CHAPITRE III.

Notions et Problêmes de Géométrie descriptive.

NOTIONS.

123. Un plan, avons nous déjà dit, est une surface dans laquelle une ligne droite peut coïncider dans toutes les directions.

124. Une ligne droite est dans un plan dès qu'elle a deux points communs avec ce plan.

125. Deux droites qui se coupent dans l'espace, ou qui tendent à se rencontrer, sont dans le même plan. Deux droites parallèles sont aussi dans le même plan.

126. Trois points donnés dans l'espace non en ligne droite sont nécessaires et suffisans pour déterminer la position d'un plan, de sorte que deux plans qui ont trois points communs, coïncident l'un avec l'autre.

127. L'intersection de deux plans est une ligne droite.

128. Quand deux plans ABCD, ABFE (fig. 60) se rencontrent, ils forment entre eux un certain angle, qu'on appelle l'inclinaison des deux plans, qui a pour mesure celle de l'angle EAD formé par les droites AE, AD perpendiculaires à l'intersection AB des deux plans, et menées par un même point A de cette intersection AB, la première AD dans le plan ABCD, et la seconde AE dans l'autre plan ABFE. Quand l'angle EAD est droit, les deux plans sont perpendiculaires.

129. Une droite AB (fig. 61) est perpendiculaire à un plan PQ, lorsque cette droite AB est perpendiculaire à deux droites BC, BD qui passent par le point B où la droite AB perce le plan (point que l'on appelle le pied de la perpendiculaire) et qui sont situées dans le plan PQ.

130. Une droite AB (fig. 62) est parallèle à un plan PQ, lorsque cette droite AB est parallèle à une autre droite CD située dans le plan PQ.

131. Si une droite qui a un point commun avec un plan était parallèle à ce plan, elle serait toute entière dans ce même plan.

132. Deux plans sont parallèles entre eux, lorsqu'ils ne peuvent se rencontrer dans aucune direction, quelque loin qu'on les prolonge l'un et l'autre. Les intersections de deux plans parallèles, coupés par un troisième, sont parallèles.

133. Si l'on imagine un système de droites parallèles comprises entre deux plans parallèles, ces droites seront égales entre elles.

134. Si deux plans CDEF, GHIK (fig. 63), sont perpendiculaires à un troisième plan PQ, leur intersection AB sera perpendiculaire au troisième plan PQ.

135. Si par un point A de l'espace (fig. 61), on abaisse une perpendiculaire AB à un plan quelconque PQ, le pied B de cette perpendiculaire sera la *projection* du point A sur le plan PQ.

136. Si par différens points A, B, C, D..... d'une ligne quelconque ABCD (fig. 64) située dans l'espace, on abaisse les perpendiculaires Aa, Bb, Cc, Dd..... sur un plan quelconque PQ, et que par les pieds a, b, c, d..... de ces perpendiculaires on fasse passer une ligne abcd, cette ligne sera la *projection* sur le plan PQ de la ligne ABCD donnée dans l'espace.

137. Si la ligne ABCD est droite, sa projection abcd sera aussi une ligne droite; si cette ligne ABCD était un cercle ou une ellipse, sa projection sur le plan PQ serait un cercle, ou une ellipse ou une ligne droite; si la ligne ABCD était une parabole, sa projection sur le plan PQ serait une autre parabole ou une ligne droite; et enfin, si cette ligne ABCD était une hyperbole, sa projection serait une autre hyperbole ou une ligne droite.

138. La projection sur un plan d'une courbe plane est une ligne droite, lorsque son plan est perpendiculaire au plan de projection. Si le plan de la courbe était parallèle au plan de projection, cette courbe aurait pour projection une courbe parfaitement égale.

139. La projection, sur un plan, d'une courbe à double courbure quelconque, est toujours une ligne courbe, quelque soit la position de cette ligne par rapport au plan de projection.

140. Pour fixer la position et la forme d'une ligne quelconque dans l'espace, on la rapporte à deux plans perpendiculaires entre eux (dont un est ordinairement supposé horizontal et l'autre vertical); sur chacun de ces plans on projette la ligne en question, ainsi qu'on le voit dans la figure 65, où le parallélogramme ABCD représente le plan horizontal, et le parallélogramme ABEF représente le plan vertical. La projection $a'b'$ de la ligne ab de l'espace, sur le plan horizontal ABCD, s'appelle la *projection horizontale*, et la projection $a''b''$, de la même droite, sur le plan vertical, est la *projection verticale*. Les plans sur lesquels on projette une ligne quelconque se nomment *plans de projection*.

L'intersection AB des plans de projection s'appelle *ligne de terre*.

Lorsqu'on aura les deux projections $a'b'$ et $a''b''$ d'une ligne quelconque ab, on pourra toujours retrouver cette ligne dans l'espace, en élevant aux deux plans de projection, des perpendiculaires $a'a$, $b'b$..... $a''a$, $b''b$..... par les projections a', b'...... a'', b''...... des mêmes points a, b....... de la ligne en question ab ; car les perpendiculaires $a'a$, $a''a$ élevées par les projections a', a'' du même point a, se rencontreront dans l'espace en un point a, qui sera un de ceux de la ligne en question. Il est clair qu'il en sera de même pour les autres points de la ligne, pris dans l'ordre qu'il vient d'être dit.

Une fois qu'on a les deux projections d'une ligne dans l'espace, soit qu'on ait obtenu ces projections immédiatement de la ligne elle-même, soit par quelqu'autre moyen, on est forcé d'abandonner cette ligne, pour ne plus considérer que ses projections, parce que, ainsi que nous allons le voir, lorsqu'on dessine une épure on n'opère que sur les deux projections de cette ligne, qu'on a ramenées sur un seul plan, et on ne voit plus rien dans l'espace.

