sum E_k \bar{L} - \sum E'_k \bar{L}'_k + \sum (e_k - e'_k)\, \bar{l}_k\right]. \tag{$\bar{6}$}$$

L'égalité $(\bar{6})$ ne contenant pas $\bar{a}_m, \bar{\sigma}_n, \bar{\sigma}'_n$, éliminons ces inconnues des équations $(\bar{1})$ et $(\bar{1}')$ d'une part, $(\bar{2})$ et $(\bar{2}')$ d'autre part; ceci nous donne des relations desquelles, dans l'ignorance où nous sommes de la disposition et de la forme des d_i et d'_i, nous pouvons dire seulement que ce sont des relations linéaires homogènes à coefficients entiers entre les $\bar{A}_k, \bar{A}'_k$ et π d'une part, entre les $\bar{L}_k, \bar{L}'_k, \bar{l}_k$ d'autre part.

Résolvons ces dernières relations par rapport aux $\bar{l}_n$, nous obtiendrons chaque $\bar{l}_n$ comme fonction linéaire homogène à coefficients rationnels des $\bar{L}_k, \bar{L}'_k$, et éventuellement de paramètres arbitraires. Portons ces valeurs dans $(\bar{6})$, les paramètres arbitraires ne figurant qu'au second membre disparaîtront et nous trouverons:

$$\sum \bar{L}_k (\bar{A}_k - r_k \pi) = \sum \bar{L}'_k (\bar{A}'_k - r'_k \pi), \tag{$\bar{7}$}$$

les r et r' étant des nombres rationnels.

Nous avons dit que les $\bar{A}_k, \bar{A}'_k$ doivent vérifier certaines relations linéaires, celles-ci sont vérifiées par A_k, A'_k donc nous serons certains d'avoir bien choisis les $\bar{A}_k, \bar{A}'_k$ si nous les astreignons à vérifier *toute* relation linéaire du type considéré que vérifient les A_k, A'_k. Les $\bar{L}_k, \bar{L}'_k$ doivent vérifier les relations linéaires homogènes à coefficients entiers résultant de l'élimination des $\bar{l}_n, \bar{\sigma}_n, \bar{\sigma}'_n$ entre $(\bar{2})$ et $(\bar{2}')$, relations qui sont toutes vérifiées par L_k et L'_k, donc:

A. Si D et D' sont éq. de f. f., à chacun de leurs dièdres on peut attacher un nombre rationnel r_k ou r'_k tel que l'on ait la relation $(\bar{7})$ pour toute solution $\bar{L}_k, \bar{L}'_k$ des équations ($\mathfrak{L}$) linéaires homogènes à coefficients entiers et qui sont vérifiées par L_k, L'_k, et par toute solution $\bar{A}_k, \bar{A}'_k$ des équations ($\mathfrak{A}$) linéaires, à coefficients entiers, dont le second membre est un nombre entier de fois π, et qui sont vérifiées par A_k, A'_k [1]).

A cet énoncé, adjoignons-en deux autres qu'on aurait obtenu, le premier en ne remplaçant pas a_m, A_k, A'_k par des variables, le second en ne faisant que ce remplacement.

B. Si D et D' sont éq. de façon finie, on a la relation:

$$(\bar{8}) \qquad \sum \bar{L}_k(A_k - r_k\pi) = \sum \bar{L}'_k(A'_k - r'_k\pi),$$

pour toute solution des équations ($\mathfrak{L}$).

C. Si D et D' sont éq. de f. f., on a la relation:

$$(\bar{9}) \qquad \sum L_k(\bar{A}_k - r_k\pi) = \sum L'_k(\bar{A}'_k - r'_k\pi),$$

pour toute solution des équations ($\mathfrak{A}$).

