SUR QUELQUES INTÉGRALES DU TYPE DE DINI

Par J. MARCINKIEWICZ, Wilno

1. Soit donnée une fonction $F(x)$ de période 2π. Posons

(1.1) $$\Delta(F,x,h)=\Delta(x,h)=F(x+h)+F(x-h)-2F(x).$$

Lorsque la fonction F admet une dérivée f assez régulière, par exemple lorsque f vérifie la condition de Lipschitz d'ordre positif, on a pour tout x

(1.2) $$\int_0^{2\pi}|\Delta(x,t)|^r t^{-r-1}dt<\infty,\quad r\geqslant 1.$$

Au contraire, si l'on suppose seulement l'existence de la dérivée $f(x)$ dans un point particulier, l'intégrale (1.2) peut être divergente en ce point. Cependant on a le

Théorème 1. *Soit F continue, dérivable dans un ensemble E de mesure positive. L'intégrale* (1.2) *existe pour tout $r\geqslant 2$ presque partout dans E. Pour $r<2$, le théorème tombe en défaut.*

Supposons que la fonction F est absolument continue et que sa dérivée $f\epsilon L^q$ $(q\geqslant 2)$. D'après le théorème 1 l'intégrale (1.2) avec $r=q$ définit une fonction de x. On peut demander quel est l'ordre de grandeur de la fonction ainsi définie. On y a le

Théorème 2. *Lorsque F est absolument continue et $F'=f\epsilon L^q$, on a*

(1.3) $$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|\Delta(x,t)|^q t^{-q-1}dt\leqslant C_q\int_0^{2\pi}|f|^q dt.$$

On a aussi un théorème réciproque dans un sens au théorème 2:

Théorème 3. *Soit F une fonction absolument continue $F(0)=F(2\pi)$, $1<p\leqslant 2$, $f=F'$. On a*

$$(1.4)\qquad \int_0^{2\pi} |f|^p dx \leqslant C_p \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\Delta(x,t)|^p t^{-p-1} dx\, dt.$$

2. Nous commençons par la démonstration du

Lemme 1. *Les théorèmes* 1, 2, 3 *sont vrais lorsque F est absolument continue, $F(0)=F(2\pi)$, $F'\varepsilon L^2$ et $r=2$.*

Posons

$$F'(x)=f(x)=\sum_1^\infty (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

On a

$$\Delta(x,t)=-4\sum_1^\infty \left(\frac{a_k \sin kx - b_k \cos kx}{k}\right)\sin^2\frac{kt}{2}.$$

L'égalité de Parcéval donne

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta^2(x,t)\,dx = 16\sum_1^\infty (a_k^2+b_k^2)\,\frac{\sin^4 kt/2}{k^2}.$$

En multipliant les deux membres de la dernière égalité par t^{-3} et en intégrant dans l'intervalle, $(0,2\pi)$ on obtient

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta^3(x,t)\,t^{-3}\,dx\,dt = 16\sum_1^\infty (a_k^2+b_k^2)\int_0^{2\pi}\frac{\sin^4 kt/2}{k^2t^3}\,dt,$$

ce qui implique le résultat demandé.

3. Dans une autre note [1]) j'ai démontré le

Lemme 2. *Soit F une fonction continue, dérivable dans un ensemble E de mesure positive. Pour tout $\varepsilon>0$ on peut définir un ensemble $Q\subset E$ et deux fonctions $G(x)$ et $H(x)$ de période 2π de sorte que l'on ait*

---

[1]) Marcinkiewicz 2.

$$|E-Q|<\varepsilon, \tag{3.1}$$

$$G(0)=G(2\pi), \qquad G(x)=\int_0^x g(x)dx, \qquad g\epsilon L^2, \tag{3.2}$$

$$G(x)=F(x), \qquad (x\epsilon Q), \tag{3.3}$$

$$F(x)=G(x)+H(x), \tag{3.4}$$

et enfin pour presque tout $x\epsilon Q$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|H(x+t)|t^{-2}dt<\infty. \tag{3.5}$$

