SUR LES COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE

Par M. Emile Cotton, Grenoble

La famille des courbes (Γ) égales à une courbe gauche donnée est déterminée par les expressions de la courbure c et de la torsion t en fonction de l'arc s de la courbe. Une certaine condition, $R=0$, doit être remplie pour que l'une des courbes (Γ) soit tout entière située sur une surface donnée (S); elle fait l'objet du présent article. En général R s'exprime avec c et ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à quatre, t et ses dérivées des trois premiers ordres (n⁰ 1). Lorsque (S) est invariante par les transformations d'un sous-groupe du groupe des mouvements, l'ordre maximum des dérivées de c ou de t intervenant dans la relation $R=0$, s'abaisse (n⁰ 2). La relation $R=0$ est bien connue dans le cas du plan ou de la sphère; le cas du cylindre de révolution étudié ici (n⁰ 3) conduit à une relation qu'il serait possible d'écrire explicitement, mais qui est loin d'être aussi simple que dans les deux cas précédents. Quelques mots concernent enfin (n⁰ 4) le système formé par deux équations $R=0$.

1. Soit $f(x,y,z)$ une fonction des trois coordonnées rectangulaires d'un point M. Lorsque M décrit une courbe (Γ), x,y,z sont fonctions de l'arc (ou abscisse curviligne) s de (Γ); et f devient une fonction de s, soit $F(s)$. Les dérivées successives de F se calculent par les formules connues de dérivation des fonctions composées, et les formules de Frenet permettent de les exprimer au moyen de x,y,z, des cosinus directeurs α,β,γ, α',β',γ' de la tangente MT et de la normale principale MN, des expressions $c(s)$, $t(s)$ de s donnant la courbure et la torsion de (Γ) en fonction de l'abscisse curviligne, et de leurs dérivées successives $c',t',c'',t'',\ldots$

Supposons maintenant (Γ) située sur la surface (S) d'équation:

(1) $$f(x,y,z)=0;$$

$F(s)$ et ses dérivées sont nulles. D'autre part, les cosinus directeurs de deux droites perpendiculaires sont fonctions de trois variables indépendantes seulement, il arrive en général que les 6 équations

(2) $$F(s)=0, \quad \frac{dF}{ds}=0, \quad \frac{d^2F}{ds^2}=0,\dots, \quad \frac{d^5F}{ds^5}=0$$

(dont les premiers membres sont exprimés comme il a été dit plus haut) permettent de considérer x,y,z et les cosinus $\alpha,\beta,\dots,\gamma'$ comme fonctions composées de s par l'intermédiaire de $c(s)$, $t(s)$ et de leurs dérivées c',c'',c''',t',t''. En portant ces expressions de $x,y,\dots,\gamma'$ dans l'équation $\frac{d^6F}{ds^6}=0$, on trouve une relation

(3) $$R(c'''',c''',c'',c',c,t''',t'',t',t)=0,$$

condition nécessaire pour que (Γ) puisse être placée sur la surface (S). On peut (en supposant les données analytiques et utilisant la série de Taylor) démontrer que, parmi les courbes (Γ) dont la courbure et la torsion sont des fonctions données $c(s)$, $t(s)$ vérifiant identiquement la relation (3) (courbes égales entre elles), il en est au moins une située tout entière sur (S).

Lorsque (S) *est une surface algébrique*, les premiers membres des équations (2) sont des polynômes en $x,y,\dots,t''$ et le premier membre de (3) est un polynôme.

Si l'on remplace l'équation (1) *de* (S) *par l'équation d'une surface égale* (S^*) *rapportée aux mêmes axes, on obtient encore la même relation* (3). Soit en effet (Γ_0) celle des courbes (Γ) qui est sur (S), déplaçons simultanément (S) et (Γ_0) de manière à faire coïncider (S) avec (S^*), (Γ_0) occupera une nouvelle position (Γ_0^*) située sur (S^*), les fonctions $c(s)$, $t(s)$ ne sont pas modifiées et ne cessent pas de vérifier la relation (3).