En apparence ces énoncés sont plus particuliers que *A*, en réalité, ils sont équivalents. Supposons, en effet, que la condition $(\bar{8})$ soit vérifiée. La solution la plus générale des ($\mathfrak{L}$) est une combinaison linéaire homogène d'un certain nombre p de solutions rationnelles $\mathfrak{L}_{k,1}, \mathfrak{L}'_{k,1}; \mathfrak{L}_{k,2}, \mathfrak{L}'_{k,2}; \ldots; \mathfrak{L}_{k,p}, \mathfrak{L}'_{k,p}$ et pour chacune de ces solutions on a donc:

$$(10) \qquad \sum \mathfrak{L}_{k,i}(A_k - r_k\pi) = \sum \mathfrak{L}'_{k,i}(A'_k - r'_k\pi).$$

---

[1]) Les équations ($\mathfrak{L}$) et ($\mathfrak{A}$) sont en nombre infini, mais il suffit d'écrire un système arithmétiquement complet de ces équations, c'est-à-dire tel que toute autre équation ($\mathfrak{L}$) et ($\mathfrak{A}$) soit une combinaison linéaire à coefficients rationnels de celles écrites.

Or ceci est une relation linéaire homogène entre les A_k, A'_k et π qu'on pourrait écrire avec des coefficients entiers, elle fournit donc une des équations $(\mathcal{A})$, donc on a aussi:

$$\sum \mathfrak{L}_{k,i}(\bar{A}_k - r_k\pi) = \sum \mathfrak{L}'_{k.i}(\bar{A}'_k - r'_k\pi).$$

Et, par combinaison linéaire homogène de ces p relations, on obtient la relation $(\bar{7})$.

On démontrera de même que C est équivalent à A en remarquant que la solution la plus générale des $(\mathcal{A})$ s'obtient à partir d'un certain nombre q d'entre elles, qui sont commensurables avec π, comme combinaison linéaire homogène et dont la somme des coefficients est un de ces q solutions particulières.

La généralité de A étant apparente, utilisons l'énoncé *B*. Il fournit les p relations (10); chacune d'elles s'écrit encore

$$(11) \qquad \sum \mathfrak{L}_{k,i}A_k - \sum \mathfrak{L}'_{k,i}A'_k = R_i\pi,$$

R_i étant rationnel et donné par

$$(12) \qquad \sum \mathfrak{L}'_{k,i}r'_k - \sum \mathfrak{L}_{k,i}r_k = R_i.$$

Mais les p systèmes de nombres $\mathfrak{L}_{k,i}, \mathfrak{L}'_{k,i}$ étant linéairement indépendants, comme système fondamental de solutions des $(\mathfrak{L})$, les relations (12) donnent des nombres rationnels r_k, r'_k quelles que soient les valeurs rationnelles que l'on donnera aux R_k. Donc on peut remplacer les p relations (10) par les p relations (11) avec la seule mention que les R_i doivent être rationnels. Or, s'il en est ainsi, toute solution rationnelle des $(\mathfrak{L})$, étant combinaison linéaire homogène à coefficients rationnels des $\mathfrak{L}_{k,i}, \mathfrak{L}'_{k,i}$, fournira une relation de la forme (11). D'où l'énoncé de M. Dehn, équivalent aux précédents:

D. Si D et D' sont éq. de f. f., pour toute solution rationnelle des équations $(\mathfrak{L})$, on a une relation

$$(13) \qquad \sum (\bar{L}_k)_r A_k - \sum (\bar{L}'_k)_r A'_k = R\pi,$$

R étant rationnel.

Les énoncés A, B, C, D sont donc équivalents; si, par exemple, l'énoncé de M. Dehn ne parle que des équations $(\mathfrak{L})$ comme il oblige à reconnaitre si la relation (13) est ou non vérifiée, c'est-à-dire si elle est ou non une des relations $(\mathcal{A})$ il suppose donc aussi en réalité, des connaissances relatives aux équations ($\mathcal{A}$). C'est pourquoi j'ai préféré donner tout d'abord un énoncé qui montre que les rôles des ($\mathcal{L}$) et des ($\mathcal{A}$) sont parallèles, mais il fallait aussi que je mette en garde contre la généralité, plus apparente que réelle, de cet énoncé A.