Cependant pour concevoir ce qu'on fait, il est absolument nécessaire de reporter, par la pensée, dans l'espace, les opérations que l'on fait sur les projections, et c'est là précisément la plus grande difficulté que les commençans aient à surmonter, sur-tout lorsqu'il est question de considérer à la fois un grand nombre de lignes ayant dans l'espace des formes et des positions diverses.

141. La perpendiculaire AB abaissée d'un point quelconque A de l'espace (fig. 61) sur un plan de projection PQ, s'appelle la *projetante* de ce point A sur ce plan. La projetante aa' du point a (fig. 65) abaissée sur le plan horizontal, s'appelle la *projetante sur le plan horizontal,* ou simplement la *projetante horizontale ;* et la projetante aa'' du même point a abaissée sur le plan vertical, s'appelle la *projetante sur le plan vertical*, ou simplement la *projetante verticale.* On remarquera, pour ne pas s'y tromper, que la projetante horizontale est une verticale, et que la projetante verticale est une horizontale.

142. La projetante horizontale aa' du point a (fig. 65) est la distance de ce point a au plan horizontal, et la projetante verticale aa'', la distance du même point a au plan vertical.

On remarquera que si, par la projection horizontale a' du point a, on mène une perpendiculaire $a'T$ à la ligne de terre AB, cette perpendiculaire $a'T$ sera égale à la projetante verticale aa'' et mesurera, par conséquent, la distance du point a au plan vertical ; de sorte que la distance de la projection horizontale d'un point à la ligne de terre, est précisément la distance de ce point au plan vertical.

De même, si par la projection verticale a'' d'un point a, on mène une perpendiculaire $a''T$ à la ligne de terre AB, cette perpendiculaire sera égale à la projetante horizontale aa', et mesurera, par conséquent, la distance de ce point a au plan horizontal ; de sorte que la distance de la projection verticale d'un point à la ligne de terre, est précisément la distance de ce point au plan horizontal.

A ces remarques très-importantes, nous joindrons celle-ci qui ne l'est pas moins, et qui consiste en ce que les deux perpendiculaires $a'T$, $a''T$ abaissées des projections a', a'' du même point a, sur la ligne de terre AB, passent par le même point T de cette ligne de terre.

143. Si maintenant on voulait que les deux projections d'un point a ou d'une ligne quelconque ab (fig. 65) fussent sur un seul et même plan, il suffirait d'imaginer que le plan vertical ABEF a tourné autour de la ligne de terre AB, de manière à devenir le prolongement $ABE'F'$ du plan horizontal ABCD ; car il est clair que ce plan entraînera avec lui la projection verticale a'' ou $a''b''$ du point a ou de la ligne ab en question, de sorte que cette projection deviendra $a'''b'''$. De plus, on voit, et c'est très-important, que les droites $a''T$, $b''T'$ perpendiculaires à la ligne de *terre AB*, *ne cesseront pas* de l'être, dans le mouvement du *plan ABEF*, et comme les droites correspondantes $a'T$, $b'T'$ *sont aussi perpendiculaires* à la ligne de terre AB, il s'ensuit que les droites Ta''', $T'b'''$ seront les prolongemens respectifs des droites $a'T$, $b'T'$.

144. Il résulte de là que, lorsque l'on considère les choses sur un seul plan, les projections a et b d'un même point de l'espace (fig. 66) sont nécessairement sur une même perpendiculaire ab à la ligne de terre AB.

Il faut bien se rappeler que la distance aT mesure la distance du point de l'espace au plan horizontal (le point a étant la projection verticale de ce point), et que la droite bT mesure la distance du même point de l'espace au plan vertical.

145. Il suit de là que si le point de l'espace était sur le plan horizontal, sa distance par rapport à ce plan horizontal étant nulle, la verticale aT serait nulle aussi, et *la projection verticale de ce point serait sur la ligne* de terre au pied T de la perpendiculaire bT abaissée sur la ligne de terre par la projection horizontale b de ce point.

De même, si le point de l'espace était sur le plan vertical, sa distance par rapport à ce plan étant nulle, l'horizontale bT serait nulle aussi, et la projection horizontale du point en question serait le pied T de la perpendiculaire aT abaissée sur la ligne de terre par la projection verticale a de ce point.

146. En général, on suppose toujours que la projection verticale d'un

point est au-dessus de la ligne de terre, et que la projection horizontale est au-dessous; mais d'après ce qu'il vient d'être dit, il est évident que si le point de l'espace est situé au-dessous du plan horizontal, sa projection verticale est au-dessous de la ligne de terre, car la distance de ce point au plan horizontal ne pourra plus être prise de bas en haut, mais de haut en bas par rapport à ce plan.

De même, si le point de l'espace en question est situé derrière le plan vertical, sa projection horizontale sera au-dessus de la ligne de terre.

Nous conclurons de là,

1°. Si le point en question est situé au-dessus du plan horizontal, et en avant du plan vertical, sa projection verticale sera au-dessus et sa projection horizontale au-dessous de la ligne de terre;

2°. Si le point est situé en avant du plan vertical, et au-dessous du plan horizontal, les deux projections seront au-dessous de la ligne de terre;

3°. Si le point est situé au-dessus du plan horizontal, mais derrière le plan vertical, les deux projections seront au-dessus de la ligne de terre;

4°. Enfin si le point est situé au-dessous du plan horizontal et derrière le plan vertical, la projection verticale sera au-dessous et la projection horizontale au-dessus de la ligne de terre.

Les réciproques de toutes ces propositions ont lieu.