4. Nous allons démontrer le théorème 1 avec $r=2$. Fixons ε positif et considérons l'ensemble Q et les fonctions G et H satisfaisant aux conditions (3.1)–(3.5). En tenant compte de (3.2) et du lemme 1, on conclut que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi}\Delta^2(G,x,t)t^{-3}dt \tag{4.1}$$

existe presque partout dans l'intervalle $(0,2\pi)$. D'autre part, les formules (3.3) et (3.4) montrent qu'on a presque partout dans Q

$$H(x)=0, \quad H'(x)=0,$$

ce qui montre en vertu de (3.5) que l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi}H^2(x+t)t^{-3}dt$$

existe presque partout dans Q. Or, l'existence de la dernière intégrale implique évidemment

$$\int_0^{2\pi}\Delta^2(H,x,t)t^{-3}dt<\infty. \tag{4.2}$$

En tenant compte de (4.1) et (4.2), on conclut facilement qu'on a presque partout dans Q

$$\int_0^{2\pi}\Delta^2(F,x,t)t^{-3}dt<\infty. \tag{4.3}$$

Or, ε étant arbitraire, il s'ensuit d'après (3.1) que l'inégalité (4.3) subsiste presque partout dans l'ensemble E.

Remarquons enfin que l'inégalité (4.3) entraîne (1.2) avec $r \geqslant 2$ dès que la fonction F admet une dérivée finie.

5. Pour démontrer la partie négative du théorème 1, posons

$$a_n = 1/\sqrt{n}\log n.$$

On a

$$\sum a_n^2 < \infty, \qquad \sum a_n^p = \infty, \qquad 1 \leqslant p < 2. \tag{5.1}$$

Soit

$$f(x) = \sum_2^\infty a_n \cos n!x, \qquad F(x) = \sum_2^\infty \frac{a_n}{n!} \sin n!x. \tag{5.2}$$

D'après (5.1) on a $f \epsilon L^2$. D'autre part

$$\Delta(F, x, t) = -4 \sum \frac{a_n}{n!} \sin n!x \sin^2 n! \frac{t}{2} \tag{5.3}$$

$$|\tfrac{1}{4}\Delta(x,t)| \geqslant \frac{a_m}{m!} |\sin m!x| \sin^2 m! \frac{t}{2} - \sum_2^{m-1} \frac{a_m}{n!} |\sin n!x| \sin^2 n! \frac{t}{2}$$

$$- \sum_{m+1}^\infty \frac{a_n}{n!} |\sin n!x| = A_m - B_m - C_m$$

$$3|\Delta|^p \geqslant A_m^p - 3B_m^p - 3C_m^p$$

$$\int_0^{2\pi} |\Delta(x,t)|^p t^{-p-1} dt \geqslant \sum_m \int_{1/m!}^{2/m!} |\Delta(x,t)|^p t^{-p-1} dt \geqslant$$

$$\geqslant \tfrac{1}{3} \sum_m \int_{1/m!}^{2/m!} A_m^p t^{-p-1} dt - \sum_m \int_{1/m!}^{2/m!} B_m^p t^{-p-1} dt$$

$$- \sum_m \int_{1/m!}^{2/m!} C_m^p t^{-p-1} dt = \sum_m \{I_1^{(m)} - I_2^{(m)} - I_3^{(m)}\}.$$

On a

$$I_1^{(m)} = \frac{1}{3m!^p} |\sin m!x|^p a_m^p \int_{1/m!}^{2/m!} \sin^{2p} m! \frac{t}{2} t^{-p-1} dt \geqslant \tfrac{1}{3} \lambda a_m^p |\sin m!x|^2 \tag{5.4}$$

où

$$\lambda = \int_{1/2}^{1} \sin^{2p} t\, t^{-3}\, dt.$$

Or, comme

$$I_2 \leqslant 4 \left\{ \frac{(m-1)!}{\sqrt{m}} \right\}^p \int_{1/m!}^{2/m!} t^{-1+p}\, dt$$

ou bien

$$I_2 \leqslant 4 m^{-3/2} \tag{5.5}$$

et

$$I_3 \leqslant \int_{1/m!}^{2/m!} \left[\frac{4}{\sqrt{m}\,(m+1)!} \right]^p t^{-p-1}\, dt \leqslant c m^{-3/2}. \tag{5.6}$$

Les inégalités (5.4), (5.5) et (5.6) donnent

$$\int_0^{2\pi} \Delta^p(x,t)\, t^{-p-1}\, dt \geqslant \sum_m \lambda \sin^2 m!\, x\, a_m^p - C \sum_m m^{-3/2}$$

et tout revient à démontrer que l'on a presque partout

$$\sum a_m^p \sin^2 m!\, x = \infty, \tag{5.7}$$

ce qui résulte facilement de l'inégalité (5.1) et du fait bien connu [2]) qu'une série

$$\sum c_\nu \cos \lambda_\nu x, \qquad \lambda_{\nu+1}/\lambda_\nu > 2, \qquad \sum c_\nu^2 < \infty$$

converge presque partout.