Imaginons que nous sachions effectivement former les ($\mathcal{L}$) et les ($\mathcal{A}$), alors nous trouverons, comme il a été dit, les $\bar{L}_k, \bar{L}'_k$ par des formules

$$\bar{L}_k = t_1 \mathcal{L}_{k,1} + t_2 \mathcal{L}_{k,2} + \dots + t_p \mathcal{L}_{k,p}, \qquad \bar{L}'_k = t_1 \mathcal{L}'_{k,1} + t_2 \mathcal{L}'_{k,2} + \dots + t_p \mathcal{L}'_{k,p}$$

et les A_k, A'_k par des formules

$$\bar{A}_k = \pi(\mathcal{A}_{k,0} + \theta_1 \mathcal{B}_{k,1} + \dots + \theta_q \mathcal{B}_{k,q}), \quad \bar{A}'_k = \pi(\mathcal{A}'_{k,0} + \theta_1 \mathcal{B}'_{k,1} + \dots + \theta_q \mathcal{B}'_{k,q})$$

les t et θ étant des paramètres arbitraires, les $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ étant rationnels comme les $\mathcal{L}_{k,i}$, $\mathcal{L}'_{k,i}$, les $\mathcal{B}_{k,i}, \mathcal{B}'_{k,i}$ donnant un système fondamental de solutions des équations homogènes ($\mathcal{B}$) déduites des ($\mathcal{A}$) en y remplaçant π par zéro.

Si nous portons ces expressions dans ($\bar{7}$) nous avons les p relations

$$\sum \mathcal{L}_{k,i}(\mathcal{A}_{k,0} - r_k) = \sum \mathcal{L}'_{k,i}(\mathcal{A}'_{k,0} - r'_k)$$

qui s'écrivent encore

$$\sum \mathcal{L}_{k,i} \mathcal{A}_{k,0} - \sum \mathcal{L}'_{k,i} \mathcal{A}'_{k,0} = \mathcal{R}_i \pi,$$

les $\mathcal{R}_i$ étant rationnels, et les pq relations [1])

$$\sum \mathcal{L}_{k,i} \mathcal{B}_{k,j} - \sum \mathcal{L}'_{k,i} \mathcal{B}'_{k,j} = 0.$$

Mais si nous avions utilisé l'énoncé de M. DEHN, par exemple, les mêmes relations se seraient immédiatement aussi présentées à nous car les $\mathcal{A}_k, \mathcal{A}'_k$ s'obtiennent en donnant aux θ des valeurs qui doivent être arithmétiquement indépendantes linéairement; sans quoi, en effet, les A_k, A'_k vérifieraient une relation de la forme ($\mathcal{A}$) que ne vérifieraient pas tous les $\bar{A}_k, \bar{A}'_k$, ce qui est absurde. Des lors, en portant ces expressions des

[1]) Ces relations ont été écrites pour la première fois par M. O. Nicoletti qui, dans ses recherches, a aussi mis en évidence le parallélisme des rôles des systèmes ($\mathcal{L}$) et ($\mathcal{A}$) (Rend. della R. Acc. d. Lincei. 1-er sem. 1913. Rend. del Circ. Mat. di Palermo 1-er sem. 1914 et 2-e sem. 1919).

A_k, A'_k dans la relation (13) nous aurions bien nos mêmes $p(q+1)$ relations.

Ainsi, non seulement tous les énoncés sont équivalents théoriquement, mais ils le sont pratiquement car ils conduisent aux mêmes calculs.

Je ne me suis occupé que de l'équivalence simple. Le passage à l'équivalence par multiplication est immédiat; pour l'équivalence par différence, nous raisonnerons, avec M. DEHN, comme il suit:

Soient Δ et Δ' deux systèmes de polyèdres éq. de f. f. simple ou par multiplication et supposons que $D+\Delta$ et $D'+\Delta'$ soient aussi éq. de f. f. simple ou par multiplication. Nous aurons à considérer trois systèmes d'équations $(\mathfrak{L})$, celui relatif à la comparaison de Δ et Δ', soit $(\mathfrak{L})_\Delta$, celui relatif à la comparaiso n de $D+\Delta$ et $D'+\Delta'$, soit $(\mathfrak{L})_{D+\Delta}$ et celui relatif à la comparaison de D et D', soit $(\mathfrak{L})_D$.