2. *Lorsque la surface* (S) *est invariante vis à vis des transformations d'un sous-groupe du groupe des mouvements*, la relation (3) est remplacée par une relation plus simple, en ce sens que les ordres des dérivées de c et de t qu'elle utilise sont inférieurs à ceux du cas général.

Considérons d'abord le cas où (S) est un plan. Une courbe plane a une torsion nulle, (3) est remplacée par $t=0$. Supposons ensuite (S) sphère de rayon $\boldsymbol{R}$. La relation cherchée s'obtient en exprimant que $\boldsymbol{R}$ est le rayon d'une sphère osculatrice à (S), ce qui donne aisément

$$c'^2+t^2c^2=\boldsymbol{R}^2t^2c^4.$$

Dans les exemples précédents, le sous-groupe est à trois paramètres; examinons ensuite les sous-groupes à un paramètre: *Si* (S) *est un cylindre* on peut partir de l'équation

$$f(x,y)=0$$

la variable z ne figurant pas, il suffit des cinq premières équations (2) pour déterminer les variables restantes; en portant dans la sixième, on a une relation de la forme

$$R(c''',c'',c',c,t'',t',t)=0. \tag{4}$$

Si (S) *est une surface hélicoïdale, ou une surface de révolution*, on peut, en prenant pour Oz l'axe du mouvement qui la laisse invariante, remplacer (1) par la représentation parametrique

$$x=\varrho\cos\theta, \qquad y=\varrho\sin\theta, \qquad z=g(\varrho)+h\theta, \tag{5}$$

h est une constante (nulle si la surface est de révolution).

Les cosinus directeurs de la tangente MT à une courbe de la surface sont

$$\alpha=\cos\theta\frac{d\varrho}{ds}-\varrho\sin\theta\frac{d\theta}{ds}, \quad \beta=\sin\theta\frac{d\varrho}{ds}+\varrho\cos\theta\frac{d\theta}{ds}, \quad \gamma=g'(\varrho)\frac{d\varrho}{ds}+h\frac{d\theta}{ds}\cdot$$

Soit λ l'angle de MT et du prolongement ML du rayon du cylindre de révolution d'axe $0z$ passant par M

$$\cos\lambda=\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta=\frac{d\varrho}{ds};$$

la relation

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(1+g'^2)\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2+2hg'\frac{d\varrho}{ds}\frac{d\theta}{ds}+(\varrho^2+h^2)\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2=1,$$

donne ensuite $\dfrac{d\theta}{ds}$; α, β, γ s'expriment donc en fonction de ϱ, θ et λ. Soit de même μ l'angle que la normale principale de (Γ) fait avec ML, les relations

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \qquad \alpha' \cos\theta + \beta' \sin\theta = \cos\mu, \qquad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$$

donnent α', β', γ' en fonction de $\varrho, \theta, \lambda, \mu$.

(Géométriquement, ces derniers résultats tiennent à ce que M décrivant une hélice tracée sur (S), le plan tangent en M à (S), la droite ML, la parallèle Mz' à Oz constituent une figure de forme invariable).

Puisque x, y, z et les six cosinus sont fonctions de quatre variables seulement, et que la première des équations (2) est vérifiée identiquement, l'élimination de ces variables peut être faite entre les relations (2) et on obtient encore une relation de la forme (4).

3. Un dernier cas reste à considérer, celui où (S) *est un cylindre de révolution*; le sous-groupe est à deux paramètres. La représentation paramétrique (5) ne peut plus être utilisée, ϱ étant constant. Nous étudions ce cas par une méthode un peu différente.

Considérons un cylindre défini par un trièdre mobile de Darboux $Mxyz$, l'axe Mx étant tangent à la section droite passant en M, l'axe My la génératrice passant en ce point, l'axe Mz étant normal à la surface. En prenant pour paramètre l'abscisse curviligne u de la section droite et la distance v de M à un plan fixe perpendiculaire aux génératrices, on a, avec les notations des Chapitres I et II du livre V du tome II des *Leçons sur la Théorie des Surfaces*, de Darboux, les formules suivantes pour les translations et rotations du trièdre

$$\xi = A = 1, \quad \eta = \xi_1 = 0, \quad \eta_1 = C = 1, \quad p = q_1 = 0, \quad r = r_1 = 0,$$
$$p_1 = 1/R' = 0.$$

De plus, q est fonction de la seule variable u, et $-1/q = R$ est le rayon de courbure de la section droite.