6. Le théorème 2 est une conséquence facile du théorème sur la convexité des normes des opérations linéaires de M. M. Riesz [2bis]). L'expression $U(f,x,h) = \Delta(F,x,h)h^{-1}$, $(F' = f)$, considérée pour $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant h < 2\pi$, est une opération linéaire. D'après le lemme 1, on voit que

$$\left[\int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^{2\pi} u^2(f,x,t)\, dx\, d \log t^{-1} \right]^{1/2} \leqslant C_2 \left[\int_0^{2\pi} f^2 dx \right]^{1/2} \tag{6.1}$$

avec C_2 indépendant de ε.

---

[2]) Zygmund 5, [2bis]) Riesz 3.

D'autre part, lorsque la fonction f est bornée, la fonction U l'est aussi et on a

$$\lim_{r\to\infty}\left\{\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{2\pi}|U^r(f,x,t)|\,dx\,d\log t^{-1}\right\}^{1/r}\leqslant 2\max|f|. \tag{6.2}$$

L'opération U étant définie pour $f\epsilon L^2$ et $f\epsilon L^\infty$, elle peut être aussi définie pour tout r, $2\leqslant r\leqslant\infty$. On a donc

$$\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{2\pi}U^r(f,x,t)t^{-r-1}\,dx\,dt\leqslant C_r\int_0^1|f|^r dx. \tag{6.3}$$

C_r étant indépendant de ε, on en déduit le résultat demandé.

7. La démonstration du théorème 3 est basée sur le suivant

Lemme 3. *Soient*

$$\begin{gathered} f=\sum_1^\infty(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \qquad f\epsilon L^p, \qquad p>1. \\ \Delta_\nu(f,x)=\Delta_\nu(x)=\sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-1}(a_i\cos ix+b_i\sin ix). \end{gathered} \tag{7.1}$$

On a

$$A_p\int_0^{2\pi}(\sum_\nu\Delta_\nu^2)^{p/2}dx\leqslant\int_0^1|f|^p dx\leqslant B_p\int_0^{2\pi}(\sum_\nu\Delta_\nu^2)^{p/2} \tag{7.2}$$

Ce résultat est connu, il est dû à MM. J. Littlewood et R. Paley [3]).

Nous utilisons encore le

Lemme 4. *On a pour tout polynôme trigonométrique S d'ordre n au plus*

$$\int_0^{2\pi}|S'|^p dx\leqslant n^p\int_0^{2\pi}|S|^p dx. \tag{7.3}$$

Ce lemme est aussi connu, il est dû à M. A. Zygmund [4]).

Enfin nous appliquons le

---

[3]) Littlewood et Paley 1.

[4]) Zygmund 6.

Lemme 5. Soit

$$f(x)=a_0/2+\sum_1^\infty(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

$$s_n=a_0/2+\sum_1^n(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

$$f\epsilon L^p,\qquad p>1.$$

On a

$$\int_0^{2\pi}|S_n|^p dx\leqslant A_p\int_0^{2\pi}|f|^p dx. \tag{7.4}$$

Ce résultat est dû à M. M. Riesz [5]).

8. Nous allons maintenant démontrer le théorème 3. D'après le lemme 3, on a

$$\int_0^{2\pi}\Delta^p(F,x,t)dx\geqslant\int_0^{2\pi}(\Sigma\Delta_\nu^2(\Delta,x,t))^{p/2}dx$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta^p(F,x,t)t^{-p-1}\geqslant\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(\Sigma\Delta_\nu^2)^{p/2}dx\,dt\geqslant$$

$$\sum_\nu\int_0^{2\pi}dx\int_{2^{-\nu-1}}^{2^{-\nu}}\Delta_\nu^p t^{-p-1}dx\,dt$$

ou bien

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta^p(F,x,t)t^{-p-1}dx\,dt\geqslant\int_0^{2\pi}dx\,\Sigma 2^p\int_{2^{-\nu-1}}^{2^{-\nu}}\Delta_\nu^p(\Delta,x,\theta_\nu), \tag{8.1}$$

où

$$2^{-\nu-1}\leqslant\theta_\nu\leqslant 2^{-\nu}.$$

On a

$$\Delta_\nu(\Delta,x,\theta_\nu)=\sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-1}\frac{a_\mu\sin\mu x-b_\mu\cos\mu x}{\mu}\sin^2\mu\frac{\theta_\mu}{2}.$$

Lorsque μ croît de 2^ν jusqu'à $2^{\nu+1}$, l'expression $\mu\theta_\nu/2$ croît aussi de $2^{\nu-1}\theta_\nu$ jusqu'à $2^\nu\theta_\nu$ et l'on a

$$\tfrac14\leqslant\mu\theta_\nu\leqslant 1.$$

---

[5]) Riesz 4.