Pour que des $\bar{L}_i$ et $\bar{L}'_j$ relatifs aux dièdres de D et D' appartiennent à une solution des $(\mathfrak{L})_{D+\Delta}$ il faut qu'ils vérifient les équations obtenues en éliminant dans les $(\mathfrak{L})_{D+\Delta}$ les $\bar{L}_i, \bar{L}'_j$ relatifs à Δ et Δ', équations qui font partie des $(\mathfrak{L})_D$, qui sont même les $(\mathfrak{L})_D$ car toute équation $(\mathfrak{L})_D$ appartient évidemment aux $(\mathfrak{L})_{D+\Delta}$. Raisonnant de même les $(\mathfrak{L})_\Delta$ remplaçant les $(\mathfrak{L})_D$, on voit que toute solution des $(\mathfrak{L})_{D+\Delta}$ est formée par l'association d'une solution des $(\mathfrak{L})_D$ qu'on peut prendre arbitraire avec une solution convenablement choisie des $(\mathfrak{L})_\Delta$.

Donc, à une solution rationnelle des $(\mathfrak{L})_D$, il suffit d'adjoindre une solution rationnelle convenable des $(\mathfrak{L})_\Delta$ pour avoir une solution rationnelle des $(\mathfrak{L})_{D+\Delta}$; mais ceci nous donnera

$$(13)_\Delta \qquad \sum (\bar{L}_k)_r A_k - \sum (\bar{L}'_k)_r A'_k = R\pi,$$

entre les éléments de Δ et Δ';

$$(13)_{D+\Delta} \qquad \sum (\bar{L}_k)_r A_k - \sum (\bar{L}'_k)_r A'_k = S\pi,$$

entre les éléments de $D+\Delta$ et $D'+\Delta'$; d'où par différence,

$$(13)_D \qquad \sum (\bar{L}_k)_r A_k - \sum (\bar{L}'_k)_r A'_k = (R-S)\pi,$$

entre les éléments de D et D'. D'où l'énoncé D, et par suite aussi les énoncés A, B, C pour l'équivalence générale.

Note II

Démontrons la proposition utilisée dans le texte: *les seuls nombres de la forme* $\pm\sqrt{r}$, *où r est rationnel, qui sont égaux à la tangente d'un arc commensurable avec* π, *sont* $0, \pm 1, \pm\sqrt{3}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ecrivons r sous forme irréductible m/n; nous supposerons d'abord que l'un des deux nombres m et n, premiers entre eux, admette un facteur premier p, autre que 3. Et puisque, si m/n était la tangente d'un arc commensurable avec π, il en serait de même de n/m, supposons que p divise m. Et montrons qu'on ne peut avoir

$$\sqrt{\frac{m}{n}} = \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2N} = \operatorname{tg} x$$

k et N étant entiers. L'expression de $\operatorname{tg} 2Nx$ en fonction de $\operatorname{tg} x$ nous donnerait, à l'aide des coefficients binomiaux C_{2N}^{i},

$$0 = C_{2N}^{1} \operatorname{tg} x - C_{2N}^{3} \operatorname{tg}^{3} x + \ldots \pm C_{2N}^{2N-1} \operatorname{tg}^{2N-1} x$$

ou, en divisant par $\operatorname{tg} x$ et en multipliant par n^{N-1}

$$0 = 2N \cdot n^{N-1} - \frac{2N \cdot C_{2N-1}^{2}}{3} m\, n^{N-2} - \frac{2N \cdot C_{2N-1}^{4}}{5} m^{2} n^{N-3} + \ldots$$
$$+ \ldots \pm \frac{2N \cdot C_{2N-1}^{2k}}{2k+1} m^{k} n^{N-k-1} + \ldots \pm 2N m^{N-1}.$$