147. Si une droite est parallèle à l'un des plans de projection, sa projection sur l'autre est parallèle à la ligne de terre.

Ainsi, par exemple, si une droite est parallèle au plan horizontal, sa projection verticale sera parallèle à la ligne de terre; et si elle était parallèle au plan vertical, sa projection horizontale serait parallèle à la ligne de terre.

148. Réciproquement, si l'une des projections d'une droite est parallèle à la ligne de terre, cette droite sera parallèle au plan de l'autre projection.

Ainsi, par exemple, si la projection verticale d'une droite est parallèle à la ligne de terre, cette droite sera parallèle au plan horizontal, *et vice versa*.

149. Si une droite est à la fois parallèle aux deux plans de projection, les deux projections de cette droite seront parallèles à la ligne de terre, et réciproquement, si les deux projections d'une droite sont parallèles à la ligne de terre, cette droite sera à la fois parallèle aux deux plans de projection.

150. Si une droite est perpendiculaire à l'un des plans de projection, sa projection sur ce plan ne sera qu'un point, et sa projection sur l'autre plan sera perpendiculaire à la ligne de terre.

Ainsi, par exemple, si la droite en question est perpendiculaire au plan horizontal, sa projection horizontale ne sera qu'un point, et sa projection verticale sera perpendiculaire à la ligne de terre.

151. Réciproquement, si l'une des projections d'une droite n'est qu'un point, et que l'autre soit perpendiculaire à la ligne de terre, cette droite sera perpendiculaire au plan de projection, sur lequel sa projection n'est qu'un point.

Ainsi, la droite sera perpendiculaire au plan horizontal, si c'est sa projection horizontale qui n'est qu'un point.

152. Si une droite est perpendiculaire à la ligne de terre, ses deux projections seront aussi perpendiculaires à cette ligne.

La réciproque n'a pas lieu, c'est-à-dire que les deux projections d'une droite peuvent être perpendiculaires à la ligne de terre, sans que la droite elle-même soit perpendiculaire à cette ligne.

153. Si une droite est située dans l'un des plans de projection, sa projection sur l'autre sera sur la ligne de terre.

Ainsi, si une droite est située sur le plan horizontal, sa projection verticale sera sur la ligne de terre; et si cette droite était sur le plan vertical, sa projection horizontale serait sur la ligne de terre.

154. Réciproquement, si l'une des projections d'une droite est sur la ligne de terre, cette droite sera sur le plan de l'autre projection. Ainsi, par exemple, si c'est la projection verticale de la droite en question qui soit sur la ligne de terre, cette droite sera sur le plan horizontal; si, au contraire, c'était la projection horizontale de cette droite qui fût sur la ligne de terre, cette droite serait sur le plan vertical.

155. Si une droite est à la fois sur les deux plans de projection, ses deux projections seront sur la ligne de terre, et la droite en question elle-même coïncidera avec cette ligne de terre. Réciproquement, si les deux projections d'une droite sont sur la ligne de terre, la droite elle-même sera sur cette ligne.

156. Si deux droites dans l'espace sont parallèles, leurs projections sur chaque plan de projection seront parallèles. Réciproquement, si les projections de deux droites sont parallèles dans chaque plan de projection, ces deux droites seront elles-mêmes parallèles dans l'espace.

157. Si deux lignes quelconques de l'espace se coupent, les projections de leur point d'intersection seront sur une même droite perpendiculaire à la ligne de terre et sur les points d'intersection des projections de ces droites. Réciproquement, si les projections de deux lignes quelconques se coupent, dans les deux plans de projection, de manière que leurs points d'intersection soient sur une même perpendiculaire à la ligne de terre, les deux lignes en question se couperont dans l'espace.

158. Un plan est déterminé de position dans l'espace, lorsque l'on con-

naît les intersections de ce plan avec les plans de projection. Ainsi, si les droites AB, AC (*fig.* 67) sont les intersections d'un certain plan avec les plans de projection, ce plan sera complètement déterminé, au moyen de ces deux droites AB, AC.

Les intersections AB, AC du plan en question avec les plans de projection, s'appellent les *traces* de ce plan.

La trace AB située dans le plan horizontal s'appelle la *trace horizontale*, et la trace AC située dans le plan vertical, s'appelle la *trace verticale*.

159. Une remarque très-importante, c'est que les deux traces d'un plan se rencontrent nécessairement sur la ligne de terre AD.

160. Si un plan est parallèle à l'un des plans de projection, ce plan n'aura qu'une trace qui sera parallèle à la ligne de terre et située dans l'autre plan de projection. Réciproquement, si un plan n'a qu'une trace parallèle à la ligne de terre, ce plan sera parallèle au plan de projection qui ne contient pas cette trace.

Ainsi, 1°. si un plan est parallèle au plan horizontal, ce plan n'aura point de trace horizontale, et sa trace verticale sera parallèle à la ligne de terre. De même, si un plan est parallèle au plan vertical, ce plan n'aura point de trace verticale, et sa trace horizontale sera parallèle à la ligne de terre. 2°. Si un plan n'a qu'une trace, et que cette trace, parallèle à la ligne de terre, soit dans le plan vertical, le plan sera parallèle au plan horizontal. De même, si la trace unique d'un plan est dans le plan horizontal et parallèle à la ligne de terre, ce plan sera parallèle au plan vertical.

161. Si l'une des traces d'un plan est perpendiculaire à la ligne de terre, et que l'autre trace soit quelconque, ce plan sera perpendiculaire au plan de projection dans lequel la trace est quelconque.

Ainsi, si c'est la trace horizontale qui soit perpendiculaire à la ligne de terre, le plan sera perpendiculaire au plan de projection verticale; et si, au contraire, la trace verticale était celle qui est perpendiculaire à la ligne de terre, alors le plan serait perpendiculaire au plan horizontal.