Les formules

$$\text{(6)}\qquad \frac{du}{ds}=\cos\omega,\quad \frac{dv}{ds}=\sin\omega$$

$$\text{(7)}\qquad c\cos\overline{\omega}=-q\cos^2\omega$$

$$\text{(8)}\qquad \frac{d\omega}{ds}=c\sin\overline{\omega}$$

$$\text{(9)}\qquad \frac{d\overline{\omega}}{ds}=t+q\cos\omega\sin\omega$$

concernant une ligne (Γ) tracée sur la surface sont données par Darboux (*Leçons sur la Théorie des Surfaces*, t. II, tableaux II et V, p. 383, 386); ω est l'angle $\widehat{Mx,MT}$, MT étant tangente à (Γ), $\overline{\omega}=\widehat{MN,Mz}$, MN étant la normale principale; s est l'abscisse curviligne, enfin $c=1/\varrho$ et $t=1/\tau$ désignent respectivement la courbure et la torsion.

Nous les utiliserons en regardant c et t comme des fonctions données de s, ce qui détermine la courbe (Γ) à un déplacement près et permet de déterminer en fonction de s $\omega, \overline{\omega}, u, v, q$. D'une façon plus précise, en remplaçant q par sa valeur tirée de (7) dans (9), on a une équation (9′) constituant avec (8) un système d'équations différentielles que ω, $\overline{\omega}$ doivent vérifier; ayant ω, les équations (6) donnent u et v par des quadratures, et q se déduit de (7).

Géométriquement ω et $\overline{\omega}$ donnent la position du trièdre $Mxyz$ par rapport au trièdre de Frenet, l'axe My a une direction fixe dans l'espace, et engendre un cylindre (S); la section droite en est déterminée par sa courbure $(-q)$ et par son abscisse curviligne u, enfin v donne la distance de M à une section droite.

Nous aurons à utiliser une équation donnant dq/ds en fonction de q, ω, s. Pour la former on écrit d'abord:

$$\text{(10)}\qquad \left(\frac{d\overline{\omega}}{ds}-t\right)^2=q^2\sin^2\omega\cos^2\omega=-c\cos\overline{\omega}\,(c\cos\overline{\omega}+q)$$

en dérivant ensuite la relation (7) et éliminant ω et $d\omega/ds$ en utilisant (8) et (9), on obtient la relation suivante, cas particulier d'une équation donnée par Laguerre (formule 8 du tableau V des Leçons de Darboux):

$$\text{(11)}\qquad \cos\overline{\omega}\frac{dc}{ds}+c\sin\overline{\omega}\left(2t-3\frac{d\overline{\omega}}{ds}\right)=\frac{c\cos\overline{\omega}}{q}\,\frac{dq}{ds}.$$

L'élimination de $d\overline{\omega}/ds$ entre (10) et (11) conduit à l'équation cherchée que nous écrivons provisoirement

$$F\left(\frac{dq}{ds}, q, \overline{\omega}, s\right) = 0. \tag{12}$$

Si l'on obtenait q et $\overline{\omega}$ comme solutions du système différentiel (11) et (12), on aurait, ω par la relation (7). On pourrait alors trouver les valeurs initiales $s_0, \overline{\omega}_0, q_0$, de façon que la valeur correspondante de dq/ds soit nulle:

$$F(0, q_0, \overline{\omega}_0, s_0) = 0. \tag{13}$$

Cette équation donne par exemple $\overline{\omega}_0$ une fois choisis q_0 et s_0; *par suite elle détermine les cylindres passant par* (Γ) *pour lesquels, en un point donné* s_0, *le cercle osculateur à la section droite a un rayon donné et un contact du second ordre avec la section.*