m contient p à une puissance positive α, n ne le contient pas, $2N$ le contient à une puissance β positive ou nulle. Le premier terme du second membre contient donc p exactement à la puissance β; le second terme le contient à la puissance α à cause du facteur m et à la puissance β au moins à cause de $C_{2N}^{3} = \frac{2N \cdot C_{2N-1}^{2}}{3}$ puisque, p étant différent du dénominateur 3, C_{2N}^{3} admet le facteur p au moins autant de fois que $2N$. Pour les mêmes raisons, le terme

$$C_{2N}^{2k+1} m^{k} n^{N-k-1} = \frac{2N \cdot C_{2N-1}^{2k}}{2k+1} m^{k} n^{N-k-1}$$

admet p au moins à la puissance $ka+\beta$, tant que p ne divise pas le dénominateur $2k+1$ et au moins à la puissance $ka+\beta-\gamma$ si p est à la puissance γ dans $2k+1$. Mais alors p n'est pas égal à 2, il est au moins égal à 5, et de plus on a:

$$2k+1 \geqslant p^{\gamma} \geqslant 5^{\gamma} \geqslant 5\gamma, \qquad \gamma \leqslant \frac{2k+1}{5} < k \leqslant ka.$$

Donc p est contenu dans le terme examiné plus de β fois. L'égalité envisagée est donc impossible, puisqu'au second membre tous les termes, sauf le premier, seraient divisibles par $p^{\beta+1}$; le théorème est démontré pour le cas envisagé.

Il nous reste à examiner le cas où l'un des deux nombres m et n est une puissance de 3 supérieure à la première et où l'autre est égal à 1. Soit $m=3^a$, $a \geqslant 2$; $n=1$. β et γ ayant les mêmes significations que plus haut, on aura cette fois

$$2k+1 \geqslant 3^{\gamma} \geqslant 3\gamma, \qquad \gamma \leqslant \frac{2k+1}{3} \leqslant k < ka.$$

Le théorème est donc aussi prouvé pour ce cas, et l'on voit en même temps comment s'introduit le cas exceptionnel $p=3$, $a=1$ indiqué par l'énoncé.

Ce mode de raisonnement [1]) est susceptible de fournir des résultats plus généraux, mais moins simples et que je ne puis développer ici, relatifs par exemple à d'autres irrationnelles, $\sqrt[3]{r}$ ou $a+b\sqrt[2]{r}$, par exemple.

Le raisonnement par lequel, dans le texte, on a formé toutes les équations ($\mathcal{A}$) pour le cas des polyèdres réguliers peut aussi être utilisé dans des cas beaucoup plus généraux. Il suffira ici de donner cet énoncé: *si l'on a des angles $A_1, A_2, \dots, A_\mu$ dont les tangentes ne sont égales ni à 0, ni à ± 1, ni à $\pm\sqrt{3}$, ni à $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, et ont des expressions de la forme* $\operatorname{tg} A_i = \sqrt{r_i}$, *$r_i$ étant rationnel, si, de plus, chaque r_i, à partir de $i=2$ contient à son numérateur ou à son dénominateur un facteur premier à une*

---

[1]) C'est celui que M. H. G. Forder, dans son ouvrage: *The Foundations of euclidean Geometry*, utilise pour le cas particulier de $T=2\sqrt{2}$, d'après une suggestion de M. R. Cooper.

puissance impaire et que ce facteur ne se trouve à une puissance impaire dans aucun terme de $r_1, r_2, \ldots, r_{i-1}$, il n'existe entre les A et π aucune relation à coefficients entiers.

En effet, une relation

$$\operatorname{tg}[2n_1 A_1 + 2n_2 A_2 + \ldots + 2n_\mu A_\mu] = 0,$$

entraînerait entre les $\sqrt{r_i}$ une relation linéaire par rapport à *chacun* de ces radicaux et à coefficients rationnels en tant que relation multilinéaire, ce qui est impossible.