Réciproquement, si un plan est perpendiculaire à l'un des plans de projection sans être parallèle à l'autre, sa trace sur le plan de projection auquel il est perpendiculaire, sera quelconque, et l'autre trace sera perpendiculaire à la ligne de terre. Ainsi, par exemple, si le plan est perpendiculaire au plan vertical, sa trace verticale sera quelconque et sa trace horizontale sera perpendiculaire à la ligne de terre : l'inverse aurait lieu si le plan était perpendiculaire au plan horizontal.

162. Si un plan est à la fois perpendiculaire aux deux plans de projection,

ses deux traces seront une même perpendiculaire à la ligne de terre. Réciproquement, si les deux traces d'un plan sont une même droite perpendiculaire à la ligne de terre, ce plan sera à la fois perpendiculaire aux deux plans de projection.

163. Si les deux traces d'un plan sont parallèles à la ligne de terre, ce plan sera lui-même parallèle à cette ligne. Réciproquement, si un plan est parallèle à la ligne de terre, ses deux traces seront parallèles à cette ligne de terre.

164. Quand un plan n'est parallèle à aucun des plans de projection et que l'une de ses traces est parallèle à la ligne de terre, l'autre trace est aussi nécessairement parallèle à la ligne de terre.

165. Si deux plans sont parallèles, leurs traces, dans chaque plan de projection, seront aussi parallèles entre elles. Réciproquement, si dans chaque plan de projection les traces de deux plans sont parallèles, les plans le seront aussi.

166. Si une droite est perpendiculaire à un plan, les projections de cette droite seront, dans chaque plan de projection, *perpendiculaires aux traces* respectives de ce plan. Réciproquement, si les projections d'une droite sont respectivement perpendiculaires aux traces d'un plan, la droite sera perpendiculaire au plan.

167. Si une droite est située dans un plan donné par ses traces, cette droite ne pourra rencontrer les plans de projection que sur les traces du plan qui la contient. De plus, la droite en question ne peut rencontrer les plans de projection, que sur ses projections mêmes; d'où il suit que les points de rencontre de la droite et des plans de projection, sont respectivement sur les intersections des projections de cette droite et des traces du plan qui la contient.

168. Si une droite située dans un plan donné par ses traces est parallèle au plan horizontal, sa projection horizontale sera parallèle à la trace horizontale du plan donné, et sa projection verticale sera parallèle à la ligne de terre. De même, si la droite, *située dans le plan donné par ses traces*, est parallèle au plan vertical, sa projection verticale sera parallèle à la trace verticale du plan qui la contient, et sa projection horizontale sera parallèle à la ligne de terre.

Réciproquement, si une droite est située dans un plan donné par ses traces, et que, par exemple, sa projection horizontale soit parallèle à la trace horizontale du plan donné, cette droite sera parallèle au plan horizontal, et sa projection verticale sera parallèle à la ligne de terre. De même, si la projection verticale de la droite en question est parallèle à la trace verticale du plan donné, cette droite sera parallèle au plan vertical, et sa projection horizontale sera parallèle à la ligne de terre.

PROBLÊMES.

169. *Les projections AB, CD* (fig. 68), *d'une droite étant données, trouver les points* a *et* b *où cette droite perce les plans de projection.*

Solution. Supposons d'abord qu'il s'agisse de trouver le point a où la droite donnée perce le plan horizontal.

Ce point a doit être sur la projection horizontale AB de la droite donnée, et puisque ce point a est sur le plan horizontal, sa projection verticale doit être sur la ligne de terre AE, et en même temps sur la projection verticale DC de la droite donnée, c'est-à-dire, au point C où cette projection verticale DC rencontre la ligne de terre AE; mais les projections d'un même point sont sur une même perpendiculaire à la ligne de terre; donc le point demandé a sera au point où la perpendiculaire Ca, menée par le point C à la ligne de terre AE, rencontre la projection horizontale AB de la droite.

Pour avoir le point b où la droite donnée rencontre le plan vertical, il faudrait prolonger la projection horizontale jusqu'à la ligne de terre AE, élever, par le point A, une perpendiculaire Ab à la ligne de terre, et le point b, où la droite Ab rencontrerait la projection verticale DC de la droite donnée, serait le point demandé.

170. *Les projections AB, CD* (fig. 69), *d'une droite étant données, trouver les angles BaG, DbH, que cette droite fait avec chaque plan de projection.*

Solution. L'angle que fait une droite avec un plan, est le même que celui que fait la même droite avec sa projection sur le plan.

Si donc nous supposons qu'on ait d'abord cherché, d'après le procédé ci-dessus, les points a et b où la droite donnée perce les plans de projection, et qu'ensuite on ait déterminé les projections E et B d'un même point de la droite donnée, ce qu'on fera en menant une perpendiculaire EB à la ligne de terre TC, laquelle ira rencontrer les projections AB, CD, de la droite donnée aux points B et E qui seront les projections dont il s'agit; il est clair qu'on pourra concevoir un triangle rectangle sur un plan vertical élevé sur la projection horizontale AB, formé par cette projection horizontale AB, par la droite donnée elle-même, et par la projectante élevée par la projection B du point dont il vient d'être question; il est clair aussi que l'angle aigu de ce triangle, qui aura son sommet au point a, sera l'angle cherché : il suffira donc de construire ce triangle pour avoir l'angle demandé.

Or, si par le point B de la projection horizontale AB, on élève une perpendiculaire BG à cette doite, que l'on fasse BG égal à la projetante horizontale KE, et que l'on mène la droite aG, l'angle BaG sera l'angle que forme la droite donnée avec le plan horizontal.