Pour que la courbe (Γ) soit située sur un cylindre de révolution de rayon $\boldsymbol{R}$, il faut et il suffit évidemment que $\overline{\omega}$ étant solution de

$$F(o, -1/\boldsymbol{R}, \overline{\omega}, s) = 0 \tag{14}$$

vérifie aussi l'équation obtenue en égalant à zéro le premier membre de (11):

$$\cos\overline{\omega}\frac{dc}{ds} + c\sin\overline{\omega}\left(2t - \frac{3d\overline{\omega}}{ds}\right) = 0. \tag{15}$$

Nous simplifierons les formules qui vont suivre en supposant $\boldsymbol{R}=1$; on peut le faire sans diminuer la généralité, puisque cela revient à prendre pour unité de longueur le rayon du cylindre, ou encore à remplacer les variables anciennes

$$u, v, c, t, s$$

respectivement par

$$u' = u/\boldsymbol{R}, \quad v' = v/\boldsymbol{R}, \quad c' = \boldsymbol{R}c, \quad t' = \boldsymbol{R}t, \quad s' = s/\boldsymbol{R}$$

et à supprimer ensuite les accents; on a, maintenant $q = -1$.

Nous avons ainsi, en partant de (10),

$$\left(\frac{d\overline{\omega}}{ds}-t\right)^2=c\cos\overline{\omega}(1-c\cos\overline{\omega}) \tag{10'}$$

que nous transformons en la multipliant par $9c^2\sin^2\overline{\omega}$ et remplaçant $3c\sin\overline{\omega}\dfrac{d\overline{\omega}}{ds}$ par sa valeur tirée de (15). Il vient

$$\left(\cos\overline{\omega}\frac{dc}{ds}-ct\sin\overline{\omega}\right)^2-9c^3\sin^2\overline{\omega}\cos\overline{\omega}(1-c\cos\overline{\omega})=0; \tag{16}$$

c'est l'équation (14) pour $\boldsymbol{R}=1$. On l'écrit encore, en prenant comme inconnue $\sigma=\operatorname{cotg}\overline{\omega}$

$$G(\sigma,c',c,t)=[(1+\sigma^2)(\sigma c'-ct)^2+9c^4\sigma^2]^2-81c^6\sigma^2(1+\sigma^2)=0, \tag{17}$$
$$\left(c'=\frac{dc}{ds}\right).$$

L'équation (15) nous donne

$$3c\frac{d\sigma}{ds}+(c'\sigma+2ct)(1+\sigma^2)=0. \tag{18}$$

Nous écrirons

$$G(\sigma,c',c,t)=A_0\sigma^8+A_1\sigma^7+\ldots+A_8=0 \tag{19}$$

les coefficients de ce polynôme sont fonctions composées de s par l'intermédiaire de c',c,t. Posons

$$\frac{dA_i}{ds}=\frac{\partial A_i}{\partial c'}c''+\frac{\partial A_i}{\partial c}c'+\frac{\partial A_i}{\partial t}t'.$$

La dérivée $d\sigma/ds$ d'une solution de (19) est donnée par

$$\frac{\partial G}{\partial\sigma}\frac{d\sigma}{ds}+\sum_{i=0}^{8}\frac{dA_i}{ds}\sigma^{8-i}=0.$$

Remplaçons $d\sigma/ds$ par sa valeur tirée de (18), on voit que σ vérifie encore l'équation du huitième degré

$$H(\sigma,c'',c',c,t',t)=3c\sum_{i=0}^{8}\frac{dA_i}{ds}\sigma^{8-i}-(1+\sigma^2)(c'\sigma+2ct)\frac{\partial G}{\partial\sigma}=0. \tag{20}$$

La relation cherchée est

(21) $$R(c'', c', c, t', t) = 0,$$

R désignant le résultant de G et H considérés comme polynômes en σ; il est superflu de donner ici l'expression explicite du polynôme en $c'', \ldots, t$ qui constitue R.