Posons $\sin^2 \mu\theta_\nu/2 = \lambda_\mu$. La suite λ_μ est donc croissante et l'on a pour $2^\nu \leqslant \mu \leqslant 2^{\nu+1}$, $\sin^2 \frac{1}{4} \leqslant \lambda_\mu \leqslant \sin^2 1$.

Posons

$$\sum_{2^\nu}^{n} \frac{a_\mu \sin \mu x - b_\mu \cos \mu x}{\mu} \lambda_\mu = s_n; \qquad \sum_{2^\nu}^{n} \frac{a_\mu \sin \mu x - b_\mu \cos \mu x}{\mu} = \sigma_n.$$

En appliquant la transformation d'Abel et l'inégalité de Minkowski, on trouve

$$\sigma_{2^{\nu+1}-1} = \sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-2} s_\mu \left(\frac{1}{\lambda_\mu} - \frac{1}{\lambda_{\mu+1}} \right) + S_{2^{\nu+1}-1} / \lambda_{2^{\nu+1}-1}$$

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_{2^{\nu+1}-1}|^p dx \leqslant \sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-2} \left(\frac{1}{\lambda_\mu} - \frac{1}{\lambda_{\mu+1}} \right) \left\{ \int_0^{2\pi} |s_\mu|^p \, dx \right\}^{1/p} +$$
$$+ \lambda_{2^{\nu+1}-1}^{-1} \left\{ \int_0^{2\pi} |s_{2^{\nu+1}-1}|^p dx \right\}^{1/p}.$$

L'inégalité (7.4) donne

$$\left[\int_0^1 |s_\mu|^p dx \right]^{1/p} \leqslant A_p \left\{ \int_0^1 |\Delta_\nu|^p dx \right\}^{1/p},$$

ce qui porté dans (8.1) donne

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta^p(F, x, t) t^{-p-1} dt \geqslant A \Sigma 2^{\nu p} \int_0^{2\pi} |\sigma_{2^{\nu+1}-1}|^p dx, \tag{8.2}$$

où A désigne une constante positive. D'autre part, l'inégalité (7.3) donne

$$\int_0^{2\pi} |\Delta_\nu(f, x)|^p dx \leqslant 2^{(\nu+1)p} \int_0^1 |\sigma_{2^{\nu-1}-1}|^p dx,$$

ou bien en vertu de (8.2)

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Delta(F, x, t)^p t^{-p-1} dx \, dt \geqslant A \sum \int_0^{2\pi} |\Delta_\nu^p| \, dx \geqslant A \int_0^{2\pi} (\Sigma \Delta_\nu^2)^{p/2} dx,$$

ce qui, d'après (7.2), achève la démonstration du théorème 3.

9. Il est très probable que le théorème suivant subsiste. Soit $F(x)$ absolument continue, $F(0)=F(2\pi)$, $F'=f$. Posons

$$g^2(x)=\int_0^{2\pi} \Delta^2(F,x,t)t^{-3}dt.$$

On a pour tout $p>1$

$$A_p\int_0^{2\pi} g^p dx \leqslant \int_0^{2\pi} |f|^p dx \leqslant B_p \int_0^{2\pi} g^p dx.$$

Si ce théorème est vrai, sa démonstration est probablement beaucoup plus difficile.

TRAVAUX CITÉS.

1. J. Littlewood et R. Paley, *Theorems on Fourier series and power series I*, Journ. Lond. Math. Soc. 6 (1931), p. 320-233., II Proc. Lond. Math. Soc. 42 (1936), p. 52-85, III Proc. Lond. Math. Soc. 43 (1937), p. 105-126.

2. J. Marcinkiewicz, *On the convergence of Fourier Series*, Journ. Lond. Math. Soc. 10 (1935), p. 264-268.

3. M. Riesz, *Sur les maximas des formes billinéaires*, Acta Math. 49 (1926), p. 465-497.

4. M. Riesz, *Sur les fonctions conjuguées*, Math. Zeit 27 (1927), p. 218-244.

5. A. Zygmund, *On the convergence of lacunary trigonometric series*, Fund. Math. 16 (1930), p. 90-107.

6. A. Zygmund, *A remark on conjugate series*, Proc. Lond. Math. Soc. 34 (1932), p. 392-400.