Pour avoir l'angle EbH que forme la même droite avec le plan vertical, on construira le triangle rectangle EbH comme on a construit le triangle BaG, en opérant sur la projection verticale, comme on vient de le faire sur la projection horizontale, et réciproquement.

On peut se dispenser de trouver les points où la droite donnée perce les plans de projection, en menant (fig. 70) une perpendiculaire EF à la ligne de terre, qui donnera, sur les projections AB, CD, de la droite donnée, les projections E et F d'un même point de cette droite; en menant, par les points E et F, les droites EG, FK, parallèles à la ligne de terre HI, et ensuite pour construire le triangle BFL, dont l'angle BFL est l'angle que forme la droite donnée avec le plan horizontal, au lieu de faire BL égal à ID, on ne fera BL égal qu'à GD; de même, pour construire le triangle EMD, dont l'angle MED est l'angle que fait la droite donnée avec le plan vertical, au lieu de faire DM égal à IB, on le fera égal à BK. D'où l'on voit que les droites EG, FK, jouent le rôle de la ligne de terre.

171. *Une droite étant donnée par les projections A et C, B et D de ses extrémités* (fig. 71), *trouver la véritable longueur de cette droite.*

Solution. Si la droite donnée était parallèle à l'un des plans de projection, la longueur demandée serait la projection même de la droite dans ce plan.

Le cas que nous supposons ici est celui où la droite donnée n'est parallèle à aucun des plans de projection.

Sur la projection horizontale AB de la droite donnée, imaginons un plan vertical; ce plan contiendra la droite en question, laquelle formera avec sa projection AB et les projetantes horizontales dont les pieds sont les points A et B, un trapèze AabB, qui sera facile à construire, en élevant par les points A et B, les perpendiculaires Aa, Bb, que l'on fera respectivement égales aux projetantes EC, FD, et en menant par les points a et b la droite ab qui sera évidemment la longueur demandée.

Si par l'extrémité a de la droite donnée, qui est la plus près du plan horizontal, on mène une horizontale ad, on aura un triangle rectangle abd dont l'hypothénuse ab serait la longueur demandée; la différence bd des hauteurs des extrémités de la droite donnée par rapport au plan horizontal serait l'un des côtés de l'angle droit, et le troisième côté ad serait égal à la projection horizontale AB de cette droite. Or, les projetantes EC, FD, mesurent les distances des extrémités de la droite en question par rapport au plan horizontal; si donc par le point C on mène une parallèle CG à la ligne de terre, GD sera la différence de ces hauteurs, et, par conséquent, si l'on fait Gd′ égal à la projection horizontale AB de la droite donnée, et que l'on joigne les points d′ et D par la droite Dd′, le triangle rectangle DGd′ sera égal au triangle abd, et la droite d′D sera la longueur demandée.

On pourrait, dans les deux solutions que nous venons de trouver, raisonner sur la projection verticale comme nous l'avons fait sur la projection horizontale et réciproquement, et obtenir de même la longueur demandée.

172. *Trouver l'angle que forment deux droites qui se coupent dans l'espace, ces droites étant données par leurs projections AB et CD, BB′ et DF* (fig. 72).

Solution. On se rappelera que pour que les droites données se coupent dans l'espace, il faut que les intersections D et B des projections de ces droites soient sur une même perpendiculaire DB à la ligne de terre AB′.

Pour résoudre le problême, on cherchera les points où les deux droites données percent le même plan de projection (n°. 169), le plan vertical, par exemple; par les points C et F où ces droites percent le plan vertical, on menera la droite CF qui sera l'intersection, avec le plan vertical, du plan supposé mené par les deux droites données; cette intersection CF formera, avec les droites données, un certain triangle dont l'angle opposé au côté CF sera l'angle demandé : construisons donc ce triangle, par le moyen des trois côtés.

Le côté CF est connu, et les deux autres côtés sont donnés par leurs projections, qui sont, pour le premier, les droites AB, CD, et pour le second, les droites B′B, DF. Comme les extrémités C et F de ces deux côtés sont sur le plan vertical, on aura les véritables longueurs respectives, BI, BH de ces droites, en portant leurs projections verticales CD, DF respectivement de T en I et de T en H. Ainsi donc, en prenant un rayon égal à IB et du point C comme centre, décrivant un arc en G; ensuite, avec un rayon égal à BH et du point F comme centre, décrivant un second arc en G qui coupera le premier en un point G, on aura le triangle demandé CGF en menant par le point G et les points C et F les droites CG et FG, et par conséquent l'angle CGF pour l'angle demandé.

Les deux projections horizontales ou les deux projections verticales des droites données peuvent se trouver sur une même droite, comme dans la figure 73. Le lecteur s'exercera à résoudre ce cas.

173. *Les traces d'un plan étant données, trouver les angles que ce plan forme avec les plans de projection.*

Solution. Ce problême présente quatre cas : 1°. le plan donné peut être perpendiculaire à l'un des plans de projection, et avoir par conséquent une de ses traces perpendiculaire à la ligne de terre.

Ainsi, par exemple, supposons (fig. 74) que la trace horizontale AB du plan donné soit celle qui est perpendiculaire à la ligne de terre AD, et que l'autre AC soit quelconque. Il est bien évident que, dans ce cas, l'angle que fait la trace horizontale AB avec la ligne de terre AD, est précisément l'angle que fait le plan donné avec le plan vertical, et que l'angle CAD que fait la trace verticale AC avec la ligne de terre, est celui que fait le même plan donné avec le plan horizontal.

2°. Les deux traces du plan donné peuvent former deux angles aigus avec la même partie de la ligne de terre, ainsi qu'on le voit dans la fig. 75, où AB est la trace horizontale et AC la trace verticale.