4. Considérons deux équations du type (3)

(22) $$R(c'''', c''', c'', c', c, t''', t'', t', t) = 0 \qquad R_1(c'''', \ldots, t) = 0$$

concernant respectivement deux surfaces (S), (S_1). Elles constituent un système d'équations différentielles où les fonctions inconnues sont c et t; la variable indépendante s ne figure pas dans ces équations. Un tel système détermine les intersections (Γ) des surfaces égales à (S) avec les surfaces égales à (S_1). Il peut se ramener, par un procédé classique, en prenant c comme variable indépendante à un système de 6 équations donnant c' et ses dérivées t et ses dérivées en fonction de c, système complété par une septième équation donnant par une quadrature s en fonction de c. La constante additive correspondante n'intervient pas dans la forme des courbes (Γ) qui dépendent bien en définitive, dans le cas général, de six constantes arbitraires.

Si les surfaces (S) (S_1) sont égales, les deux équations (22) ne sont plus distinctes. Mais on observe que la condition $R = 0$ exprime que les 7 équations en $x, y, z,\ \alpha, \ldots, \gamma'$

$$F = 0,\ F' = 0, \ldots,\ F^{(6)} = 0$$

ont un système de solutions communes (n° 1); pour qu'il existe deux systèmes de telles solutions (correspondant à deux positions distinctes de (Γ) sur la surface (S), une seconde condition doit être remplie; elle constitue avec $R = 0$ le système d'équations différentielles cherchées. Par exemple, dans le cas du n° 3, on l'obtiendrait en écrivant que les deux équations (19) (20) en σ ont deux solutions communes.

Lorsque l'une au moins des surfaces (S) (S_1) admet les transformations d'un sous-groupe du groupe des mouvements, le nombre de constantes arbitraires dont dépendent les courbes

(Γ) est inférieur à six. C'est le cas par exemple des courbes définies par $R=0$, $t=0$, ou par l'équation unique

$$(23) \qquad R(c'''',c''',c'',c',c,0,0,0,0)=0$$

correspondant aux sections planes de la surface (S) à laquelle correspond R; elles ne dépendent plus que de trois constantes arbitraires. Ce nombre se réduit encore pour les surfaces considérées aux nos 3 et 4; ainsi, pour un cylindre de révolution, l'équation (23) est du second ordre

$$(24) \qquad R(c'',c',c,0,0)=0.$$

La forme des sections planes considérées (ellipses dont le demi petit axe a une longueur donnée $\boldsymbol{R}=1$), ne dépend plus que d'un paramètre. On ramènerait (24) à une équation du premier ordre en prenant c comme variable indépendante, mais les calculs du n° 3 donnent très simplement l'intégrale de cette équation différentielle; on part de l'équation (15), où l'on fait $t=0$:

$$\cos\overline{\omega}\frac{dc}{ds}-3c\sin\overline{\omega}\frac{d\overline{\omega}}{ds}=0,$$

les variables se séparent; on a par suite, k désignant une constante

$$c\cos^3\overline{\omega}=k^3, \qquad \cos\overline{\omega}=kc^{-\frac{1}{3}};$$

la relation (7) s'écrit, puisque $q=-1$, $c\cos\overline{\omega}=\cos^2\omega$ et

$$\cos^2\omega=kc^{\frac{2}{3}}, \qquad \sin^2\omega=1-kc^{\frac{2}{3}}.$$

On porte ces expressions des sinus et cosinus dans l'équation (9) correspondant à $t=0$, $q=-1$, ce qui donne

$$\frac{d\cos\overline{\omega}}{ds}=\sin\overline{\omega}\cos\omega\sin\omega$$

et enfin

$$(25) \qquad c'=\frac{dc}{ds}=-3c^{\frac{4}{3}}(k^{-1}-c^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}(c^{\frac{2}{3}}-k^2)^{\frac{1}{2}}.$$

L'équation intrinsèque des ellipses considérées peut s'écrire en exprimant l'arc s en fonction de $u = c^{\frac{2}{3}}$, c étant la courbure; cette expression est une intégrale elliptique

$$s = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u\sqrt{u(k^{-1}-u)(u-k^2)}}.$$

On peut évidemment obtenir cette même équation en partant de la représentation paramétrique classique

$$X = a\cos\varphi \qquad Y = \sin\varphi$$

et trouver ainsi $k = a^{-\frac{2}{3}}$ ou encore $\cos^{\frac{2}{3}}\theta$ en appelant θ l'angle du plan de l'ellipse et d'un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre de révolution.