Dans ce cas, pour avoir l'angle que fait le plan donné avec le plan horizontal, on imaginera un plan perpendiculaire à la trace horizontale AB; la trace horizontale DE de ce plan sera perpendiculaire à la trace AB, et sa trace verticale EF le sera à la ligne de terre (n°. 161) qui est la projection verticale de la droite AB (n°. 153). L'intersection de ce plan perpendiculaire à AB avec le plan donné, sera perpendiculaire à AB, de sorte que l'angle formé par cette intersection et la droite DE sera l'angle demandé.

Si maintenant on considère les choses dans l'espace disposées comme elles doivent l'être, on verra l'intersection, dont nous venons de parler, passer par les points D et F, et former un triangle rectangle avec les droites DE, EF qui seront les côtés de l'angle droit ; formons donc ce triangle. Pour cela, il suffira de faire EG égal à ED, et de mener la droite GF : le triangle en question sera GEF, et l'angle demandé sera l'angle FGE.

Pour avoir l'angle IKB que fait le plan donné avec le plan vertical, on opérera sur la trace verticale, comme nous venons de le faire sur la trace horizontale, et réciproquement.

3°. L'une des traces du plan donné peut faire un angle aigu et l'autre un angle obtus avec la même partie de la ligne de terre, ainsi qu'on le voit par la fig. 76, où AB est la trace horizontale qui fait, avec la partie AG de la ligne de terre, un angle aigu, et où AC est la trace verticale qui fait un angle obtus avec la même partie AG de la ligne de terre.

Dans ce cas on raisonnera comme dans le précédent, et on prolongera, autant qu'il sera nécessaire, les traces du plan donné au-delà de la ligne de terre, comme la fig. 76 l'indique; on trouvera que l'angle EGF est celui que fait le plan donné avec le plan horizontal, et l'angle ILK, celui que fait le même plan donné avec le plan vertical.

4°. Enfin les deux traces du plan donné peuvent être parallèles à la ligne de terre, ainsi qu'on le voit par la fig. 77, où KL est la trace horizontale, et AC la trace verticale du plan donné.

Dans ce cas, le plan perpendiculaire à la trace horizontale AB du plan donné, sera aussi perpendiculaire à la ligne de terre, puisque ces deux droites sont parallèles; par conséquent, en vertu de ce qui a été dit à l'art. 161, es deux traces de ce plan seront une même perpendiculaire DE à la ligne de terre, car un plan perpendiculaire à la ligne de terre est perpendiculaire aux deux plans de projection.

Pour avoir l'angle FGE que forme le plan donné avec le plan horizontal, ou l'angle FHD que forme le même plan avec le plan vertical, on voit évidemment ce qu'il faut faire.

On observera que les deux triangles rectangles FGE, FDH sont égaux, et que par conséquent il suffit d'en avoir un pour avoir les angles demandés.

174. *On demande la trace verticale d'un plan donné par sa trace horizontale et par l'angle qu'il fait avec le plan horizontal.*

Solution. Soit AB (fig. 75 et 76) la trace horizontale donnée; on menera à cette trace horizontale AB une perpendiculaire DE quelconque; par le point E où cette droite DE rencontrera la ligne de terre, on élevera une verticale EF; on fera EG égal à ED, et sur la ligne de terre AE et au point G, comme sommet, on fera un angle EGF égal à l'angle donné: le point F où la droite GF rencontrera la droite EF sera évidemment un point de la trace verticale demandée; mais les deux traces doivent se rencontrer sur la ligne de terre; si donc par le point F et le point A, où la trace horizontale AB donnée rencontre la ligne de terre, on mène la droite AF, cette droite sera la trace verticale demandée.

175. *On demande* 1°. *les projections de l'intersection de deux plans donnés par leurs traces;* 2°. *l'angle que ces deux plans forment entre eux.*

Solution. Ce problême présente un grand nombre de cas. Nous allons exposer les principaux, et nous nous en rapporterons à l'intelligence du lecteur pour les autres.

1°. Supposons que les deux traces de chaque plan donné forment, avec la même partie de la ligne de terre, des angles aigus; et soient (fig. 78) AB, AC les traces du premier plan, et A'B, A'C les traces du second; il est clair que le point B où les traces horizontales AB, A'B se rencontrent, appartient à l'intersection de ces deux plans; or ce point est dans le plan horizontal; donc sa projection verticale sera sur la ligne de terre AA′ au point E, qui est le pied de la perpendiculaire BE abaissée du point B sur la ligne de terre; mais le point C d'intersection des deux traces verticales AC, A′C est aussi un point de l'intersection des plans donnés, et comme ce point est sur le plan vertical, sa projection verticale coïncide avec lui-même; si donc par ce point C et le point E on mène une droite CE, cette droite sera la projection verticale de l'intersection des plans donnés.

Si par le point C on abaisse une perpendiculaire CD à la ligne de terre, et que par le pied D de cette perpendiculaire et le point B d'intersection des traces horizontales AB, A′B, on mène une droite BD, cette droite BD sera la projection horizontale de l'intersection de ces plans.

Si maintenant on veut avoir l'angle des deux plans donnés, on menera une droite GH perpendiculaire à la projection horizontale BD de l'intersection de ces plans, qui sera la trace horizontale d'un plan perpendiculaire à cette intersection (nº. 166). Si actuellement on imagine ce dernier plan dans l'espace, on le verra intercepter les deux plans donnés suivant deux droites, qui formeront avec la droite GH (terminée aux traces horizontales AB, A′B des plans donnés) un triangle dont l'angle opposé au côté GH sera l'angle demandé.

Pour construire ce triangle, on fera DK égal à DB, et par les points K et C on menera la droite CK; on fera ensuite DF égal à ID, et par le point F on menera FL perpendiculaire à CK: cette droite FL sera la hauteur du triangle dont il vient d'être question; si donc on fait IO égal à FL, et que, par le point O et les points G et H, on mène les droites GO, HO, on aura le triangle GOH en question, et l'angle GOH sera l'angle demandé.

2º. Si les deux traces des plans donnés étaient disposées comme dans la fig. 79, où l'on voit que les deux traces verticales AC, A′C′ ne se rencontrent plus au-dessus mais au-dessous de la ligne de terre, en un point e, on opérerait encore comme dans le cas précédent. Pour avoir la projection verticale cd de l'intersection des deux plans donnés, par le point a où les deux traces horizontales AB, A′B′ se rencontrent, on abaisserait une perpendiculaire ac, et par le point e où les traces verticales AC, A′C′, prolongées, se rencontrent, et le pied c de la droite ac, on menerait la droite ed, qui serait la projection demandée.

Pour avoir la projection horizontale ab de la même intersection, par le pied b de la perpendiculaire eb, abaissée sur la ligne de terre DH par le point e où les traces verticales AC, A′C′ des plans donnés se coupent, et par le point a où les traces horizontales AB, A′B′ se rencontrent, on menera la droite ab, qui sera la projection demandée.

Cet exemple fait assez voir que de quelque manière que les traces des plans donnés se coupent dans chaque plan de projection, il faut toujours opérer de la même manière pour avoir les projections de l'intersection de ces plans.

Quant à l'angle de ces deux plans, il s'obtient encore de la même manière que dans le premier cas.

On menera une perpendiculaire à l'une des projections de l'intersection des deux plans donnés, à la projection verticale cd, par exemple. Soit donc EC′ cette perpendiculaire; on fera ensuite cD égal à ce; par le point D et le point a, où les traces horizontales se rencontrent, on menera la droite Da; on fera cG égal à cF, et par le point G on menera la droite GI perpendiculaire à Da; on fera Fd égal à GI, et par le point d et les points E et C′ où la droite EC′ rencontre les traces verticales AC, A′C′ des plans donnés, on menera les droites dE et dC′, qui formeront entre elles l'angle EdC′, qui sera l'angle demandé.

3°. Mais s'il arrivait que les traces des plans donnés ne se rencontrassent pas, ce qui aurait lieu si elles étaient toutes parallèles à la ligne de terre, alors le procédé changerait, et pour obtenir les projections de l'intersection des deux plans, et pour avoir l'angle de ces plans.

Supposons donc que les traces du premier plan soient AB, CD (fig. 80), celles du second A′B′, C′D′, et que toutes ces traces soient parallèles à la ligne de terre EF.

On menera une perpendiculaire GH à la ligne de terre EF, qui sera les deux traces d'un plan perpendiculaire à l'intersection des plans donnés, car cette intersection est dans ce cas parallèle à la ligne de terre; on fera IM égal à IK et IN égal à IG; par le point M et le point H on menera la droite HM qui sera l'intersection du plan perpendiculaire à la ligne de terre avec le premier plan donné; par les points N et L on menera la droite NL qui sera l'intersection du même plan perpendiculaire à la ligne de terre avec le second plan donné, et l'angle MON que forment les deux droites MH, NL, sera l'angle des deux plans donnés. Pour avoir les projections de l'intersection de ces deux plans, on menera par le point O une parallèle OP à la ligne de terre EF, qui sera la projection verticale de la droite en question; et on aura la projection horizontale TR, de la même droite, en faisant IR égal à SO, et en menant par le point R une parallèle RT à la ligne de terre.

4°. Enfin il pourrait se faire que les deux traces horizontales ou les deux traces verticales seulement fussent parallèles, les deux autres se rencontrant d'une manière quelconque, ainsi qu'on le voit par la *fig.* 81, où ce sont les deux traces horizontales AB, A′B′ qui sont parallèles, les traces verticales AC, A′C se rencontrant au-dessus de la ligne de terre AA′

Dans ce cas, par le point C où les traces verticales AC, A′C se rencontrent, on abaissera une perpendiculaire CT à la ligne de terre AA′, et par le point T on menera une parallèle TG à l'une AB des traces horizontales données, qui sera la projection horizontale de l'intersection des deux plans donnés. Pour avoir la projection verticale CH de la même intersection, il suffira de mener par le point où les deux traces verticales des plans donnés se rencontrent, une parallèle CH à la ligne de terre.

Pour avoir l'angle des deux plans donnés, on menera une perpendiculaire BB′ quelconque, à la projection horizontale TG de l'intersection de ces deux plans, on fera GD égal à TC, et par le point D et les points B et B′, où la droite BB′ rencontre les traces horizontales AB, A′B′ données, on menera les droites DB, DB′, qui feront entre elles l'angle demandé BDB′.

176. *Par un point donné par ses projections, mener une perpendiculaire à un plan donné par ses traces* (fig. 82).

Solution. Puisque les projections d'une droite perpendiculaire à un plan sont perpendiculaires aux traces de ce plan, il est clair que si par les projections du point donné on mène des perpendiculaires aux traces du plan donné, ces perpendiculaires seront les projections mêmes de la perpendiculaire demandée.

177. *Les projections d'une droite et les traces d'un plan étant données, trouver les projections du point où la droite perce le plan* (fig. 82).

Solution. Soient aP, bP′ les projections de la droite, et AB, AC les traces du plan.

Par la projection horizontale bP′ on élevera un plan perpendiculaire au plan horizontal, lequel plan contiendra la droite en question. Par conséquent cette droite ne pourra rencontrer le plan donné, qu'à l'intersection de ce plan avec le plan qui contient la droite donnée; si donc on avait la projection verticale de l'intersection de ces deux plans, la projection verticale du point dont il s'agit serait sur un point de cette droite; or le plan qui contient la droite en question étant perpendiculaire au plan horizontal, aura sa trace verticale DE perpendiculaire à la ligne de terre, et sa trace horizontale sera la projection horizontale bP′ même de la droite donnée; ainsi donc on aura la projection verticale EF de l'intersection des deux plans dont il s'agit, en suivant le procédé de l'art. 175.

La projection verticale P du point où la droite donnée rencontre le plan donné, sera à la fois sur la droite EF et sur la projection verticale aP de la droite en question ; pour avoir la projection horizontale P′ du même point, il suffira de mener par le point P une perpendiculaire PP′ à la ligne de terre, et ce point P′ où cette perpendiculaire rencontrera la projection horizontale bP′ de la droite donnée sera la projection demandée.

178. *Trouver les traces AB, AC d'un plan devant passer par trois points donnés par leurs projections* a *et* b, c *et* d, e *et* f (fig 83).

Solution. Par un des points donnés, dont les projections sont c et d, on menera une droite à chacun des autres ; et les projections de ces droites seront ac, bd pour la première, et ce, df pour la seconde.

Si maintenant on veut avoir la trace verticale AC du plan en question, on cherchera les points E et C où les droites dont les projections sont ac et bd, ce et df, rencontrent respectivement le plan vertical, par le moyen donné à l'art. 169, et on menera par ces deux points E et C la droite AC, qui sera la trace demandée. Pour avoir la trace horizontale AB du même plan, on cherchera où l'une des droites qui passent par les points donnés, rencontre le plan horizontal ; si l'on veut que ce soit celle dont les projections sont ce et df, on trouvera le point B par lequel et le point A, où la trace verticale AC rencontre la ligne de terre AF, on menera la droite AB, qui sera la trace horizontale demandée.

179. *Deux droites se rencontrant, pouvant se rencontrer, ou étant parallèles dans l'espace, sont données par leurs projections, on demande les traces du plan de ces deux droites.*

Solution. Ce problême est tout-à-fait le même que le précédent : on cherchera les points où les droites données rencontreront les plans de projection, lesquels points appartiendront aux traces du plan demandé.

180. *Les traces AB, AC d'un plan, et les projections a et b d'un point étant données, trouver les traces A′B′, A′C′ d'un plan parallèle au premier, et passant par le point donné* (fig. 84).

Solution. On imaginera par le point donné une parallèle à la trace horizontale AB du plan donné, et par conséquent une parallèle au plan horizontal lui-même ; cette droite sera dans le plan demandé, sa projection horizontale bc sera parallèle à la trace AB, et passera par la projection horizontale b du point donné, et sa projection verticale aC′ sera parallèle à la ligne de terre Ac et passera par la projection verticale a du point donné. Si maintenant on cherche le point C′ où cette droite rencontre le plan vertical, ce point C′ sera un point de la trace verticale. D'ailleurs les traces du plan demandé doivent être parallèles à celles du plan donné; ainsi, si par le point C′ on mène la droite C′A′ parallèle à la trace AC, cette droite A′C′ sera la trace verticale du plan demandé. Il est facile de voir que pour avoir la trace horizontale A′B′ du même plan, il suffira de mener une parallèle A′B′ à la trace donnée AB, par le point A′ où la trace verticale A′C′ rencontre la ligne de terre.

181. *Les traces AB, AC d'un plan et les projections DE, NG d'une droite étant données* (fig. 85), *trouver les traces ME, MN d'un plan passant par la droite perpendiculairement au plan donné.*

Solution. On menera une perpendiculaire HI quelconque, à la ligne de terre AG, qui ira rencontrer les projections de la droite donnée aux points H et I, qui seront les projections d'un point de cette même droite. Par ces points H et I on menera les droites HL, IK respectivement perpendiculaires aux traces AB, AC du plan donné; ces perpendiculaires HL, IK seront les projections d'une perpendiculaire au plan donné. Ainsi le plan qui passera par cette droite sera perpendiculaire à ce plan donné, et par conséquent le plan qui passera en même temps par la droite donnée, sera le plan donné; de sorte que le problême est réduit maintenant à celui de l'art. 179, c'est-à-dire, à faire passer un plan par deux droites données par leurs projections DE, NG et HL, IK.

182. *Deux droites étant données par leurs projections AB, CD et EF, DH* (fig. 86), *trouver les traces LM, LH d'un plan mené par l'une de ces droites, parallèlement à l'autre.*

Solution. Si c'est par la droite dont les projections sont AB, CD que le plan en question doit passer, on cherchera les projections D et B d'un point de cette droite, en menant une perpendiculaire BD à la ligne de terre AK; par les projections B et D de ce point, on menera des parallèles BG, DH, aux projections EF, DH de l'autre droite donnée, et ces parallèles BG, DH seront les projections d'une nouvelle droite parallèle à cette seconde droite donnée. Je dis maintenant que le plan qui passera par la première droite donnée et par la troisième dont nous venons de déterminer les projections, sera le plan demandé. Ainsi la question est réduite à celle de l'art. 179.

Nous pourrions pousser beaucoup plus loin la série des problêmes sur la ligne droite et le plan considéré dans l'espace; mais une assez longue expérience nous a appris que ceux dont nous venons de donner la solution suffisent pour l'objet que nous nous proposons dans cet ouvrage, mais en même temps qu'ils sont indispensables, si l'on veut étudier avec succès tout ce qui a rapport aux voûtes.